Curvas no Plano e no Espaço

Edson Vargas

Universidade de São Paulo

Definição (Curva Parametrizada)

Uma curva parametrizada é uma função α que a cada t em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ associa um ponto $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ no $\mathbb{R}^n$.

Notações: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ou $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)); \quad t \in I$

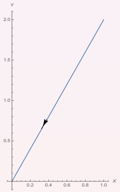
Traço ou imagem: $\mathrm{Traço}(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n : \; t \in I\}$

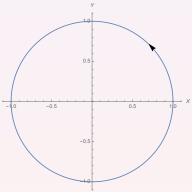
Outra notação

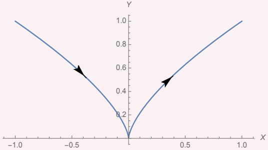
$$\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & x_1(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & x_n(t) \end{array} \right. \quad ; \quad t \in I$$

Exemplos

1. Segmento de reta: $\alpha(t) = (1 - t, 2 - 2t); \quad t \in [0, 1]$
2. Circunferência: $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t); \quad t \in [0, 2\pi]$
3. Cúspide: $\alpha(t) = (t^3, t^2); \quad t \in [-1, 1]$







Retas no $\mathbb{R}^n$

Reta por um ponto $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e paralela a um vetor diretor $V = (v_1, \ldots, v_n) \Longrightarrow \boxed{r(t) = P + t\,V, \quad t \in \mathbb{R}}$

Outra notação

$$r : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & p_1 & + & v_1\, t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & p_n & + & v_n\, t \end{array} \right. \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Observação:

Reta por dois ponto $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $Q = (q_1, \ldots, q_n)$.
Escolha o vetor diretor $V = P - Q = (p_1 - q_1, \ldots, p_n - q_n)$ e use a fórmula acima.

Exemplo: (reta no plano $\mathbb{R}^2$)

$$P = (1, -2) \text{ e } V = (2, 3) \Rightarrow r(t) = (1, -2) + t\,(2, 3), \;\; t \in \mathbb{R}$$

Outra notação

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -2 + 3\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Outra equação

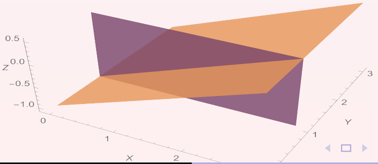
$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} \Rightarrow 3(x-1) = 2(y+2) \Rightarrow \boxed{r : \; 2y = 3x - 7}$$

Exemplo: (reta no espaço $\mathbb{R}^3$) $P = (2, 1, 0)$ e $V = (2, 0, -1)$

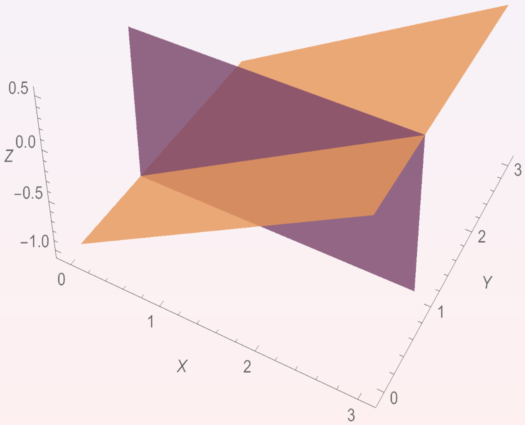
$$r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{z}{-1} \text{ e } y = 1 \Rightarrow -(x-2) = 2z \text{ e } y = 1 \Rightarrow$$

r é interseção de 2 planos $\boxed{r : \begin{cases} x + 2z = 2 \\ y = 1 \end{cases}}$



Retas no Espaço são Interseções de 2 Planos



Limite e Continuidade

Seja $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)); \quad t \in (a, b)$.

1. $\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = (\lim_{t \to t_0} x_1(t), \ldots, \lim_{t \to t_0} x_n(t))$

Exemplo:

$$\alpha(t) = (\frac{\operatorname{sen} t}{t}, \ \frac{\sqrt{t^2+4}-2}{t}); \quad 0 < t \leq 1$$

$$\lim_{t \to 0} \alpha(t) = (\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \ \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+4}-2}{t}) = (1, \, 0)$$

$$\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)}{t} \frac{(\sqrt{t^2+4}+2)}{(\sqrt{t^2+4}+2)} = \frac{t^2}{t\,(\sqrt{t^2+4}+2)} \to 0$$

Limite e Continuidade

Seja $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)); \quad t \in (a, b)$.

1. $\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = (\lim_{t \to t_0} x_1(t), \ldots, \lim_{t \to t_0} x_n(t))$

   Exemplo:

   $$\alpha(t) = \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}, \ \frac{\sqrt{t^2+4}-2}{t}\right); \quad 0 < t \leq 1$$

   $$\lim_{t \to 0} \alpha(t) = \left(\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \ \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+4}-2}{t}\right) = (1, \ 0)$$

   $$\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)}{t} \, \frac{(\sqrt{t^2+4}+2)}{(\sqrt{t^2+4}+2)} = \frac{t^2}{t\,(\sqrt{t^2+4}+2)} \to 0$$

2. $\alpha(t)$ é contínua $\iff$ cada $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ é contínua.

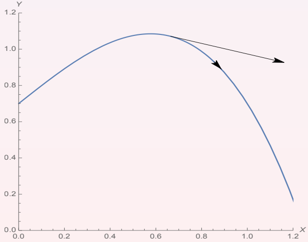
Diferenciabilidade

Seja $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$; $\quad t \in (a, b)$.

1. $\alpha(t)$ é derivável $\iff$ cada $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ é derivável.

   $\alpha'(t_0) = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0))$ é a derivada.

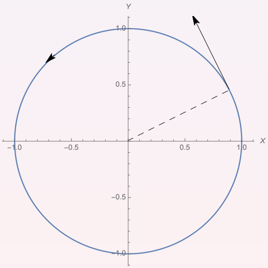
   Vetor tangente: Se $\alpha'(t_0) \neq (0, \ldots, 0)$, então $\alpha'(t_0)$ é um **vetor tangente** ao $\mathrm{Traço}(\alpha)$ no ponto $\alpha(t_0)$.



Diferenciabilidade e Tangente

$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t); \quad a \leq t \leq b$ é derivável e

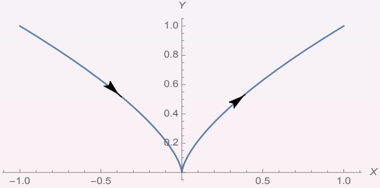
$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t), \quad \alpha'(\pi/6) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$



Reta tangente: $r(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) + t(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}); \quad t \in \mathbb{R}$

Diferenciabilidade e Tangente

$\alpha(t) = (t^3, t^2)$; $\quad -1 \leq t \leq 1$ é derivável e $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$



Observação:

1. $\alpha'(0) = (0,0)$ e o $\text{Traço}(\alpha)$ não possui tangente em $\alpha(0)$.
2. $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ satisfaz a equação $y = x^{2/3}$.

Definição (Curvas Suaves)

Uma curva parametrizada $\alpha(t)$; $t \in I$, é chamada suave se for derivável e $\alpha'(t) \neq (0, \ldots, 0)$; para todo t no interior de I.

Exemplos

1. $\alpha(t) = (1, t^2)$; $-1 \leq t \leq 1$ não é suave porque $\alpha'(t) = (0, 2t)$ se anula em $t = 0$.

2. $\alpha(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t)$; $0 \leq t \leq 3\pi$ é suave porque $\alpha'(t) = (\cos t - t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t \cos t)$ não se anula em $0 < t < 3\pi$, de fato:

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \cos^2 t - 2t \cos t \operatorname{sen} t + t^2 \operatorname{sen}^2 t +$$
$$+ \operatorname{sen}^2 t + 2t \cos t \operatorname{sen} t + t^2 \cos^2 t =$$
$$= 1 + t^2 \neq 0$$

Definição (Reta Tangente)

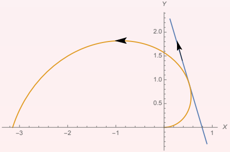
Se $\alpha(t)$; $\quad t \in I$, é uma curva parametrizada suave e $t_0 \in I$, então a reta $r(t) = \alpha(t_0) + t\,\alpha'(t_0)$ chama-se reta tangente ao traço $\mathrm{Traço}(\alpha)$ no ponto $\alpha(t_0)$.

Exemplo: Seja $\alpha(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\,t)$; $\quad 0 \le t \le \pi$.
Reta tangente ao $\mathrm{Traço}(\alpha)$ no ponto $\alpha(\pi/3)$.

$$\alpha(\pi/3) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) \text{ e } \alpha'(t) = (\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t, \mathrm{sen}\,t + t\cos t)$$

$$\alpha'(\pi/3) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right), \qquad v = (3 - \pi\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + \pi)$$

Reta tangente. $r(t) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) + t(3 - \pi\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + \pi)$



Definição (Curva Suave)

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado curva suave se existe uma curva parametrizada suave $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{Traço}(\alpha) = C$. Neste caso, α chama-se parametrização de C.

Exemplos

1. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é uma curva suave, $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ é uma parametrização suave de C.

2. Se a, b não são simultaneamente nulos, então $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ é uma curva suave.
Por exemplo, se $a \neq 0$, $\alpha(t) = (\frac{c - bt}{a}, t)$; $t \in \mathbb{R}$ é uma parametrização suave de C.

LEMA (GRÁFICO)

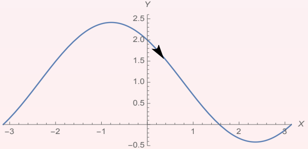
Se $y = f(x)$, $\quad a < x < b$, $\quad$ é uma função derivável, então $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \text{ e } a < x < b\}$ (chamado gráfico de f) é uma curva suave.

$\alpha(t) = (t, f(t))$; $\quad a < t < b$ é parametrização suave de $\mathrm{Gr}(f)$

Exemplo:

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 + \cos x - \operatorname{sen} x \text{ e } -\pi \leq x \leq \pi\}$ é uma curva suave.

$\alpha(t) = (t, 1 + \cos t - \operatorname{sen} t)$, $\quad -\pi \leq t \leq \pi$ é uma parametrização suave de C pois $\text{Traço}(\alpha) = C$ e $\alpha'(t) = (1, -\operatorname{sen} t - \cos t) \neq (0, 0)$; para todo $-\pi < t < \pi$.



AULA 2: Mais Exemplos de Curvas

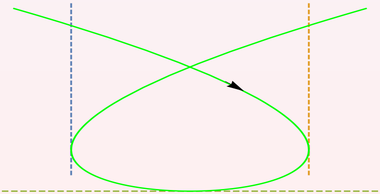
Seja $\alpha(t) = (t^3 - 3t, t^2)$; $t \in \mathbb{R}$. Ache os pontos do $\mathrm{Traço}(\alpha)$ com reta tangente horizontal ou vertical. Também ache equações para essas retas e faça um esboço do $\mathrm{Traço}(\alpha)$.

$$\boxed{\alpha'(t) = (3t^2 - 3, 2t)}$$

Vertical. $3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ ou } t = 1$

$\alpha(-1) = (2,1) \Rightarrow \boxed{r : x = 2}$ e $\alpha(1) = (-2,1) \Rightarrow \boxed{r : x = -2}$

Horizontal. $2t = 0 \Rightarrow t = 0$ $\alpha(0) = (0,0) \Rightarrow \boxed{r : y = 0}$



Interseção de Superfícies Transversais são Curvas

Parametrize a interseção de $z = x^2 - y^2$ e $z = 1 - x^2 - 2y^2$. Ache os pontos de $\mathrm{Traço}(\alpha)$ com reta tangente paralela ao eixo $\mathcal{O}x$ e dê equações para as mesmas.

Solução. $x^2 - y^2 = 1 - x^2 - 2y^2 \Longrightarrow \boxed{2x^2 + y^2 = 1}$

$$\alpha : \begin{cases} x &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y &= \operatorname{sen} t \\ z &= \dfrac{1}{2}\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \qquad \alpha' : \begin{cases} x' &= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t \\ y' &= \cos t \\ z' &= -3\cos t \operatorname{sen} t \end{cases}$$

onde $0 \le t \le 2\pi$. Paralela ao eixo $\mathcal{O}x \Longleftrightarrow y' = 0$ e $z' = 0$

$\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, -1) \Rightarrow \boxed{r(t) = (0, 1, -1) + t(1, 0, 0); \quad t \in \mathbb{R}}$

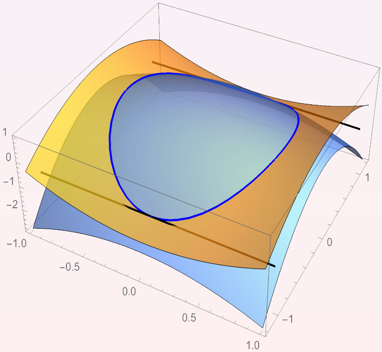
$\alpha(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1, -1) \Rightarrow \boxed{r(t) = (0, -1, -1) + t(1, 0, 0); \ t \in \mathbb{R}}$

$$\alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ \frac{1}{2}\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right);\quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ -3\cos t \operatorname{sen} t\right) = (a, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$$

$$\boxed{\alpha(\pi/2) = (0, 1, -1)} \Rightarrow \boxed{r(t) = (0, 1, -1) + t(1, 0, 0);\quad t \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\alpha(3\pi/2) = (0, -1, -1)} \Rightarrow \boxed{r(t) = (0, -1, -1) + t(1, 0, 0);\ t \in \mathbb{R}}$$



Observação: relações entre as coordenadas podem ajudar na visualização do traço de curvas.

Exemplos

1. Seja $\alpha(t) = (t\cos t, t\,\text{sen}\, t, t); \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

$$\boxed{x^2 + y^2 = z^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Traço}(\alpha) \quad \text{está contido no cone.}$$

Observação: relações entre as coordenadas podem ajudar na visualização do traço de curvas.

Exemplos

1. Seja $\alpha(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, t)$; $\quad 0 \le t \le 4\pi$

$\boxed{x^2 + y^2 = z^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Traço}(\alpha)$ está contido no cone.

Observação: relações entre as coordenadas podem ajudar na visualização do traço de curvas.

Exemplos

1. Seja $\alpha(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, t)$; $0 \leq t \leq 4\pi$

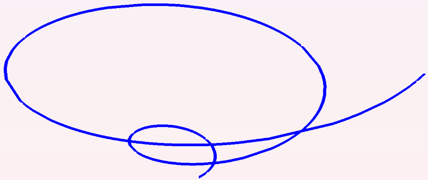
$\boxed{x^2 + y^2 = z^2}$ $\Rightarrow$ $\text{Traço}(\alpha)$ está contido no cone.

Observação: relações entre as coordenadas podem ajudar na visualização do traço de curvas.

Exemplos

1. Seja $\alpha(t) = (t\cos t, t\text{sen}\, t, t); \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

$\boxed{x^2 + y^2 = z^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Traço}(\alpha)$ está contido no cone.

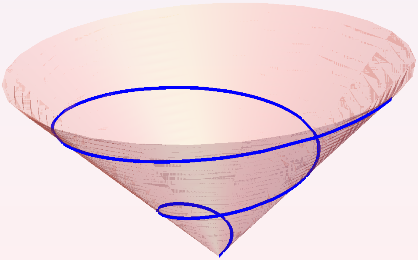


Observação: relações entre as coordenadas podem ajudar na visualização do traço de curvas.

Exemplos

1. Seja $\alpha(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, t)$; $\quad 0 \leq t \leq 4\pi$

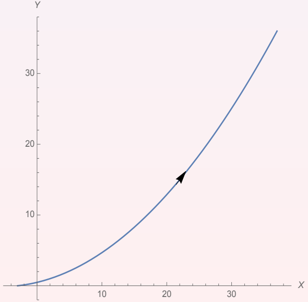
$\boxed{x^2 + y^2 = z^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Traço}(\alpha)$ está contido no cone.



2. $$\alpha : \begin{cases} x = 10t^2 - 3 \\ y = t^2 + 2t^4 \end{cases} ; \quad t \in [0, 2]$$

$$t^2 = \frac{x+3}{10} \implies y = \frac{x+3}{10} + \frac{(x+3)^2}{50}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{50}(x^2 + 11x + 24); \quad -3 \leq x \leq 37}$$

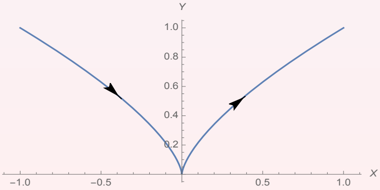


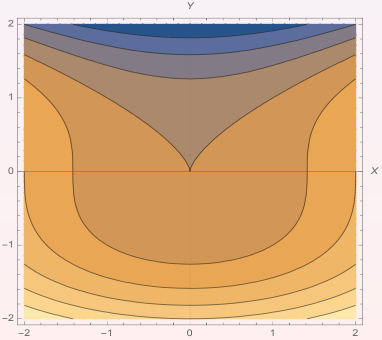
3 - A Cúspide: $\alpha(t) = (t^3, t^2); \quad -1 \leq t \leq 1$

$$\boxed{x^2 = y^3} \quad \Longrightarrow \quad y = x^{2/3}; \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\boxed{f(x,y) = x^2 - y^3} \quad \Longrightarrow \quad f(\alpha(t)) = 0$$

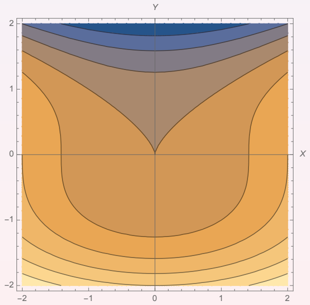
Nesse caso dizemos que $\mathrm{Traço}(\alpha)$ é uma curva de nível de f.

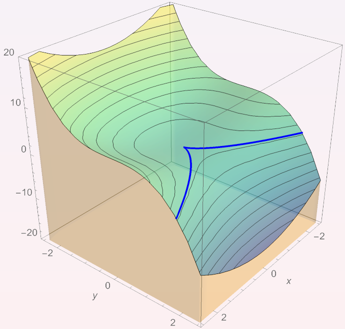




3 - A Cúspide: $\alpha(t) = (t^3, t^2);\ -1 \leq t \leq 1;$

Traço(α) é curva de nível de $\boxed{f(x, y) = x^2 - y^3}$





AULA 3: Funções de 2 Variáveis

DEFINIÇÃO (DOMÍNIO, IMAGEM E GRÁFICO)

Seja f uma função que a cada (x, y) em um conjunto $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$, chamado domínio de f, associa um número real $z = f(x, y)$. A imagem de f é o conjunto $\mathrm{Im}(f)$ de todos os valores de $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in \mathcal{D}_f$. O gráfico de f é o conjunto $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$

Notações: $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ ou $\boxed{z = f(x, y); \ (x, y) \in \mathcal{D}_f}$

Observações:

1. (x, y) são variáveis independentes (ou livres) no domínio $\mathcal{D}_f$, determinado por condições físico-químicas e z é variável dependente.

2. $\mathrm{Im}(f)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

3. $\mathrm{Gr}(f)$ é uma superfície no espaço $\mathbb{R}^3$ que representa a função geometricamente.

Exemplos

1. Modelo de Boyle-Mariotte do Gás ideal $\boxed{P = \dfrac{nRT}{V}}$

2. Modelo de van der Waals do Gás $\boxed{P = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}}$

3. Dada $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$ ache o domínio máximo $\mathcal{D}_f$ e a Imagem $\mathrm{Im}(f)$.

Domínio. $\mathcal{D}_f$ conjunto dos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $4x^2 + y^2 \geq 1$,

ou seja: $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \geq 1\}$

Imagem. $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$

Conjuntos de Nível de uma Função

DEFINIÇÃO (CONJUNTO DE NÍVEL)

Sejam $k \in \mathbb{R}$ e uma função $z = f(x, y)$; $(x, y) \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$.
O conjunto de nível k é o conjunto dos $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ tais que

$$\boxed{f(x, y) = k}$$

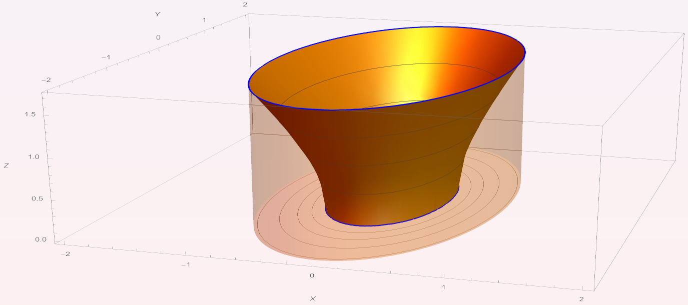
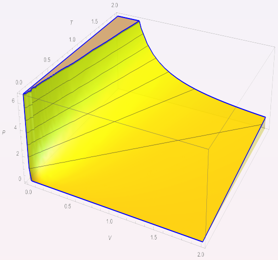
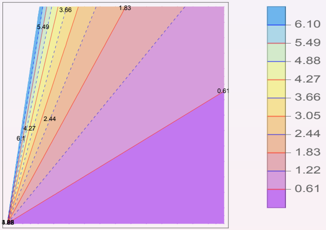
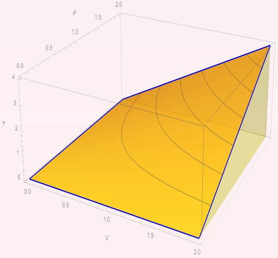


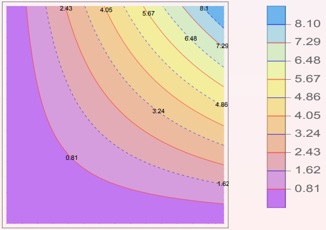
FIGURA: $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$

TABELA: Gás Ideal $P = \dfrac{nRT}{V}$, Isobáricas e Isotérmicas







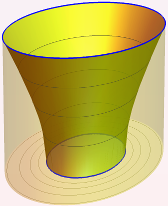


Exemplo: Dada $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$, ache seu domínio máximo $\mathcal{D}_f$ e sua decomposição em conjuntos de nível.

1) Domínio. $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \geq 1\}$.

2) Níveis. Ache $k \in \mathbb{R}$ com $\sqrt{4x^2 + y^2 - 1} = k$, para algum $(x,y) \in \mathcal{D}_f \Rightarrow k \geq 0$

$$4x^2 + y^2 - 1 = k^2 \iff \boxed{4x^2 + y^2 = 1 + k^2}$$



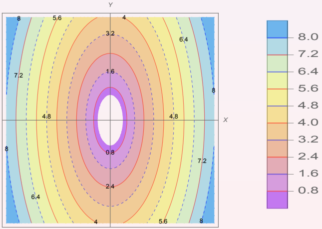


TABELA: $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$ e suas curvas de nível

Exemplo: Dada $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, descreva o seu domínio máximo $\mathcal{D}_f$, a sua imagem $\mathrm{Im}(f)$, conjuntos de nível e o seu gráfico $\mathrm{Gr}(f)$.

1. $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$.

2. Ache $k \in \mathbb{R}$ com $\dfrac{x-y}{x+y} = k$, para algum $(x,y) \in \mathcal{D}_f$.

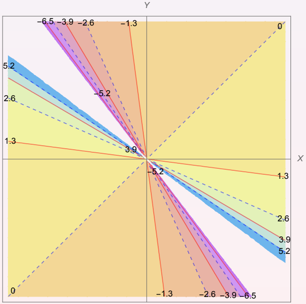
$x - y = kx + ky \iff (1-k)x = (1+k)y$

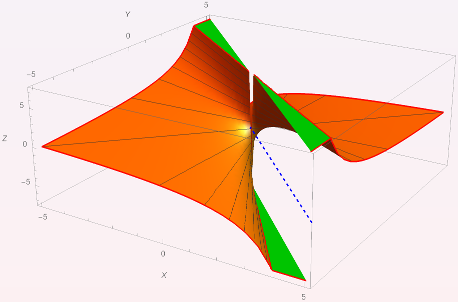
$k = -1 \Rightarrow x = 0$ e $k \neq -1 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1-k}{1+k}x} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

3. $(Im)(f) = \mathbb{R}$

4. $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y, \dfrac{x-y}{x+y}) : x+y \neq 0\}$

Conjuntos de Nível e Gráfico de $\boxed{f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}}$; $\quad x + y \neq 0$





Curva de Nível

Exemplo: Dada $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$, descreva o seu domínio máximo $\mathcal{D}_f$, a sua imagem $\mathrm{Im}(f)$ e os conjuntos de nível.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$, a fórmula se aplica a todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Ache $k \in \mathbb{R}$ com $\dfrac{y}{x^2+y^2+1} = k$, para algum $(x,y) \in \mathcal{D}_f$.

$y = k(x^2+y^2+1) \Rightarrow$

(i) Se $k=0$ a reta $y=0$ é a curva de nível zero.

(ii) Se $k \neq 0 \Rightarrow x^2+y^2-\dfrac{y}{k}+1=0$, complete quadrado.

$$\boxed{x^2+(y-\frac{1}{2k})^2 = -1+\frac{1}{4k^2}} \Rightarrow \frac{1}{4k^2} \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

Conclui-se que a imagem é $\mathrm{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$

Curva de Nível

Equação da curva de nível k: $ky^2 - y + kx^2 + k = 0$

Se $k \neq 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + (y - \frac{1}{2k})^2 = -1 + \frac{1}{4k^2}} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$

Se $k = -1/2 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, -1)$, ponto .

Se $k = 1/2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 1)$, ponto.

Se $-1/2 < k < 0$ ou $0 < k < 1/2$ a curva de nível k é o círculo de centro $(0, \frac{1}{2k})$ e raio $\sqrt{-1 + \frac{1}{4k^2}}$, com equação

$$\boxed{x^2 + (y - \frac{1}{2k})^2 = -1 + \frac{1}{4k^2}}$$

Conjuntos de Nível e o Gráfico de $\boxed{f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}}$