representa um tensor, pois a forma bilinear

$$\begin{aligned} B_{ij}\xi_i\eta_j &= -x_1x_2\xi_1\eta_1 + x_1^2\xi_1\eta_2 - x_2^2\xi_2\eta_1 + x_1x_2\xi_2\eta_2 \\ &= x_1\xi_1(x_1\eta_2 - x_2\eta_1) + x_2\xi_2(x_1\eta_2 - x_2\eta_1) \\ &= (x_1\xi_1 + x_2\xi_2)(x_1\eta_2 - x_2\eta_1) = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\xi})[\mathbf{u}\times\boldsymbol{\eta}] \end{aligned}$$

foi reduzida a um invariante rotacional.*

Suponha agora que estamos lidando com uma matriz que representa um operador linear que age sobre vetores. Se os vetores sofrerem uma rotação, a matriz sofrerá uma transformação de semelhança. Uma tal matriz possui caráter tensorial?

A resposta é "sim". A transformação de vetores $x' = Ax$ (veja o Capítulo 10)† significa, em notação tensorial, $x_i' = a_{ij}x_j$; a transformação de uma matriz P, que representa um operador $\mathcal{P}$, sob transformações *ortogonais*, é

$$P' = APA^T \qquad \text{ou} \qquad P'_{ij} = a_{ik}P_{kl}a^T_{lj}.$$

No entanto, $a^T_{lj} = a_{jl}$, de maneira que

$$P'_{ij} = P_{kl}a_{ik}a_{jl},$$

ou seja, P se transforma como um tensor.⁺

Este resultado permite que transportemos para a álgebra tensorial alguns dos enunciados relacionados com a transformação de semelhança. Por exemplo, concluímos que se um tensor de posto dois é simétrico ou anti-simétrico em um referencial, então esta propriedade se mantém em todos os referenciais. Isso pode, por sua vez, levar-nos a conjecturar uma propriedade semelhante para tensores de posto arbitrário. A conjectura é verdadeira. Por exemplo, suponha que $A_{ijk} = A_{jik}$ em um certo referencial. Como temos sempre

$$A_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k = A'_{ijk}\xi'_i\eta'_j\zeta'_k,$$

e (defina $B_{ijk} \equiv A_{jik}$, se quiser)

$$A_{jik}\xi_i\eta_j\zeta_k = A'_{jik}\xi'_i\eta'_j\zeta'_k,$$

segue-se que, se os lados esquerdos destas equações são iguais, então os lados direitos serão também iguais. No entanto, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ são vetores unitários arbitrários; portanto (como na p. 676) $A'_{jik} = A'_{ijk}$, como é desejado.

16.5 TENSORES DE KRONECKER E DE LEVI-CIVITA. PSEUDOTENSORES

Considere a matriz identidade 3 × 3, cujos elementos são o delta de Kronecker. Se for encarada como a representação de um tensor em um certo referencial, então o invariante bilinear correspondente

$$\delta_{ij}\xi_i\eta_j = \xi_i\eta_i = \cos(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$$

*Lembre-se (p. 26) que o produto vetorial no plano é um escalar sob rotações.
†Representamos, contudo, por A a matriz conhecida por T na p. 435 para adaptar-se à notação deste capítulo.
⁺O leitor pode também observar que, como tensor, a quantidade $y_iP_{ij}x_j$ é um invariante, o tensor P_{ij} deve sofrer uma transformação de congruência (p. 443) que, naturalmente, se reduz aqui a uma transformação de semelhança.

será o cosseno do ângulo entre os vetores unitários $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$. Observe agora que $\cos(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ será representado pela expressão $\xi'_i\eta'_i$ *em qualquer outro* sistema cartesiano ortogonal, incluindo os negativamente orientados. Isso implica que as componentes de nosso tensor não se alteram quando passamos a outro referencial cartesiano ortogonal. Isso pode ser verificado explicitamente

$$\delta'_{ij} = \delta_{kl}a_{ik}a_{jl} = a_{il}a_{jl} = \delta_{ij},$$

e segue-se também do fato de que a matriz unitária é invariante sob transformações de semelhança.

Observação. Tensores que possuem componentes iguais em todos os referenciais são chamados de *tensores isotrópicos*, e são de grande interesse em aplicações físicas. Acabamos de encontrar um destes tensores, que poderemos designar como *tensor de Kronecker* ou *tensor unitário*. Além do mais, é claro que qualquer múltiplo escalar do tensor de Kronecker é também um tensor isotrópico.

Observando que o tensor de Kronecker está envolvido na expressão do produto escalar de dois vetores

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \delta_{ij}x_iy_j,$$

é lógico procurar uma representação semelhante para o produto vetorial

$$[\mathbf{x}\times\mathbf{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{u}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{u}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{u}_3,$$

onde os vetores unitários **i**, **j**, **k** são convenientemente representados por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

Um pouco de reflexão mostra que, se definirmos o chamado *símbolo de Levi-Civita* ϵ_{ijk} por meio de

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (ijk) \text{ é uma permutação par* de } (123), \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ é uma permutação ímpar de } (123), \\ 0 & \text{nos outros casos (alguns ou todos os índices iguais),} \end{cases}$$

então o produto vetorial poderá ser compactamente representado por

$$[\mathbf{x}\times\mathbf{y}] = \epsilon_{ijk}\mathbf{u}_ix_jy_k.$$

Observe também que, como o produto vetorial pode ser escrito como um determinante simbólico,

$$[\mathbf{x}\times\mathbf{y}] = \det\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

segue-se que o símbolo de Levi-Civita está relacionado com os determinantes. Com efeito, é evidente que podemos escrever†

*Permutações pares de (123) são (123), (231) e (312), enquanto que permutações ímpares são (132), (321) e (213). Para a definição geral de permutações pares e ímpares, consulte, por exemplo, Birkhoff e McLane, Capítulo 6, Seção 10.
†Isso segue-se também da definição de determinante. Veja, por exemplo, Birkhoff e McLane, Capítulo 10, Seção 1.

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k.$$

Nesta notação, o determinante 3×3 é interpretado como o produto misto de seus vetores-linha **a**, **b** e **c**, e é igual ao volume do paralelepípedo formado por estes vetores, exceto quanto ao sinal (mais no caso de um terno positivamente orientado, menos no caso de um terno negativamente orientado).

Exercício. Três vetores são dados:

$$\mathbf{a} = (3, -1, 1), \qquad \mathbf{b} = (1, 4, 2), \qquad \mathbf{c} = (-1, 0, 3).$$

Mostre qual dos seis arranjos possíveis em um terno ordenado fornecem, respectivamente, ternos positivamente orientados e ternos negativamente orientados.

Teorema. As 27 quantidades ϵ_{ijk} são as componentes de um tensor isotrópico de posto três, conhecido como *tensor de Levi-Civita,* desde que a transformação das coordenadas seja uma *rotação.*

Demonstração. Sejam $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ vetores unitários, que formam um terno positivamente orientado. O volume do paralelepípedo formado por estes vetores é um invariante sob rotações e, portanto, um tensor. No entanto, este volume será representado por $\epsilon_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k$ em qualquer sistema positivamente orientado.* Por conseguinte, os símbolos de Levi-Civita formam um tensor isotrópico.

Suponha agora que consideramos uma transformação ortogonal, que leva um sistema positivamente orientado em um sistema negativamente orientado, ou vice-versa.† Então, a quantidade $\epsilon_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k$ deixa de ser um invariante, muda de sinal. Por conseguinte, *deixa de ser um tensor* com relação a transformações ortogonais gerais. Alguns outros invariantes rotacionais se comportarão desta maneira, mudando de sinal sempre que a paridade do sistema de coordenadas for invertida. É assim conveniente introduzir o conceito dos chamados *pseudotensores;* isso pode ser feito de duas maneiras equivalentes:

a') Um pseudotensor cartesiano de posto r é uma função multilinear de r direções, que se transforma segundo a lei

$$P'_{ij\ldots n}\xi'_i\eta'_j\cdots\lambda'_n = (\det A)P_{ij\ldots n}\xi_i\eta_j\cdots\lambda_n,$$

onde $\det A$ é o determinante da matriz de transformação (a matriz dos a_{ij}).

b') Um pseudotensor cartesiano de posto r é um conjunto de quantidades (componentes de um pseudotensor), que se transforma de acordo com as equações

$$P'_{ij\ldots n} = (\det A)P_{pq\ldots t}a_{ip}a_{jq}\cdots a_{nt}.$$

Como, para as matrizes ortogonais reais, $\det A$ pode ter somente dois valores, $+1$ ou -1, segue-se que a diferença entre os pseudotensores e os tensores reside, no máximo, no sinal, e desaparece inteiramente no caso das rotações. Evidentemente, o

*Observe que um terno positivamente orientado torna-se negativamente orientado se o sistema coordenado muda de "orientação".

†Tais transformações ortogonais são, por vezes, chamadas de *rotações impróprias.*

símbolo de Levi-Civita torna-se uma representação de um pseudotensor isotrópico de posto três.* É costume referir-se aos pseudotensores de posto zero e um, como sendo pseudovetores e pseudo-escalares, respectivamente.

Observação. Alguns autores referem-se a ϵ_{ijk} como sendo o *tensor densidade* de Levi-Civita, pois os pseudotensores são exemplos cartesianos do conceito de densidade de tensores na teoria geral dos tensores (veja a Seção 16.9).

A expressão $\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$ representa tecnicamente uma contração tripla do pseudotensor ϵ_{ijk} com o tensor $v_{lmn} = a_lb_mc_n$. Há muitas outras fórmulas úteis relacionadas com a contração com o pseudotensor de Levi-Civita. Talvez a expressão mais comumente usada seja $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$, que deve ser† um tensor de posto quatro.

Teorema. No espaço tridimensional

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Demonstração. A quantidade $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$ (para um certo k fixo, sem somatório) é não-nula se e somente se i, j, k são todos distintos, e k, l, m são todos distintos. Portanto, ou $i = l$ e $j = m$, ou $i = m$ e $j = l$. No primeiro caso, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{klm}$, e quer $\epsilon_{ijk} = +1$ ou $\epsilon_{ijk} = -1$, teremos sempre $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = +1$ (sem somatório). No segundo caso, $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{klm}$ pois a mudança de posição de dois índices muda o sinal do valor ϵ_{ijk}. Por conseguinte $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = -1$ (sem somatório).

Ora, se i, j, l e m forem fixos, e k percorrer os valores 1, 2, 3, então somente um termo da soma será não-nulo (como explicado acima), e, portanto, a soma total será $+1$ ou -1. Isso pode ser escrito como sendo $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, pois esta expressão fornece $+1$ para $i = l, j = m, i \neq j$ e -1 para $i = m, j = l, i \neq j$; se não tivermos nenhum destes casos, obteremos zero. A demonstração está completa.

Exercício. Verifique que

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}.$$

16.6 DERIVADAS DE TENSORES. O TENSOR DAS DEFORMAÇÕES E A LEI DE HOOKE

As componentes de tensores podem ser funções diferenciáveis (a) das coordenadas, (b) de parâmetros independentes das coordenadas, ou (c) de parâmetros relacionados com as coordenadas. O caso (b) é o mais simples e fornece o seguinte resultado.

Teorema 1. A diferenciação de um tensor, com relação a um parâmetro independente das coordenadas, resulta em um tensor de mesmo posto.

Demonstração. Considere $A'_{ij}(t) = A_{kl}(t)a_{ik}a_{jl}$, onde t é o parâmetro, por exemplo, o tempo em física não-relativista.+ Como os a_{ij} são independentes de t, obtemos

$$\frac{dA'_{ij}(t)}{dt} = \frac{dA_{kl}(t)}{dt}a_{ik}a_{jl}$$

*Poderíamos ainda falar de um tensor de Levi-Civita, mas ele não seria isotrópico, pois suas componentes mudariam de sinal sob rotações impróprias. As componentes de um pseudotensor de Levi-Civita *não mudam de sinal* devido ao efeito compensador de $\det A$.

†Um produto (interno ou externo) de dois pseudotensores é, evidentemente, um tensor.

+Em física relativista, o tempo é considerado uma das coordenadas do chamado "contínuo espaço-tempo".