Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 1

Prof. Bruno Holanda

Aula 6

Percebendo Padrões

Uma das principais habilidades que deve ser desenvolvida pelos alunos que desejam ter um bom desempenho em competições de matemática é sua capacidade de perceber padrões. Nesta aula iremos resolver alguns exercícios que tratam deste tema e que foram retirados de olimpíadas passadas.

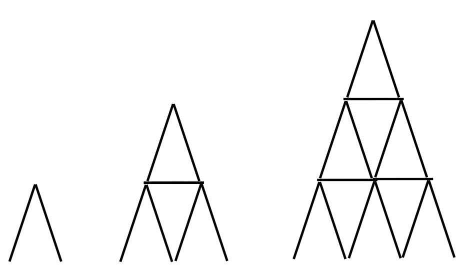
Problema 1. Victor e Maria começam a trabalhar no mesmo dia. Victor trabalha 3 dias seguidos e depois tem um dia de descanso. Maria trabalha 7 dias seguidos e descansa outros 3. Quantos dias de descanso em comum os dois tiveram durante os 1.000 primeiros dias?

Solução. O ciclo de trabalho de Vitor possui quatro dias. Ou seja, forma um período de tamanho quatro. E o ciclo de trabalho de Maria tem dez dias. Portanto, só precisamos verificar o que acontece nos primeiros 20 dias.

Vitor	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F
Maria	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F

Portanto, a cada 20 dias eles têm dois dias de descanso em comum. Assim, durante os 1.000 primeiros dias , terão 100 dias de descanso em comum. □

Problema 2. A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos, foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente. Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 10 andares?



Solução. Para fazer um novo andar num castelo já construído, precisamos de três cartas para cada andar anterior mais duas para o topo. Assim, a partir do castelo de três andares, para fazer o de quatro andares, precisamos de mais $3 \times 3 + 2 = 11$ cartas, num total de $15 + 11 = 26$ cartas. Portanto, para fazer o castelo de cinco andares, precisamos de $26 + 4 \times 3 + 2 = 40$ cartas. $\square$

Problema 3. Para construir o arranjo triangular a seguir, que tem 2008 linhas, obedeceu-se a uma certa regra.

```
      O
     OB
    OBM
   OBMO
  OBMOB
 OBMOBM
OBMOBMO
```

1. Quantas vezes a palavra **OBM** apararece completamente na maior coluna desse arranjo?

2. Quantas vezes a letra **O** aparece no arranjo?

Solução.

1. A maior coluna tem 2008 letras e **OBM** é um bloco de 3 letras. Como $2008 = 669 \times 3 + 1$, o número de vezes em que a palavra **OBM** aparece completamente na maior coluna é 669.

```
      O
     OB
    OBM
   OBMO
  OBMOB
 OBMOBM
OBMOBMO
```

2. Da esquerda para a direita, fazendo a contagem ao longo das flechas, a primeira passa por 2008 letras **O**. Como a segunda inicia três linhas abaixo, ela passa por $2008 - 3 = 2005$ letras **O**. Nesse padrão, a próxima passará por 2002 letras **O**; a seguinte, por 1999, e assim até a última flecha, que passará por 1. Portanto, o número de vezes que a letra **O** aparece no arranjo é:

$$2008 + 2005 + 2002 + 1999 + \cdots + 1 = \frac{(2008+1) \times 670}{2} = 673015$$

$\square$

Problema 4. Observe como o quadriculado abaixo é preenchido.

diagonal 1 diagonal 2 diagonal 3 diagonal 4

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	0	1	2			

1. Qual é a soma dos elementos da diagonal 9?

2. Qual é o resto da divisão por 100 da soma dos elementos da diagonal 2007?

Solução. Pode-se concluir, examinando a tabela, que a soma dos elementos da diagonal n é igual a $2n + (n - 1)k$, em que k é o algarismo das unidades do número n. Por exemplo, na diagonal de número quatro, a soma dos números é $2 \cdot 4 + (4 - 1) \cdot 4 = 20$, na diagonal de número 10, a soma dos números é $2 \times 10 + (10 - 1) \times 0 = 20$ etc.

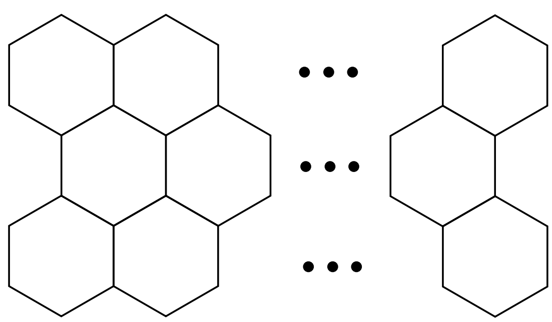
1. Na diagonal de número 9, a soma dos elementos é $2 \cdot 9 + (9 - 1) = 90$. De outra forma, na diagonal 9 há 10 números 9; portanto, a soma é $10 \cdot 9 = 90$.

2. Na diagonal 2007, a soma será:

$$2 \cdot 2007 + (2007 - 1) \cdot 7 = 4014 + 14042 = 18056.$$

   O resto da divisão desse número por 100 é 56.

Problema 5. O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas de comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?



Solução. Pela figura do problema, podemos percceber que os hexágonos estão dispostos em três linhas horizontais e que a linha do meio possui um hexágono a menos em relação às duas outras linhas. Dessa forma, temos 11 hexágonos na primeira e terceiras linhas e 10 hexágonos na segunda linha.

Para montar o primeiro hexágono da primeira linha, precisaremos de 6 palitos. E em todos os outros 10 hexágonos da primeira linha serão necessários 5 palitos.

$$6 + (5 \times 10) = 56$$

Para montar o hexágono primeiro hexágono da segunda linha, precisaremos de 4 palitos. E em todos os demais hexágonos da segunda linha serão necessários apenas 3 palitos.

$$4 + (3 \times 9) = 31$$

Para montar o hexágono primeiro hexágono da terceira linha, precisaremos de 5 palitos. Nos próximos 9 hexágonos, precisaremos apenas de 3 palitos em cada. E no último, serão necessários 4 palitos.

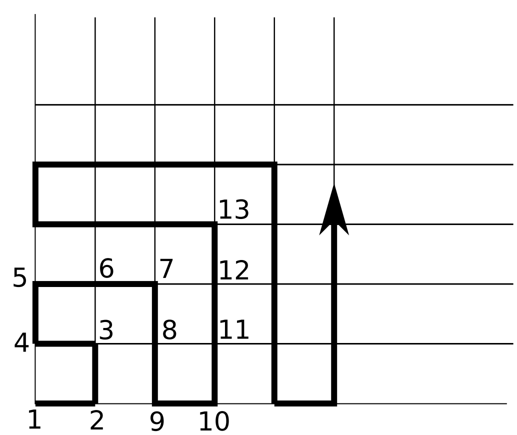
$$5 + (3 \times 9) + 4 = 36$$

Dessa forma, para construir toda a configuração serão necessários $56 + 31 + 36 = 123$ palitos.

Problema 6. O primeiro número de uma sequência é 7. O próximo número é obtido da seguinte maneira: calculamos o quadrado do número anterior, $7^2 = 49$ e a seguir, efetuamos a soma dos algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número será $4 + 9 + 1 = 14$. Repetimos este processo, $14^2 = 196$. O terceiro número da sequência será $1+9+6+1 = 17$ e assim sucessivamente. Qual será o 2002^o elemento dessa sequência?

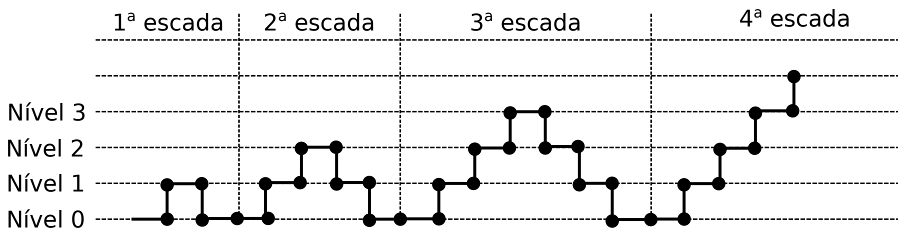
Solução. Os primeiros números da seqüência são $(7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5...)$ donde vemos que exceto pelos 4 primeiros termos, a sequência é periódica com período 3. Como 2002 deixa resto 1 quando dividido por 3 o número procurado coincide com aquele que ocupa o sétimo lugar na seqüência, ou seja, o número 11. $\square$

Problema 7. Os pontos da rede quadriculado a seguir são numerados seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente a esquerda dele?



Solução. Observe que os pontos correspondentes aos quadrados perfeitos pares e ímpares estão sobre os lados vertical e horizontal do quadriculado, respectivamente. Os quadrados perfeitos mais próximos de 2001 são $1936 = 44^2$ e $2025 = 45^2$. Como 2001 está mais próximo de 2025, o ponto correspondente está no segmento vertical descendente que termina em 2025. Logo, o ponto imediatamente abaixo dele corresponde ao número 2002. Para determinar o número do ponto imediatamente à sua esquerda, consideramos o quadrado perfeito ímpar anterior ao 2015, que é o $43^2 = 1849$. O ponto desejado está no segmento ascendente que começa em 1850 e situado à mesma distância que o ponto 2001 está de 2025. Dessa forma, o número procurado é $1850 + (2025 - 2001) = 1850 + 24 = 1874$.

Problema 8. Sobre uma mesa, 2010 fósforos são disposto em escadas como indicado na seguinte figura:



1. Qual é o número da escada que contém o último fósforo?

2. Em qual nível está a cabeça do último fósforo?

Solução. Seja a_n a quantidade de fósforos na n-ésima escada. Veja que $a_1 = 5$, $a_2 = 9$, $a_3 = 13$. Ou seja, podemos verificar que

$$a_{n+1} = a_n + 4$$

Mais ainda, $a_n = 4n + 1$ para todo $n \geq 1$. Daí, até a n-ésima escada teremos utilizado

$$S_n = (4 \cdot 1 + 1) + (4 \cdot 2 + 1) + (4 \cdot 3 + 1) + \cdots + (4n + 1)$$

palitos. Colocando o 4 em evidência, o valor anterior pode ser reescrito como

$$S_n = 4(1 + 2 + \cdots + n) + n = 2n(n + 1) + n = n(1 + 2(n + 1)) = n(2n + 3).$$

Veja que $S_n = n(2n+3)$ é aproximadamente o dobro de um quadrado, i.e. $n(2n+3) \approx 2n^2$. Dessa forma, calculando

$$\sqrt{\frac{2010}{2}} = \sqrt{1005} \approx 31,7$$

podemos concluir que devemos testar primeiramente $n = 31$. Observe que $S_{31} = 2015$. Ou seja, para completar a 31^a escada, devemos utilizar 2015 palitos. Portanto, paramos na 31^a escada, sem iniciarmos a 32^a. Contanto de trás para frente, sabemos que o palito de ordem 2015 deve estar deitado no nível 0. Portanto, o palito de ordem 2010 deve estar na vertical, de cabeça para baixo começando no nível 3 e terminando no nível 2 (lugar onde estará sua cabeça).

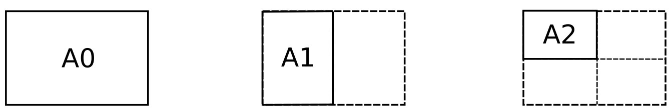
Problemas Propostos

Problema 9. Considere o problema do castelo de cartas? Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 20 andares?

Problema 10. Esmeralda escreveu (corretamente!) todos os números de 1 a 999, um atrás do outro: 12345678910111213...997998999. Quantas vezes apareceu o agrupamento "21", nesta ordem?

Problema 11. Quantos números entre 1 e 2009 possuem a soma dos dígitos múltiplos de 5?

Problema 12. (ENEM) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países. O formato-base é uma folha retangular de papel chamada de A0, cujas dimensões estão na razão $1 : \sqrt{2}$. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, definindo os demais formatos, conforme o número da dobradura. Por exemplo, A1 é a folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 é a folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente, conforme figura.



Um tamanho de papel bastante comum em escritórios brasileiros é o A4, cujas dimensões são 21,0 cm por 29,7 cm. Quais são as dimensões, em centímetros, da folha A0?

a) $21,0 \times 118,8$

b) $84,0 \times 29,7$

c) $84,0 \times 118,8$

d) $168,0 \times 237,6$

e) $336,0 \times 475,2$

Dicas e Soluções

9. Nos castelos de 2, 7 e 15 cartas, podemos perceber que o número de pares de pés corresponde ao número de andares do castelo (terceiro andar: 3 pares de pés; segundo andar: 2 pares de pés; e assim por diante). Portanto, em um castelo de 20 andares teremos 20 pares de pés, ou seja, 40 cartas. Sejam ainda:

   S_1: Soma das cartas que formam a base de cada um dos andares.

   $$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 19 = 190$$

   S_2: Soma das cartas que formam os "pés" de cada um dos andares.

   $$S_2 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 38 + 40 = 420$$

   Logo, temos $S_1 + S_2 = 610$ cartas no total.

10. Vamos primeiro contar os agrupamentos 21 obtidos a partir de um par de números consecutivos tal que o primeiro termina com 2 e o segundo começa com 1, que são os seguintes 11 casos: 12 13, 102 103, 112 113, ..., 192 193. Vamos agora listar os números que têm o agrupamento 21 no meio de sua representação decimal: 21, 121, 221,..., 921, 210, 211,..., 219. Temos então 20 números nesse segundo caso, e portanto a resposta é $11 + 20 = 31$.

11. Considere um grupo de dez números consecutivos x, $x+1$,..., $x+9$ em que x é um múltiplo de 10 e portanto, termina em zero. Seja $S(y)$ a soma dos dígitos de y. Agora considere os seguintes casos:

    - Se $S(x)$ for múltiplo de 5, então $S(x+5)$ também será.
    - Se $S(x+1)$ for múltiplo de 5, então $S(x+6)$ também será.
    - Se $S(x+2)$ for múltiplo de 5, então $S(x+7)$ também será.
    - Se $S(x+3)$ for múltiplo de 5, então $S(x+8)$ também será.
    - Se $S(x+4)$ for múltiplo de 5, então $S(x+9)$ também será.

    Dessa forma, em cada grupo deste tipo temos exatamente dois números cuja soma dos dígitos é um múltiplo de 5. De 0 a 1999, temos 200 grupos como estes. Então, temos $2 \times 200 - 1 = 399$ números deste tipo, já que no grupo de números de 1 a 9 há apenas um número. Ainda faltando contar os números 2003 e 2008. Portanto, temos um total de $399 + 2 = 401$ números.

12. Percebemos que a cada tipo de folha, dobra-se o maior comprimento ao meio, deixando a largura de mesmo tamanho. Então, para voltarmos um tipo de folha, basta dobrar o menor comprimento e não mexer na largura. Assim, temos:

    $A4 = 21 \times 29,7$

    $A3 = 29,7 \times 42$

    $A2 = 42 \times 59,4$

    $A1 = 59,4 \times 84$

    $A0 = 84 \times 118,8.$

    Gabarito: **C**

Bibliografia Recomendada

Muitos dos exercícios propostos nesta aula foram retirados da página da Olimpiada Brasileira de Matemática (`www.obm.org.br`). Outros livros que também podem servir como apoio são:

1. **Mathematical Circles: Russian Experience (Mathematical World, Vol. 7)**. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia V. Itenberg.

2. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991 (Contests in Mathematics Series ; Vol. 1)**. Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko.