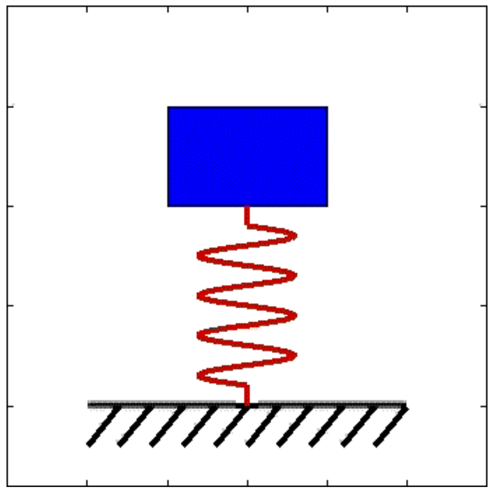
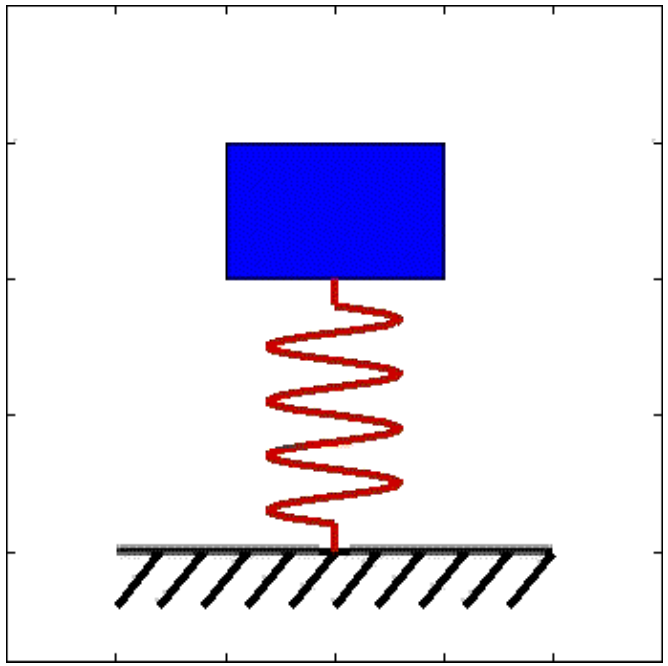
Em um oscilador, o período da oscilação depende da amplitude?

1)Não, nunca.
2)Sim, sempre.
3)Não, em primeira aproximação.



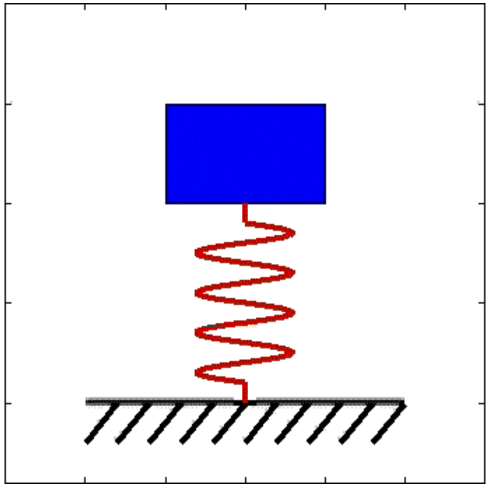
Em um oscilador, que grandeza pode ser considerada constante?

1) posição da massa
2) velocidade da massa
3) energia total
4) energia da massa
5) energia da mola



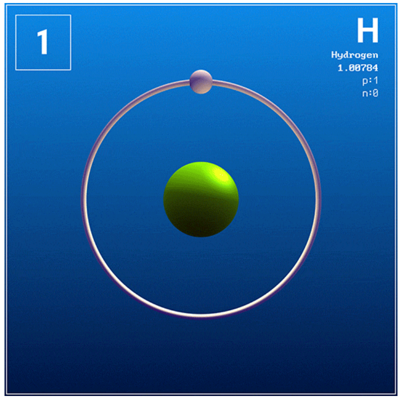
Em um oscilador **harmônico**, o período da oscilação depende da amplitude?

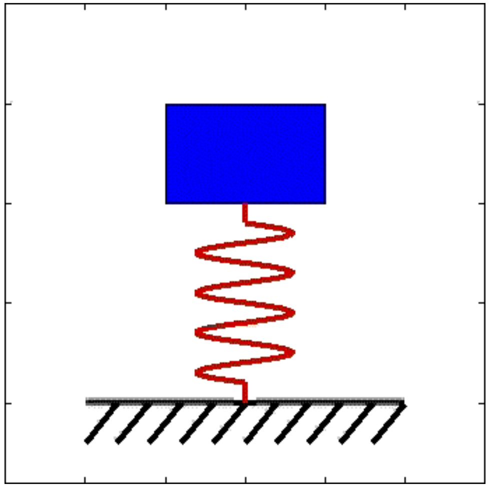
1)Não, nunca.
2)Sim, sempre.
3)Não, em primeira aproximação.

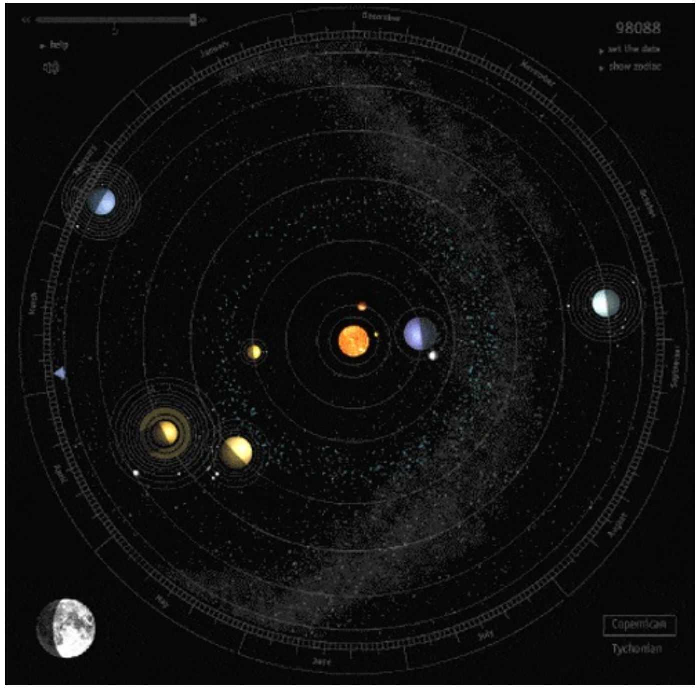


Oscilador Harmônico

Que sistemas podem ser descritos por um oscilador harmônico?





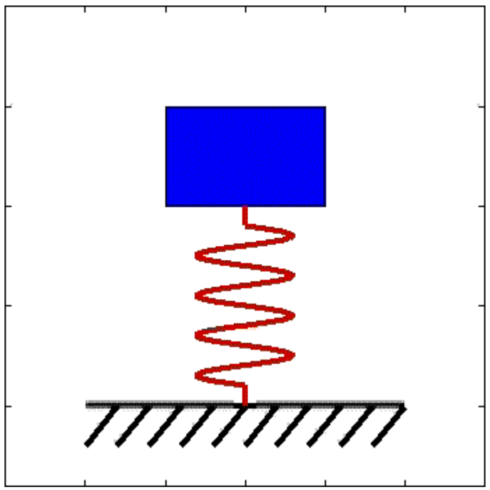


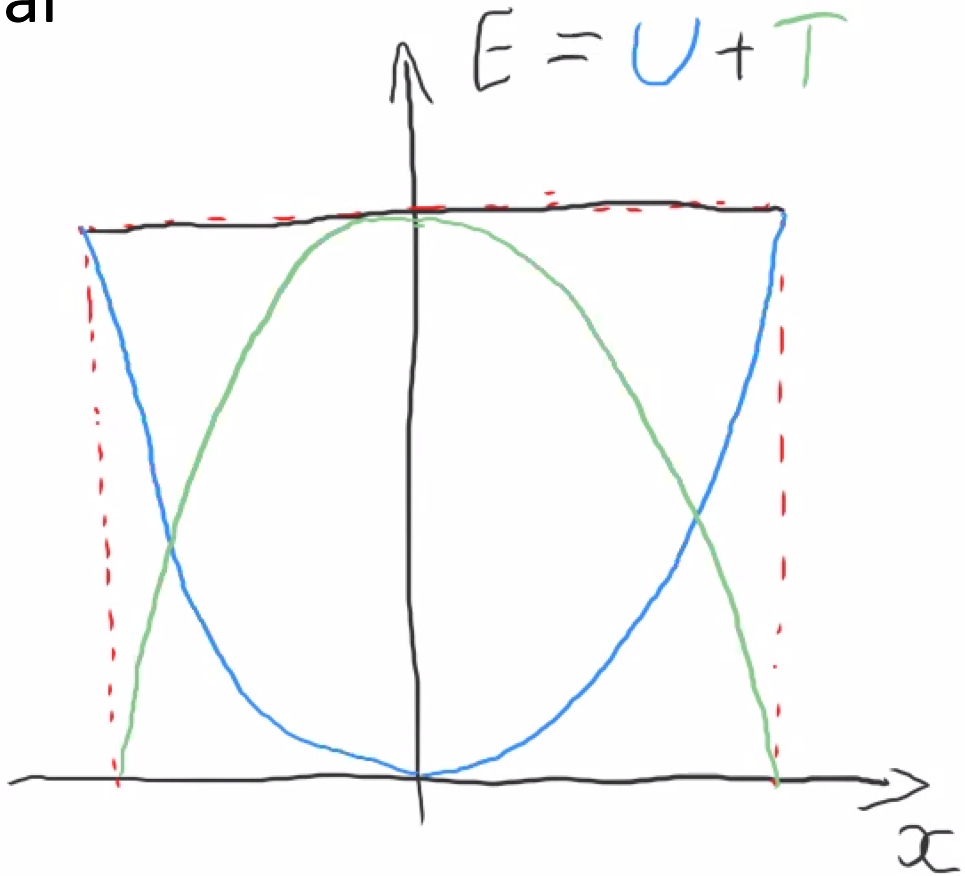
Oscilador – caso geral

Oscilações em torno de um ponto de equilíbrio estável.

Mínimo de energia potencial.

Balanço entre energia potencial e energia cinética



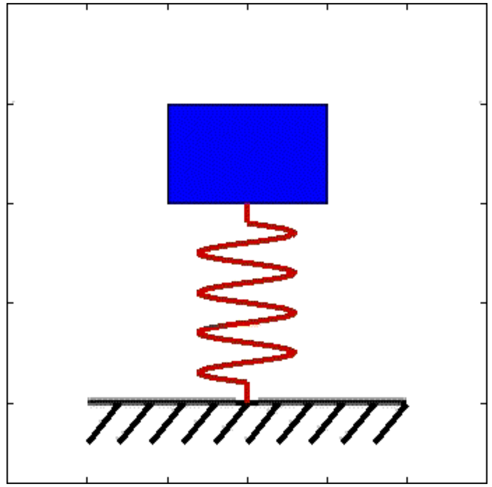


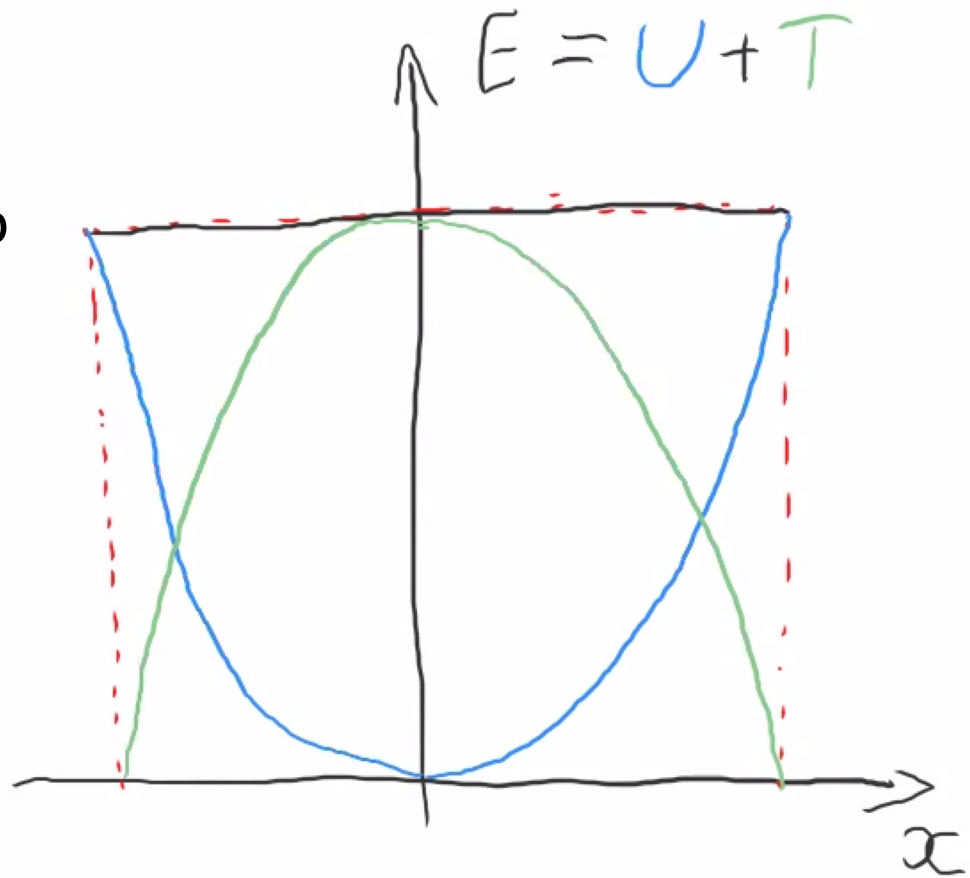
Oscilador Harmônico

Potencial quadrático – Parábola

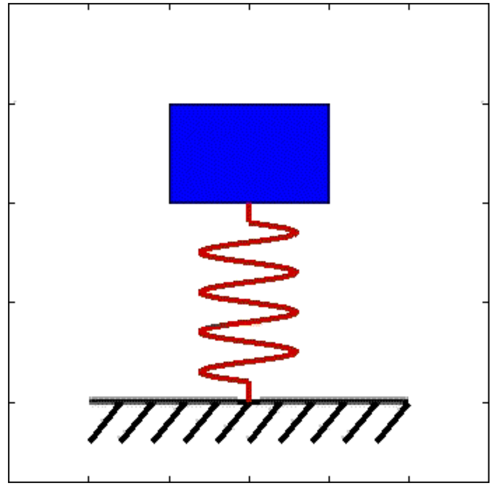
Características

- Período envolvido
- Amplitude do movimento
- Velocidade máxima do movimento
- Aceleração máxima
- Fase – Condições Iniciais





Dinâmica: $$F = m \cdot a$$



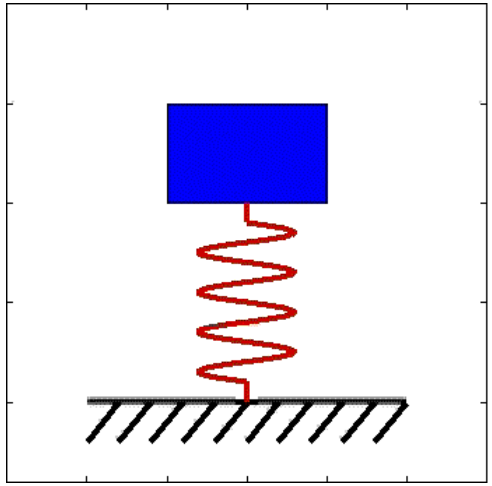
Lei de Hooke:

$$F = -k \cdot x(t)$$

Cinemática:

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

Dinâmica: $F = m \cdot a$



Cinemática: $a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$

Lei de Hooke: $F = -k \cdot x(t)$

Equação do movimento: diferencial ordinária de 2ª. ordem

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \geq 0$$

Já vimos equações deste tipo

- Exemplo → aceleração constante

$$F = m \cdot a \;\rightarrow \qquad \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \left(\frac{F}{m}\right)$$

- Solução→ Integração Direta

$$\left[\frac{d}{dt}x(t)\right]_0^t = v(t) - v_0 = \int_0^t \frac{d^2}{dt^2}x(t)dt$$

$$= \int_0^t \left(\frac{F}{m}\right) dt = \left(\frac{F}{m}\right) t$$

- Novamente…

$$[x(t)]_0^t = x(t) - x_0 = \int_0^t \frac{d}{dt}x(t)dt$$

$$= \int_0^t v_0 + \left(\frac{F}{m}\right) tdt = v_0 t + \left(\frac{F}{m}\right)\frac{t^2}{2}$$

- Resultado → duas condições iniciais

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \left(\frac{F}{m}\right)\frac{t^2}{2}$$

- Verificação

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \left(\frac{F}{m}\right)$$

Precisamos encontrar soluções para a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Solução: funções cuja derivada

é proporcional à própria função

Solução: funções cuja derivada retorna a própria função $$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$exp(\alpha t) = e^{\alpha t}$$

$$cos(\alpha t)$$

$$sen(\alpha t)$$

Solução: funções cuja derivada retorna a própria função $$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$exp(\alpha t)$		$\alpha exp(\alpha t)$
$cos(\alpha t)$	$\frac{d}{dt}$	$-\alpha sen(\alpha t)$
$sen(\alpha t)$		$\alpha cos(\alpha t)$

Solução: funções cuja derivada retorna a própria função

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$exp(\alpha t)$		$\alpha exp(\alpha t)$		$\alpha^2 exp(\alpha t)$
$cos(\alpha t)$	$\frac{d}{dt}$	$-\alpha sen(\alpha t)$	$\frac{d}{dt}$	$-\alpha^2 cos(\alpha t)$
$sen(\alpha t)$		$\alpha cos(\alpha t)$		$-\alpha^2 sen(\alpha t)$

Solução: funções cuja derivada retorna a própria função $$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$\frac{d^2}{dt^2}$	$exp(\alpha t)$	$=$	$\alpha^2 exp(\alpha t)$	$\alpha = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$
$\frac{d^2}{dt^2}$	$cos(\alpha t)$	$=$	$-\alpha^2 cos(\alpha t)$	$\alpha = \pm\sqrt{\omega^2} = \pm\omega$
$\frac{d^2}{dt^2}$	$sen(\alpha t)$	$=$	$-\alpha^2 sen(\alpha t)$	$\alpha = \pm\sqrt{\omega^2} = \pm\omega$

Temos 3 funções que podem nos ser úteis.

Devemos usar todas elas?

Um pouco de matemática:

Equação diferencial linear de 2ª. ordem

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = F$$

A, B, C, F são independentes de *x*.

Podem ser dependentes de *t.*

Modulação do parâmetro – dispositivos!

No caso de F = 0 → Equação homogênea

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

x_1 é solução → a . x_1 também é solução,

x_1 é solução, x_2 é solução → $x_1 + x_2$ também é solução,

Para duas soluções tais que $x_1 \neq c\, x_2$:

$x(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$ → Linearidade / superposição

a e *b* são as constantes iniciais do problema!

Bastam duas soluções independentes.

O que precisamos agora é definir as condições iniciais.

Tomando as soluções seno e cosseno:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$x(t) = a\,cos(\omega t) + b\,sen(\omega t)$$

Note que usar a solução com o sinal – seria

equivalente a trocar *b* por *-b*

a , b → quadraturas

$$x(t) = a\,cos(\omega t) + b\,sen(\omega t)$$

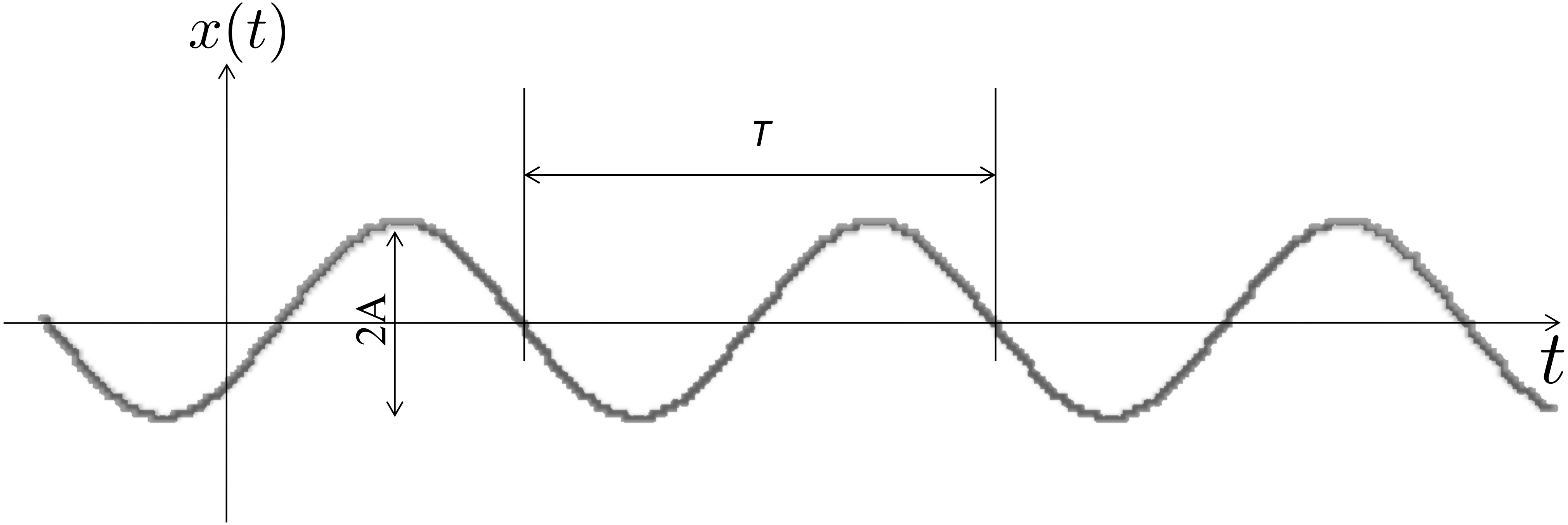
Escrito de forma mais compacta: Amplitude e fase

$$\begin{aligned} x(t) &= A cos(\omega t + \varphi) \\ &= A\,cos\,\varphi\,cos(\omega t) - A\,sen\,\varphi\,sen(\omega t) \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$cos\,\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

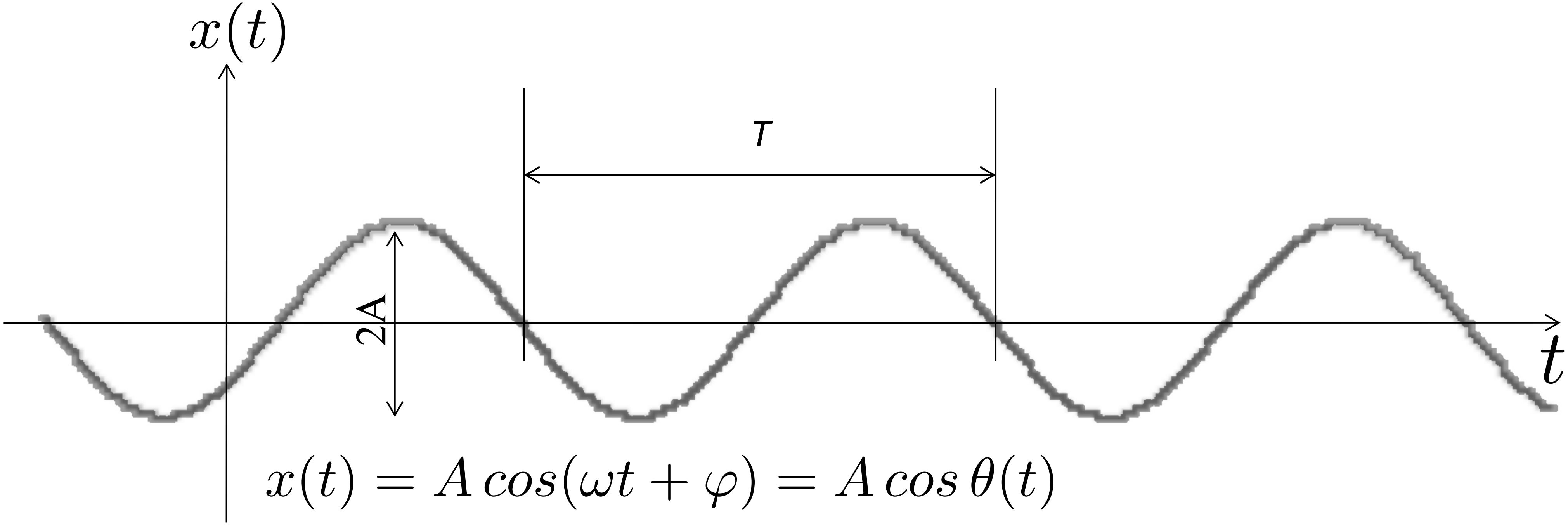
$$sen\,\varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi) = A\,cos\,\theta(t)$$

$$\theta(t) = \omega t + \varphi$$

$$\theta(t + T) = \omega t + \varphi + 2\pi$$



$$x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi) = A\cos\theta(t)$$

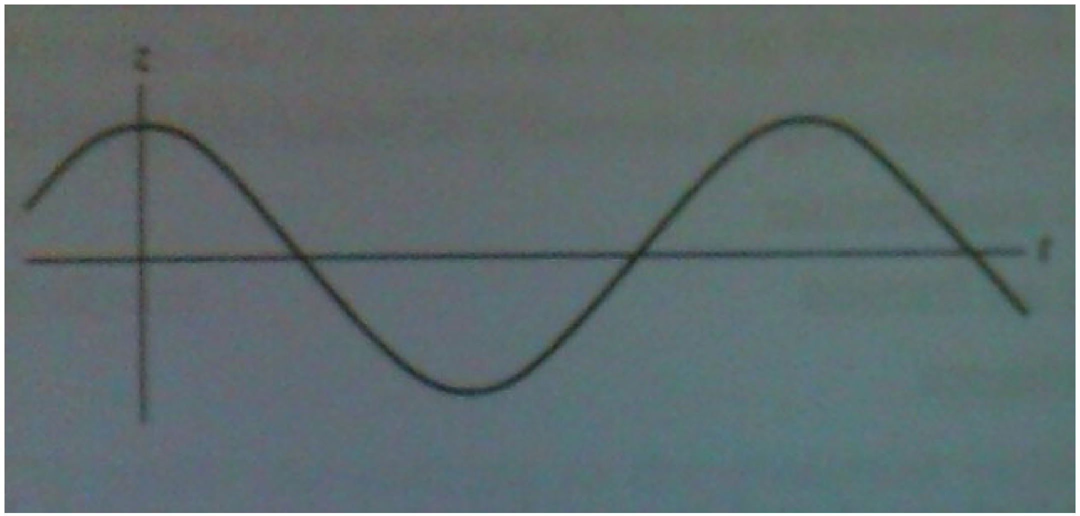
T : período (medido em segundos).

Frequência angular $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ (medida em rad/s).

Frequência $\nu = \dfrac{1}{T}$, medida em Hertz (Hz = s^{-1}).

Uma massa suspensa em uma mola está oscilando para cima e para baixo conforme indicado. (I) Em algum ponto durante a oscilação, a massa possui aceleração (positiva ou negativa) e velocidade zero; (II) Em algum ponto durante a oscilação a massa possui aceleração e velocidade iguais a zero.

1 – Os dois ocorrem durante a oscilação.
2 – Nenhum dos dois ocorrem durante a oscilação.
3 – Somente (I) ocorre.
4 – Somente (II) ocorre.



Condições Iniciais:

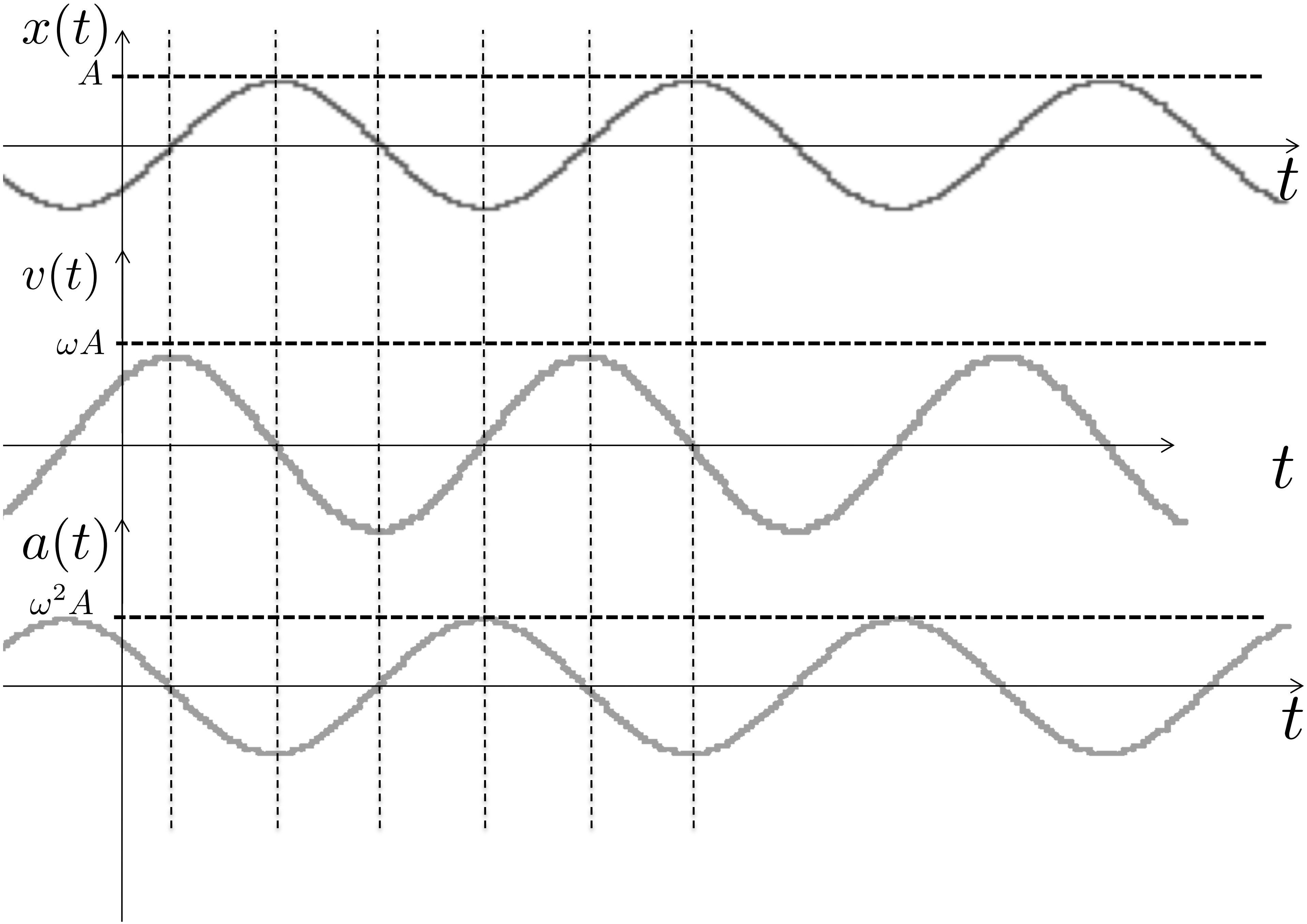
$$x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi)$$

Velocidade: $$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega\, A\, sen(\omega\, t + \varphi)$$

$$x_0 = x(0) = A\,cos\varphi \qquad v_0 = v(0) = -\omega A\, sen\varphi$$

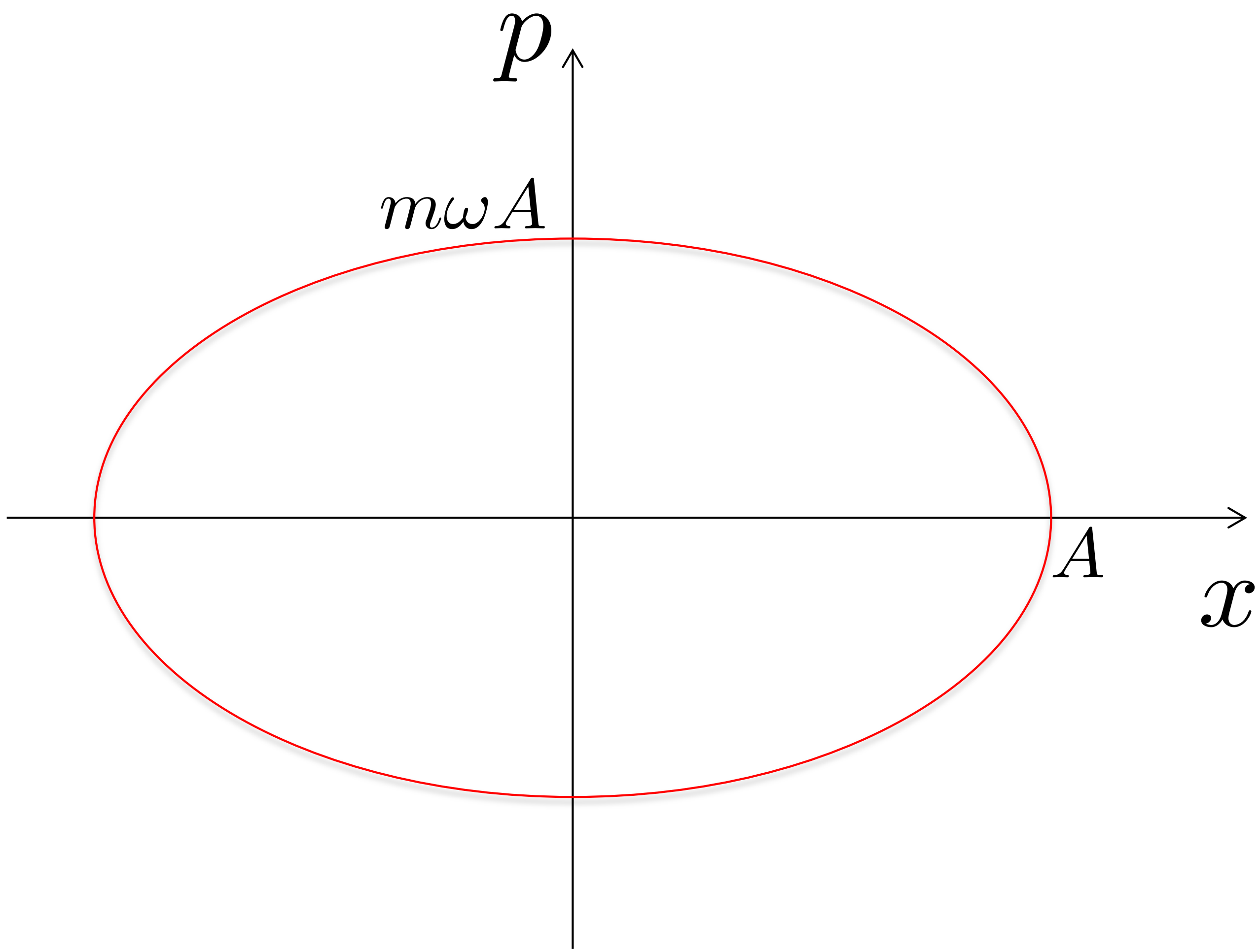
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad cos\,\varphi = \frac{x_0}{A} \qquad sen\,\varphi = -\frac{v_0}{\omega A}$$

$$x(t) = x_0\,cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,sen(\omega t)$$



$x(t)$
A
t
$v(t)$
ωA
t
$a(t)$
$\omega^2 A$
t

Espaço de Fase: Posição X Momento



Trajetória elíptica:

p e *x* em quadratura

(diferença de fase de 90^0)

Um objeto está pendurado imóvel em uma mola. Quando o objeto é puxado para baixo, a soma da energia potencial elástica da mola e a energia potencial gravitacional do objeto em relação a Terra:

1 – Aumenta.
2 – Mantêm-se igual.
3 – Diminui.

Energia no oscilador harmônico:

Cinética:

$$K(t) = \frac{mv^2(t)}{2} = \frac{p^2(t)}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

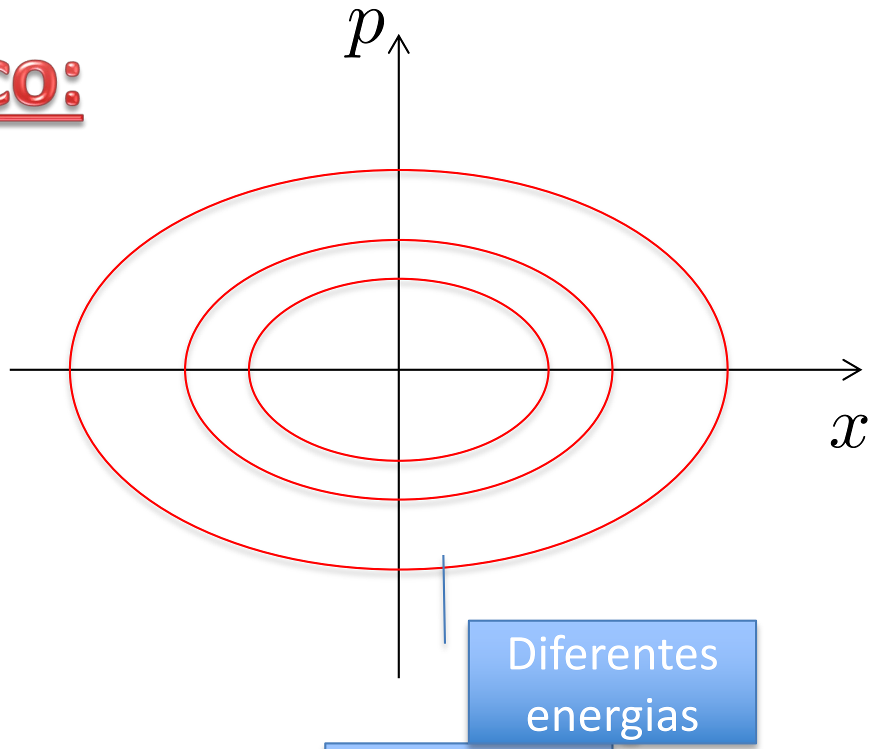
Potencial:

$$U(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{m\omega^2\, x^2(t)}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 cos^2(\omega t + \varphi)$$

Energia mecânica total:

$$E = U(t) + K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Energia no oscilador harmônico:



$$E = K(p) + U(x)$$

$$K(p) = \frac{p^2}{2m} \qquad U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$p(t) = m\frac{dx(t)}{dt}$$

Força de restauro

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Aceleração

Inércia

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Duas abordagens equivalentes

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Uma única resposta: $x(t) = A\, cos(\omega t + \varphi)$

O problema passa a ser:

Encontrar a frequência angular

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \geq 0$$

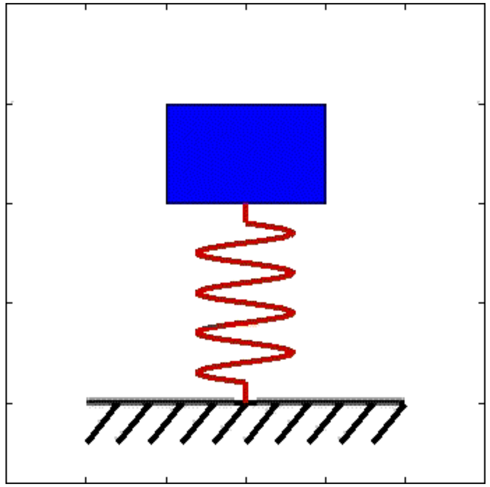
Encontrar as condições iniciais

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$cos\, \varphi = \frac{x_0}{A} \qquad sen\, \varphi = -\frac{v_0}{\omega A}$$

Mínimo potencial – Massa-mola

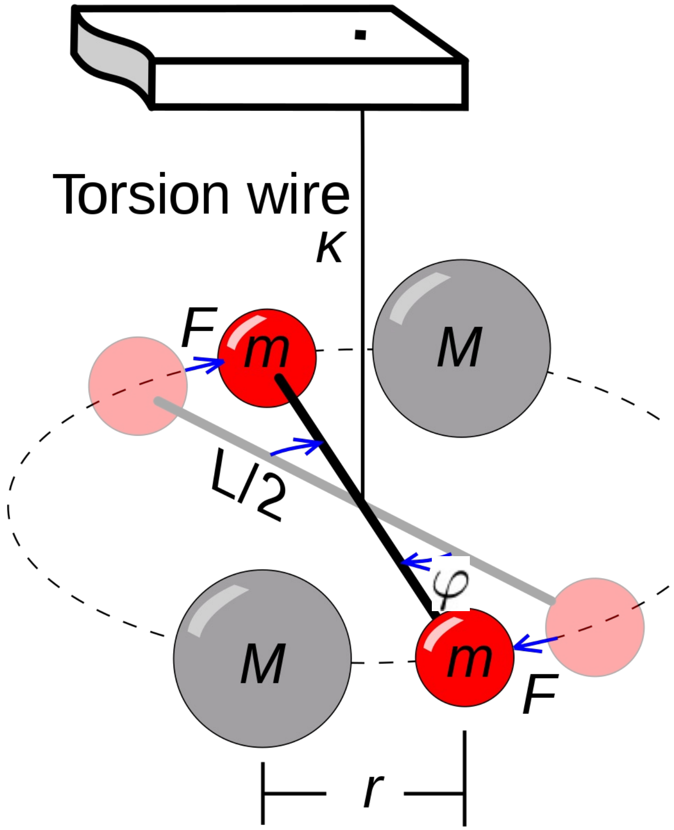
$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

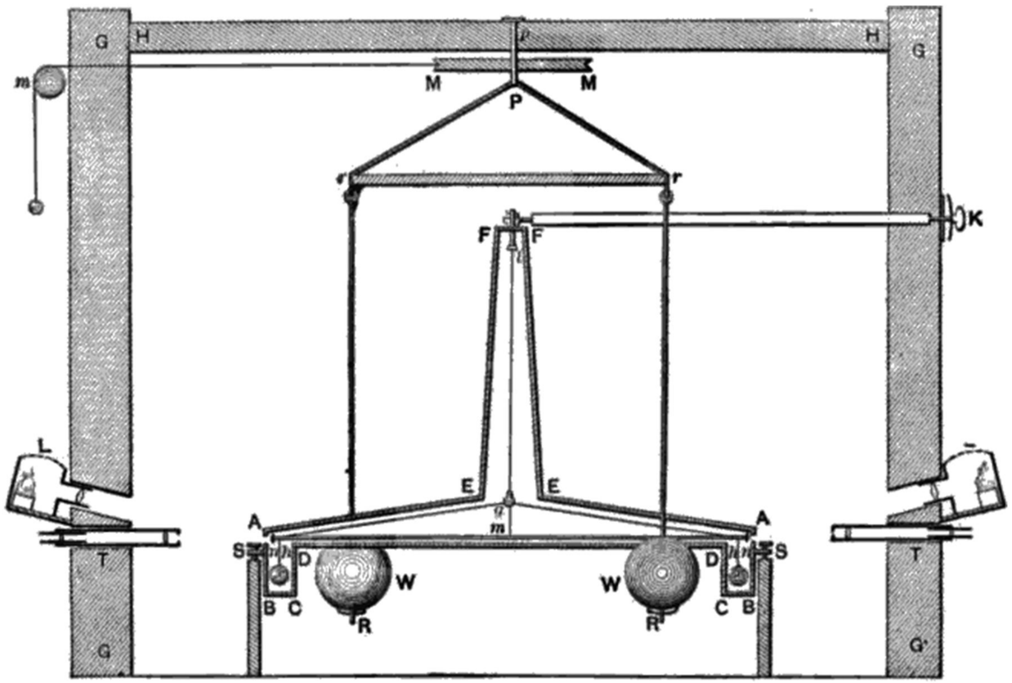


$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) = -kx$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \geq 0$$

Torque de restauro – Pêndulo de Torção



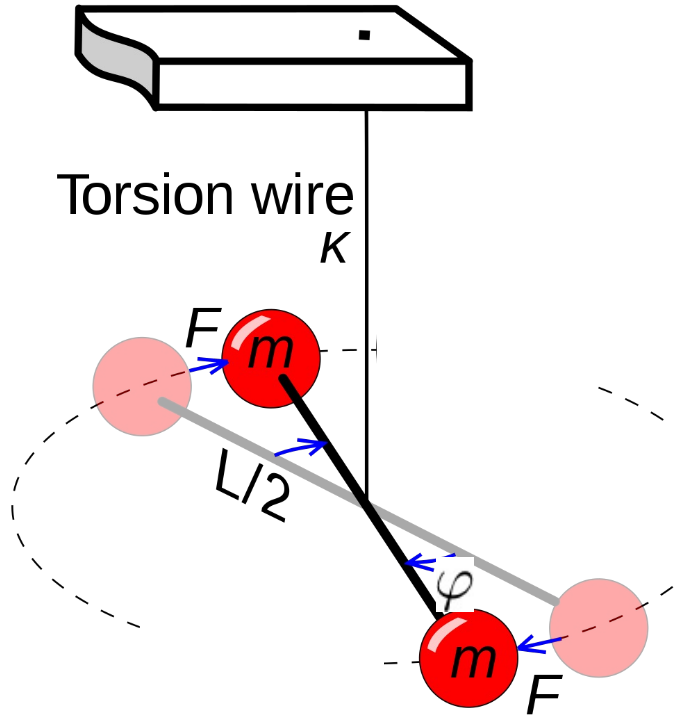


Torque de restauro – Pêndulo de Torção

$$\tau = I\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) \qquad \tau = -K\varphi$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi + \omega^2\varphi = 0$$

$$\omega^2 = \frac{K}{I}$$



Uma pessoa balança em um balanço. Quando essa pessoa está sentada, o balanço oscila em sua frequência natural. Se ao invés de uma, duas pessoas estiverem sentadas no balanço, a nova frequência natural do balanço será:

1 – Aumenta.
2 – Mantêm-se igual.
3 – Diminui.

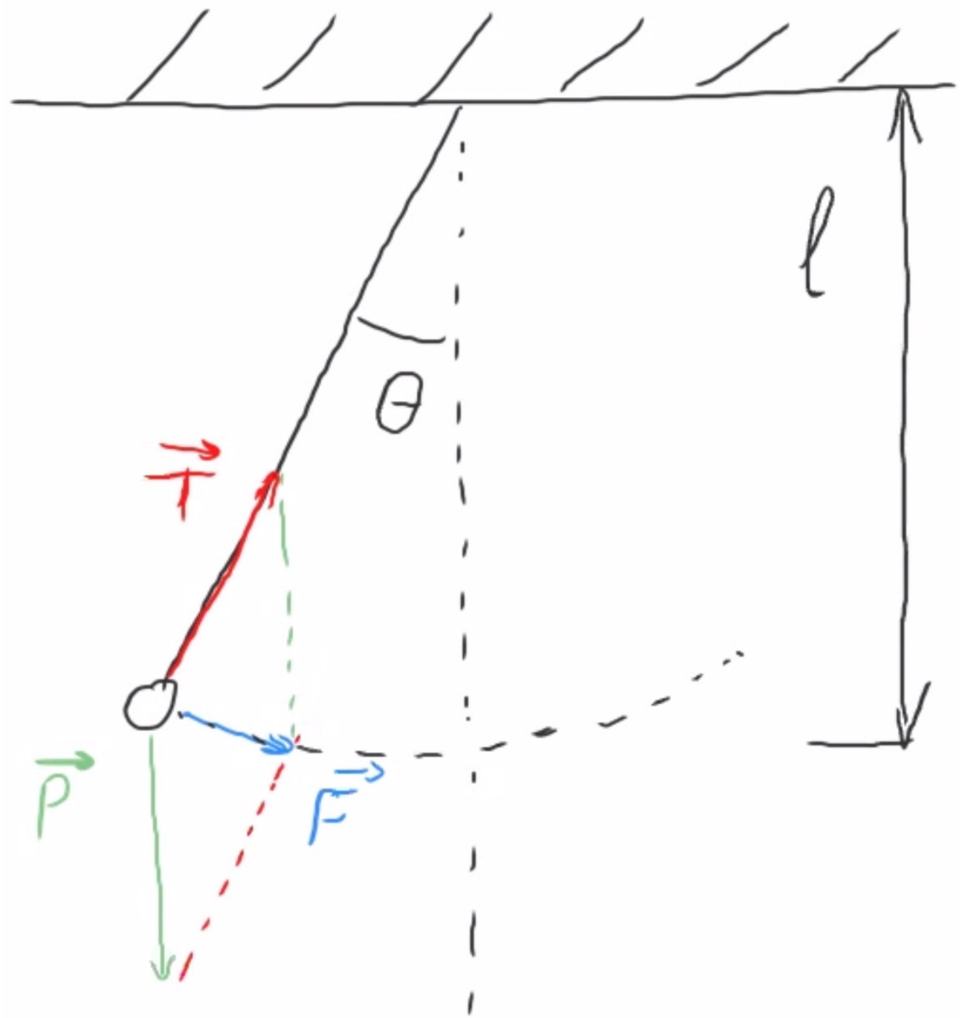
Pêndulo simples

Aceleração radial

$$m\,a_r = -m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T = 0$$

Aceleração tangencial

$$m\,a_\theta = m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg sen\theta$$



$$sen\theta \simeq \theta \qquad \theta \ll 1$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

Pêndulo simples

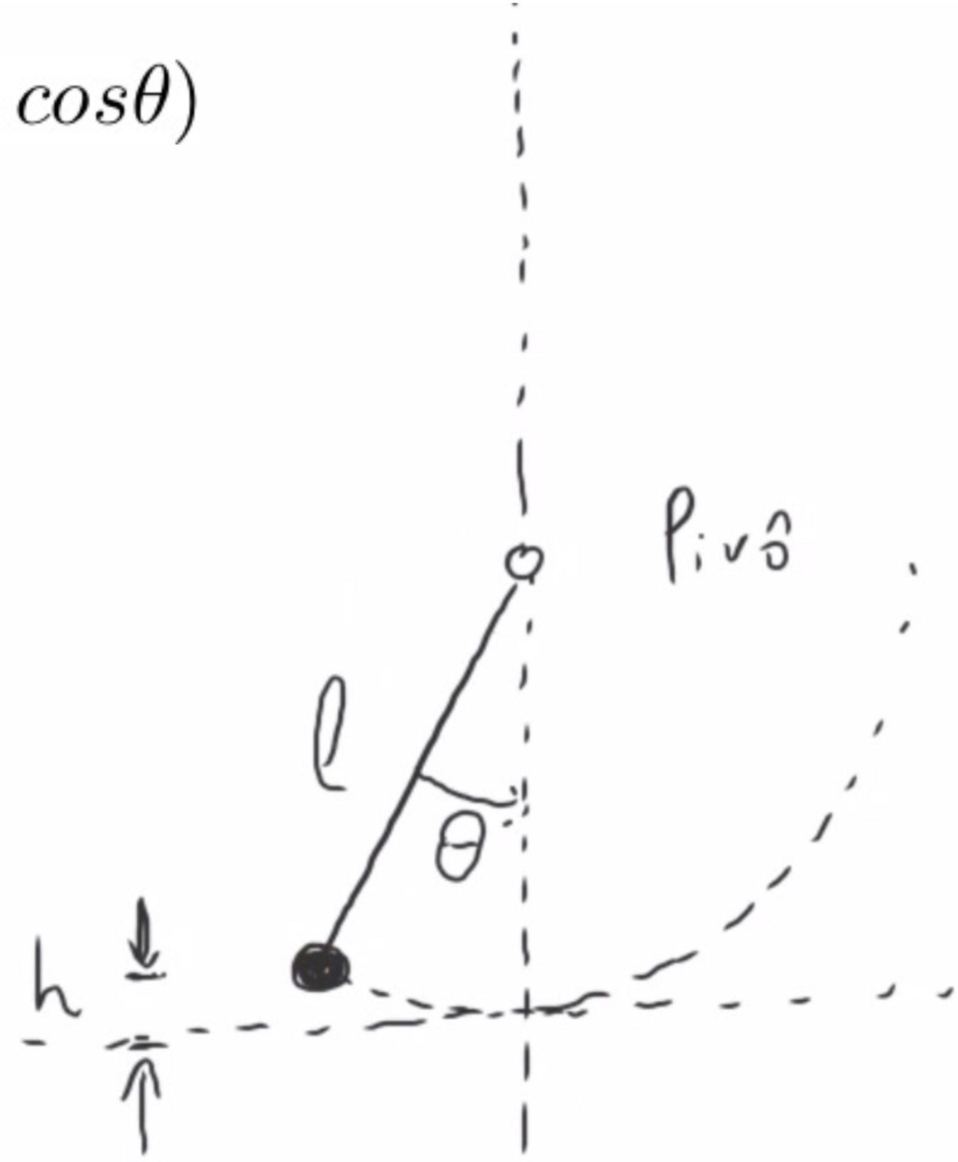
Energia Cinética
$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Energia Potencial $U = mg\ell(1 - cos\theta)$

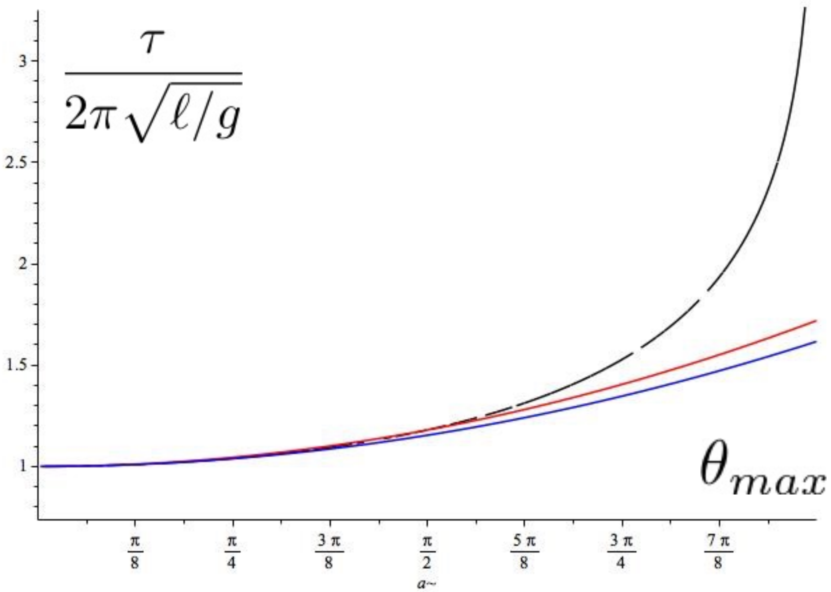
$$\theta \ll 1 \qquad U = \frac{mg\ell}{2}\theta^2$$

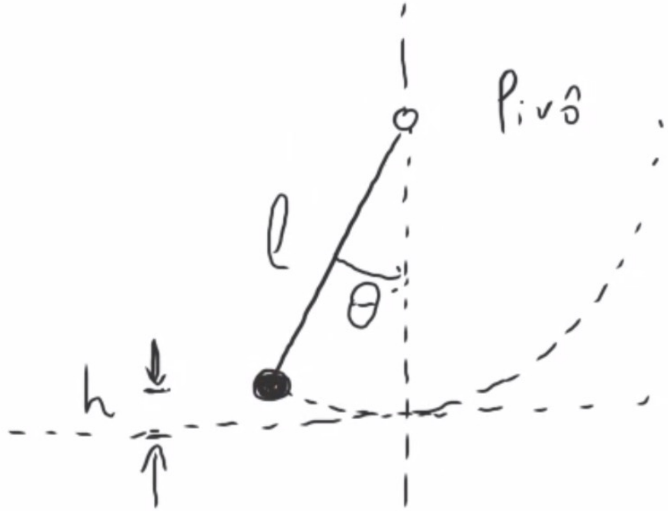
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

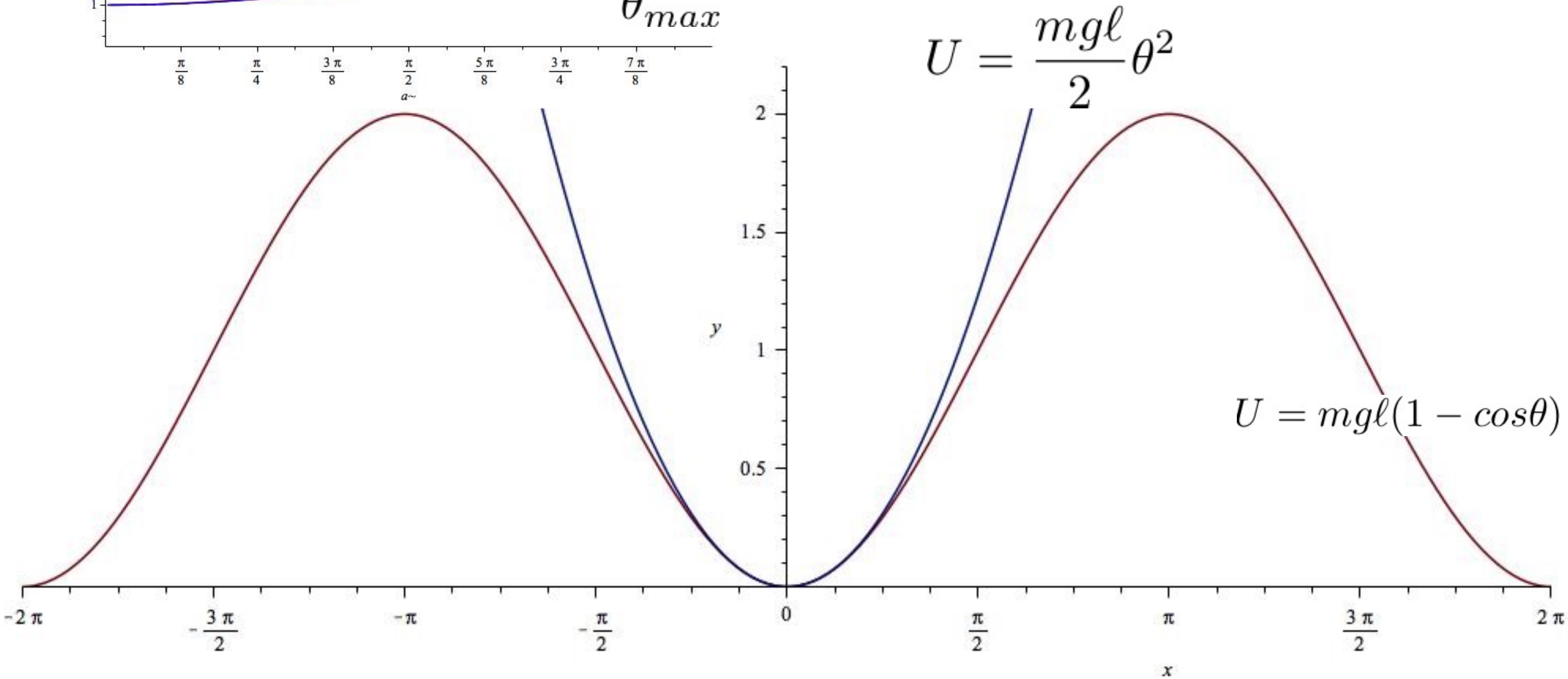
$$E = \frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{g}{\ell}\right)\theta^2$$



Pêndulo simples







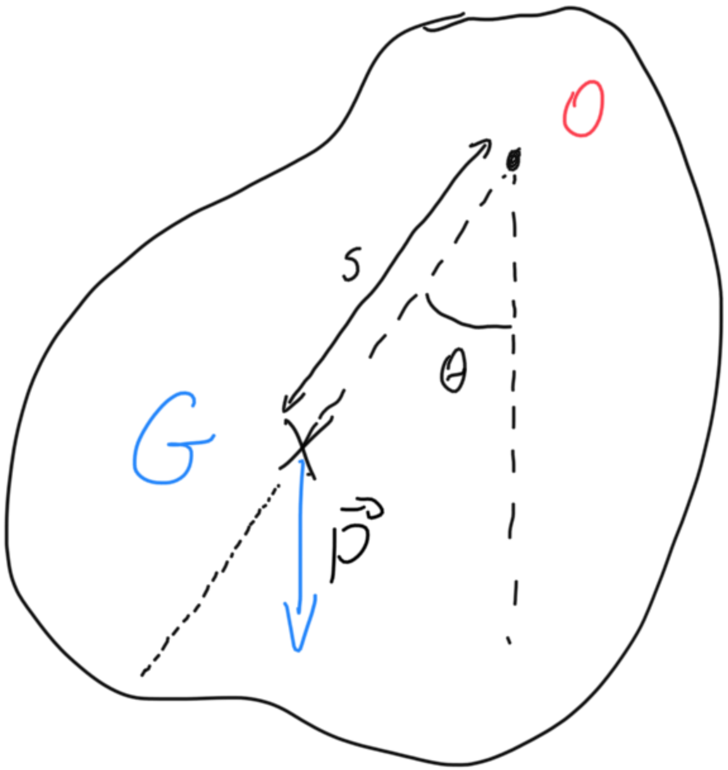
Uma pessoa balança em um balanço. Quando essa pessoa está sentada, o balanço oscila em sua frequência natural. Se ao invés disso a pessoa fica de pé no balanço, a nova frequência de oscilação natural será:

1 – Maior.
2 – Mantêm-se igual.
3 – Menor.

Pêndulo Físico

→ Corpo rígido, girando em torno de um pivô

$G \rightarrow$ centro de massa



$O \rightarrow$ pivô (por onde passa o eixo de giro

Torque: $\tau = -Mg\,s\,\text{sen}\,\theta$

Torque: $\tau = -Mgs \operatorname{sen}\theta$

$$\tau = I \frac{d^2}{dt^2}\theta(t) \implies \frac{d^2}{dt^2}\theta = -\left(\frac{Mgs}{I}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$|\theta| \ll 1 \implies \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -w^2\theta \quad ; \quad w = \sqrt{\frac{Mgs}{I}}$$

→ Pêndulo simples equivalente:

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}} \implies l = \frac{I}{M \cdot s}$$

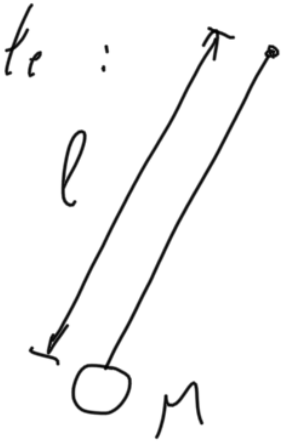
Lembrando: momento de inércia de uma partícula

$$I = M \cdot d^2 \implies I = Ml^2 \implies l = s \text{ (por definição)}$$

(Caso particular)

Uma forma precisa de medir g

→ Pêndulo simples equivalente:



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \ell = \frac{I}{M \cdot s}$$

Lembrando: momento de inércia de uma partícula

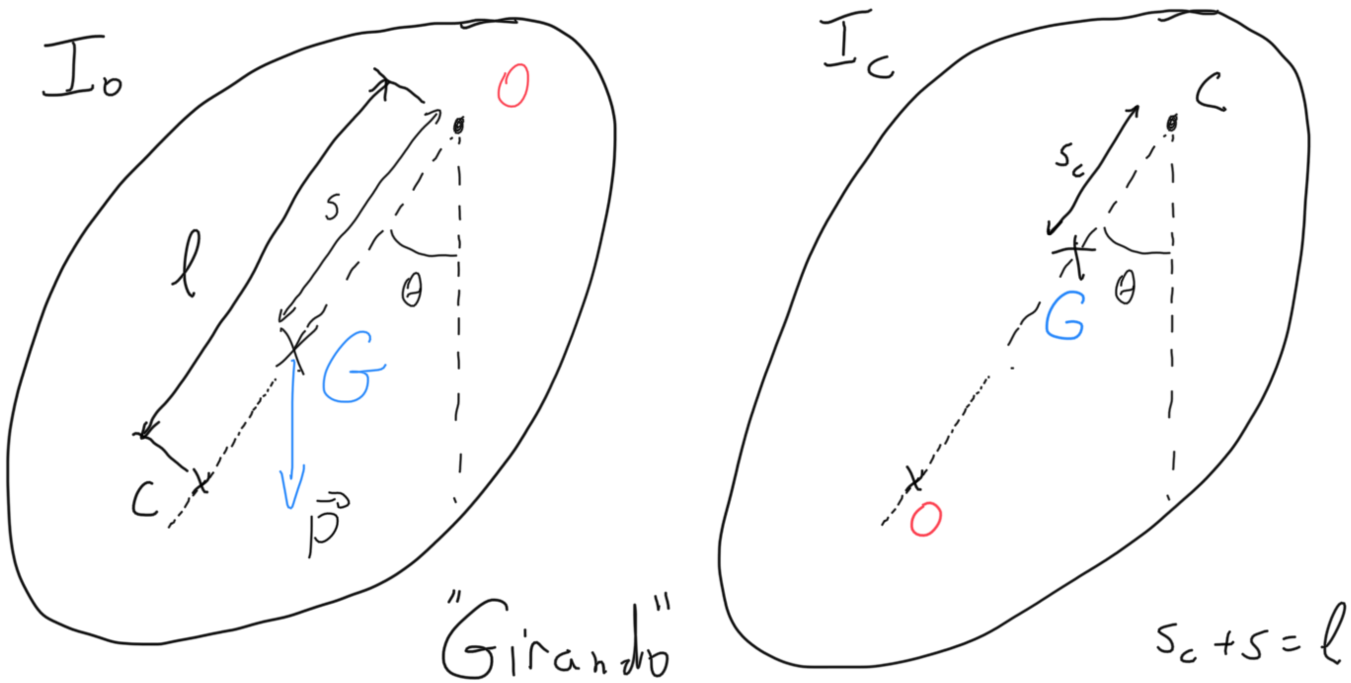
$$I = M \cdot d^2 \Rightarrow I = M\ell^2 \Rightarrow \ell = s \text{ (por definição)}$$

Raio de giração: distância k da massa M ao pivô, tal que tenhamos o mesmo momento de inércia

$$I = Mk^2$$

Mas $I = M \cdot s \cdot \ell \Rightarrow k = \sqrt{\ell \cdot s}$

Uma forma precisa de medir g: Determinar ω, l, s

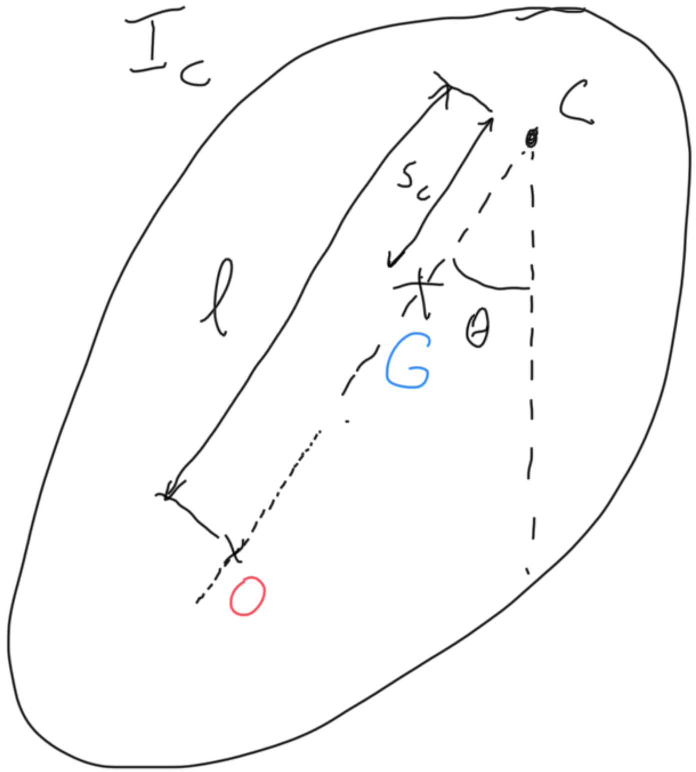


Novo momento de inércia : Teorema de Steiner
Eixos Paralelos

Momento de Inércia do eixo passando por G $\Rightarrow I_G$

$$I_o = I_G + Ms^2 = Mk^2 \Rightarrow I_G = M(k^2 - s^2)$$

Por outro lado :

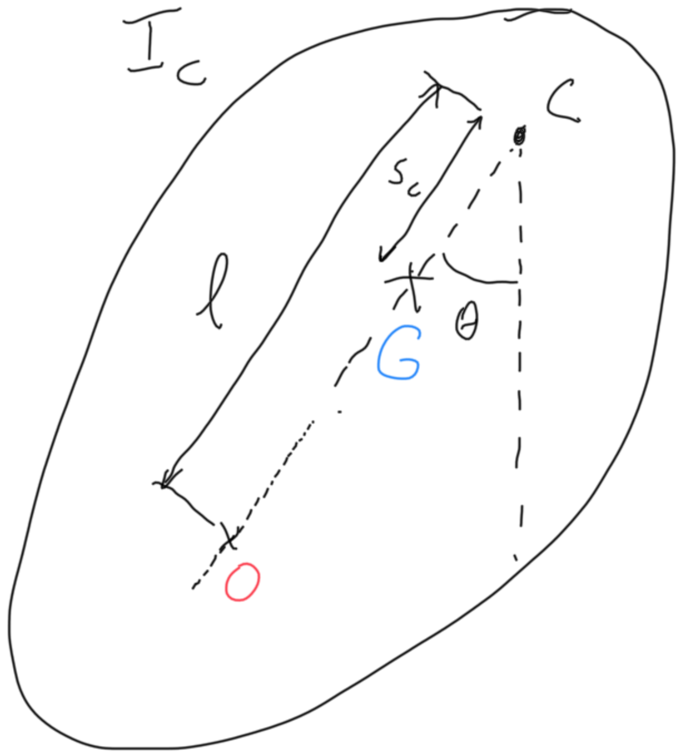


$$I_C = I_G + M s_c^2 = M k_c^2$$

$$I_G = M(k_c^2 - s_c^2)$$

$$\Rightarrow k_c^2 - s_c^2 = k^2 - s^2$$

Por outro lado:



$$I_C = I_G + M s_C^2 = M k_C^2$$

$$I_G = M(k_c^2 - s_c^2)$$

$$\Rightarrow k_c^2 - s_c^2 = k^2 - s^2$$

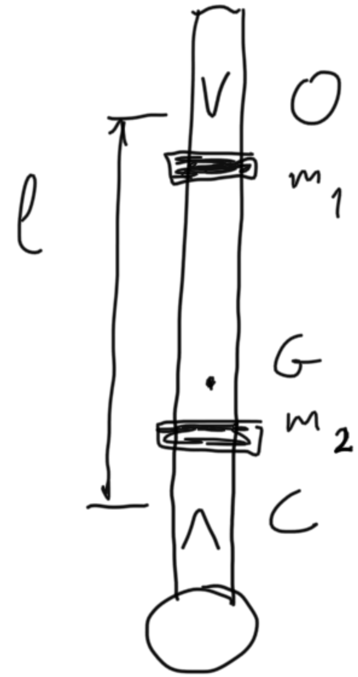
mas $s_c = \ell - s \Rightarrow k_c^2 = k^2 - s^2 + (\ell - s)^2 =$

$$= \ell s - \cancel{s^2} + \ell^2 - 2\ell s + \cancel{s^2} = \ell \underbrace{(\ell - s)}_{s_c}$$

$k_c^2 = \ell \cdot s_c \Rightarrow$ O centro de oscilação, para C, fica em O!

Consequência: se obtemos ℓ, calculamos g

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}$$



Pêndulo assimétrico

Ajustamos a posição de m_1 e m_2 até que o período de oscilação, tomando os dois apoios, se iguale

$$\delta g < 0{,}5\%$$

Por quê assimétrico?