A INTEGRAL DE RIEMANN EM DUAS VARIÁVEIS

1. Integral em retângulos

2. Conceitos básicos de topologia no plano

3. Integral em domínios limitados do plano

4. Integrais iteradas e o Teorema de Fubini

Seja $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Vamos supor inicialmente que f é contínua e positiva no retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ por simplicidade. Para cada $x_0 \in [a, b]$, a função $f_{x_0}(y) := f(x_0, y)$ é contínua no intervalo $[c, d]$, portanto integrável. A função $A(x_0) := \int_c^d f_{x_0}(y)\, d\, y$ é então a área sob o gráfico da função f_{x_0} ou seja, a área da região plana dada pela interseção da região abaixo do gráfico de $f(x, y)$ com o plano $x = x_0$. O princípio de Cavalieri afirma que a integral dessa área, quando x_0 varia entre a e e b corresponde o volume sob o gráfico de $f(x, y)$.

Devemos, portanto, ter

Date: August 17, 2023.

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d\,x\,d\,y = \int_a^b A(x)\,d\,x = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)\,d\,y\right)\,dx$$

.

A integral $\int_a^b \left(\int_c^d f_{x_0}(y)\,d\,y\right)\,dx$ é chamada **integral iterada**. Nesse caso, primeiro calculamos uma integral na variável y obtendo uma função $A(x)$ de uma variável que então integramos em x. Podemos, analogamente, integrar primeiro na variável x e depois em y.

Teorema 4.1. *(Teorema de Fubini para retângulos) Suponhamos que* $\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *seja contínua no retângulo* $\mathcal{R}$ *exceto em um conjunto finito de pontos.*

- *Para cada* $x \in [a,b]$, $f_x(y) := f(x,y)$ *é integrável no intervalo* $[c,d]$, $\phi(x) := \int_c^d f(x,y)\,d\,y$ *é integrável em* $[a,b]$ *e*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d\,x\,d\,y = \int_a^b \phi(x)\,d\,x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,d\,y\right)\,dx.$$

- *Para cada* $y \in [c,d]$, $f_y(x) := f(x,y)$ *é integrável no intervalo* $[a,b]$, $\phi(y) := \int_a^b f(x,y)\,d\,x$ *é integrável em* $[c,d]$ *e*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d\,x\,d\,y = \int_c^d \phi(y)\,d\,y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,d\,x\right)\,d\,y.$$

Observação 4.2. *O resultado ainda vale se supusermos apenas que* f *é integrável em* $\mathcal{R}$. *Nesse caso, porém, as funções* $\phi(x)$ *e* $\psi(y)$ *estarão definidas exceto em conjuntos de conteúdo nulo (onde precisa ser definida de alguma maneira de modo a ficar limitada).*

Exemplo 4.3.

(1) *Calcule a integral* $\iint_R 3xy^2dxdy$, *sendo* $R = \{(x,y) : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

(2) *Calcule a integral* $\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^3\, e^{x^2 y}\, dxdy$.

O teorema de Fubini pode ser estendido para domínios mais gerais. Em particular, para domínios do tipo I e II, cuja definição lembramos aqui, por conveniência.

- **Domínios do tipo I.** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, sendo $a < b$ constantes reais, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ funções contínuas.
- **Domínios do tipo II.** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$, sendo $a < b$ constantes reais, $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ funções contínuas.

Teorema 4.4. *(Teorema de Fubini para domínios do tipo I e II)*

- *Suponhamos que D seja um domínio do tipo I, $f : D \to \mathbb{R}$ seja contínua em D, exceto em um conjunto finito de pontos. Então, para cada $x \in [a,b]$, $f_x(y) := f(x,y)$ é integrável no intervalo $[\alpha(x), \beta(x)]$, $\phi(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, d\, y$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\iint_D f(x,y)\, d\, x\, d\, y = \int_a^b \phi(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, d\, y \right) d\, x.$$

- *Suponhamos que D seja um domínio do tipo II, $f : D \to \mathbb{R}$ seja contínua em D, exceto em um conjunto finito de pontos. Então, para cada $y \in [c,d]$, $f_y(x) := f(x,y)$ é integrável no intervalo $[\alpha(y), \beta(y)]$, $\phi(y) := \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, d\, x$ é integrável em $[c,d]$ e*

$$\iint_D f(x,y)\, d\, x\, d\, y = \int_c^d \phi(y)\, dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, d\, x \right) d\, y.$$

Exemplo 4.5.

(1) *Calcule a integral* $\iint_D xy)\,dx\,dy$, *sendo* $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(2) *Determine o volume do sólido* S *contido no o primeiro octante e limitado pelo cilindro* $x^2+y^2 = 1$ *e pelos planos* $y = z$, $x = 0$ *e* $z = 0$. *Resp.* $\frac{1}{3}$.

(3) *Calcule a integral iterada* $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dxdy$, *invertendo a ordem de integração.* *Resp.* $(e^9 - 1)/6$.