6- TRELIÇAS ISOSTÁTICAS

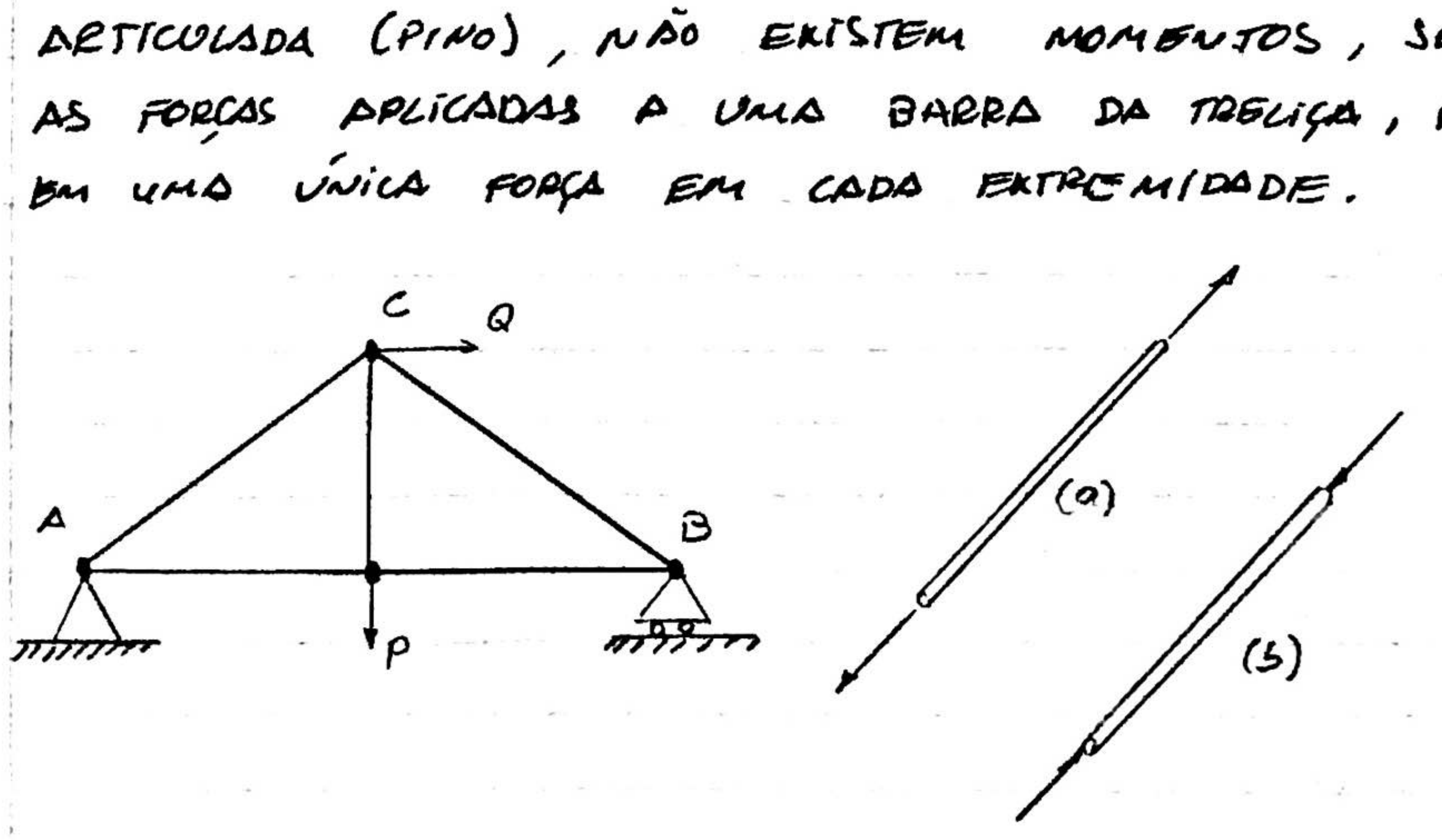
6.1. FORÇAS INTERNAS - 3ª LEI DE NEWTON

NOS EXEMPLOS ANTERIORES, TRATAMOS DO EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO. NO CASO DE ESTRUTURAS COMPOSTAS POR VÁRIAS PARTES INTERLIGADAS (COMO É O CASO DAS TRELIÇAS), PRECISAMOS DETERMINAR ALÉM DAS FORÇAS EXTERNAS (EM GERAL AS REAÇÕES) AS FORÇAS QUE MANTÉM UNIDAS AS VÁRIAS PARTES DA ESTRUTURA, PENSANDO NA ESTRUTURA COMO UM TODO, ESTAS SÃO FORÇAS INTERNAS E QUE PORTANTO DEVEM SATISFAZER À TERCEIRA LEI DE NEWTON (AÇÃO E REAÇÃO)

6.2. DEFINIÇÃO DE TRELIÇA

UMA TRELIÇA É UMA ESTRUTURA CONSTITUÍDA POR BARRAS RETAS ARTICULADAS NAS JUNTAS (NÓS), SENDO QUE NENHUMA BARRA É CONTÍNUA ATRAVÉS DE UM NÓ; SENDO AS CARGAS APLICADAS AOS NÓS.

COMO A JUNÇÃO DAS BARRAS É CONSIDERADA COMO ARTICULADA (PINO), NÃO EXISTEM MOMENTOS, SENDO QUE AS FORÇAS APLICADAS A UMA BARRA DA TRELIÇA, REDUZEM-SE EM UMA ÚNICA FORÇA EM CADA EXTREMIDADE.



NA FIG (a) TEMOS UMA BARRA TRACIONADA E NA FIG. (b) UMA BARRA COMPRIMIDA. NO 1º CASO A BARRA ESTÁ SOB TRAÇÃO E NO 2º SOB COMPRESSÃO. NOTE QUE PARA A BARRA PERMANECER EM EQUILÍBRIO, AS FORÇAS DEVEM TER: MESMA LINHA DE AÇÃO, MESMA INTENSIDADE E SENTIDOS OPOSTOS.

6.3 ANÁLISE DE TRELIÇAS

6.3.1. MÉTODO DOS NÓS

ESTE MÉTODO CONSISTE BASICAMENTE NO SEGUINTE:

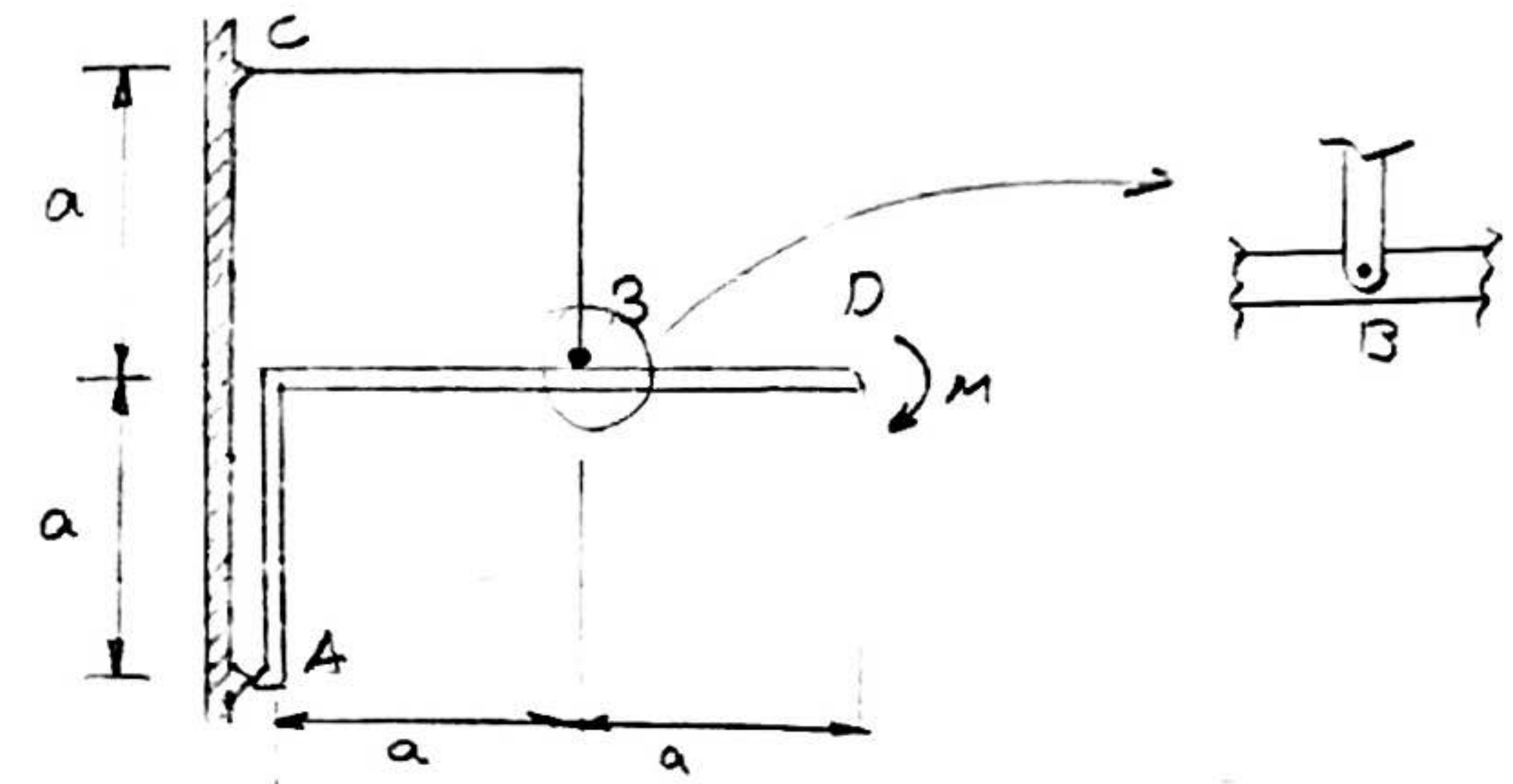
A TRELIÇA COMO UM TODO (CORPO RÍGIDO) DEVE ESTAR EM EQUILÍBRIO, ENTÃO AS SUAS BARRAS E NÓS TAMBÉM DEVERÃO ESTAR. DAÍ EM CADA NÓ, APLICAMOS DUAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO ($\Sigma F_x = 0$ E $\Sigma F_y = 0$), TENDO EM MENTE QUE É VÁLIDA A 3ª LEI DE NEWTON (ENTRE BARRA E NÓ).

6.3.2. MÉTODO DAS SEÇÕES (MÉTODO DE RITTER)

ESTE MÉTODO É ÚTIL QUANDO DESEJAMOS DETERMINAR AS FORÇAS DE ALGUMAS BARRAS DA TRELIÇA.

O MÉTODO CONSISTE BASICAMENTE EM SE SECCIONAR 3 BARRAS (NO MÁXIMO) DA TRELIÇA (COM ISTO TEREMOS 3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E 3 INCÓGNITAS, ONDE OBVIAMENTE, UMA DAS BARRAS SECCIONADAS DEVE SER UMA DAS PROCURADAS). DESTA FORMA SEPARAMOS A TRELIÇA EM DUAS PARTES, E ESTUDAMOS O EQUILÍBRIO DE QUALQUER UMA DELAS, SUBSTITUINDO-SE AS BARRAS CORTADAS POR SUAS RESPECTIVAS FORÇAS.

7. PROBLEMAS DE ESTÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS CONTINUAÇÃO

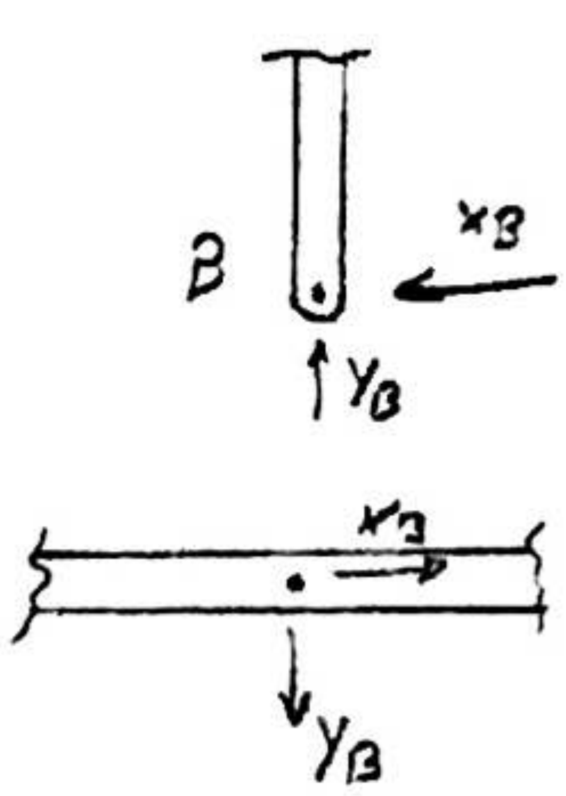


SEJA O PROBLEMA: DETERMINAR NA ESTRUTURA ACIMA, SUJEITA A MOMENTO M, AS REAÇÕES EXTERNAS EM A (APOIO C/ ATRITO).

AO ISOLARMOS A ESTRUTURA, VERIFICAMOS QUE TEREMOS 4 INCÓGNITAS (X_A, Y_A, X_B, Y_B – REAÇÕES EXTERNAS) E SOMENTE 3 EQUAÇÕES ESCALARES DE EQUILÍBRIO INDEPENDENTES.

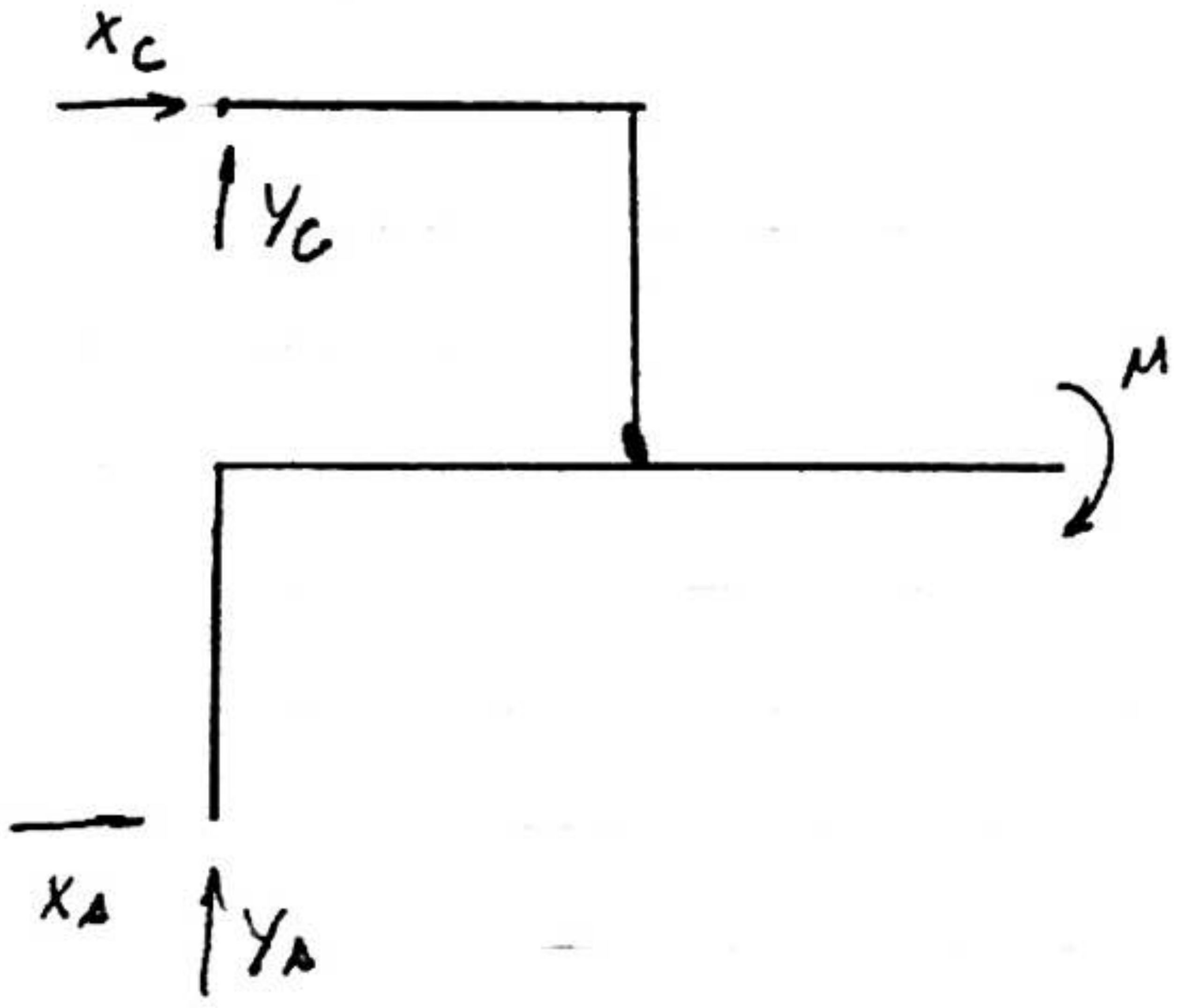
$$\sum F_x = 0 \; ; \; \sum F_y = 0 \; ; \; \sum M_O = 0$$

NESTE CASO DEVEMOS SEPARAR OS CORPOS QUE CONSTITUEM O SISTEMA (EM MUITOS CASOS ISTO NÃO É POSSÍVEL – A SOLUÇÃO DESTES PROBLEMAS PERTENCE À "RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS".), SUBSTITUINDO OS CONTATOS POR FORÇAS QUE OBEDEÇAM À <u>LEI DE AÇÃO E REAÇÃO</u>, NO CASO DO PROBLEMA CONSIDERADO, E APLICAMOS, PARA CADA CORPO ISOLADO AS LEIS DE EQUILÍBRIO.



VEJAMOS.

* ISOLANDO A ESTRUTURA



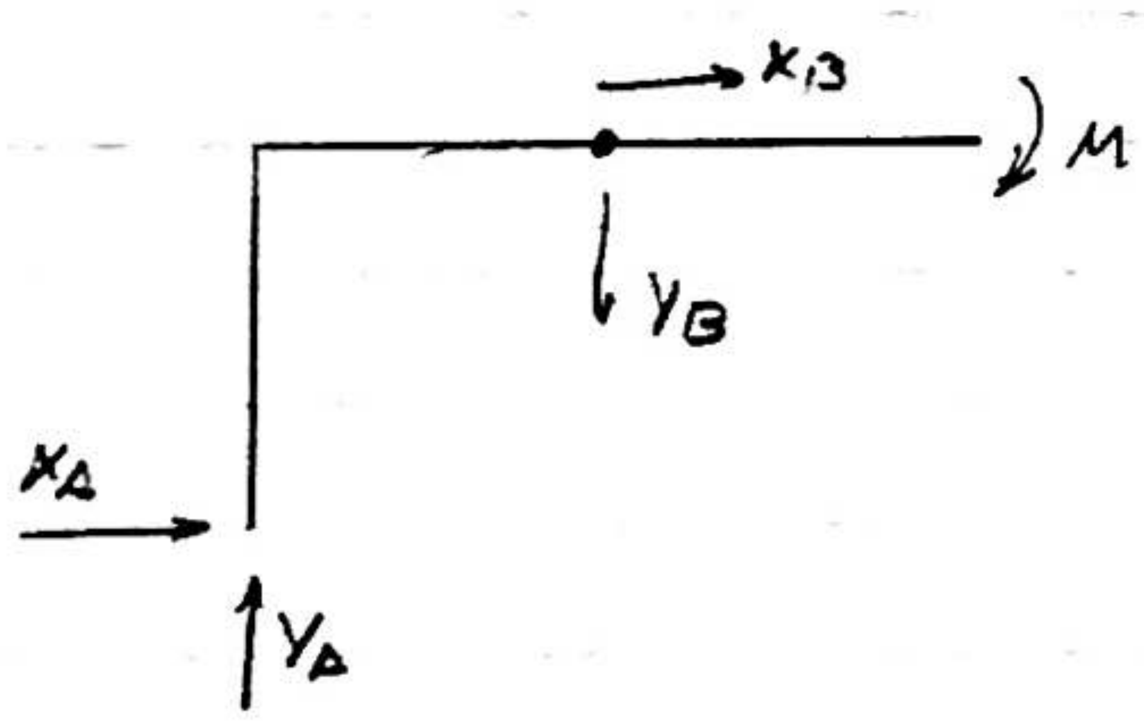
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_C = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M - 2a X_A = 0$$

$$\therefore \quad X_A = \frac{M}{2a} \quad (i)$$

* ISOLANDO A BARRA ABD



$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot a - X_A\, a + M = 0$$

$$\Rightarrow Y_A = X_A - \frac{M}{a}$$

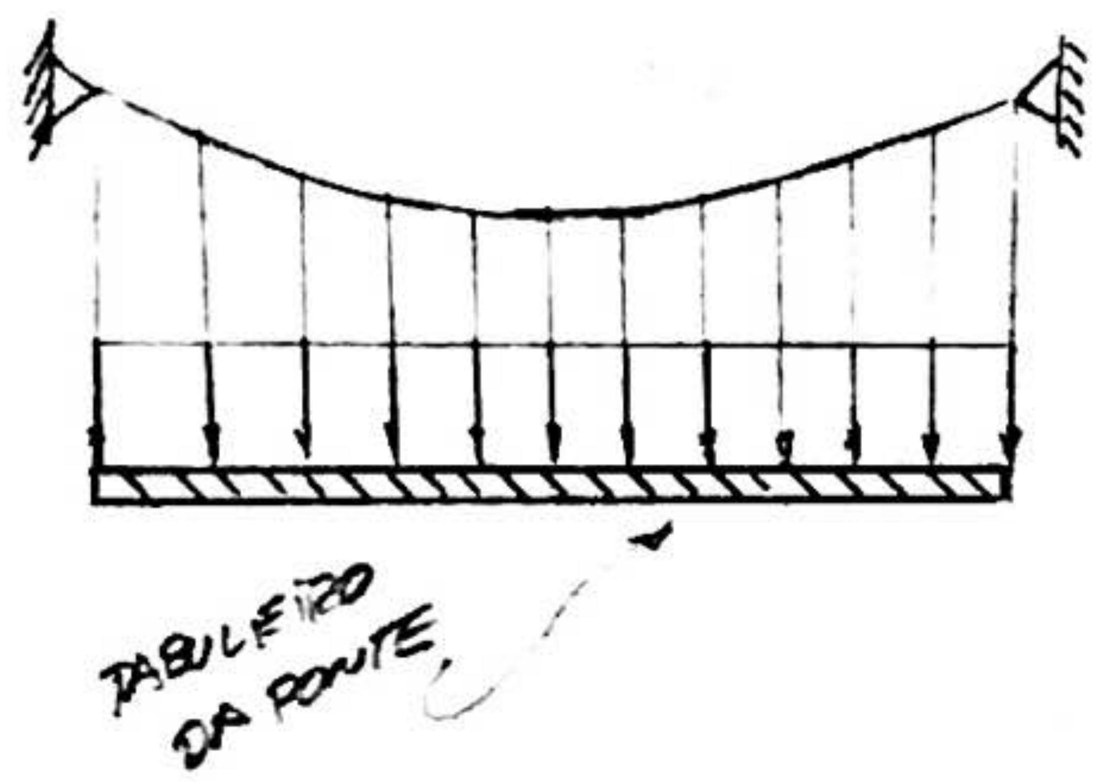
DE (i) TEMOS $Y_A = -\dfrac{M}{2a}$

7. FORÇAS DISTRIBUIDAS. BARICENTROS

7.1. FORÇAS DISTRIBUIDAS INTRODUÇÃO

SÃO AQUELAS APLICADAS EM TODOS OS PONTOS DE UM SISTEMA MATERIAL OU PARTE DELE. ESTAS PODEM SER:

A) DISTRIBUÍDAS SOBRE UMA LINHA.



CABO AB SUPORTA UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA AO LONGO DA HORIZONTAL.

CABOS DE PONTES PÊNSEIS PODEM SER SUPOSTOS CARREGADOS DESTE MODO, UMA VEZ QUE O PESO DO CABO É PEQUENO COMPARADO COM O PESO DO TABULEIRO.

B) DISTRIBUÍDAS SOBRE UMA SUPERFÍCIE.

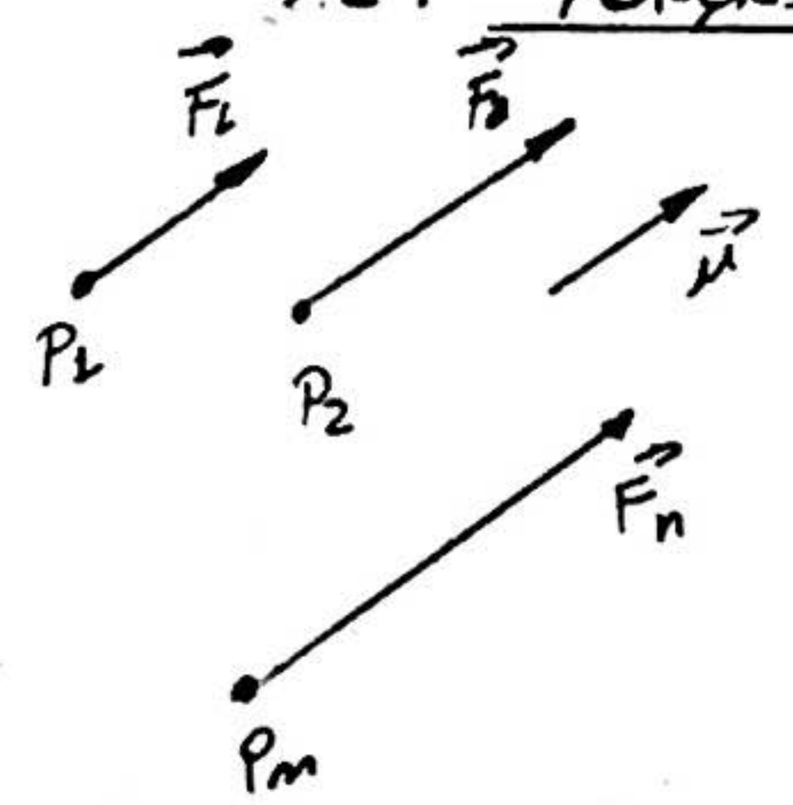
EX: PRESSÃO DE UM LÍQUIDO.

C) DISTRIBUÍDAS SOBRE UM VOLUME.

EX: PESO DE UM CORPO, FORÇAS MAGNÉTICAS.

** NOTE QUE FORÇAS DISTRIBUÍDAS NÃO SÃO NECESSARIAMENTE PARALELAS.

7.2. FORÇAS PARALELAS BARICENTRO.



SEJA UM SISTEMA DE FORÇAS $(\vec{F_i}, P_i)$ QUE AGEM EM UM CORPO MATERIAL DADO.

NO CASO EM QUE $\vec{F_i} = h_i . \vec{u}$, ONDE h_i SÃO ESCALARES E $\vec{u}$ UM VERSOR, O SISTEMA É DITO DE FORÇAS PARALELAS.

VAMOS VERIFICAR SE ESTE SISTEMA É REDUTÍVEL A UMA ÚNICA FORÇA:

$$\vec{M_O} = \Sigma (P_i - O) \wedge \vec{F_i} = \left(\Sigma (P_i - O)\, h_i \right) \wedge \vec{u}$$

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F_i} = \left(\Sigma h_i \right) \vec{u}$$

LOGO $\vec{R} . \vec{M_O} = 0$ E SE $\vec{R} \neq 0$, O SISTEMA É REDUTÍVEL A UMA ÚNICA FORÇA, ISTO É, SUA RESULTANTE APLICADA EM UM PONTO QUALQUER DO EIXO CENTRAL, QUE DEVE SATISFAZER À EQUAÇÃO.

$$\underline{\underline{(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M_O}}}$$

VAMOS DETERMINAR AGORA, UM PONTO C DO EIXO CENTRAL QUE SEJA INDEPENDENTE DE $\vec{u}$, ISTO É, INDEPENDENTE DA DIREÇÃO DO SISTEMA DE FORÇAS

$$\vec{M_C} = \Sigma (P_i - C) \wedge \vec{F_i} = \vec{0}$$

OU SEJA

$$\Sigma h_i (P_i - C) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

E POR SER $\vec{u}$ ARBITRÁRIO

$$\sum h_i (P_i - C) = \vec{0}$$

$$\sum h_i (P_i - O + O - C) = \vec{0}$$

DAÍ:

$$C - O = \frac{\sum h_i (P_i - O)}{\sum h_i}$$

AO PONTO C, CHAMAMOS DE CENTRO DO SISTEMA DE FORÇAS PARALELAS.

ESTE PONTO C É ÚNICO, POIS ADMITINDO $\bar{C}$ E AO EIXO CENTRAL QUE INDEPENDE DE $\vec{u}$, TERÍAMOS QUE:

$$(C - \bar{C}) \wedge \vec{u} = \vec{0}, \ \forall \vec{u} \ \text{ E PORTANTO } \ \bar{C} \equiv C$$

NO CASO PARTICULAR EM QUE AS FORÇAS PARALELAS SÃO PESOS, O CENTRO CHAMA-SE CENTRO DE GRAVIDADE. QUANDO ESTE CAMPO É CONSTANTE OS ESCALARES h_i SÃO AS MASSAS m_i DE CADA PARTE DO SISTEMA MATERIAL E O CENTRO DE GRAVIDADE, CHAMA-SE TAMBÉM CENTRO DE MASSA OU BARICENTRO G, DEFINIDO POR:

$$G - O = \frac{\sum m_i (P_i - O)}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i (P_i - O)}{m}$$

ONDE m É A MASSA TOTAL DO SISTEMA.

EM UM SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS AS COORDENADAS DE G SÃO DADAS POR:

$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{m} \ ; \ Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m} \ ; \ Z_G = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

NO CASO DE UM CORPO RÍGIDO, ONDE A DISTRIBUIÇÃO DE PONTOS É CONTÍNUA, DEVEMOS SUBSTITUIR O SINAL DE SOMATÓRIA PELA INTEGRAL, ASSIM:

$$X_G = \frac{\int_c x \, dm}{\int_c dm} \quad ; \quad Y_G = \frac{\int_c y \, dm}{\int_c dm} \quad ; \quad Z_G = \frac{\int_c z \, dm}{\int_c dm}$$

ONDE $\underline{c}$ É O <u>CAMPO</u> DEFINIDO PELOS PONTOS DO CORPO.

PELA DEFINIÇÃO DE MASSA ESPECÍFICA: $\rho = \frac{dm}{dc}$,

E ADMITINDO-SE CORPOS HOMOGÊNEOS ($\rho = cte$), TEREMOS:

$$* \; X_G = \frac{\int_c x \rho \, dc}{\int_c \rho \, dc} = \frac{\int_c x \, dc}{\int_c dc}$$

$$* \; Y_G = \frac{\int_c y \, dc}{\int_c dc} \qquad * \; Z_G = \frac{\int_c z \, dc}{\int_c dc}$$

NOTA: <u>PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DO BARICENTRO.</u>

DEMONSTRA-SE QUE: SE UM CORPO FOR DECOMPOSTO EM k PARTES ($C_1, C_2, \ldots, C_k$) DE MASSAS $m_1, m_2, \ldots, m_k$, CUJOS BARICENTROS SÃO $G_1, G_2, \ldots, G_k$, ENTÃO O BARICENTRO DO CORPO COINCIDE COM O BARICENTRO DOS BARICENTROS DE SUAS PARTES, SE EM CADA UM DELES ESTIVESSE CONCENTRADA TODA MASSA DE SUA PARTE, ISTO É:

$$G - O = \frac{\Sigma \, m_i (G_i - O)}{\Sigma \, m_i}$$