# I. Estática.

## 0. Introdução

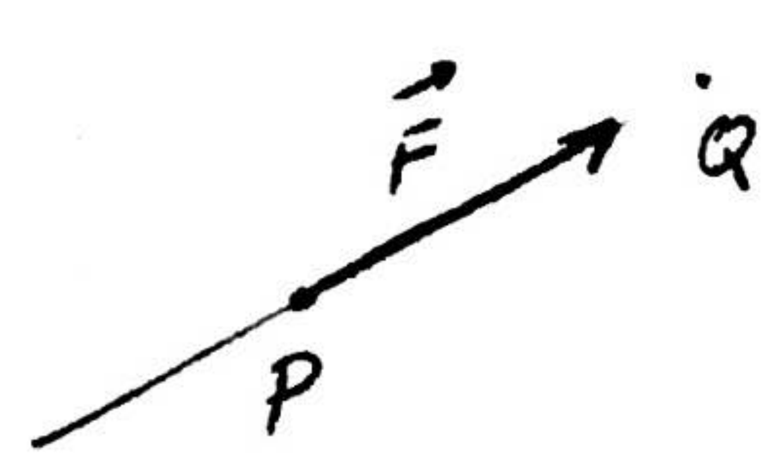
A Estática elementar tem como objetivo o estudo das leis de composição de forças e as condições de equilíbrio de corpos sob a ação de forças.

Seu estudo tem grande importância para a Engenharia, notadamente em problemas de resistência dos materiais e teoria das estruturas.

## 1. Forças como grandeza vetorial. Operações elementares e sua representação gráfica.

### 1.1. Força.

Uma força representa a ação de um corpo sobre outro, sendo caracterizada por um vetor aplicado, isto é: uma direção, sentido, módulo (intensidade) e um ponto de aplicação.




À reta definida pelo ponto de aplicação (P) e pela direção chamaremos reta de ação da força

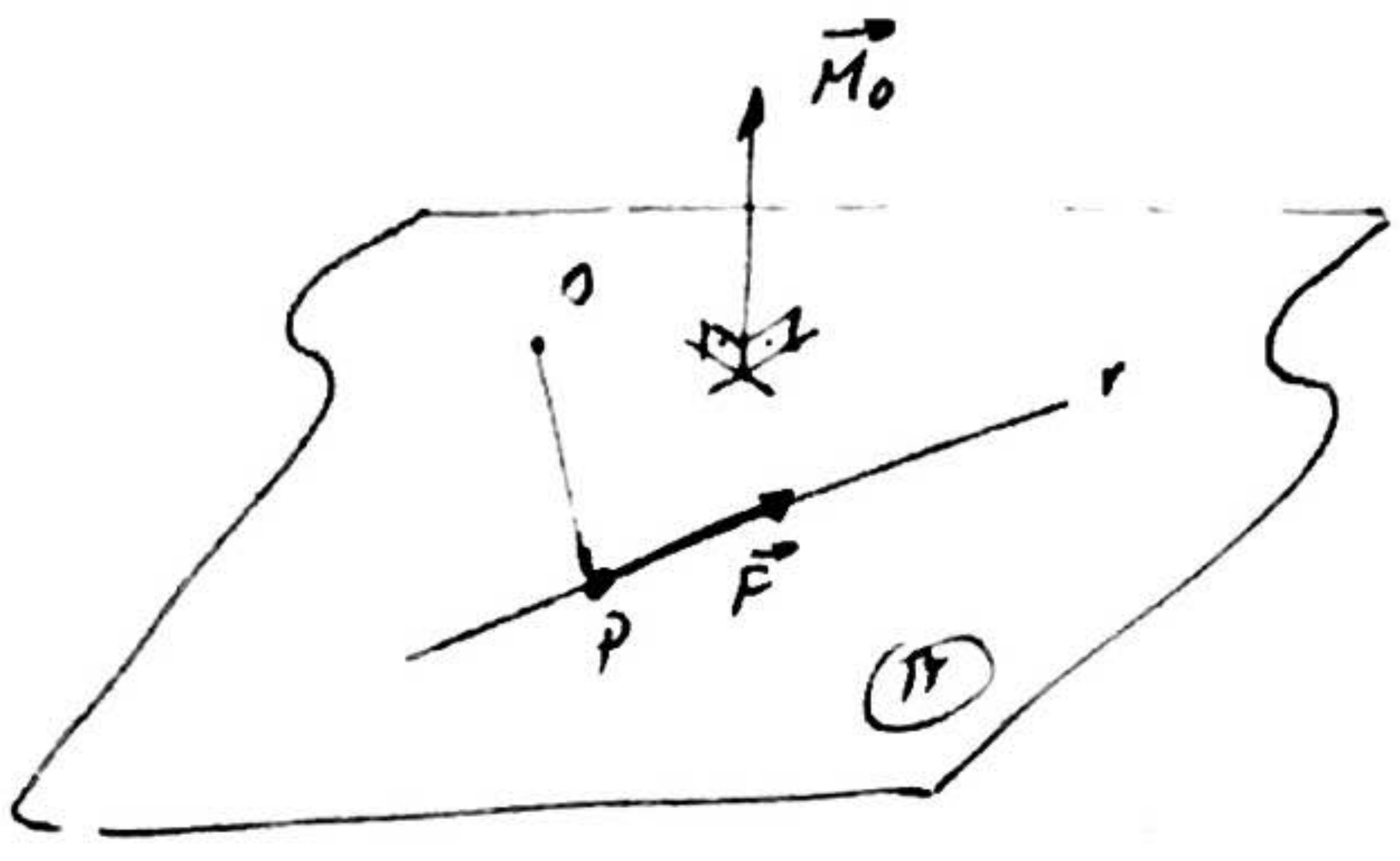
$$r \;\big|\; Q = P + \lambda \vec{F}$$

Indicaremos a força definida pelo vetor $\vec{F}$ e pelo ponto de aplicação $P$ por $(\vec{F}, P)$.

## 1.2 Vetor momento de uma força

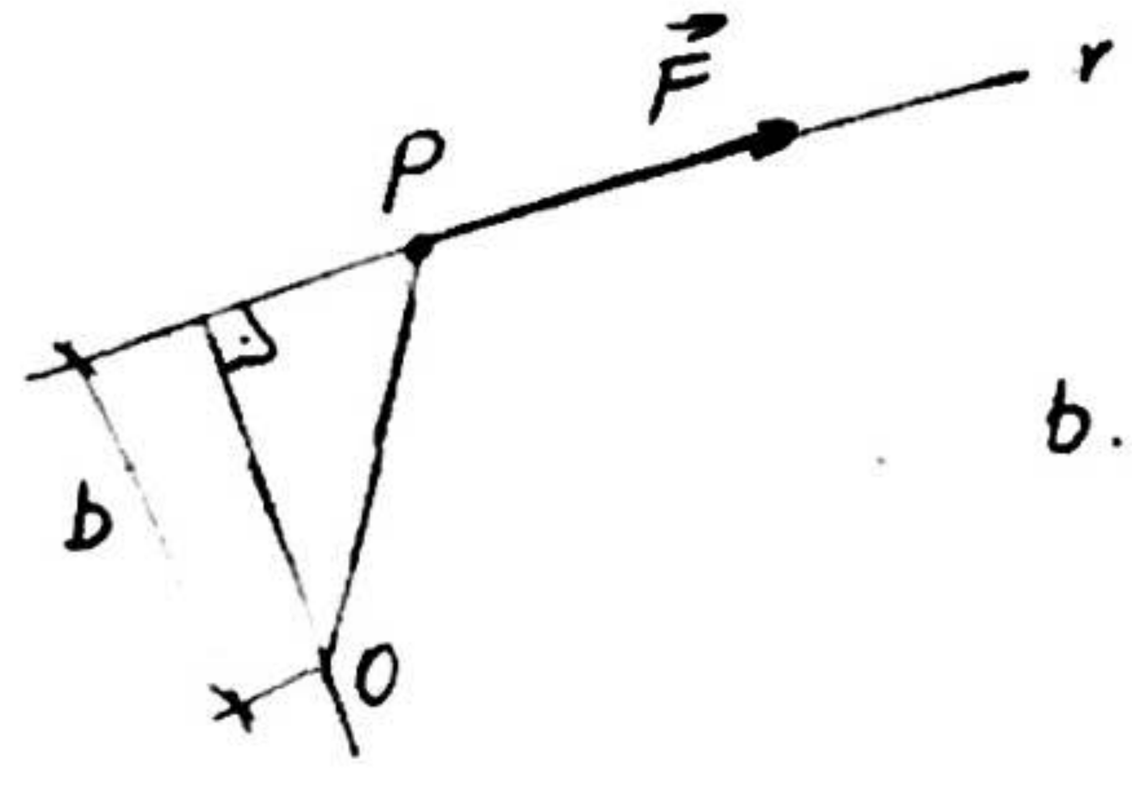
Chama-se Vetor Momento da força $(\vec{F}, P)$ em relação a um ponto $\forall$ O (polo) ao vetor:

$$\vec{M}_0 = (P-O) \wedge \vec{F}$$




Obs: - Se $O \notin$ a r $\rightarrow M_0 \perp \pi$

- $\vec{M}_0$ não é um vetor aplicado
- A distância do polo O à reta r, dá-se o nome de "braço do momento"




b. braço do momento

- $|\vec{M}_0| = |\vec{F}| . b$

## 2. Sistemas de forças aplicadas a corpos rígidos. Sistemas equivalentes

Ao conjunto de forças que agem num corpo será chamado "sistema de forças"

### 2.1. Resultante e momento de um sistema de forças

Resultante de um sistema de forças é um vetor livre, dado pela soma de todas as forças do sistema, isto é:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

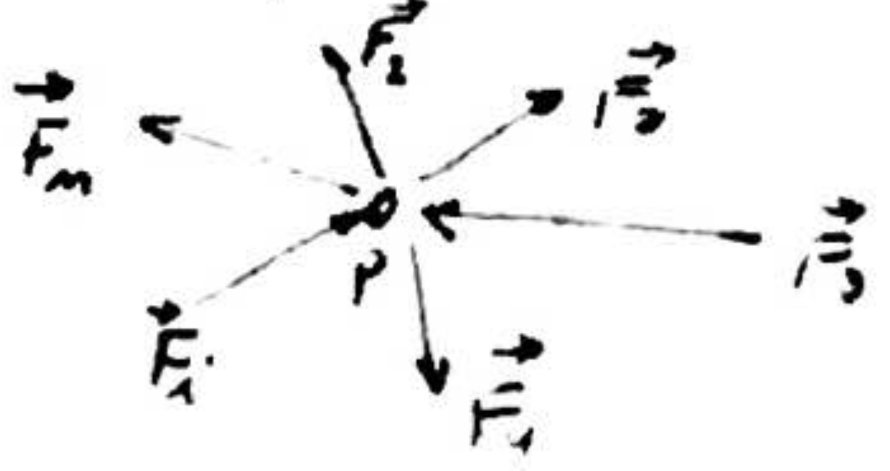
Devemos notar que o vetor $\vec{R}$ não é uma força, pois este não tem ponto de aplicação definido.

Por definição, Momento de um sistema de forças $(\vec{F_i}, P_i)$, em relação ao polo O é o vetor

$$\vec{M_0} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F_i}$$

### 2.2 Teorema de Varignon (Forças concorrentes).

"O momento de um sistema de forças concorrentes em relação a um polo O qualquer, é igual ao momento, em relação a O, da resultante do sistema suposto, aplicado no ponto de concurso das forças".



De fato, seja $(\vec{F_i}, P)$ o sistema, então

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{m} (P-O) \wedge \vec{F_i} = (P-O) \wedge \sum_{i=1}^{m} \vec{F_i},$$

daí: $\underline{\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{R}}$

## 2.3. Mudança de Polo

Seja A e B, dois pontos distintos. O momento de um sistema $(\vec{F_i}, P_i)$, em relação a estes polos é:

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{m} (P_i - A) \wedge \vec{F_i} \qquad (1)$$

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^{m} (P_i - B) \wedge \vec{F_i} \qquad (2)$$

Fazendo (1) - (2) temos

$$\vec{M}_A - \vec{M}_B = \sum_{i=1}^{n} \left[(P_i - A) - (P_i - B)\right] \wedge F_i =$$

$$= (B-A) \wedge \sum_{i=1}^{m} \vec{F_i} \qquad \text{logo,}$$

$$\underline{\vec{M}_A = \vec{M}_B + (B-A) \wedge \vec{R}}$$ (Formula de mudança de polo)

Conclusão:

(1) Se $\vec{R} = \vec{O}$, o momento do sistema independe do polo.

(2) Se $\vec{M}_A = \vec{M}_B$, $\forall$ que seja A, resulta $(B-A) \wedge \vec{R} = \vec{O}$

para $\forall A \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$

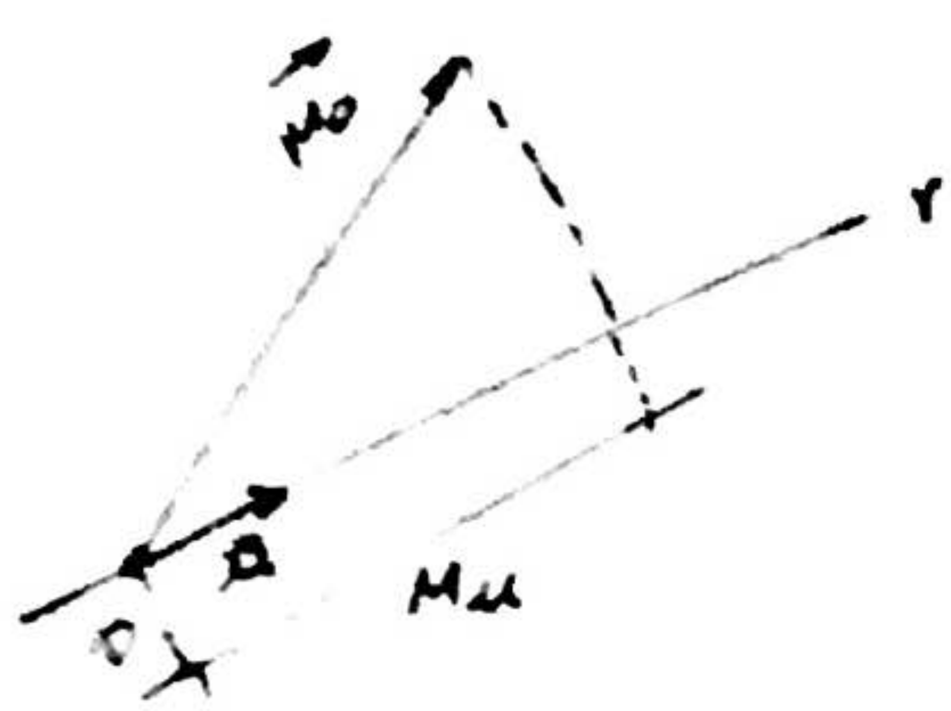
(3) Se $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_A = \vec{M}_B \Leftrightarrow (B-A) \parallel \vec{R}$

(4) $\vec{M}_A = \vec{M}_B + (B-A) \wedge \vec{R}$, multiplicando-se escalarmente por $\vec{R}$:

$$\Rightarrow \vec{M}_A \cdot \vec{R} = \vec{M}_B \, \vec{R} = I$$

Ao escalar $I$ dá-se o nome de <u>Invariante escalar do sistema</u>.

## <u>2.4 Momento em relação a um eixo</u>




Seja $\vec{u}$ o versor ($|\vec{u}| = 1$) diretor da reta r e O um ponto desta reta.

O momento do sistema $(\vec{F_i}, P_i)$ em relação a este eixo é o número real

$$\underline{\underline{M_u = \vec{M}_O \, \vec{u}}}$$

O momento $M_u$ do sistema em relação ao eixo $O\vec{u}$ independe do polo O pertencente a este eixo, de fato:

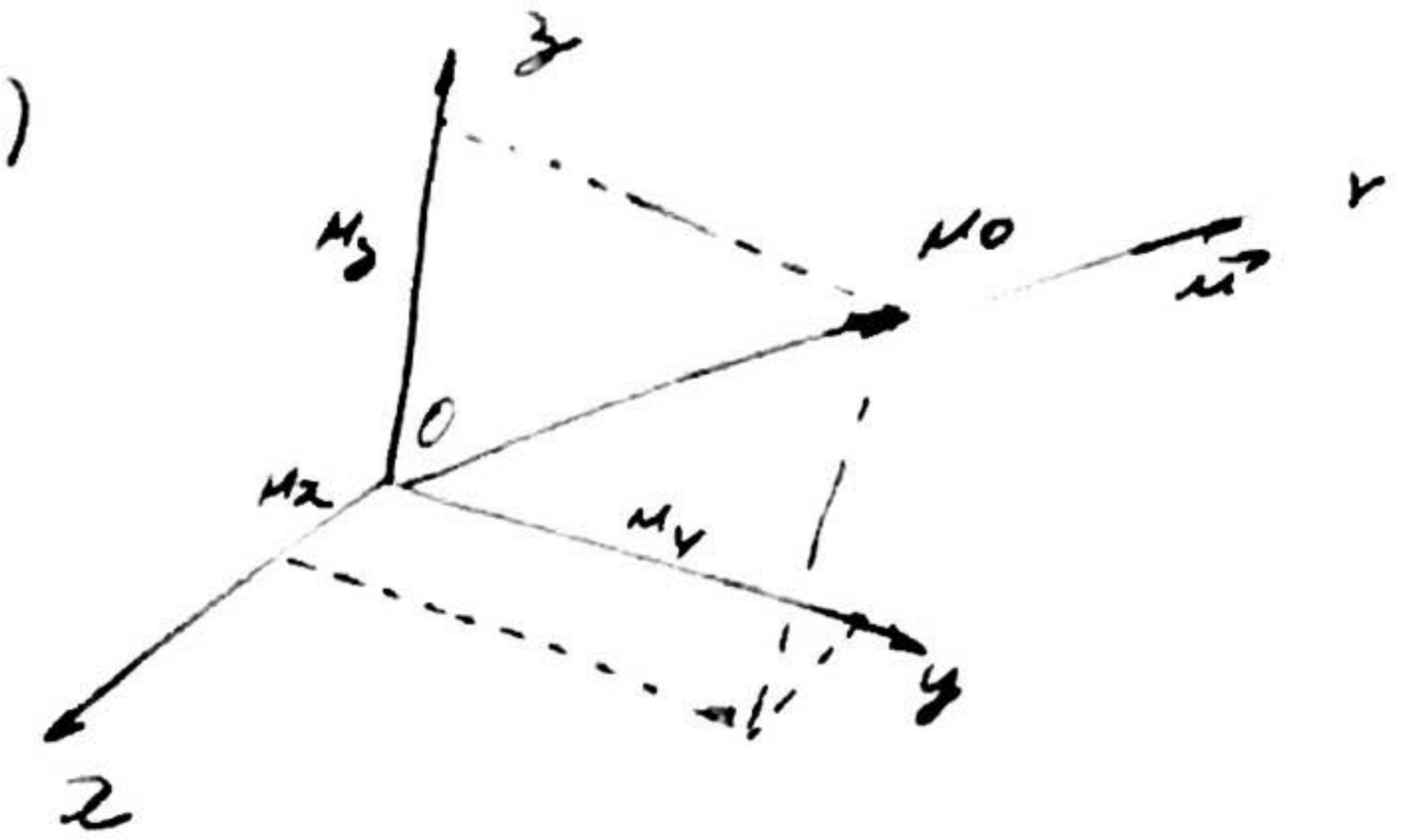
$M'_u = \vec{M}_{O'} \, \vec{u}$, utilizando a fórmula de mudança de pólo, vem:

$$M'_u = [\vec{M}_O + (O-O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \quad \text{pois } O-O' \parallel \vec{u}$$

daí $M'_u = M_u$

Observações

(i)




Tomando-se $O$ como origem de um sistema $Oxyz$ tri-ortogonal temos:

$$\vec{M}_0 = M_{0x}\vec{i} + M_{0y}\vec{j} + M_{0z}\vec{k},$$

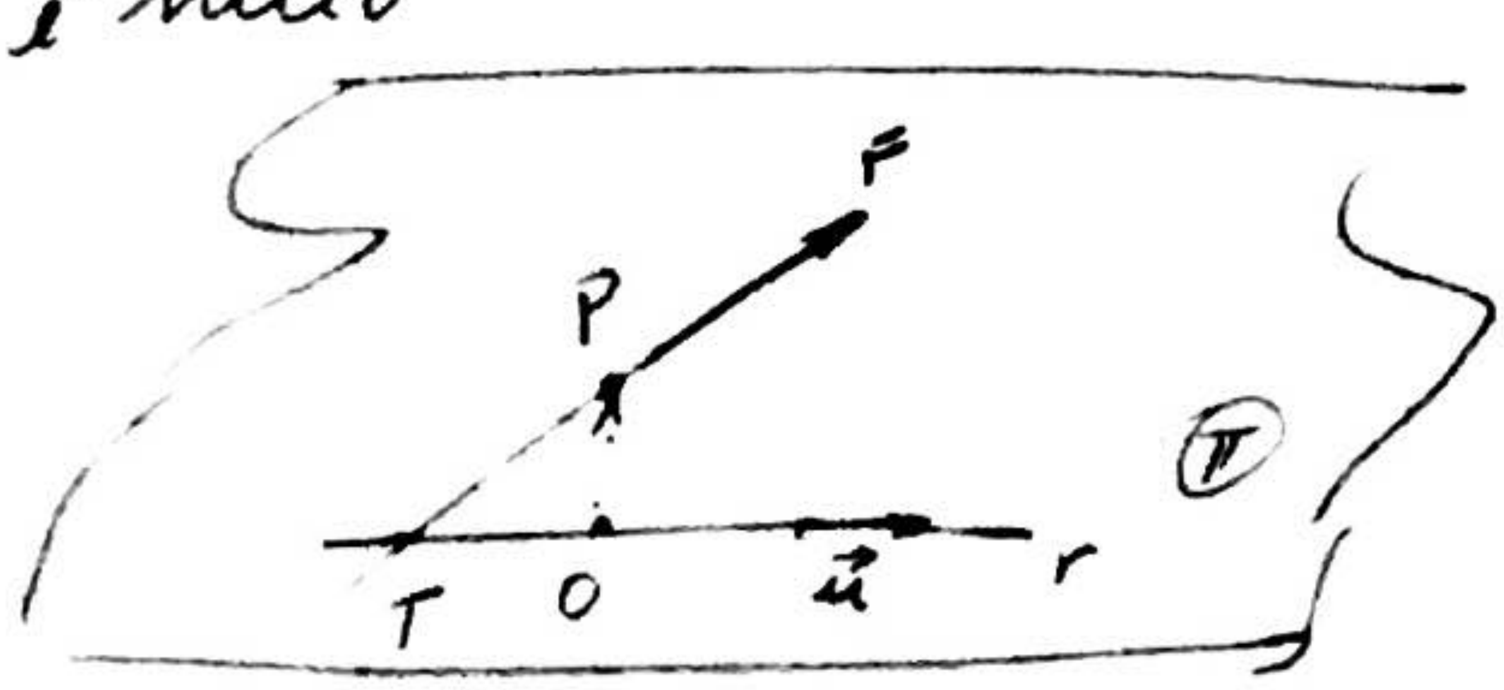
mas
$$M_{0x} = \vec{M}_0 \, \vec{i} = M_x$$
$$M_{0y} = \vec{M}_0 \, \vec{j} = M_y$$
$$M_{0z} = \vec{M}_0 \, \vec{k} = M_z$$

daí $\underline{\underline{\vec{M}_0 = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z.\vec{k}}}$.

(ii) Se uma força for // a um eixo, seu momento em relação a este eixo será nulo. Observe.

$$\vec{F} /\!/ \vec{u} \to \vec{M}_u = (P-O) \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} = \vec{0}.$$

(iii) Se a linha de ação de uma força intercepta o eixo, seu momento em relação a este eixo é nulo




$$\vec{M}_0 = (P-O) \wedge \vec{F}$$
$$M_u = (P-O) \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} = 0$$

pois $(P-O)$, $\vec{F}$ e $\vec{u}$ são coplanares (L.D.).

(iv) O momento $M_u$ de $\vec{F}$, mede a tendência da força $\vec{F}$ de imprimir ao corpo um movimento de rotação em relação ao eixo.

(E1) O momento de um sistema de forças em relação ao polo $A(1,0,2)$ é $\vec{M}_A(2,1,4)$ e em relação ao polo $B(2,1,1)$ é $M_B(-1,6,6)$. Determine $\vec{R}$, sabendo-se que $I=15$

<u>Solução</u>

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + (B-A)\wedge\vec{R} \quad , \quad \vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

Daí
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = (R_z + R_y\,,\ -R_z - R_x\,,\ R_y - R_x) = (3,-5,$$

resultando:
$$R_z + R_y = 3$$
$$-R_z - R_x = -5$$
$$R_y - R_x = -2 \quad \text{(comb. lin. dos 2 outros)}$$

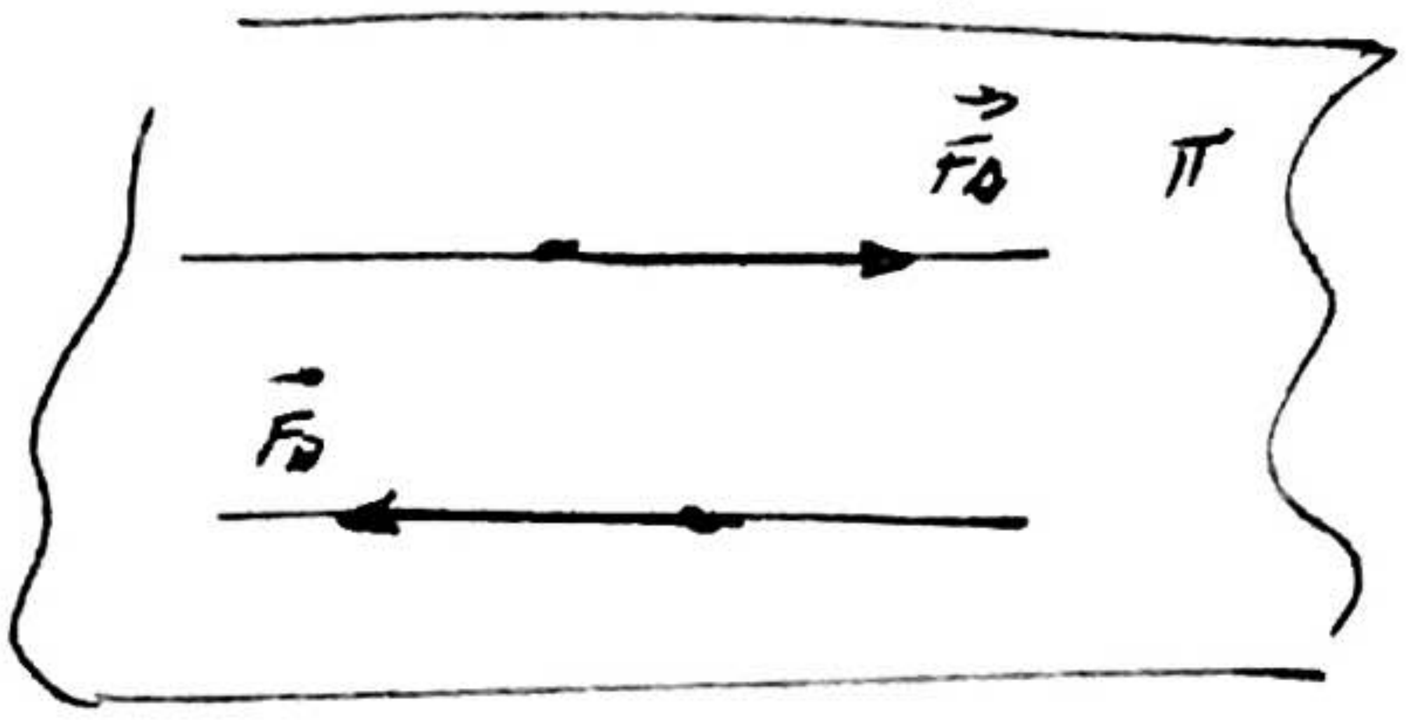
A outra equação é obtida como se segue:

$$I = \vec{R}\cdot\vec{M}_A \Rightarrow 2R_x + R_y + 4R_z = 15$$

resolvendo o sistema obtemos:

$$\underline{\underline{\vec{R} = 3\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}}}.$$

## 2.5 Binário (ou conjugado)




<u>Binário</u> é um sistema constituído por duas <u>forças opostas</u> ($\vec{F_A} = -\vec{F_B}$) com linhas de ação distintas.

Note que todo binário tem resultante nula pois:

$$\vec{R} = \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{F_A} + (-\vec{F_A}) = \vec{0}, \text{ e}$$

portanto o momento de um binário independe do polo, de fato:

$$\vec{M_{O'}} = \vec{M_O} + (O-O') \wedge \cancelto{0}{\vec{R}} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{M_{O'}} = \vec{M_O}}}$$

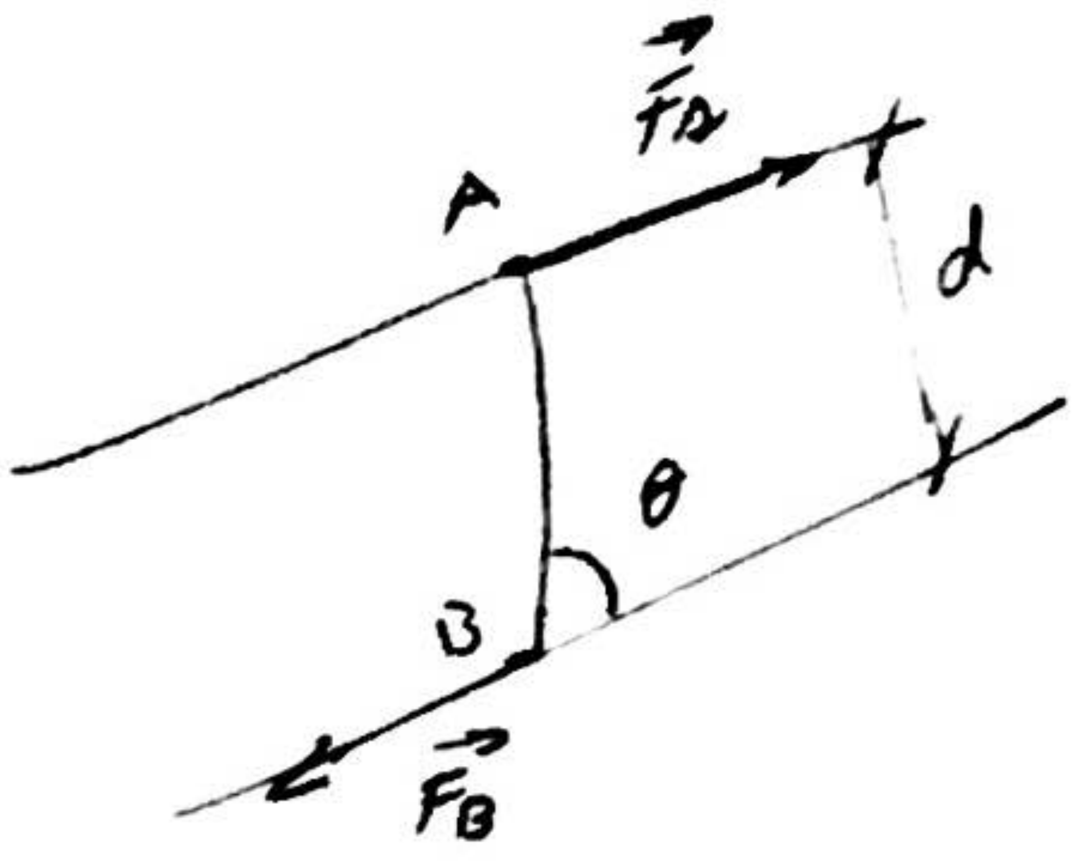
Vamos agora determinar o seu momento em relação a um polo O qualquer.

$$\vec{M_O} = (A-O) \wedge \vec{F_A} + (B-O) \wedge \vec{F_B} =$$

$$= (A-O) \wedge \vec{F_A} + (O-B) \wedge \vec{F_A} \Rightarrow$$

$$\vec{M_O} = (A-B) \wedge \vec{F_A}$$

Devemos notar ainda que, o vetor $\vec{M_O}$ é ortogonal ao plano do binário ($\pi$).




$$\vec{M}_B = \vec{M}_0 = (A-B) \wedge \vec{F_A}$$

$$\Rightarrow |\vec{M}_B| = |\vec{F_A}| . \underbrace{|\vec{BA}| \operatorname{sen}\theta}_{d}$$

$$d = \frac{|\vec{M}_B|}{|\vec{F_A}|}$$

A distância $d$ entre as linhas de ação das forças é chamada "braço do binário".

2.6 Sistemas Equivalentes

Sejam $S_1$ e $S_2$ dois sistemas de forças tais que:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 = \vec{R}$$

e

$$\vec{M}_1^A = \vec{M}_2^A = \vec{M}_A$$

Vamos calcular $\vec{M}_1^B$ e $\vec{M}_2^B$, onde $B$ é um outro polo qualquer.

$$\vec{M}_1^B = \vec{M}_1^A + (A-B) \wedge \vec{R}_1 = \vec{M}_A + (A-B) \wedge \vec{R}$$

analogamente

$$\vec{M}_2^B = \vec{M}_2^A + (A-B) \wedge \vec{R}_2 = \vec{M}_A + (A-B) \wedge \vec{R}$$

logo $M_1^B = M_2^B$ mostrando que nestas condições $S_1$ e $S_2$ terão momentos iguais em relação a qualquer polo.

## Definição:

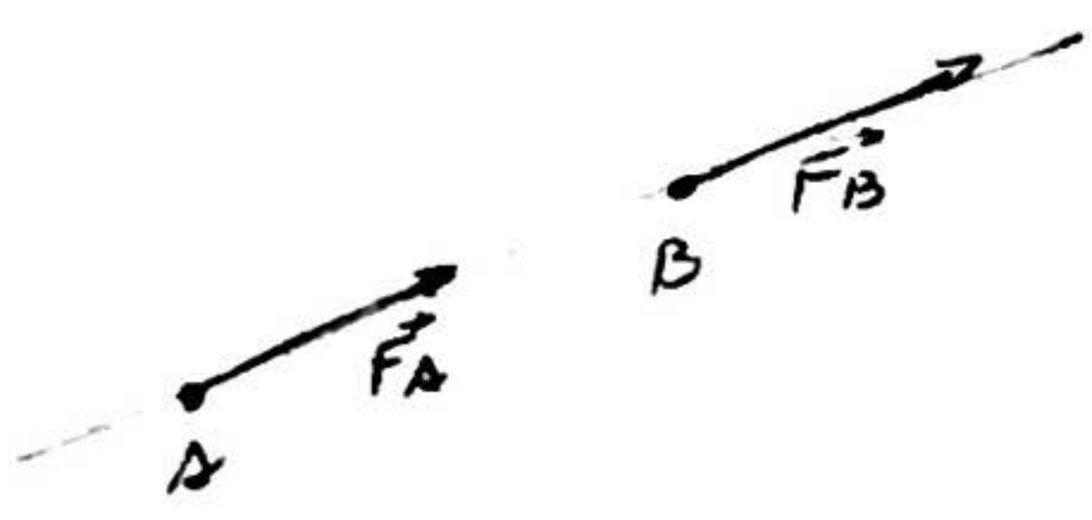
Dois sistemas de forças aplicados a um corpo rígido são <u>equivalentes</u> se tiverem mesma resultante e mesmo momento com relação a um mesmo polo.

$$S_1 \equiv S_2 \iff \begin{cases} \vec{R_1} = \vec{R_2} \\ \vec{M}_1^A = \vec{M}_2^A \end{cases}$$

## Observações

(1) Dois binários são equivalentes se tiverem o mesmo momento

(2) Toda força pode deslizar sobre sua reta de ação,




ou seja: Toda força é equivalente a outra que possua a mesma reta de ação, mesmo sentido e mesma intensidade (ptos de apl. dist.)