

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

MÁXIMOS E MÍNIMOS

Edson Vargas

Universidade de São Paulo

MÁXIMOS E MÍNIMOS: CONSIDERE $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}_f$

1. f é dita limitada $\Leftrightarrow |f(x, y)| \leq M$, para algum $M \in \mathbb{R}$.
2. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é *ponto de máximo relativo* de $f \Leftrightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$ e **próximo** de (x_0, y_0) .
Então $f(x_0, y_0)$ chama-se *valor máximo relativo*.
3. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é *ponto de máximo absoluto* de $f \Leftrightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$. Então $f(x_0, y_0)$ chama-se *valor máximo absoluto*.
4. Valem análogos para mínimo (troque as desigualdades)
5. Pontos de máximo ou mínimo relativos são ditos *pontos extremos relativos* e os valores de f nesses pontos são ditos *valores extremos relativos*. Análogo para absoluto.
6. Desigualdades estritas \Leftrightarrow extremos relativos estritos.

MÁXIMOS E MÍNIMOS: CONSIDERE $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}_f$

1. Ponto de máximo (ou mínimo) absoluto é ponto de máximo (ou mínimo) relativo. A recíproca pode ser falsa.
2. Se existem os valores máximo e mínimo absolutos, então a função é limitada. A recíproca pode ser falsa.
3. Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é um ponto de extremo relativo, único numa vizinhança, então o conjunto de nível $f(x, y) = k_0 = f(x_0, y_0)$ é o conjunto unitário $\{(x_0, y_0)\}$.

$$\text{EXTREMOS DE } f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1. $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow y = k(x^2 + y^2 + 1)$ possui solução $(x, y) \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

(i) \mathcal{N}_0 é a reta $y = 0$

(ii) Para $k \neq 0$ tem-se $x^2 + y^2 - \frac{y}{k} + 1 = 0$, complete quadrado

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4k^2} \Rightarrow \frac{1}{4k^2} \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

2. $\text{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$, $\mathcal{N}_{1/2} = \{(0, 1)\}$ e

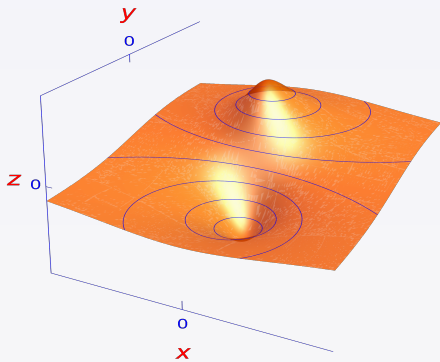
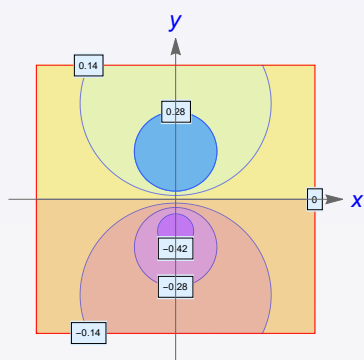
$\mathcal{N}_{-1/2} = \{(0, -1)\}$

Em particular $(0, 1)$ e $(0, -1)$ são pontos de máximo e mínimo absolutos, respectivamente.

3. Para $-1/2 < k < 0$ ou $0 < k < 1/2$, \mathcal{N}_k é a circunferência

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4k^2} \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1 - 4k^2}{4k^2}$$

EXTREMOS DE $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$



DEFINIÇÃO (PONTO CRÍTICO)

Considere uma função $z = f(x, y)$. Um ponto (x_0, y_0) no interior de D_f é chamado **ponto crítico** de f se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e se anulam.

TEOREMA (EXTREMOS E PONTOS CRÍTICOS)

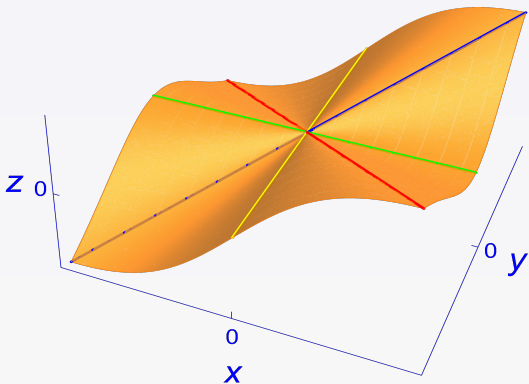
Considere uma função $z = f(x, y)$ e um ponto (x_0, y_0) no interior de D_f . Se (x_0, y_0) é um ponto de extremo relativo de f e as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem, então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f .

Observação: A recíproca desse teorema pode ser falsa.

PONTO CRÍTICO QUE NÃO É PONTO DE EXTREMO RELATIVO

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \text{ é ponto}$$

crítico mas não é ponto de extremo relativo

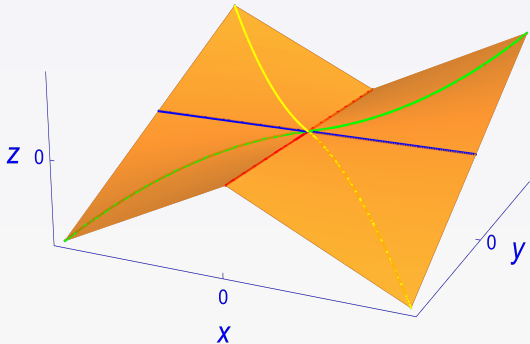


DERIVADAS DIRECIONAIS NULAS \nRightarrow EXTREMO RELATIVO

Se $f(x, y) = |x|y$ e $\vec{v} = (a, b) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 0$ pois

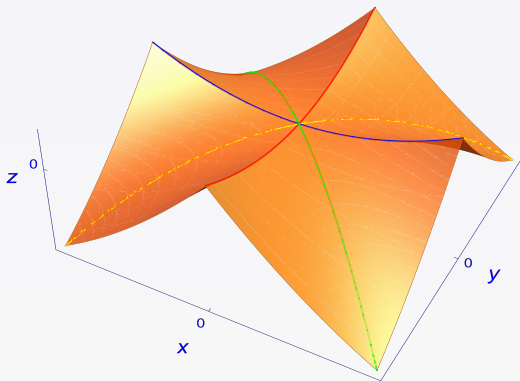
$$h(t) = f(at, bt) = |at|bt = \begin{cases} |a|bt^2, & \text{se } t \geq 0 \\ -|a|bt^2, & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{derivadas}$$

direcionais se anulam em $(0, 0)$ mas não se trata de um ponto de extremo relativo



DERIVADAS DIRECIONAIS NULAS \nRightarrow EXTREMO RELATIVO

Se $f(x, y) = (2|y| - |x|)(|y| - 2|x|)$ e $\vec{v} = (a, b)$ com $a, b \geq 0 \Rightarrow$
 $h(t) = f(at, bt) = (2b|t| - a|t|)(b|t| - 2a|t|) =$
 $= (2b - a)(b - 2a) t^2 = (2b^2 - 5ab + 2a^2) t^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 0$



EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$

Solução: Se f é diferenciável, então os seus extremos relativos no interior do seu domínio ocorrem em pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm 1 \quad \text{e} \quad y = \pm 1$$

Os pontos críticos de f são: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ e estes são os únicos candidatos a ponto de extremo relativo de f em \mathbb{R}^2 .

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x, y) = xy e^{-x^2-2y^2}$

Solução: Se f é diferenciável, então os seus extremos relativos no interior do seu domínio ocorrem em pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y - 2x^2y)e^{-x^2-2y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - 4xy^2)e^{-x^2-2y^2}$$

(i) $y - 2x^2y = y(1 - 2x^2) = 0$ e

(ii) $x - 4xy^2 = x(1 - 4y^2) = 0$

(i) $\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $y = 0$

▷ Se $y = 0$, então $x = 0$ e temos o ponto $(0, 0)$

▷ Se $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $y = \pm \frac{1}{2}$ e temos os seguintes pontos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

▷ Esses quatro pontos mais $(0, 0)$ calculado antes são os únicos candidatos a pontos de extremos relativos.

DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

$$f(x, y) = 4x^3y^5 - 3x^2y^3 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 12x^2y^5 - 6xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24xy^5 - 6y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 60x^2y^4 - 18xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 20x^3y^4 - 9x^2y^2 + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 80x^3y^3 - 18x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 60x^2y^4 - 18xy^2$$

DEFINIÇÃO

Se $z = f(x, y)$ e suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existem e são contínuas em um aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, dizemos que f é de classe C^1 em D . Se existirem e forem contínuas todas as derivadas parciais até ordem 2, dizemos que f é de classe C^2 .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{PODE OCORRER}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3(x^2 + y^2) - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

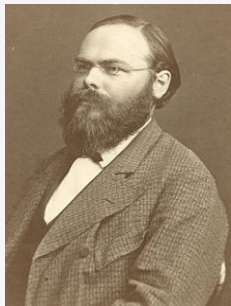
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1 \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

TEOREMA (SCHWARZ)

Se $z = f(x, y)$ é uma função de classe C^2 em um aberto \mathcal{D}_f , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ se verifica para todo $(x, y) \in \mathcal{D}_f$.



A matriz abaixo, chamada matriz hessiana, é simétrica

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

A HESSIANA DE UMA FORMA QUADRÁTICA

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2ax + 2by \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2bx + 2cy$$

Matriz Hessiana

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz Hessiana

$$\det(\mathcal{H})(x, y) = 4(ac - b^2)$$

HESSIANA E FORMAS QUADRÁTICAS

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2ax + 2by \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2bx + 2cy$$

$$\text{Matriz Hessiana} \Rightarrow \mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H})(0, 0) = 4(ac - b^2)$$

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 \right) =$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2} \right) y^2 \right) =$$

$$a \left(\left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} y^2 \right)$$

PROPOSIÇÃO (EXTREMOS DE UMA FORMA QUADRÁTICA)

Se (a, b) e (b, c) não são co-lineares, então $(0, 0)$ é o único ponto crítico de $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ e valem:

- 1 Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2a > 0$ (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2c > 0$) e $\det(\mathcal{H})(0, 0) = 4(ac - b^2) > 0$, então $(0, 0)$ é ponto de mínimo.
- 2 Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2a < 0$ (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2c < 0$) e $\det(\mathcal{H})(0, 0) = 4(ac - b^2) > 0$, então $(0, 0)$ é ponto de máximo.
- 3 Se $\det(\mathcal{H})(0, 0) = 4(ac - b^2) < 0$, então $(0, 0)$ é ponto de sela.
- 4 $\det(\mathcal{H})(0, 0) = 4(ac - b^2) = 0$, ocorre apenas se (a, b) e (b, c) são co-lineares.

FORMAS QUADRÁTICAS $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

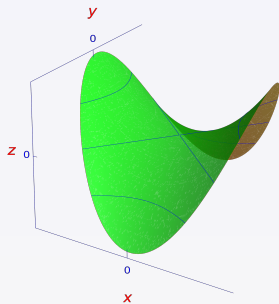


FIGURA: Sela,
 $\det(\mathcal{H})(0, 0) < 0$,
 $f(x, y) = xy$

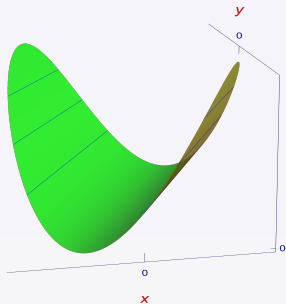


FIGURA: Degenerada,
 $\det(\mathcal{H})(0, 0) = 0$,
 $f(x, y) = (x - y)^2$

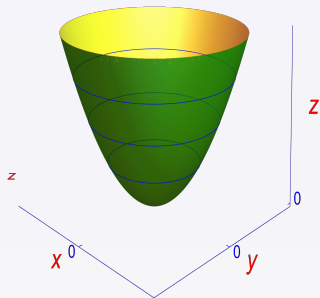


FIGURA: Mínimo,
 $\det(\mathcal{H})(0, 0) > 0$ e
 $a > 0$,
 $f(x, y) = x^2 + y^2$

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^2 + 4xy - 5y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x - 10y \Rightarrow (0, 0)$ é ponto crítico único

▷ $x^2 + 4xy - 5y^2 = (x + 2y)^2 - y^2 \Rightarrow (0, 0)$ é ponto de sela.

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 4y \Rightarrow (0, 0)$ é ponto crítico único

▷ $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2 \Rightarrow (0, 0)$ é ponto de mínimo.

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y \Rightarrow (x, -x)$ são pontos críticos.

▷ $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \Rightarrow (x, -x)$ são pontos de mínimo.

PROPOSIÇÃO (CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS I)

Sejam $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 no aberto \mathcal{D}_f e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, um ponto de mínimo relativo de f , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$$

Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, é um ponto de máximo relativo de f , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$$

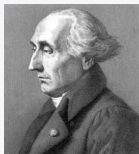
1. $(0, 0)$ é ponto crítico de $f(x, y) = x^2 + x^3y + xy^3 - y^2$ mas $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -2 \Rightarrow (0, 0)$ é ponto de sela.

2. Não vale a recíproca: $(0, 0)$ é ponto crítico de $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ com $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2$ mas $(0, 0)$ não é ponto de mínimo e nem de máximo, é ponto de sela.

TEOREMA (TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE)

Se $z = f(x, y)$ é C^2 no aberto \mathcal{D}_f que contém o segmento de (x_0, y_0) até (x, y) , então existe (\tilde{x}, \tilde{y}) neste segmento tal que:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tilde{x}, \tilde{y})(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\tilde{x}, \tilde{y})(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$



TEOREMA (CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS II)

Sejam $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 no aberto \mathcal{D}_f e (x_0, y_0) um ponto crítico de f em \mathcal{D}_f , então valem:

- 1 Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$) e $\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) > 0$ então (x_0, y_0) é ponto de mínimo.
- 2 Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$) e $\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) > 0$ então (x_0, y_0) é ponto de máximo.
- 3 Se $\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é ponto de sela.
- 4 $\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) = 0$ **INCONCLUSIVO.**

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + x$$

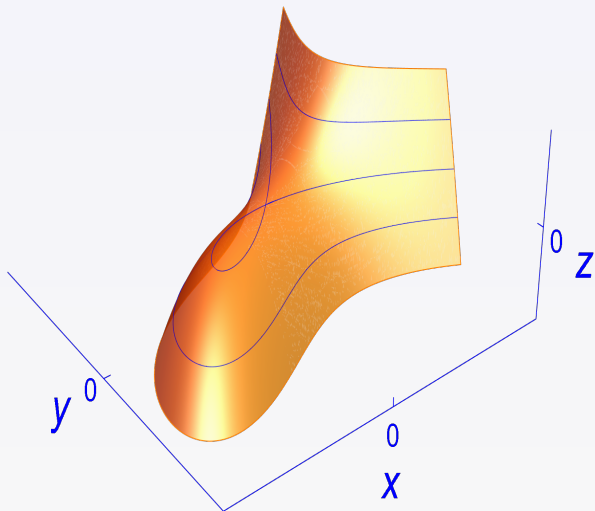
$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 + x = 0 \Rightarrow (0, 0) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$$

$$\text{Matriz Hessiana} \Rightarrow \mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H})(0, 0) = -1 < 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ é ponto de sela.}$$

$$\det(\mathcal{H})\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 2 - 1 = 1 > 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \text{ é ponto de máximo relativo.}$$

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$



EXTREMOS DE $f(x, y) = x^3y + xy^2 - xy$

Cálculo dos pontos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + y^2 - y = (3x^2 - 1 + y)y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 2xy - x = (x^2 + 2y - 1)x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

(i) $y = 0 \Rightarrow (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$ ou

(ii) $y = -3x^2 + 1 \Rightarrow (-5x^2 + 1)x = 0 \Rightarrow (0, 1), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Matriz Hessiana $\Rightarrow \mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 2y - 1 \\ 3x^2 + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^3y + xy^2 - xy$

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H}(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

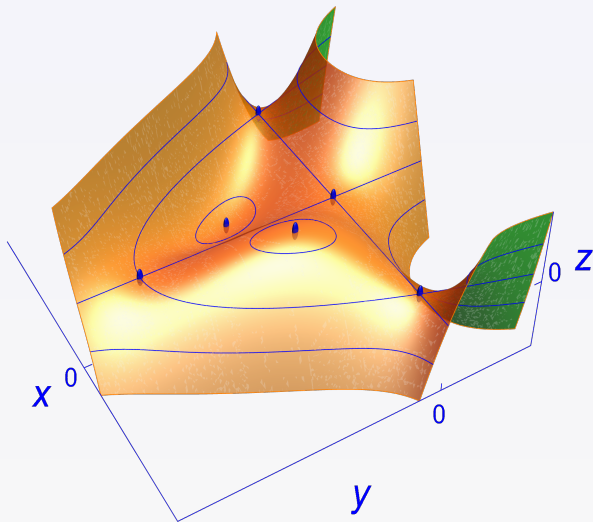
$$\mathcal{H}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{12\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{12\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{H})(0, 0)$, $\det(\mathcal{H})(1, 0)$, $\det(\mathcal{H})(-1, 0)$ e $\det(\mathcal{H})(0, 1)$ são negativos \Rightarrow pontos de sela.

$\det(\mathcal{H})\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right)$ e $\det(\mathcal{H})\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right)$ são positivos \Rightarrow pontos de extremos, mínimo e máximo relativos.

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^3y + xy^2 - xy$



EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ EM \mathbb{R}^2

f diferenciável \Rightarrow extremos relativos em \mathbb{R}^2 são pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \pm 1 \quad \text{e} \quad y = \pm 1$$

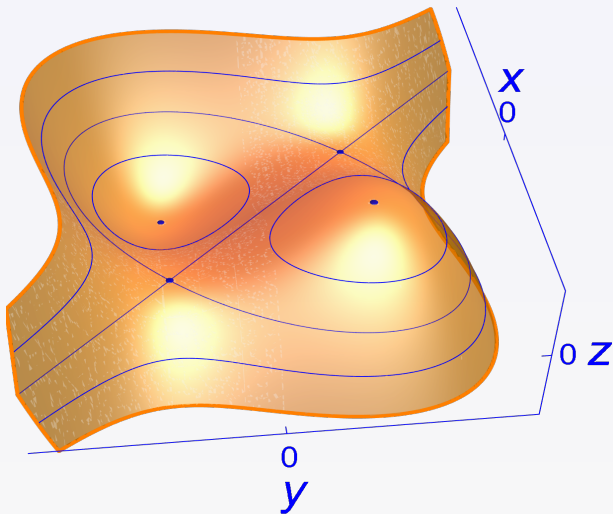
pontos críticos de f são: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ (são os únicos candidatos a ponto de extremo relativo de f em \mathbb{R}^2).

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{H}(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(-1, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$(1, -1)$ e $(-1, 1)$ são pontos de sela, $(1, 1)$ é ponto de mínimo relativo e $(-1, -1)$ é ponto de máximo relativo.

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ EM \mathbb{R}^2



EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x, y) = xy e^{-x^2-2y^2}$ EM \mathbb{R}^2

f diferenciável \Rightarrow extremos relativos em \mathbb{R}^2 são pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y - 2x^2y)e^{-x^2-2y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - 4xy^2)e^{-x^2-2y^2}$$

$$\begin{cases} y - 2x^2y = y(1 - 2x^2) = 0 \\ x - 4xy^2 = x(1 - 4y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{(i) } y = 0 \Rightarrow p_1 = (0, 0) \quad \text{ou}$$

$$\text{(ii) } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad p_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right),$$

$$p_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad p_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x, y) = xy e^{-x^2 - 2y^2}$ EM \mathbb{R}^2

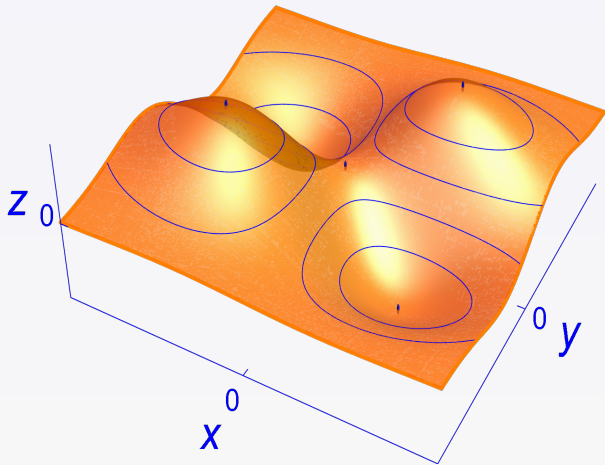
$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy(-3 + 2x^2) & (-1 + 2x^2)(-1 + 4y^2) \\ (-1 + 2x^2)(-1 + 4y^2) & 4xy(-3 + 4y^2) \end{pmatrix} e^{-x^2 - 2y^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(p_2) = \mathcal{H}(p_5) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-2},$$

$$\mathcal{H}(p_3) = \mathcal{H}(p_4) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-2}$$

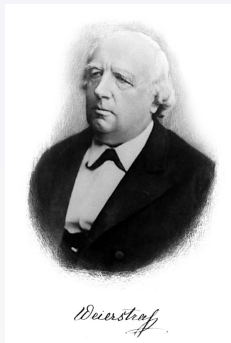
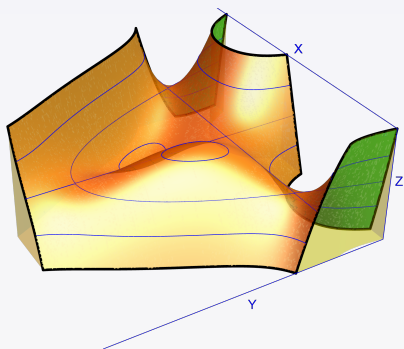
p_1 é ponto de sela, p_2 e p_5 são pontos de máximo relativo, p_3 e p_4 são pontos de mínimo relativo.

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x, y) = xy e^{-x^2 - 2y^2}$ EM \mathbb{R}^2



TEOREMA (WEIERSTRASS)

Seja $z = f(x_1, \dots, x_n)$ uma função contínua em $D \subset \mathbb{R}^n$. Se D é compacto, então f assume os seus valores máximos e mínimos absolutos em D .



EXTREMOS ABSOLUTOS DE UMA FUNÇÃO f , DE CLASSE C^1 , EM UM COMPACTO D CONTIDO NO SEU DOMÍNIO \mathcal{D}_f

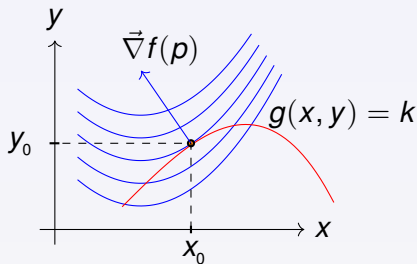
1. ache os pontos críticos de f no interior de D (sem classificá-los)
2. se a fronteira de D é da forma $g(x, y) = k$, ache os pontos críticos de g nessa fronteira (possíveis “bicos” da fronteira).
3. ache os pontos da fronteira que satisfazem:
$$\vec{\nabla} f(p_1, \dots, p_n) = \lambda \vec{\nabla} g(p_1, \dots, p_n) \quad \text{teorema abaixo}$$
4. Avalie f nos pontos e escolha os valores máx. e mín. absolutos.

TEOREMA (MULTIPLICADORES DE LAGRANGE)

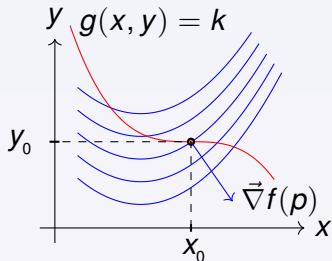
Sejam $z = f(x_1, \dots, x_n)$ e $z = g(x_1, \dots, x_n)$, funções C^1 numa vizinhança de (p_1, \dots, p_n) . Se (p_1, \dots, p_n) é ponto de extremo relativo de f sujeito à restrição $g(x_1, \dots, x_n) = k$, então

$$\vec{\nabla} f(p_1, \dots, p_n) = \lambda \vec{\nabla} g(p_1, \dots, p_n), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou}$$

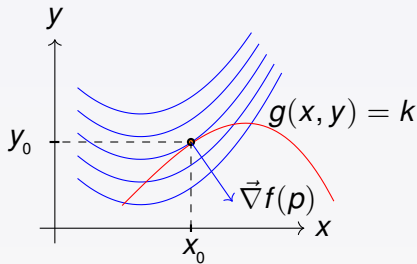
$$\vec{\nabla} g(p_1, \dots, p_n) = (0, \dots, 0)$$



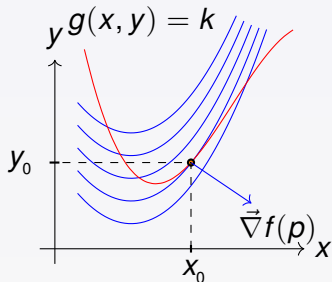
ponto de máximo



não é ponto de extremo

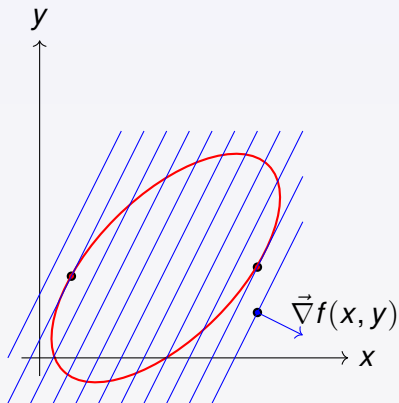
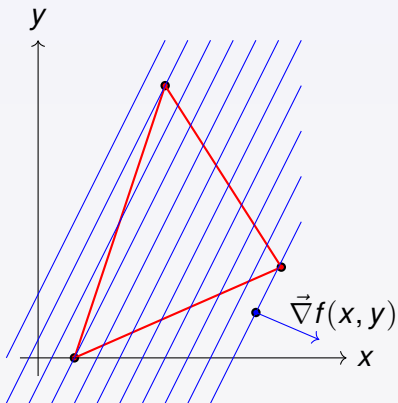


ponto de mínimo



não é ponto de extremo

MAXIMIZANDO FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = a + bx + cy$



EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$

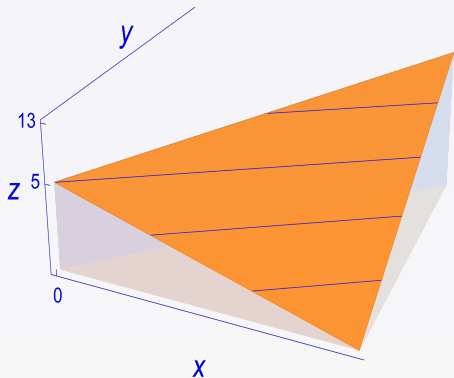
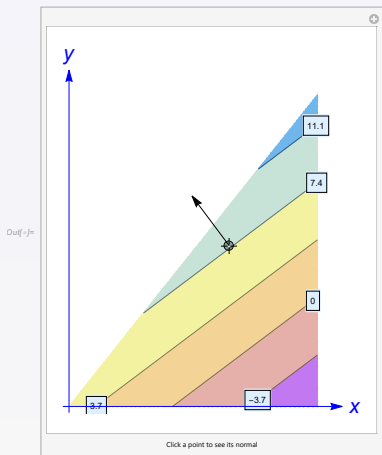
no triângulo D de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$

1. $\vec{\nabla} f(x, y) = (-3, 4) \Rightarrow \nexists$ extremos no interior do triângulo.
2. Lado $(0, 0)$ a $(4, 0)$ é conjunto de nível de $g_1(x, y) = y$, mas $\vec{\nabla} f(x, y) = (-3, 4)$ e $\vec{\nabla} g_1(x, y) = (0, 1)$ são LI
3. Lado $(4, 0)$ a $(4, 5)$ é conjunto de nível de $g_2(x, y) = x$, mas $\vec{\nabla} f(x, y) = (-3, 4)$ e $\vec{\nabla} g_2(x, y) = (1, 0)$ são LI
4. Lado $(0, 0)$ a $(4, 5)$ é conjunto de nível de $g_3(x, y) = 5x - 4y$, mas $\vec{\nabla} f(x, y) = (-3, 4)$ e $\vec{\nabla} g_3(x, y) = (5, -4)$ são LI

conclusão: $\vec{\nabla} f(x, y)$ e $\vec{\nabla} g_1(x, y)$ não são co-lineares \Rightarrow não há extremo no interior do lado $y = 0$. Análogo para os outros lados. Resulta que os únicos candidatos a extremos são os vértices.

▷ $f(0, 0) = 5$, $f(4, 5) = 13$ e $f(4, 0) = -7 \Rightarrow (4, 5)$ é ponto de máximo absoluto e $(4, 0)$ é ponto de mínimo absoluto.

EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$



EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$

na região D , limitada por $x^2 + 4y^2 = 4$

1. pontos críticos de f no interior não existem pois

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (-3, 4).$$

2. pontos críticos de $g(x, y) = x^2 + 4y^2$ na fronteira não existem

pois $\Rightarrow \vec{\nabla} g(x, y) = (2x, 8y)$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y)$

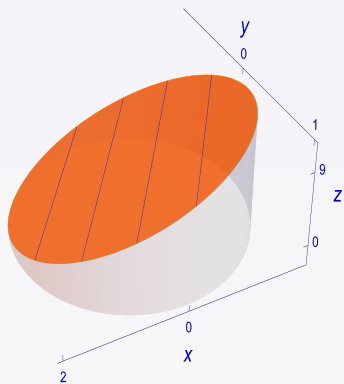
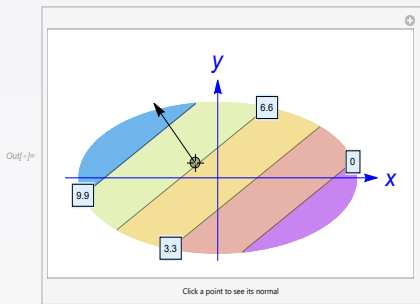
$$\begin{cases} -3 = 2\lambda x \\ 4 = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 2\lambda x \\ -8\lambda x = 24\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ x = -3y \\ y = \pm \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

conclusão: $p_1 = \left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ e $p_2 = \left(-\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ são os únicos candidatos.

EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$

na região D , limitada por $x^2 + 4y^2 = 4$

4. Avaliando: $f(p_1) = 5 - 2\sqrt{13}$ e $f(p_2) = 5 + 2\sqrt{13} \Rightarrow$ Portanto p_2 é ponto de máximo absoluto e p_1 é ponto de mínimo absoluto.



EXTREMOS DE $f(x, y) = xy$ EM $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$

1. pontos críticos de f no interior não existem pois

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x, y) = (y, x) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

2. pontos críticos de $g(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ na fronteira não

$$\text{existem pois } \Rightarrow \vec{\nabla} g(x, y) = (2x - 2, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (1, 0)$$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y)$

$$\begin{cases} y = 2\lambda(x - 1) \\ x = 2\lambda y \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2\lambda(x - 1)x \\ xy = 2\lambda y^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

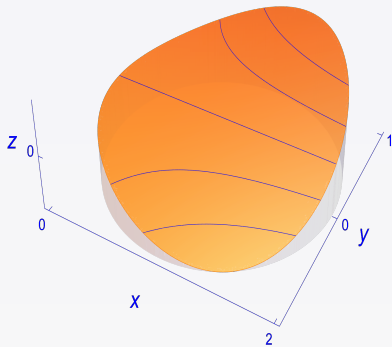
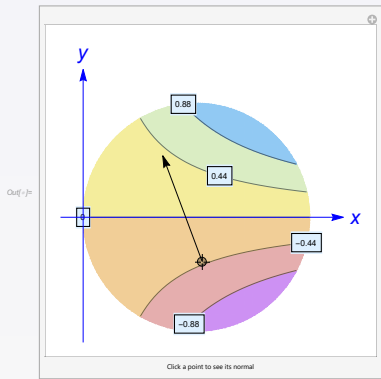
(i) $\lambda = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ ou (ii) $(x - 1)x = y^2 \Rightarrow$

$$(x - 1)^2 + (x - 1)x = 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$p_1 = (0,0)$, $p_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $p_3 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são os únicos candidatos.

4. Avaliando: $f(p_1) = 0$, $f(p_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e $f(p_3) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

p_2 é ponto de máximo absoluto e p_3 é ponto de mínimo absoluto.



EXTREMOS DE $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ EM $x^2 + 4y^2 \leq 4$

1. Pontos críticos de f no interior $\Rightarrow p_1 = (0, 0)$ pois

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (4x + y, x + 4y)$$

$$\triangleright \det(\mathcal{H})(0, 0) = 15 > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 4 > 0 \Rightarrow$$

p_1 é ponto de mínimo relativo de f (essa classificação não é necessária para o cálculo dos extremos absolutos)

2. pontos críticos de $g(x, y) = x^2 + 4y^2$ na fronteira não existem

$$\text{pois } \vec{\nabla} g(x, y) = (2x, 8y)$$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y)$

$$\begin{cases} 4x + y = 2\lambda x \\ x + 4y = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16xy + 4y^2 = 8\lambda xy \\ x^2 + 4xy = 8\lambda xy \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 12xy + 4y^2 = x^2$$

$$\Rightarrow 3xy + 2y^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1 - 2y^2}{3y} \Rightarrow$$

$$\frac{1 - 4y^2 + 4y^4}{9y^2} + 4y^2 = 4 \Rightarrow 1 - 4y^2 + 4y^4 + 36y^4 = 36y^2 \Rightarrow$$

$$40y^4 - 40y^2 + 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{20}$$

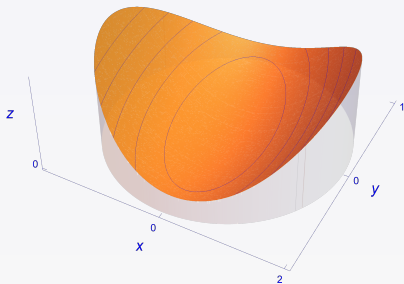
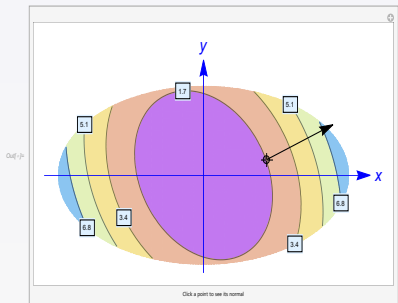
$$\Rightarrow x^2 = 4 - 4y^2 = 4 - \frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{10 \mp 3\sqrt{10}}{5}$$

$$\left(\pm \sqrt{\frac{10 - 3\sqrt{10}}{5}}, \pm \sqrt{\frac{10 + 3\sqrt{10}}{20}} \right); \left(\pm \sqrt{\frac{10 + 3\sqrt{10}}{5}}, \pm \sqrt{\frac{10 - 3\sqrt{10}}{20}} \right)$$

EXTREMOS DE $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ EM $x^2 + 4y^2 \leq 4$

$$2y^2 = 3 \frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{30}, \quad 2x^2 = 12 \frac{10 \mp 3\sqrt{10}}{30}, \quad xy = \pm \frac{3\sqrt{10}}{30}$$

4. Avaliando: $2x^2 + xy + 2y^2 = \frac{150 \pm 27\sqrt{10}}{30} \pm \frac{3\sqrt{10}}{30}$



EXTREMOS DE $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ EM $x^2 + y^2 \leq 1$

1. pontos críticos de f no interior $\Rightarrow p_1 = (0, 0)$ pois

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (6x^2, 4y^3).$$

▷ $\det(\mathcal{H})(0, 0) = 0$ e nada podemos concluir através do critério de classificação de pontos críticos. No entanto notamos que $f(x, 0) = 2x^3$ e então concluímos que $(0, 0)$ não é ponto de extremo (classificação não-necessária para o cálculo dos extremos absolutos).

2. pontos críticos de $g(x, y) = x^2 + y^2$ na fronteira não existem.

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y)$

$$\text{ou } \begin{cases} 6x^2 = 2\lambda x \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 y = 2\lambda xy \\ 4xy^3 = 2\lambda xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 y = 4xy^3 \Rightarrow$$

EXTREMOS DE $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ EM $x^2 + y^2 \leq 1$

(i) $x = 0 \Rightarrow p_2 = (0, 1)$ e $p_3 = (0, -1)$ ou

(ii) $y = 0 \Rightarrow p_4 = (1, 0)$ e $p_5 = (-1, 0)$ ou

(iii) $y^2 = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

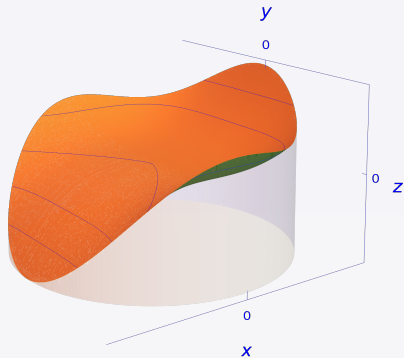
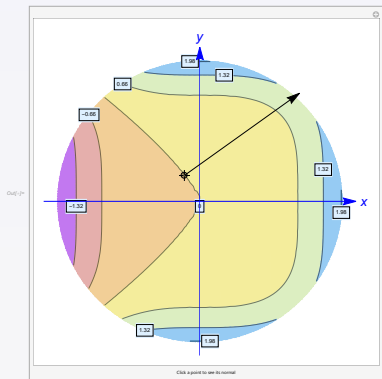
(fora da fronteira) ou $x = 1/2 \Rightarrow p_6 = (1/2, \pm\sqrt{3}/2)$

4. Avaliando: $f(p_1) = 0$, $f(p_2) = f(p_3) = 1$,

$f(p_4) = 2$, $f(p_5) = -2$, $f(p_6) = f(1/2, -\sqrt{3}/2) = 25/16$

p_4 é ponto de máximo absoluto e p_5 é ponto de mínimo absoluto.

EXTREMOS DE $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ EM $x^2 + y^2 \leq 1$



EXTREMOS DE $f(x, y, z) = ye^{-x+z}$ EM $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 \leq 36$

1. pontos críticos de f no interior não existem pois

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (-ye^{-x+z}, e^{-x+z}, ye^{-x+z})$$

2. pontos críticos de $g(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + 36z^2$ na fronteira não existem pois $\vec{\nabla} g(x, y, z) = (18x, 8y, 72z)$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x, y, z) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y, z)$

$$\begin{cases} -ye^{-x+z} = 18\lambda x \\ e^{-x+z} = 8\lambda y \\ ye^{-x+z} = 72\lambda z \\ 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18\lambda x = -72\lambda z \Rightarrow x = -4z \\ 8\lambda y^2 = -18\lambda x \Rightarrow 4y^2 = -9x = 36z \\ 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 144z^2 + 36z + 36z^2 = 36 \Rightarrow 36(5z^2 + z - 1) = 0 \Rightarrow$$

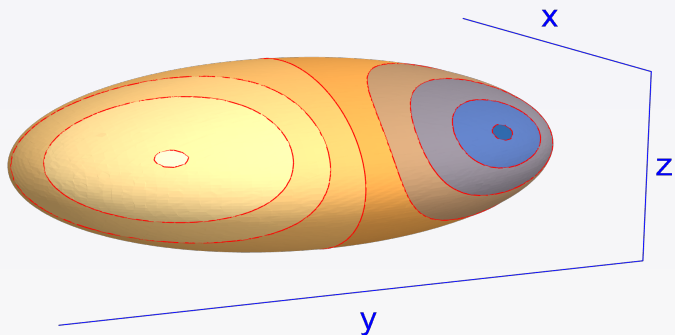
$$z = \frac{-1 + \sqrt{21}}{10}, \quad x = \frac{4 - 4\sqrt{21}}{10} \quad \text{e} \quad y = \pm 3\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{21}}{10}}$$

EXTREMOS DE $f(x, y, z) = ye^{-x+z}$ EM $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 \leq 36$

$$p_1 = \left(\frac{4-4\sqrt{21}}{10}, 3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}}, \frac{-1+\sqrt{21}}{10} \right); p_2 = \left(\frac{4-4\sqrt{21}}{10}, -3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}}, \frac{-1+\sqrt{21}}{10} \right)$$

4. avaliando: $f(p_1) = 3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}} e^{\frac{3-3\sqrt{21}}{10}}$; $f(p_2) = -3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}} e^{\frac{3-3\sqrt{21}}{10}}$

p_1 é ponto de máximo absoluto e p_2 é ponto de mínimo absoluto.



TEOREMA (MULTIPLICADORES DE LAGRANGE: 2 RESTRIÇÕES)

Sejam $z = f(x_1, \dots, x_n)$, $z = g_1(x_1, \dots, x_n)$ e $z = g_2(x_1, \dots, x_n)$, funções C^1 numa vizinhança de (p_1, \dots, p_n) . Se (p_1, \dots, p_n) é ponto de extremo relativo de f sujeito à restrição

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = k_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = k_2 \end{cases}, \text{ então } \vec{\nabla} g_1(p_1, \dots, p_n) \text{ e } \vec{\nabla} g_2(p_1, \dots, p_n)$$

são LD ou $\vec{\nabla} f(p_1, \dots, p_n) = \lambda \vec{\nabla} g_1(p_1, \dots, p_n) + \mu \vec{\nabla} g_2(p_1, \dots, p_n)$, para algum $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

EXTREMOS COM DUAS RESTRIÇÕES

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita às restrições

$$\clubsuit \begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ g_2(x, y, z) = x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. não existem pontos de \clubsuit com $\vec{\nabla} g_1(x, y, z)$ e $\vec{\nabla} g_2(x, y, z)$ LD

$$\text{pois } \vec{\nabla} g_1 \times \vec{\nabla} g_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (8y - 2z, 2z - 2x, 2x - 8y)$$

2. pontos de \clubsuit com $\vec{\nabla} f(x, y, z) = \lambda \vec{\nabla} g_1(x, y, z) + \mu \vec{\nabla} g_2(x, y, z)$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 8\lambda y + \mu \\ 2z = 2\lambda z + \mu \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = \mu \\ 2y(1 - 4\lambda) = \mu \\ 2z(1 - \lambda) = \mu \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

EXTREMOS DE $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

sujeita a 2 restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$

$$\begin{cases} 2x(1 - \lambda) = \mu \\ 2y(1 - 4\lambda) = \mu \\ 2z(1 - \lambda) = \mu \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i)} \ x(1 - \lambda) = z(1 - \lambda) \Rightarrow x = z \\ \text{ou} \\ \text{(ii)} \ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\text{(i)} \ x = z \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4(1 - 2x)^2 = 4 \\ x = 0 \text{ ou } x = 8/9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$p_1 = (0, 1, 0) \text{ e } p_2 = (8/9, -7/9, 8/9)$$

$$\text{(ii)} \ \lambda = 1 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 1 \\ (1 - z)^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 1/2 \pm \sqrt{7}/2 \\ x = 1/2 \mp \sqrt{7}/2 \end{cases}$$

EXTREMOS DE $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

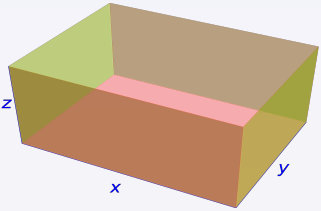
sujeita a 2 restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$

$$p_3 = \left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \right) \text{ e } p_4 = \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \right)$$

3. Avaliando: $f(p_1) = 1$, $f(p_2) = \frac{177}{81}$ e $f(p_3) = f(p_4) = 4$

p_1 é ponto de mínimo absoluto e p_3 e p_4 são pontos de máximo absoluto.

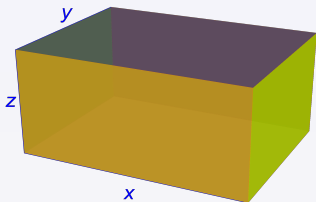
CAIXA RETANGULAR SEM TAMPA DE VOLUME MÁXIMO

	área superficial 27cm^2
	$A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz = 27$
	$V(x, y, z) = xyz$

$$\begin{cases}
 yz = \lambda(y + 2z) \\
 xz = \lambda(x + 2z) \\
 xy = \lambda(2x + 2y) \\
 xy + 2xz + 2yz = 27
 \end{cases}
 \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ e }
 \begin{cases}
 xyz = \lambda(xy + 2xz) \\
 xyz = \lambda(xy + 2yz) \\
 xyz = \lambda(2xz + 2yz) \\
 xy + 2xz + 2yz = 27
 \end{cases}
 \Rightarrow$$

$$2xz = 2yz = xy \Rightarrow \begin{cases} 2xz = 2yz = xy = 9 \\ x = y = 2z \end{cases} \Rightarrow (3, 3, 3/2)$$

PERDA DE CALOR MÍNIMA



volume total 1000 ft³

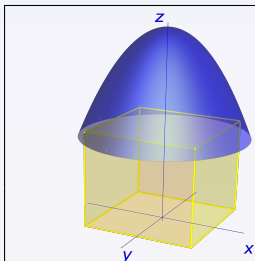
$$V(x, y, z) = xyz = 1000$$

$$T(x, y, z) = 6xy + 6xz + 6yz$$

$$\begin{cases} 6y + 6z = \lambda yz \\ 6x + 6z = \lambda xz \\ 6x + 6y = \lambda xy \\ xyz = 1000 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ e } \begin{cases} 6xy + 6xz = \lambda xyz \\ 6xy + 6yz = \lambda xyz \\ 6xz + 6yz = \lambda xyz \\ xyz = 1000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$xz = yz = xy \Rightarrow x = y = z \Rightarrow (10, 10, 10)$$

PARALELEPÍPEDO DE VOLUME MÁXIMO



vértices (x, y, z) no parabolóide

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = 4$$

$$V(x, y, z) = 4xyz$$

$$\begin{cases} 4yz = 2\lambda x \\ 4xz = 2\lambda y \\ 4xy = \lambda \\ x^2 + y^2 + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ e } \begin{cases} 4xyz = 2\lambda x^2 \\ 4xyz = 2\lambda y^2 \\ 4xyz = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x^2 = 2y^2 = z \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x = 1, y = 1 \text{ e } z = 2$$

▷ vértices $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, \pm 1, 2)$

FORMA QUADRÁTICA

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear auto-adjunta e $Q(x, y) = \langle T(x, y), (x, y) \rangle$

Extremos de Q sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$

1. Derivadas parciais de Q

$$\frac{Q(x+h, y) - Q(x, y)}{h} = \frac{\langle T(x+h, y), (x+h, y) \rangle - \langle T(x, y), (x, y) \rangle}{h}$$

$$= \frac{\langle T(x, y), (x+h, y) \rangle + \langle T(h, 0), (x+h, y) \rangle - \langle T(x, y), (x, y) \rangle}{h}$$

$$= \frac{\langle T(x, y), (h, 0) \rangle + \langle T(h, 0), (x, y) \rangle - \langle T(h, 0), (h, 0) \rangle}{h}$$

$$= \langle T(x, y), (1, 0) \rangle + \langle T(1, 0), (x, y) \rangle - h \langle T(1, 0), (1, 0) \rangle$$

$$\partial_x Q(x, y) = 2 \langle T(x, y), (1, 0) \rangle \text{ e } \partial_y Q(x, y) = 2 \langle T(x, y), (0, 1) \rangle$$

$$\triangleright Q(x, y) = x^2 Q(1, 0) + 2xy \langle T(1, 0), (0, 1) \rangle + y^2 Q(0, 1)$$

$$\triangleright h(x, y) = \langle x, y \rangle \text{ e } Q(x, y) = g \circ T(x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DQ(x, y) = Dg(T(x, y)) \cdot DT(x, y)$$

FORMA QUADRÁTICA

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear auto-adjunta e $Q(x, y) = \langle T(x, y), (x, y) \rangle$

Extremos de Q sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$

$$2. \vec{\nabla} Q(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \Rightarrow \begin{cases} 2\langle T(x, y), (1, 0) \rangle = 2\lambda x \\ 2\langle T(x, y), (0, 1) \rangle = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3. Se (x, y) satisfaz $\vec{\nabla} Q(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y)$, então

$T(x, y) = \lambda(x, y)$ (x, y) é auto-vetor de T

$$Q(x, y) = \langle \lambda(x, y), (x, y) \rangle = \lambda$$

▷ Se (x, y) é ponto de extremo de Q , então (x, y) é auto-vetor de T e o auto-valor λ é o valor extremo.

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS DE $f(x, y, z)$

Matriz Hessiana

$$\mathcal{H}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

TEOREMA (CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS III)

Sejam $w = f(x, y, z)$ uma função de classe C^2 no aberto \mathcal{D}_f e (x_0, y_0, z_0) um ponto crítico de f em \mathcal{D}_f , então valem:

- 1 Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) > 0$, $\det \mathcal{H}_2(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $\boxed{\det \mathcal{H}_3(x_0, y_0, z_0) > 0}$ então (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo.
- 2 Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) < 0$, $\det \mathcal{H}_2(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $\boxed{\det \mathcal{H}_3(x_0, y_0, z_0) < 0}$ então (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo.
- 3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)$, $\det \mathcal{H}_2(x_0, y_0, z_0)$ e $\boxed{\det \mathcal{H}_3(x_0, y_0, z_0)}$ não se anulam e violam (1) e (2), então (x_0, y_0, z_0) é ponto de sela.
- 4 Se algum de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)$, $\det \mathcal{H}_2(x_0, y_0, z_0)$ ou $\boxed{\det \mathcal{H}_3(x_0, y_0, z_0)}$ se anula, então nada se pode concluir.

CLASSIFIQUE O PONTO CRÍTICO

$$f(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 - 3yz + 4z^2 - 10x - 5y - 21z$$

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = (2x + 6y - 10, 6x + 2y - 3z - 5, -3y + 8z - 21)$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ 6x + 2y - 3z = 5 \\ -3y + 8z = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ -16y - 3z = -25 \\ -3y + 8z = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ 48y + 9z = 75 \\ -48y + 128z = 33 \end{cases}$$

$$z = \frac{411}{137}, \quad y = 75 - 9\frac{411}{137} \quad \text{e} \quad x = 10 - 6\left(75 - 9\frac{411}{137}\right)$$

f possui um único ponto crítico.

CLASSIFIQUE O PONTO CRÍTICO

$$f(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 - 3yz + 4z^2 - 10x - 5y - 21z$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (2x + 6y - 10, 6x + 2y - 3z - 5, -3y + 8z - 21)$$

Matriz Hessiana

$$\mathcal{H}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2 > 0, \quad \det(\mathcal{H}_2)(x, y, z) = 4 - 36 < 0$$

$$\det(\mathcal{H}_3)(x, y, z) = 32 - 18 - 288 < 0$$

O ponto crítico é ponto de sela.