Funções de 2 Variáveis, Conjuntos de Nível e Limites

Edson Vargas

Universidade de São Paulo

Funções de 2 variáveis, domínio, Imagem e Gráfico

Seja f uma função que a cada (x, y) em um conjunto $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$, chamado domínio de f, associa um número real $z = f(x, y)$. A imagem de f é o conjunto $\mathrm{Im}(f)$ de todos os valores de $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in \mathcal{D}_f$. O gráfico de f é o conjunto $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$
Notações: $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ ou $z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}_f$

1- (x, y) são variáveis independentes (ou livres) no domínio $\mathcal{D}_f$, determinado por condições algébricas (ou físicas, químicas, etc) e z é variável dependente.

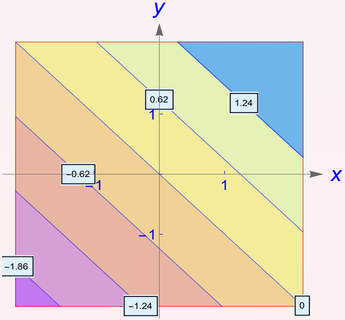
2- $\mathrm{Im}(f)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

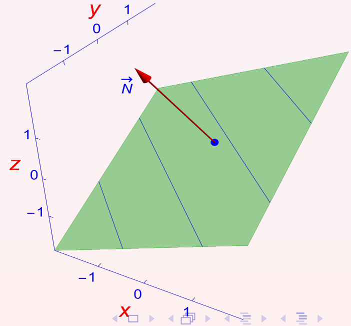
3- $\mathrm{Gr}(f)$ é uma superfície no espaço $\mathbb{R}^3$ que representa a função geometricamente.

DEFINIÇÃO (CONJUNTO DE NÍVEL)

Dados $k \in \mathbb{R}$ e uma função $z = f(x, y)$, o conjunto dos (x, y) no domínio de f tais que $f(x, y) = k$ chama-se *conjunto de nível* k de f e denotamos $\mathcal{N}_k$.

- Plano: $f(x, y) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} \Rightarrow$ domínio $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$
- Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2k\}$
- $\forall\, k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{N}_k \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathcal{N}_k$ é a reta $x + y = 2k$





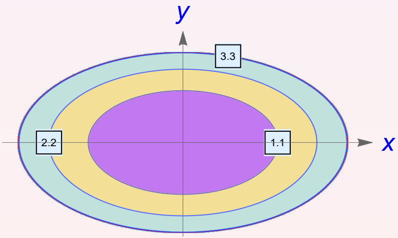
PARABOLOIDE

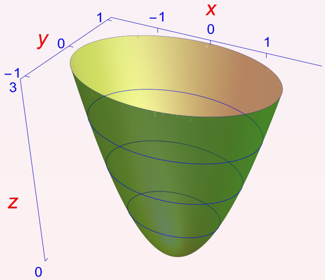
Seja $f(x,y) = x^2 + 3y^2, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

- Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 = k\}$

(i) $k < 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k = \emptyset$, (ii) $\mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$ ou (iii) $k > 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k$ é uma elipse

- $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \geq 0 \quad \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$





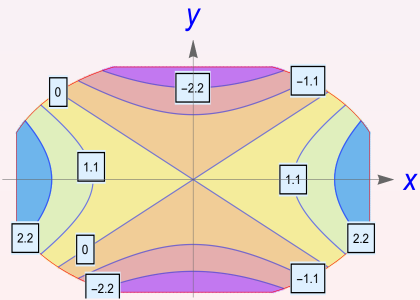
CONJUNTOS DE NÍVEL DA SELA

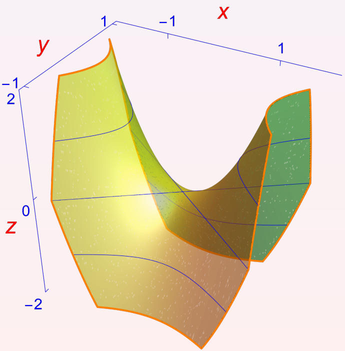
Seja $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

- ▷ Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3y^2 = k\}$

(i) $\mathcal{N}_0$ é o par de retas: $x = \pm\sqrt{3}y$ ou (ii) $k \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_k$ é hipérbole

- ▷ $\forall\, k \in \mathbb{R}$, tem-se $\mathcal{N}_k \neq \emptyset$ e portanto $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$





Conjunto de nível de $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2,\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

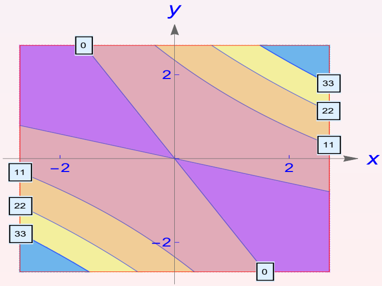
Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 2y^2 = k\}$

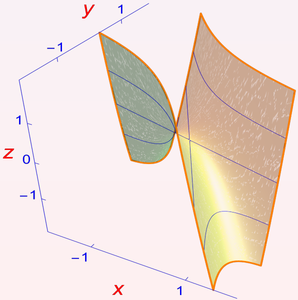
- Complete quadrados:

$x^2 + 4xy + 2y^2 = (x+2y)^2 + 2y^2 - 4y^2 = (x+2y)^2 - 2y^2$

(i) $\mathcal{N}_0$ é as retas: $x = (-2 \pm \sqrt{2})y$ ou (ii) $k \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_k$ é hipérbole

- $\forall\ k \in \mathbb{R}$, tem-se $\mathcal{N}_k \neq \emptyset$ e portanto $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$





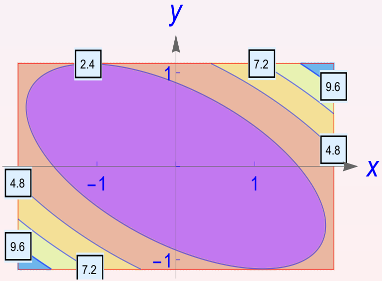
Conjunto de nível de $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2,\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

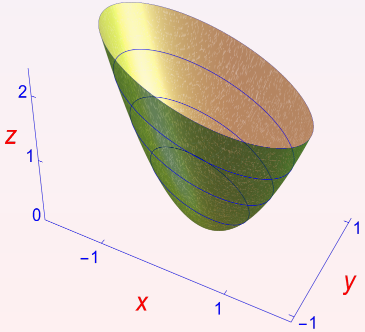
Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 3y^2 = k\}$

- Complete quadrados: $x^2 + 2xy + 3y^2 = (x+y)^2 + 2y^2$

(i) $k < 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k = \emptyset$, (ii) $\mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$ ou (iii) $k > 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_k$ é elipse

- $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \geq 0$, tem-se e portanto $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$





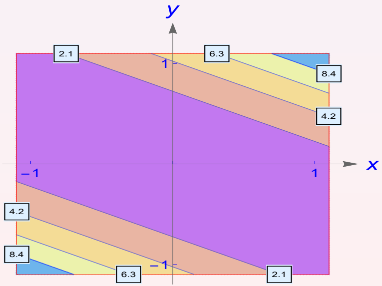
Conjunto de nível de $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

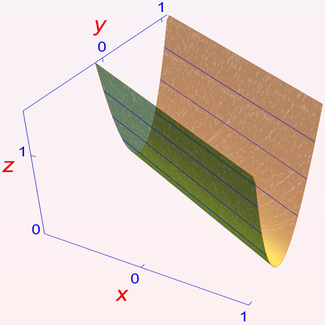
Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = k\}$

- ▷ Complete quadrados: $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x+2y)^2$

(i) $k < 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k = \emptyset$, (ii) $\mathcal{N}_0$ é a reta: $x = -2y$ ou (iii) $k > 0 \Leftrightarrow$ $\mathcal{N}_k$ é as retas $x = -2y \pm \sqrt{k}$

- ▷ $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \geq 0$ e portanto $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$



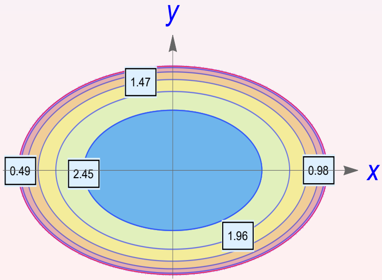


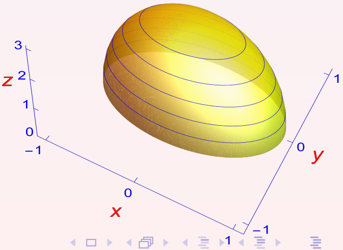
CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x,y) = 3\sqrt{1 - x^2 - 3y^2}$

domínio $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 1\}$
conjuntos de nível:
$\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f : 3\sqrt{1 - x^2 - 3y^2} = k\}$

▷ $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in [0,3]$. Portanto $\operatorname{Im}(f) = [0,3]$.
(i) $\mathcal{N}_3 = \{(0,0)\}$ ou (ii) $\forall\, k \in [0,3)$, $\mathcal{N}_k$ é a elipse

$$x^2 + 3y^2 = 1 - \frac{k^2}{9}$$

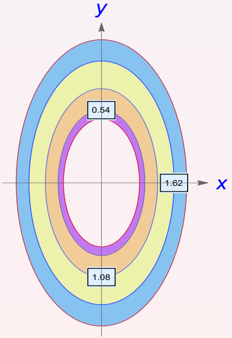


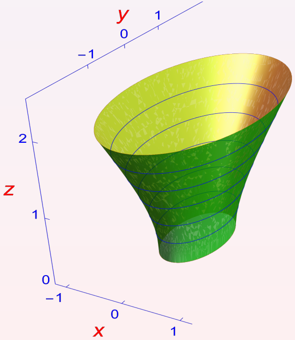


CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$

domínio $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \geq 1\}$
conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f : \sqrt{4x^2 + y^2 - 1} = k\}$

- $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in [0, \infty) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$
- $\mathcal{N}_k$ é a elipse $4x^2 + y^2 = 1 + k^2$





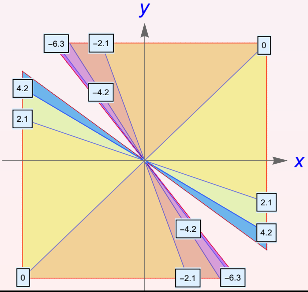
CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}, \quad x+y \neq 0$

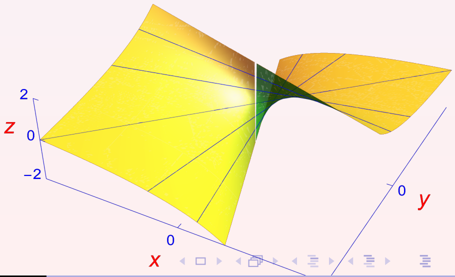
conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathcal{D}_f : x - y = k(x+y)\}$

1. Nível $\mathcal{N}_k$: $x - y = kx + ky \Leftrightarrow (1-k)x = (1+k)y$

(i) $\mathcal{N}_{-1}$ é a reta $x = 0$ ou (ii) $k \neq -1$ e $\mathcal{N}_k$ é a reta $y = \dfrac{1-k}{1+k}x$

2. $\mathcal{N}_k \neq \emptyset, \ \forall\, k \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$





CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; y = k(x^2+y^2+1)$ possui solução $(x,y) \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

(i) $\mathcal{N}_0$ é a reta $y = 0$

(ii) Se $k \neq 0$ tem-se $x^2 + y^2 - \dfrac{y}{k} + 1 = 0$, complete quadrado

$$x^2 + (y - \frac{1}{2k})^2 + 1 = \frac{1}{4k^2} \Rightarrow \frac{1}{4k^2} \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

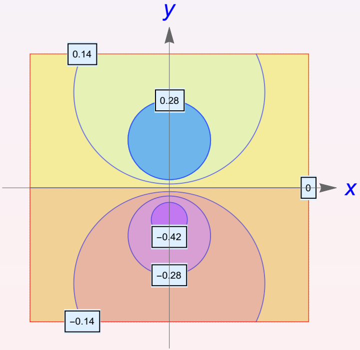
2. $\mathrm{Im}(f) = [-1/2, 1/2], \quad \mathcal{N}_{1/2} = \{(0,1)\}$ e $\mathcal{N}_{-1/2} = \{(0,-1)\}$

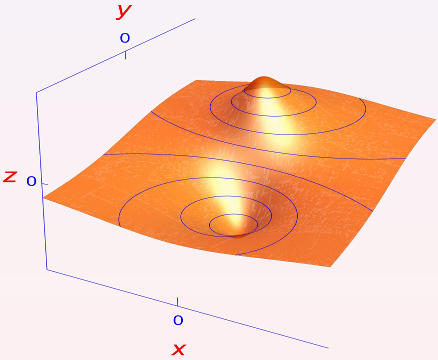
▷ $(0,1)$ e $(0,-1)$ são pontos de máximo e mínimo absolutos, respectivamente.

3. Se $-1/2 < k < 0$ ou $0 < k < 1/2$, $\mathcal{N}_k$ é a círcunferência

$$x^2 + (y - \frac{1}{2k})^2 = -1 + \frac{1}{4k^2} \Rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2k})^2 = \frac{1-4k^2}{4k^2}$$

Conjuntos de Nível e o Gráfico de $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$





MÁXIMOS E MÍNIMOS: SEJA $z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}_f$.

1. f é dita limitada $\Leftrightarrow |f(x, y)| \leq M$, para algum $M \in \mathbb{R}$.
2. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é ponto de máximo relativo de $f \Leftrightarrow$ $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \ \forall\, (x, y) \in \mathcal{D}_f$ e próximo de (x_0, y_0). Então $f(x_0, y_0)$ chama-se valor máximo relativo.
3. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é ponto de máximo absoluto de $f \Leftrightarrow$ $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \ \forall\, (x, y) \in \mathcal{D}_f$. Então $f(x_0, y_0)$ chama-se valor máximo absoluto
4. Valem análogos para mínimo (troque as desigualdades)
5. Pontos de máximo ou mínimo relativos são ditos pontos extremos relativos e os valores de f nesses pontos são ditos valores extremos relativos. Análogo para absoluto.
6. Desigualdades estritas $\Leftrightarrow$ extremos relativos estritos.

MÁXIMOS E MÍNIMOS: SEJA $z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}_f$

1. Ponto de máximo (ou mínimo) absoluto é ponto de máximo (ou mínimo) relativo. A recíproca pode ser falsa.
2. Se existem os valores máximo e mínimo absolutos, então a função é limitada. A recíproca pode ser falsa.
3. Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é um ponto de extremo relativo, único numa vizinhança, então o conjunto de nível $f(x, y) = k_0 = f(x_0, y_0)$ é o conjunto unitário $\{(x_0, y_0)\}$.

Exemplo

seja $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

1. O conjunto de nível k é não-vazio apenas para $-1/2 \leq k \leq 1/2$.
2. $\mathrm{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$ e portanto f é limitada.
3. $(0,1)$ é ponto de máximo absoluto e $f(0,1) = 1/2$ é o valor máximo absoluto.
4. $(0,-1)$ é ponto de mínimo absoluto e $f(0,-1) = -1/2$ é valor mínimo absoluto.
5. f não possui outros pontos de máximos ou mínimos relativos além dos pontos de máximo e mínimo absolutos.
6. Em vizinhanças de $(0,1)$ e $(0,-1)$ os conjuntos de nível são circunferências.

DEFINIÇÃO (LIMITE)

Considere uma função $z = f(x,y)$; $\quad (x,y) \in \mathcal{D}_f$ e um ponto (x_0, y_0). Um número real L é dito limite de $z = f(x,y)$ quando $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ tende para $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$ $f(x,y)$ se aproxima de L quando $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ se aproxima de (x_0, y_0).

Notação: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ou $f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} L$

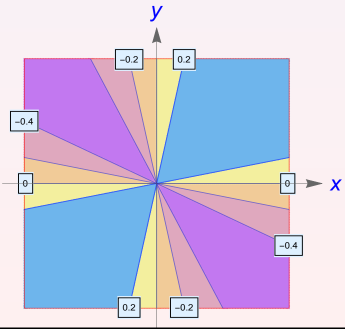
Observação: pode ser que $(x_0, y_0) \notin \mathcal{D}_f$.

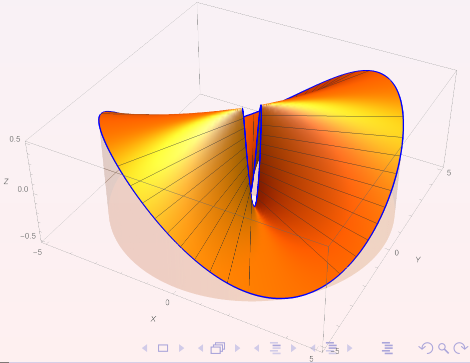
Exemplo: Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$,

As retas $r_1 : \ y = x$ e $r_2 : \ y = -2x$ passam por $(0,0)$ e $f(x,y)$ se anula em r_1 e vale -3 em $r_2 \Rightarrow$ o limite não existe.

CALCULE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

- O limite está indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$
- As retas $y = x$ e $y = -x$ passam por $(0,0)$ mas f vale $1/2$ na primeira e $-1/2$ na segunda. Portanto o limite não existe.





CALCULE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

1. O limite está indeterminado do tipo $\dfrac{0}{0}$

2. A reta $\alpha(t) = (a\,t, b\,t)$, $-1 < t < 1$, passa por $(0,0)$.

▷ $a \neq 0$ e $t \neq 0 \Rightarrow$

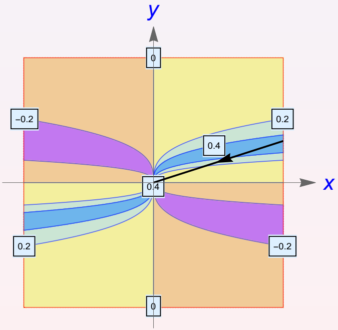
$$f(\alpha(t)) = \frac{ab^3\,t^4}{a^2t^2 + b^6t^6} = \frac{ab^3\,t^2}{a^2 + b^6t^4} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

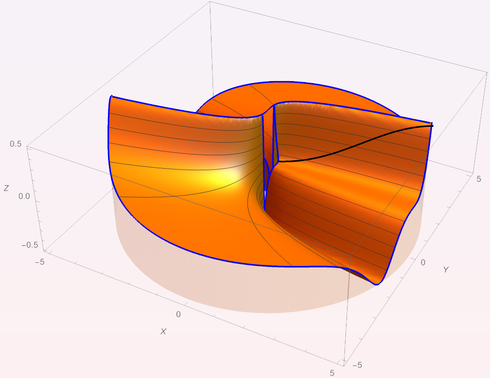
Cuidado: isto não garante que o limite acima é nulo!

3. O conjunto de nível k é dado por $xy^3 = kx^2 + ky^6$, a qual é satisfeita pela curva $\gamma(t) = (t^3, t)$, $t \neq 0$, quando $k = 1/2$.

▷ Então o $\mathrm{Traço}(\gamma)$ está contido no conjunto de nível $1/2$ e passa por $(0,0)$, portanto o limite não existe.

ILUSTRANDO A NÃO-EXISTÊNCIA DO $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$





CALCULE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

1. O limite está indeterminado do tipo $\dfrac{0}{0}$

2. A reta $\alpha(t) = (a\,t, b\,t)$, $-1 < t < 1$, passa por $(0,0)$.

▷ $a \neq 0$ e $t \neq 0 \Rightarrow$

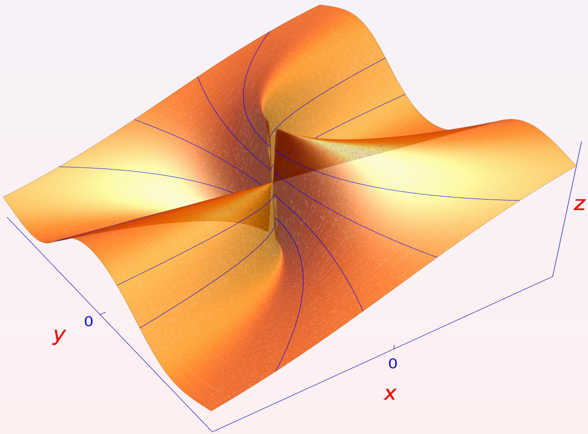
$$f(\alpha(t)) = \frac{ab^2\,t^3}{a^2t^2 + b^4t^4} = \frac{ab^2\,t}{a^2 + b^4t^4} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Cuidado: isto não garante que o limite acima é nulo!

3. O conjunto de nível k é dado por $xy^2 = kx^2 + ky^4$, que é satisfeita pela curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \neq 0$, quando $k = 1/2$.

▷ Então o $\mathrm{Traço}(\gamma)$ está contido no conjunto de nível $1/2$ e passa por $(0,0)$, portanto o limite não existe.

ILUSTRANDO A NÃO-EXISTÊNCIA DO $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$



Proposição

Considere uma função $z = f(x,y)$; $\quad (x,y) \in \mathcal{D}_f$ e as curvas $\gamma, \alpha : (a,b) \to \mathcal{D}_f$ tais que $\lim\limits_{t \to t_0} \gamma(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = (x_0, y_0)$. Se os limites $\lim\limits_{t \to t_0} f(\gamma(t))$ e $\lim\limits_{t \to t_0} f(\alpha(t))$ são diferentes ou se algum deles não existe, então $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe.

Corolário

Considere uma função $z = f(x,y)$; $\quad (x,y) \in \mathcal{D}_f$ e um ponto (x_0, y_0). Se $k_1 \neq k_2$ e existem curvas de níveis k_1 e k_2 que tendem a (x_0, y_0), então $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe.

Teorema (Confronto)

Se $z = f(x,y)$, $z = g(x,y)$ e $z = h(x,y)$, estão definidas em (x,y) próximos de (x_0,y_0), e $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$, então:

1. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$,

   então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$
2. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \infty$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$
3. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = -\infty$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$

COROLÁRIO (CONFRONTO)

Sejam $z = g(x,y)$ e $z = h(x,y)$; funções definidas em (x,y) próximos de (x_0, y_0). Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = 0$ e g é limitada, então $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)\,g(x,y) = 0$

Prova. Se g é limitada temos que $-M \leq g(x,y) \leq M$ e portanto $-M\,h(x,y) \leq h(x,y)\,g(x,y) \leq M\,h(x,y)$

Exemplo: Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ Oscilação

Aplique o corolário acima com $g(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ e $h(x,y) = x$ e conclua que o limite pedido é nulo.

CALCULE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

1. indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$
2. $0 \leq \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{|x|\,x^2}{x^2+y^2} \leq |x|$
3. Confronto: $g(x,y) = 0,\ h(x,y) = |x|$ e
$f(x,y) = \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right|$
4. conclua que: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| = 0 \Rightarrow$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

CALCULE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1. indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$
2. $0 \leq \left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x|$
3. Use confronto: $g(x,y) = 0,\ h(x,y) = |x|$ e $f(x,y) = \left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$
4. conclua que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0 \Rightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

CALCULE $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2-y^2}$

1. indeterminação $\dfrac{0}{0}$
2. a reta $\gamma(t) = (a\,t, b\,t),\ t \in \mathbb{R},$ passa por $(0,0)$

$a \neq \pm b$ e $t \neq 0 \Rightarrow f(at, bt) = \dfrac{ab^2\,t^3}{a^2t^2 - b^2t^2} = \dfrac{ab^2\,t}{a^2 - b^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

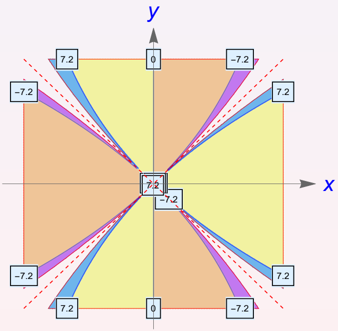
Cuidado: isto não garante que o limite pedido é nulo!

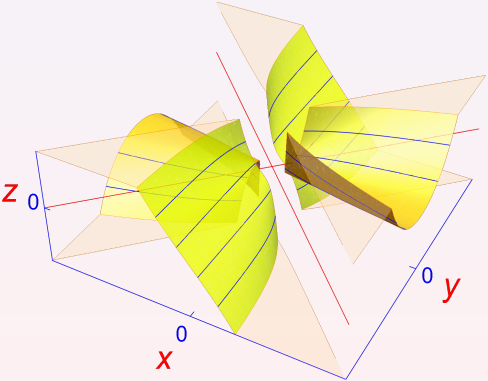
3. O conjunto de nível $k = 1$ tem equação
$xy^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow (1+x)y^2 = x^2 \Rightarrow$

$\alpha(t) = (t, \dfrac{|t|}{\sqrt{1+t}}),\ t > -1,$ passa por $(0,0)$

▷ O $\mathrm{Traço}(\alpha)$ está contido no conjunto de nível 1 e passa por $(0,0)$, portanto o limite não existe.

$f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 - y^2}$





Proposição (Operações com Limites)

Se $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = L_1$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = L_2$, então valem:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f_1(x,y) \pm f_2(x,y)) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f_1(x,y)\, f_2(x,y)) = L_1 L_2$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.
4. $L_1 > 0 \Rightarrow f_1(x,y) > 0$, $\forall\, (x,y)$ próximo de (x_0, y_0).
5. se $\lim\limits_{z\to L_1} g(z) = G$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f_1(x,y)) = G$, desde que

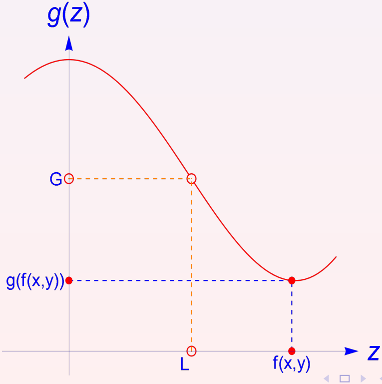
g seja contínua em L_1 ou $f_1(x,y) \neq L_1$, $\forall\,(x,y)$ próximo de (x_0, y_0)

Proposição (Composição e limite)

Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, $\lim\limits_{z\to L} g(z) = G$ e g é contínua em L

ou $f(x,y) \neq L$, para todo (x,y) próximo de (x_0, y_0), então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = G$$



EXEMPLOS

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = ?$ $\quad\triangleright$ indeterminação $\dfrac{0}{0}$

$f(x,y) = x^2+y^2 \Rightarrow f(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

2. sejam $f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ e

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } \quad z \neq 0 \\ 1, & \text{se } \quad z = 0 \end{cases}$$

note que $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, mas

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y))$ não existe.

Exemplos

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2) \; =?$ $\quad \triangleright$ indeterminação 0∞

$f(x,y) = 3x^2+y^2 \Rightarrow f(x,y) \neq 0,$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e $\lim_{z\to 0} z\ln z = 0$ (use L'Hôspital aqui), então

conclua que: $\quad \triangleright$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2) = 0$

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2) = 0.$ Para isto usamos o limite em (3),

as desigualdades

$(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2) \leq x^2\ln(3x^2+y^2) \leq 0$

e o teorema do confronto.

5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right) = 0.$ Para isto usamos o limite em (4) e que a função $\arctan(z)$ é limitada.

6. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x-1)(x^2+y^2)}-1}{(x-1)(x^2+y^2)} = ?$$ $\triangleright$ indeterminação $\frac{0}{0}$

Observe que: (i) para todo (x, y) próximo de $(0, 0)$ vale que $f(x, y) = (x-1)(x^2+y^2) \neq 0$, (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ e

(iii) $\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ (use L'Hôspital aqui). Então conclua que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x-1)(x^2+y^2)}-1}{(x-1)(x^2+y^2)} = 1$$

7. $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sin(2x-y)}{2x-y} = ?$$ $\triangleright$ indeterminação $\frac{0}{0}$

$\triangleright$ $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ e $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (2x-y) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sin(2x-y)}{2x-y} = 1$$

Exercícios

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+yx^2+x^3}{x^2+y^2+x^4}$

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2+3xy}{x^2+y^2+y^3}$

8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Lema (Coordenadas Polares)

Se $\displaystyle\lim_{r\to 0} f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\operatorname{sen}\theta) = L$, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

CALCULE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ **E** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

ambos indeterminados do tipo $\dfrac{0}{0}$

1. Em coordenadas polares $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2} = r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$$

como $\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) = 0$, resulta que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

2. $$\frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^3\sin^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3(1+\cos(x^2+y^2))} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)^2 \frac{x}{1+\cos(x^2+y^2)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Definição (Funções Contínuas)

Uma função $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, é dita contínua em (x_0, y_0) se, e somente se, valem:

1. Existe $f(x_0, y_0)$, ou seja, $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$
2. Existe o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$
3. $L = f(x_0, y_0)$

Se f é contínua em todo $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, f é dita contínua em $\mathcal{D}_f$

Exemplos 1. Polinômios em 2 variáveis, $z = p(x, y)$, são contínuos em $\mathbb{R}^2$, ex: $p(x, y) = x^2y - 3xy^3$, é contínuo em $\mathbb{R}^2$

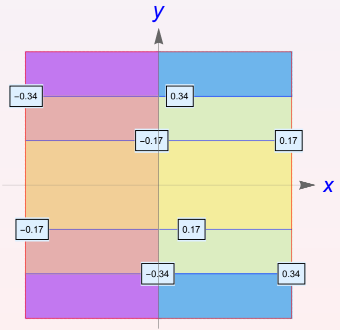
2. $$f(x, y) = \begin{cases} x \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ B, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

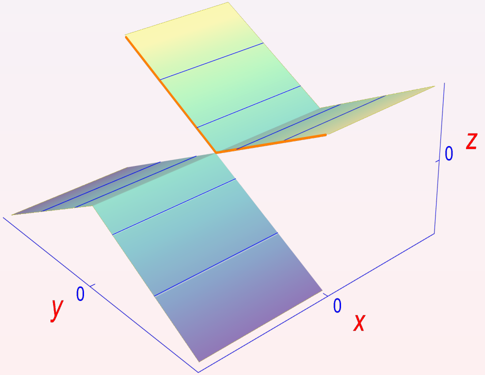
escolhendo $B = 0$, f torna-se contínua em $(0, 0)$

Exemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -|y|, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases},$$ f é contínua em $(0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$ mas é descontínua em $(0,1)$

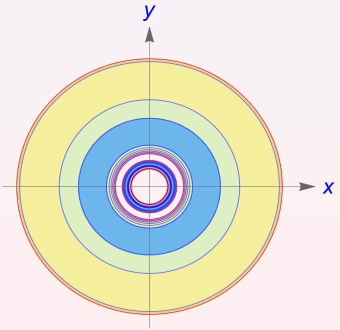


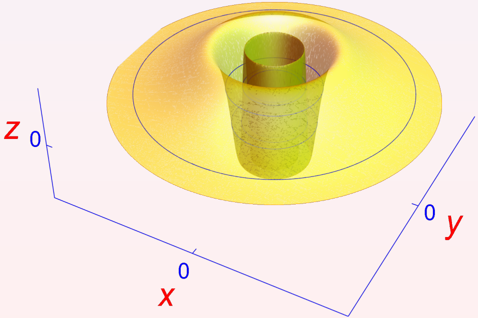


Exemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ B, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

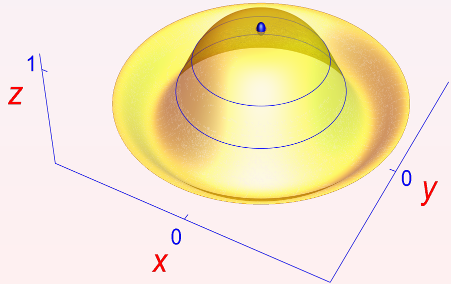
qualquer que seja B, f é descontínua em $(0,0)$ pois $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.





Exemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ B, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$, como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ a escolha $B = 1$ torna f contínua em $(0,0)$



EXEMPLOS

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ B, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

▷ $\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$

$$\frac{\sin^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \frac{1}{1+\cos(x^2+y^2)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Portanto, a escolha $B = 0$ torna f contínua em $(0,0)$.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{(x-1)(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ B, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

▷ $\dfrac{\mathrm{e}^{(x-1)(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} = \dfrac{(\mathrm{e}^{(x-1)(x^2+y^2)}-1)(x-1)}{(x-1)(x^2+y^2)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} -1$

Portanto, a escolha $B = -1$ torna f contínua em $(0,0)$.

Proposição (Operações com Funções Contínuas)

Se $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0), então valem:

1. $z = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, $z = f_1(x, y) - f_2(x, y)$ e $z = f_1(x, y)\, f_2(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0).

2. $z = \dfrac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ é contínua em (x_0, y_0), se $f_2(x_0, y_0) \neq 0$.

3. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é contínua em t_0 e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, então $z = f_1(\gamma(t))$ é contínua em t_0.

4. Se $w = g(z)$ é contínua em $z_0 = f_1(x_0, y_0)$, então $w = g(f_1(x, y))$ é contínua em (x_0, y_0).