Cálculo IV - Poli - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

28 de agosto de 2020

Programa do Curso

- Sequências e Séries
- Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Referências Sugeridas para o Curso

T. M. APOSTOL, *Calculus. Vol. I: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra e II: Multi-variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, Second edition, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1969.

H. GUIDORIZZI, *Um curso de cálculo*, v. 4, LTC, 2013.

W. KAPLAN, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Higher Mathematics, Addison-Wesley, 2002.

Referência Complementar

W. RUDIN, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 3rd ed., 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

Software de Apoio

: Maxima, a Computer Algebra System

: SageMath

Sequências a Valores num Conjunto Abstrato

Definição (Sequências)

Seja A um conjunto. Uma sequência em A é uma função $x : \mathbb{N} \to A$, ou, mais geralmente, uma função $x : N \to A$ onde N é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Definição (Séries)

Sejam A um espaço vetorial e $x : \mathbb{N} \to A$ uma sequência em A. A série associada a x é a sequência $s : \mathbb{N} \to A$ definida por

$$n \mapsto \sum_{k=1}^{n} x(k)$$

Notação e Nomenclatura

Notação Funcional para Sequências

Notação	Tradução	Significado/Nomenclatura
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$x:\mathbb{N}\to A$	a sequência x
x_n	$x(n)$	a imagem de n por x, ou “termo geral” da sequência
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$	$\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ & n & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} x_k \end{array}$	a série associada a x
s_n		n-ésima soma parcial, ou n-ésima reduzida da série

Exemplo

Fixe $a, q \in \mathbb{R}$. A sequência de números reais $(x_n)_{n\geq 0}$ dada por

1. $(\forall n) x_n := a + nq$ é a progressão aritmética de termo inical a e razão q;
2. $(\forall n) x_n := aq^n$ é a progressão geométrica de termo inical a e razão q.

O Problema dos Coelhos

Leonardo Pisano Bigollo (a.k.a. Fibonacci), 1202

Modelar a evolução temporal de uma população de coelhos, admitindo-se as seguintes premissas:

I. Inicia-se com um casal de coelhos jovens na data inicial.
II. Cada casal de coelhos jovens leva um mês até chegar à maturidade.
III. Cada casal de coelhos maduros gera um casal de coelhos jovens a cada mês.

Solução do Problema dos Coelhos

Exemplo

A sequência de Fibonacci é a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reais obtida como solução da *equação de diferenças*

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \tag{1}$$

com condições iniciais $x_1 = x_2 = 1$.

O fato de que existe uma única sequência em $\mathbb{R}$ que satisfaz as condições acima é consequência do princípio da indução.

Uma Fórmula Fechada para a Sequência de Fibonacci

Observação

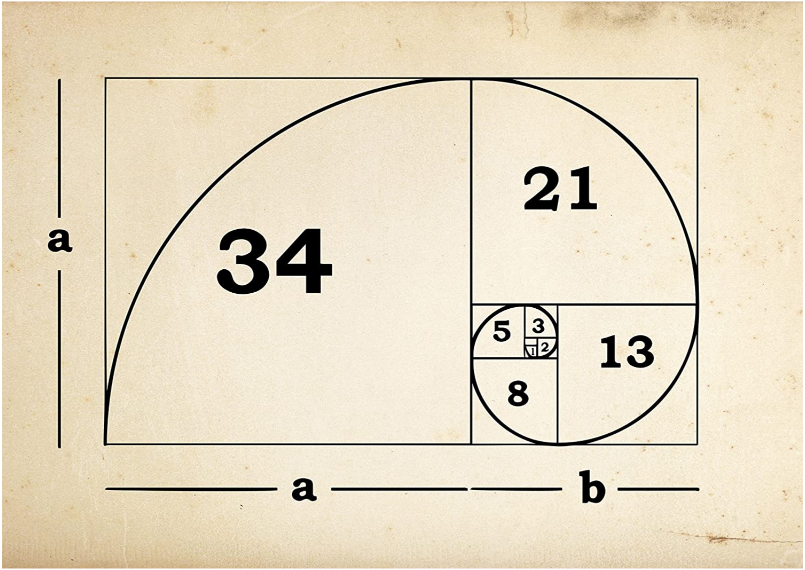
- A solução geral em forma explícita da equação (1) é dada por

$$n \in \mathbb{N} \mapsto A\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{=:\Phi}^{n} + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

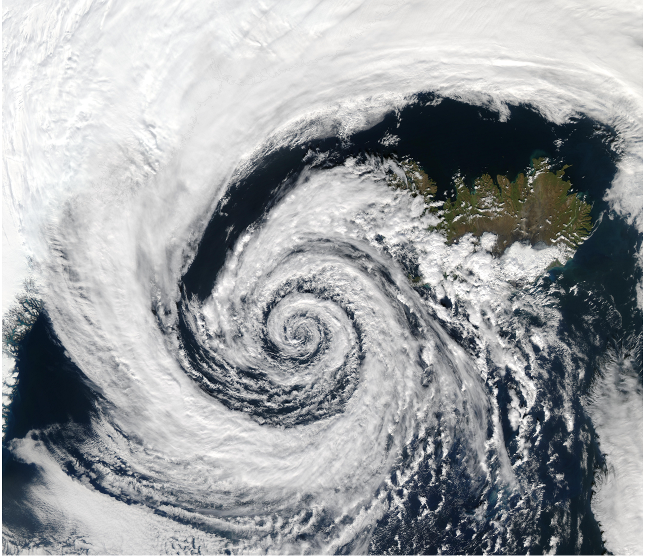
  com A, B constantes reais.
- As condições iniciais $x_1 = x_2 = 1$ são satisfeitas com $A = 1/\sqrt{5}$ e $B = -1/\sqrt{5}$, i.e. $(x_n)_{n\geq 1}$ é dada por, $\forall n \geq 1$,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

A Espiral de Fibonacci

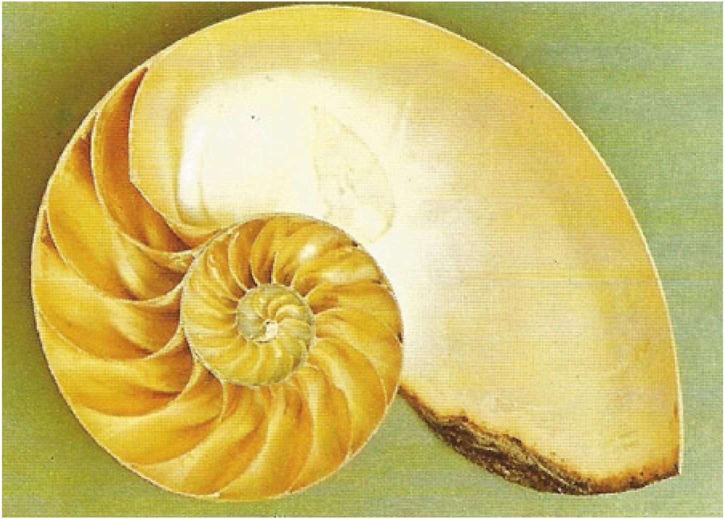


Espirais Logarítmicas na Natureza



Espirais Logarítmicas na Natureza

Espirais Logarítmicas na Natureza



Espirais Logarítmicas na Natureza

Espirais Logarítmicas na Natureza

Mais uma Referência Complementar

S. ELAYDI, *An Introduction to Difference Equations*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2006.

Operações com Sequências

Definem-se para sequências as mesmas operações algébricas introduzidas para funções nos Cálculos 1 e 2.

Exemplo (operações binárias com sequências)

Sejam A um conjunto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em A, e $B : A \times A \to A$ uma operação binária. Por composição das aplicações

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} \to & A \times A \xrightarrow{B} A \\
n \mapsto & (x_n, y_n) \\
& \qquad (x, y) \mapsto B(x, y)
\end{aligned}
$$

obtém-se a sequência $\{B(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Operações com Sequências

Exemplo (composição)

Sejam A um conjunto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência a valores em A e $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência a valores em $\mathbb{N}$. A composição das aplicações

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \xrightarrow{n} & \mathbb{N} \xrightarrow{x} A \\ j \mapsto & n_j \\ & n \mapsto x_n \end{aligned}$$

define uma sequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ a valores em A, i.e. a função $j \in \mathbb{N} \mapsto x\big(n(j)\big)$.

Subsequências

Se, na situação anterior, $j \mapsto n_j$ for uma função estritamente crescente, $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ chama-se *subsequência* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição (subsequências)

Sejam A um conjunto e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência a valores em A. Uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência a valores em A da forma $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ com $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots\} \subset \mathbb{N}$.

Exemplo

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em A, $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ são subsequências de $(x_n)_n$.

Sequências Limitadas

Definição

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada superiormente (respectivamente, limitada inferiormente, resp. limitada) se sua imagem $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ for um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente (resp. limitado inferiormente, resp. limitado).

Sequências Monótonas

Definição

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência

- crescente se $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq x_{n+1}$;
- estritamente crescente se $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n < x_{n+1}$;
- decrescente se $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \geq x_{n+1}$;
- estritamente decrescente se $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n > x_{n+1}$;
- monótona se ocorrer um dos casos acima.

Limites de Sequências

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência a valores em $\mathbb{R}$. Ou seja, uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Como tal, faz sentido considerar a noção de *limite* introduzida no Cálculo 1 para funções $x : \operatorname{dom} x \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. No caso presente, $\operatorname{dom} x = \mathbb{N}$ e o único "ponto de acumulação" do domínio $\mathbb{N}$ de x é $+\infty$, i.e. só faz sentido considerar limites para $n \to +\infty$.

Idéia Intuitiva

Diz-se que um número real ℓ é limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se for possível tornar a distância $|x_n - \ell|$ *arbitrariamente pequena* desde que se tome *n suficientemente grande*.

Limites de Sequências

Definição (limite de uma sequência)

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Diz-se que ℓ é um limite da sequência $(x_n)_n$ se a seguinte condição for cumprida:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - \ell| < \epsilon.$$

Proposição (unicidade do limite)

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}$ e $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Se ℓ e ℓ' forem ambos limites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $\ell = \ell'$.

Limites de Sequências

Definição (sequências e séries convergentes)

Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é convergente se existir $\ell \in \mathbb{R}$ tal que ℓ é limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Caso contrário, diz-se que a referida sequência é divergente.

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ for convergente, chamamos o seu limite de soma da série.

Limites de Sequências

Notações para Limites

Notação	Significado
$\exists \lim x_n$	a sequência $(x_n)_n$ é convergente
$\nexists \lim x_n$	a sequência $(x_n)_n$ é divergente
$x_n \to \ell$ ou $\lim x_n = \ell$	a sequência $(x_n)_n$ é convergente e ℓ é o seu limite
$\sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$	a série associada a $(x_n)_n$ é convergente
$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$	a série associada a $(x_n)_n$, ou a soma da referida série se convergente

Limites Infinitos

A definição de limites infinitos é a mesma do Cálculo 1:

Definição (limites infinitos)

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de números reais. Diz-se que a referida sequência

- diverge para ∞ (NOTAÇÃO: $x_n \to \infty$ ou $\lim x_n = \infty$) se $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n > M$;
- diverge para $-\infty$ (NOTAÇÃO: $x_n \to -\infty$ ou $\lim x_n = -\infty$) se $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n < -M$.

Note que, em particular, se $\lim x_n = \pm\infty$, então $\nexists \lim x_n$, i.e. nas situações descritas acima a sequência é divergente.

Propriedades dos Limites de Sequências

Resumo

Os limites de sequências gozam das mesmas propriedades enunciadas para limites das funções reais a valores reais do Cálculo 1, e de adicionalmente algumas outras que só fazem sentido para sequências.

Proposição (sequências convergentes são limitadas)

Se uma sequência de números reais for convergente, então ela é limitada.

Proposição (conservação do sinal)

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais convergente para $\ell \in \mathbb{R}$.

- *Se $\ell > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.*
- *Se $\ell < 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < 0$ para todo $n \geq n_0$.*

Propriedades dos Limites de Sequências

Proposição (subsequências de sequências convergentes)

Se uma sequência de números reais for convergente, toda subsequência da mesma é convergente e converge para o mesmo limite.

Exemplo

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $(\forall n \in \mathbb{N})\, x_n = (-1)^n$ é divergente.

Proposição (propriedades aritméticas dos limites)

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathbb{R}$ tais que $x_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $y_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$. Então:

- $x_n + y_n \to \ell_1 + \ell_2$
- $x_n \cdot y_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$
- *se* $\ell_2 \neq 0$, $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Propriedades dos Limites de Sequências

Proposição (teorema do confronto)

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências em* $\mathbb{R}$*. Suponha que exista* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq n_0$, $x_n \leq y_n \leq z_n$*. Tem-se:*

i) *se* $\lim x_n = \lim z_n = \ell \in \mathbb{R}$, *então* $\lim y_n = \ell$;

ii) *se* $\lim x_n = \infty$, *então* $\lim y_n = \infty$;

iii) *se* $\lim z_n = -\infty$, *então* $\lim y_n = -\infty$.

Exemplo

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência em $\mathbb{R}$ dada por $x_n = a^n$. Tem-se:

a) $x_n \to 0$ se $|a| < 1$;

b) $x_n \to 1$ se $a = 1$;

c) $(x_n)_n$ diverge se $a = -1$ ou se $|a| > 1$.

Propriedades dos Limites de Sequências

Exemplo (séries geométricas)

Sejam $q \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n \geq 0}$ sequência em $\mathbb{R}$ dada por $x_n = q^n$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge se, e somente se, $|q| < 1$. Caso afirmativo, sua soma é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Propriedades dos Limites de Sequências

Proposição

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências em $\mathbb{R}$ tais que $x_n \to 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $x_n \cdot y_n \to 0$.

Exemplo

$$\frac{\sin n}{n} \to 0.$$

Propriedades dos Limites Infinitos

São as mesmas propriedades enunciadas no Cálculo 1 para limites infinitos de funções reais a valores reais.

Relação entre limites de sequências e de funções reais

Proposição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com A não limitado superiormente, e $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$. São equivalentes as seguintes condições:

i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$;

ii) *para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A com $x_n \to \infty$, tem-se $f(x_n) \to \ell$.*

Relação entre limites de sequências e de funções reais

Proposição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de A e $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$. São equivalentes as seguintes condições:

i) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$;

ii) *para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $A \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to \ell$.*

Corolário (caracterização de continuidade usando sequências)

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in A$. São equivalentes as seguintes condições:

i) *f é contínua em a;*

ii) *para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A com $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to f(a)$.*

Relação entre limites de sequências e de funções reais

Exemplo

a) Se $a > 0$, $\sqrt[n]{a} \to 1$.

b) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Revisão sobre sup e inf

Definição (supremo e ínfimo)

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Diz-se que ℓ é:

i) uma cota superior de A se $\forall a \in A$, $a \leq \ell$;

ii) uma cota inferior de A se $\forall a \in A$, $a \geq \ell$;

iii) supremo de A se for cota superior de A e $\ell \leq \ell'$ sempre que ℓ' for cota superior de A (NOTAÇÃO: $\sup A$);

iv) ínfimo de A se for cota inferior de A e $\ell \geq \ell'$ sempre que ℓ' for cota inferior de A (NOTAÇÃO: $\inf A$).

Equivalentemente,

- $\ell = \sup A$ se, e somente se, (1) $\forall a \in A$, $a \leq \ell$ e (2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists a \in A$ tal que $\ell - \epsilon < a$;
- $\ell = \inf A$ se, e somente se, (1) $\forall a \in A$, $a \geq \ell$ e (2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists a \in A$ tal que $\ell + \epsilon > a$.

Revisão sobre sup e inf

Qual a diferença entre supremo e máximo?

Seja A um conjunto.

- o *máximo* de A (NOTAÇÃO: $\max A$) é o maior elemento de A, caso exista;
- ou seja, existe o máximo de A se, e somente se, $\exists \sup A$ e $\sup A \in A$; em caso afirmativo, $\sup A = \max A$.

Revisão sobre sup e inf

Axioma do Supremo

Se $A \subset \mathbb{R}$ for um conjunto não vazio e limitado superiormente, então $\exists \sup A$.

Corolário

Se $A \subset \mathbb{R}$ for um conjunto não vazio e limitado inferiormente, então $\exists \inf A$.

Caracterização de Limites de Sequências Monótonas

Proposição

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequência em* $\mathbb{R}$.

i) *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for crescente, então* $(x_n)_n$ *é convergente se, e somente se, for limitada superiormente; em caso afirmativo, seu limite coincide com o supremo da sua imagem.*

ii) *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for decrescente, então* $(x_n)_n$ *é convergente se, e somente se, for limitada inferiormente; em caso afirmativo, seu limite coincide com o ínfimo da sua imagem.*

Caracterização de Limites de Sequências Monótonas

Exemplo (o número *e*)

Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ a sequência de números reais dada por, $\forall n \geq 1$,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Então $(x_n)_n$ é crescente e limitada superiormente por 3, portanto convergente para o supremo da sua imagem, o qual é um número real, denotado por e, pertencente ao intervalo $[2, 3]$.

Sequências de Cauchy

Definição

Uma sequência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se uma sequência de Cauchy se a seguinte condição for satisfeita:

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Teorema

Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é de Cauchy se, e somente se, for convergente.

Exercício

Estude a convergência da sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ *de números reais definida indutivamente por* $x_1 = \sqrt{2}$ *e* $(\forall n \geq 1)\, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.