MAT122 - 2023 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 1

1. Verifique se $V = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de soma $\oplus$ e produto por escalar $\odot$ dadas abaixo. Caso não seja um espaço vetorial, determine todos os axiomas que falham. Justifique suas respostas.
   (a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
   (b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
   (c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$.
   (d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$.
   (e) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 + 2)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y + 2\alpha - 2)$.

2. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a função definida é ou não uma aplicação linear Caso não seja linear, explique o que falha na definição de aplicação linear. No caso em que é uma aplicação linear, decida se T é injetora, sobrejetora, bijetora (ou nenhuma das anteriores).
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, y - 2x)$;
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, x + z)$;
   (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z, w) = (x - y + 2w, y - x - 2w)$;
   (d) $T_v : V^3 \to \mathbb{R}$, $T_v(w) = v \cdot w$ (onde $v \cdot w$ denota o produto escalar de v com w e $v \neq 0 \in V^3$.
   (e) $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $T(p) = (p(0), p(-1), p(1))$.
   (f) $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{F}(\mathbb{R})$, $T(p)(t) = 2p''(t) - p'(t) + 3p(-1)$
   (g) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = A - A^t$,onde A^t denota a matriz transposta de A. Ou seja,
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Sabendo que $T(1, 0) = (1, 1, 2)$ e $T(0, 1) = (0, 1, -1)$, determine uma fórmula para $T(x, y)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Sabendo que $T(2, 1) = (3, 1, -1)$ e $T(-1, 1) = (1, 0, 2)$, determine uma fórmula para $T(x, y)$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Sabendo que $T(1, 0, -1) = (3, 1, -1)$, $T(0, 1, 1) = (1, 0, 2)$, e $T(1, 1, 1) = (-1, -1, 5)$, determine uma fórmula para $T(x, y, z)$. Determine se T é injetora. Determine se T sobrejetora. Justifique sua resposta!

6. Seja $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ um polinômio de grau menor ou igual a 2. Mostre que se $p(1) = 0$, então existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que
$$p(x) = \lambda(x - 1) + \mu(x^2 - 1).$$

Note a seguinte interpretação geométrica deste resultado: podemos pensar no conjunto

$$S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \subset P_2(\mathbb{R})$$

como um plano que passa pela origem de $P_2(\mathbb{R})$ e que tem os polinômios $x - 1$ e $x^2 - 1$ como vetores diretores.

7. Seja $V = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$ com as operações de soma e multiplicao por escalar usuais para polinômios de grau menor ou igual a 2. Encontre uma transformação linear bijetora (ou seja, um isomorfismo) $T : \mathbb{R}^2 \to V$.

8. Seja $V = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$ com as operações de soma e multiplicao por escalar usuais para polinômios de grau menor ou igual a 3. Encontre uma transformação linear bijetora (ou seja, um isomorfismo) $T : \mathbb{R}^3 \to V$.