MAT134 - 2023 - Álgebra Linear 1 – Lista 2

1. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos. Se S for um subespaçødetermine geradores de S:
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.
   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x$ é um número inteiro$\}$.
   (c) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes 2 por 2 com entradas números reais) e $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$.
   (d) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes 2 por 2 com entradas números reais) e $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$.
   (e) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(t) \geq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$.
   (f) $V = P_5(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_5(\mathbb{R}) : p(0) = 2p(1)\}$.
   (g) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p'(0) = 2p(1) \text{ e } p(2) = 0\}$.
   (h) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{ax + bx^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

2. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a soma e multiplicação por escalar usual no espaço de funções. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$S_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(t) = f(1 + t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\};$$

$$S_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(t) \text{ é um número inteiro para todo } t \in \mathbb{R}\};$$

$$S_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(s + t) = f(s) + f(t) \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}\}.$$

   Determine quais desses conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Justifique sua resposta com uma demonstração.

3. Sejam V, V', W e W' espaços vetoriais e considere o espaço vetorial $\mathcal{F}(V, W)$ das funções de V para W com sua estrutura de espaço vetorial usual, i.e.,

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\lambda \cdot f)(v) = \lambda \cdot (f(v)).$$

   (a) Mostre que $\mathrm{Lin}(V, W) = \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear }\}$ é um subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$. (OBS: no caso particular em que $W = \mathbb{R}$ denotamos $\mathrm{Lin}(V, \mathbb{R})$ por V^* e chamamos V^* do espaço dual de V.)
   (b) Mostre que a função $T : V \to (V^*)^*$, $T(v)(\psi) = \psi(v)$ para todo $v \in V$ e $\psi \in V^*$ é linear e calcule o núcleo de T, $N(T)$.

(c) Considere o produto escalar Euclideano de $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$< (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Mostre que a função $G : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$, $G(v)(w) =< v, w >$ é um isomorfismo linear.

(d) Mostre que se $V \simeq V'$ e $W \simeq W'$ (ou seja V é isomorfo a V' e W isomorfo a W'), então $\mathrm{Lin}(V, W) \simeq \mathrm{Lin}(V', W')$. Escreva um isomorfismo explícito.

(e) Mostre que $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é isomorfo ao espaço vetorial das matrizes $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Encontre um isomorfismo explícito $\psi : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(f) Considere a função $F : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ que associa para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a sua matriz transposta A^t (lembre que a matriz transposta de A é a matriz que tem como sua i-ésima coluna a i-ésima linha de A). Mostre que F é um isomorfismo linear.

(g) Conclua que $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é isomorfo a $\mathrm{Lin}((\mathbb{R}^m)^*, (\mathbb{R}^n)^*)$. Você consegue escrever um isomorfismo explícito?

4. Considere o conjunto

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \right\}$$

e as seguintes operações de soma e produto por escalar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by \\ cz & dw \end{pmatrix}$$

$$\lambda \boxdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\lambda & b^\lambda \\ c^\lambda & d^\lambda \end{pmatrix}$$

Considere também o seguinte subconjunto de V

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : ad = 1 \text{ e } ac = 1 \right\}.$$

(a) Mostre que V com as operações definidas acima é um espaço vetorial.

(b) Mostre que S é um subespaço vetorial.

(c) Encontre geradores de S.

(d) Considere a aplicação

$$T : V \to V, \quad T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab^{-1} & a^{-1}b \\ cd & c^2 d \end{pmatrix}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear.

(e) Mostre que a imagem de T é o subespaço

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & x^{-1} \\ y & z \end{pmatrix} \in V : x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0, y > 0, z > 0 \right\}.$$

(f) Encontre geradores para $\mathrm{Im}(T)$.

(g) Mostre que o núcleo de T é o subespaço

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V : a > 0 \right\}.$$

(h) Encontre geradores para $N(T)$.

(i) Determine os subespaços $N(T) + \mathrm{Im}(T)$ e $N(T) \cap \mathrm{Im}(T)$.