

# Balanceamento e Velocidades Críticas de Rotores

Prof. Dr. Walter Ponge-Ferreira \*

PME - Departamento de Engenharia Mecânica  
*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*

Abril 2005

# 1 Introdução

*Um corpo em rotação, denominado genericamente de rotor, encontra-se desbalanceado quando não há equilíbrio interno das forças de inércia decorrentes da rotação (forças centrífugas). Isto acontece quando o eixo central de inércia do rotor não coincide com o eixo geométrico dos mancais.*

Caracteriza o desbalanceamento o aparecimento de esforços dinâmicos rotativos nos mancais do rotor que fazem com que as máquinas vibrem harmonicamente na frequência correspondente à velocidade de rotação. Tanto os esforços dinâmicos, como o movimento vibratório induzido nos mancais, apresentam período de oscilação igual ao período de rotação do rotor.

Logo:

$$T = \frac{60}{n} \quad (1)$$

onde  $T$  é o período de oscilação ou de rotação em  $s$  e  $n$  é a velocidade de rotação em  $rpm$ .

A existência de esforços dinâmicos nos rotores acelera a degradação dos componentes da máquina, em especial os mancais, e produz vibração indesejada, que pode prejudicar o próprio desempenho da máquina ou pode perturbar outros processos na sua vizinhança. Portanto, o balanceamento de rotores é um processo de grande importância para o engenheiro que se depara com este problema tanto no projeto e construção de máquinas rotativas, como na manutenção e utilização destas máquinas nos processos industriais.

*Balancear um rotor significa restituir o equilíbrio interno das forças centrífugas pela adição ou remoção de material de pontos específicos do rotor de maneira que reduza e limite os esforços dinâmicos transmitidos aos mancais*

Na produção seriada, o balanceamento deve ser realizado em 100% das peças, o que torna frequentemente o processo de balanceamento um gargalo de produção. O balanceamento de grandes rotores consome muito tempo por ser necessário ligar e desligar a máquinas várias vezes. Rotores mal balanceados reduzem a vida das máquinas e aumentam os custos da manutenção. Por isso são necessários processos de balanceamento eficazes e eficientes.

## 2 Velocidades Críticas de Rotores

Na análise de rotores desbalanceados distinguimos entre dois casos de rotores. Quando os esforços de desbalanceamentos são pequenos em relação a rigidez do rotor e as deformações induzidas são desprezível, tratamos o rotor como sendo rígido, isto é, ele mantém sua forma praticamente indeformada em operação. Quando os esforços centrífugos são elevados em relação à rigidez do rotor e as deformações não podem ser desprezadas falamos de rotores flexíveis.

O parâmetro que permite distinguir se um rotor é flexível ou se pode ser considerado rígido é a velocidade crítica do rotor. Rotores que operam em baixa rotação, i.e., com velocidade de rotação muito abaixo da (primeira) velocidade crítica são considerados

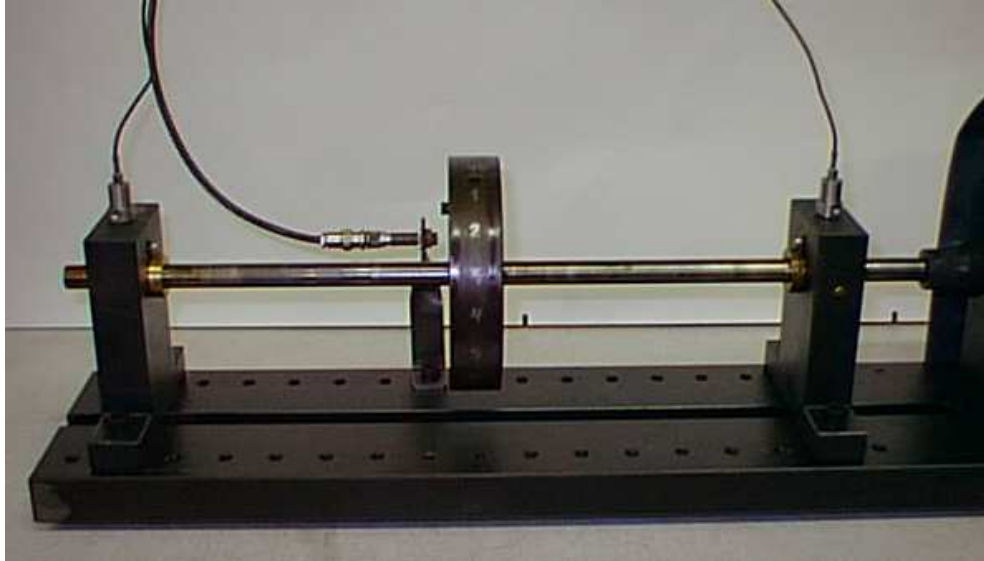


Figura 1: Rotor educacional para treinamento de balanceamento e determinação de velocidade crítica

rígidos. Rotores que operam em alta rotação, i.e., com velocidade de rotação próxima ou acima da (primeira) velocidade crítica são considerados flexíveis. Na prática considera-se flexível o rotor que opera acima de  $\frac{1}{5}$  ou  $\frac{1}{3}$  da primeira velocidade crítica.

Rotores relativamente leves e curtos que operam em baixa rotação (não muito superior a 3600 rpm) são em geral rígidos. São exemplos de rotores rígidos, armaduras de motores elétricos, moto-bombas e virabrequins. Rotores pesados e longos que operam em alta rotação (acima de 5000 rpm) são em geral flexíveis. Turbinas à vapor e a gás operam em velocidades de rotação de 8000 a 12000 rpm, localizadas acima da primeira ou da segunda velocidade crítica do rotor, por isso são flexível.

A velocidade crítica de um rotor é um parâmetro físico do rotor que depende da sua rigidez e da sua inércia. A velocidade crítica  $\omega_{cr}$  do rotor simples mostrado na figura 1, chamando de Laval, constituído de um volante central entre mancais, é dada pela seguinte expressão:

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

onde  $k$  é a rigidez combinada do eixo do rotor e dos mancais/pedestais e  $m$  a massa do rotor.

Para os parâmetros do rotor mostrados da figura 2 temos:

$$k = \frac{K_e K_m}{K_e + K_m} \quad (3)$$

$$m = M_d + \frac{M_e}{2} \quad (4)$$

onde  $k$  vem da associação em série da rigidez dos mancais  $\frac{K_m}{2} + \frac{K_m}{2}$  e da rigidez do eixo  $K_e = \frac{48 EJ}{L^3}$ . A massa total  $m$  é a soma da massa do volante  $M_d$  e de parcela da massa

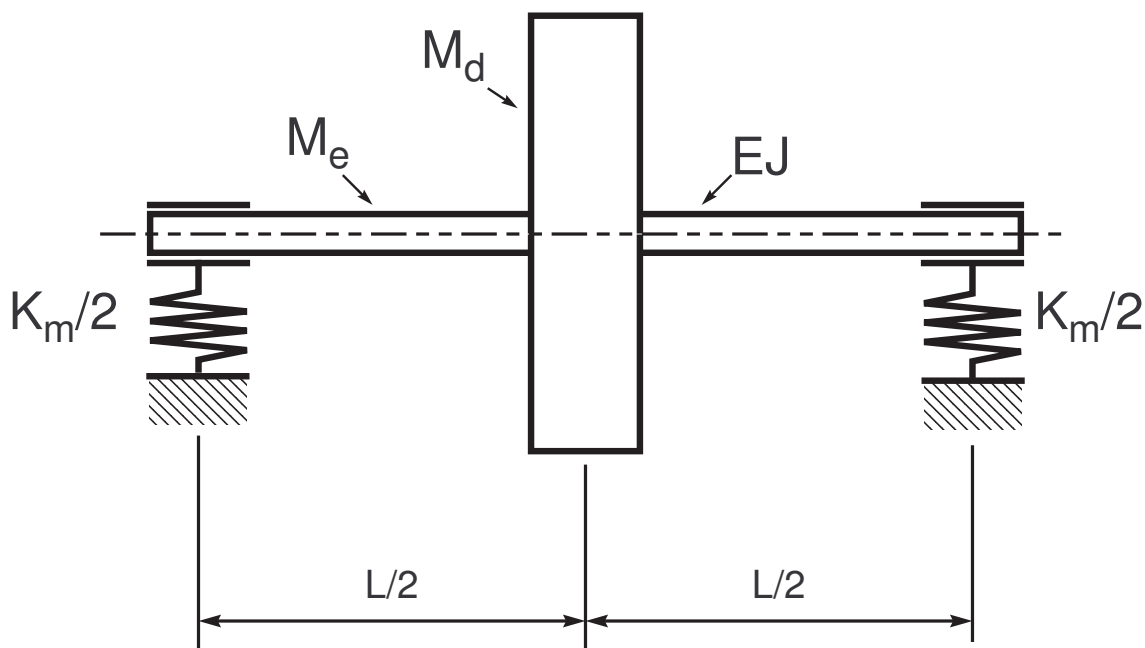


Figura 2: Rotor de Laval

$M_e$  do eixo flexível.  $E$  é o módulo de elasticidade do material do eixo e  $J$  o momento de inércia plano da seção transversal do eixo.

Para entender a velocidade crítica do rotor de Laval verifiquemos o equilíbrio dinâmico entre a força centrífuga de inércia  $F_c$  e a força de restituição elástica do eixo  $F_k$ :

$$F_k = kx \quad (5)$$

$$F_c = m\omega^2(x + e) \quad (6)$$

onde  $x$  é a deflexão radial do disco e  $e$  é a excentricidade do volante em relação ao eixo geométrico do disco, conforme mostrado na figura 3.

Aplicando-se o *Teorema do Movimento do Baricentro* ao disco central na condição de regime permanente com velocidade de rotação angular  $\omega$ , obtemos a seguinte expressão:

$$F_k = F_c \quad \Rightarrow \quad kx = m\omega^2(x + e) \quad (7)$$

logo:

$$x = \frac{m\omega^2 e}{k - m\omega^2} \quad (8)$$

devidendo-se o numerador e o denominador por  $k$  vem:

$$x = \frac{\frac{m}{k}\omega^2 e}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} \quad (9)$$

Finalmente, introduzindo-se a definição  $\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , a expressão da deflexão  $x$  do disco fica:

$$x = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{cr}^2} e}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cr}^2}} \quad (10)$$

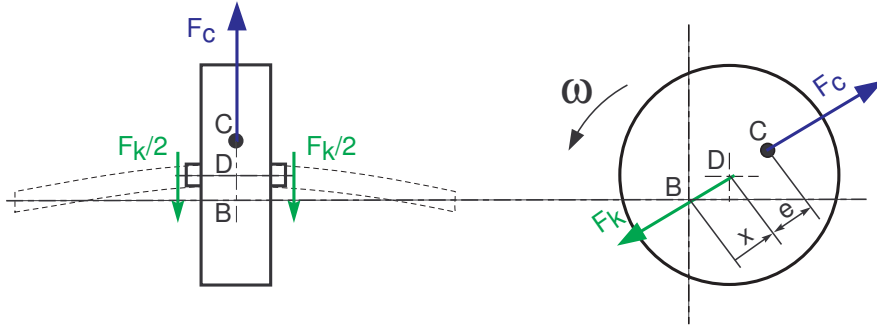


Figura 3: Equilíbrio Dinâmico do Rotor Desbalanceado

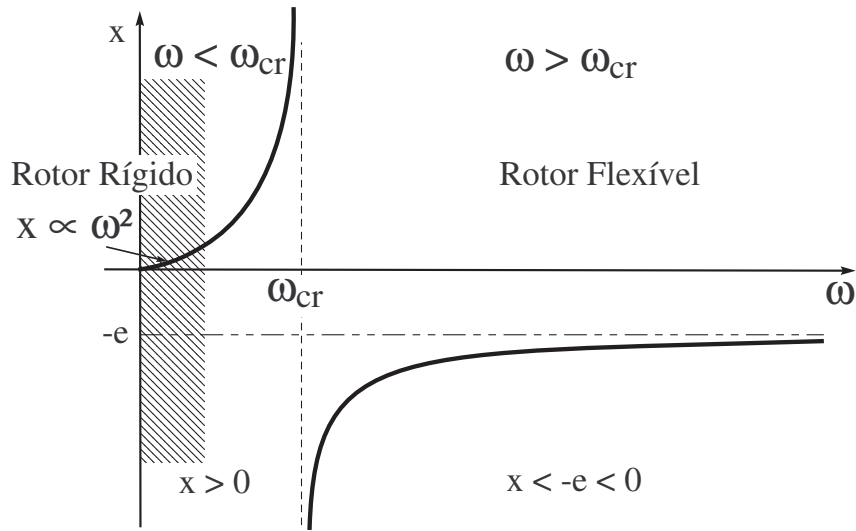


Figura 4: Gráfico da deflexão do eixo em função da velocidade de rotação

No gráfico da figura 4 é apresentada a deflexão  $x$  do disco em função da razão entre a velocidade de rotação angular e a velocidade crítica do rotor  $\frac{\omega}{\omega_{cr}}$ .

Verifica-se que para baixas rotações a deflexão do eixo é pequena e cresce aproximadamente com o quadrado da velocidade de rotação angular, i.e.:

$$\omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow \frac{m}{k} e \omega^2 \quad (11)$$

pois:

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cr}^2} \simeq 1 \quad (12)$$

Em todo caso, a relação  $\frac{x}{e}$  é inferior a  $\sim 5\%$  ou  $\sim 12\%$  quando a rotação  $\omega$  é inferior a  $\frac{1}{5}$  ou  $\frac{1}{3}$  da velocidade crítica  $\omega_{cr}$ . Nesse caso a deformação do eixo é desprezível e o rotor pode ser considerado rígido.

Quando a rotação cresce, aproximando-se da velocidade crítica  $\omega_{cr}$ , a deflexão cresce rapidamente com a velocidade de rotação. Nessas condições a deflexão é significativa e

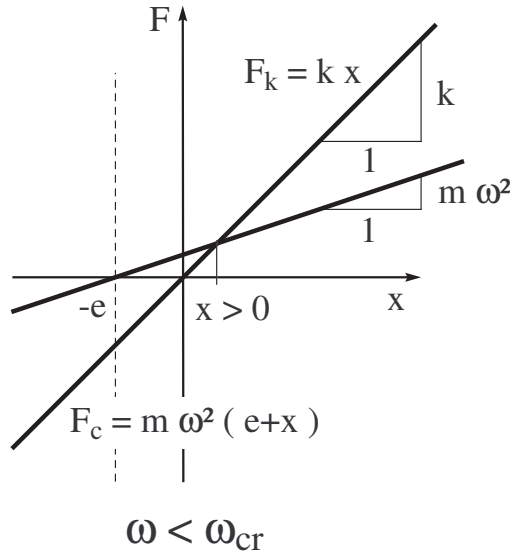


Figura 5: Gráfico do equilíbrio de forças em baixa velocidade de rotação

não é mais possível desprezar a deformação do eixo. Na velocidade crítica a deformação tende a infinito, eventualmente levando ao colapso do rotor. Na prática, quando o rotor opera próximo da velocidade crítica ocorre grande deformação do eixo, esforços violentos nos mancais e intensas vibrações na máquina em geral.

Acima da velocidade crítica o denominador da expressão da deflexão inverte de sinal, fazendo com que a deflexão fique negativa. O valor absoluto da deflexão decresce a medida que a velocidade de rotação sobe e tende assintoticamente para um valor estável igual a excentricidade  $e$  do disco.

Isto é, em rotações muito elevadas:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{cr}^2} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{cr}^2} e}{-\frac{\omega^2}{\omega_{cr}^2}} = -e \quad (13)$$

Para entender a inversão de sinal da deflexão quando a velocidade de rotação passa pela crítica observemos como se dá o equilíbrio entre as forças de inércia nas três condições, i.e., com velocidade de rotação abaixo da crítica, com velocidade de rotação igual à velocidade crítica e como velocidade de rotação acima da crítica.

No gráfico da figura 5 é apresentado o ponto de equilíbrio entre a força  $F_k$  e  $F_c$ . Pela Lei de Hook, o gráfico da força elástica  $F_k$  é uma reta que passa pela origem e tem inclinação  $k$ . O gráfico da força centrífuga  $F_c$  é uma reta que passa pelo ponto  $x = -e$  e tem inclinação  $m \omega^2$ . Em baixa rotação ( $\omega < \omega_{cr}$ ), a rigidez da mola  $k$  é superior a  $m \omega^2$ , assim as duas retas se interceptam em um ponto com  $x > 0$ . A medida que a velocidade de rotação cresce, a inclinação da reta  $F_c$  cresce enquanto a inclinação da reta  $F_k$  permanece constante. Assim com o aumento da velocidade de rotação a deformação aumenta.

No gráfico da figura 6 é apresentado o equilíbrio das forças na velocidade crítica ( $\omega = \omega_{cr}$ ). Nesse caso a inclinação das duas retas,  $F_k$  e  $F_c$ , é igual, i.e.,  $k = m \omega^2$ , ou seja,  $\omega = \omega_{cr}$ . Nesse caso as duas retas são paralelas e a intersecção se dá no infinito. Por isso temos deflexão infinita.

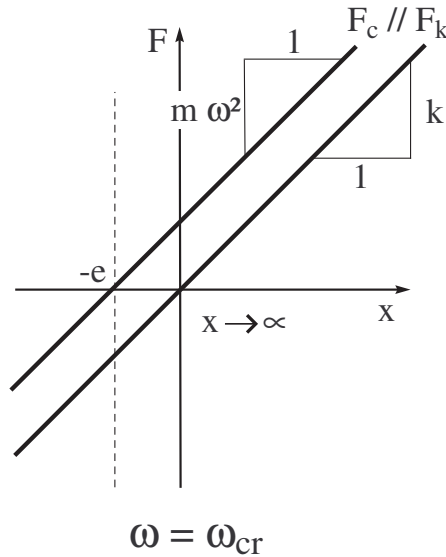


Figura 6: Gráfico do equilíbrio de forças na velocidade crítica

No gráfico da figura 7 é apresentado o equilíbrio das forças para velocidades de rotação acima da crítica ( $\omega > \omega_{cr}$ ). Agora a inclinação da reta  $F_c$  é maior que a inclinação da reta  $F_k$  e as duas se interceptam para um valor de deflexão negativa, ou melhor, para  $x \leq -e < 0$ . No limite para altíssimas rotações a reta  $F_c$  fica vertical, e a intersecção se dá no ponto  $x = -e$ .

Na figura 8 é mostrado o equilíbrio das forças nas três condições. O ponto  $C$  é o centro de massa do disco desbalanceado que se situa a uma distância  $e$  do seu centro geométrico  $D$ . O disco gira em torno do ponto fixo  $E$  que se localiza na posição inicial indeformada do eixo.

Em baixa rotação a força centrífuga deforma o eixo na direção do excesso de massa, nesse caso temos o alinhamento  $BDC$  com  $B$  parado e  $C$  apontando para o lado de maior deformação do eixo. A direção angular do rotor que aponta para o centro de massa é chamada de *ponto pesado* ou *heavy spot* em inglês. A direção angular de maior deformação, ou seja a direção angular do disco mais afastada do centro de rotação  $B$  é chamada de *ponto alto* ou *high spot*. Então para velocidades de rotação abaixo da crítica o ponto pesado coincide com o ponto alto.

Em alta rotação a deformação do eixo gira de  $180^\circ$  em relação ao ponto pesado. Assim o alinhamento fica  $BCD$ , ou seja, o lado de maior deflexão, ponto alto, é oposto ao lado do centro de massa, ponto pesado. Essa inversão se dá porque a força centrífuga cresce rapidamente com o quadrado da velocidade de rotação. Para que haja equilíbrio é necessário que a distância do centro de massa  $C$  ao centro de rotação  $B$  diminua. Isso pode ser obtido girando o ponto pesado em direção ao centro de rotação. Assim também em alta rotação existe equilíbrio entre  $F_k$  e  $F_c$ , onde ambas as forças apresentam valores finitos.

Na velocidade crítica não existe equilíbrio entre as duas forças. A deflexão cresce infinitamente e na realidade as duas forças não são alinhadas. Para entender a rotação da força  $F_c$  em relação a força  $F_k$  é necessário introduzir um terceiro efeito, qual seja, o amortecimento. De uma maneira simplificada, nas proximidades da velocidade crítica,

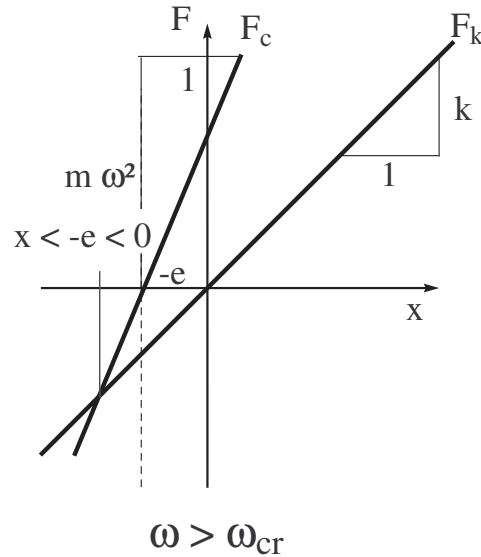


Figura 7: Gráfico do equilíbrio de forças em alta velocidade de rotação

a medida de a velocidade de rotação cresce, ocorrerá um atraso da força elástica e a força centrífuga será equilibrada principalmente pela força de amortecimento. Esse efeito provoca na prática a inversão gradual da direção de deflexão de  $BDC$  para  $BCD$ .

É importante enfatizar dois pontos. Primeiro, a velocidade crítica é um parâmetro do rotor, assim como sua massa ou rigidez. Portanto, mesmo um rotor parado tem velocidade crítica. A velocidade crítica é simplesmente um parâmetro de comparação. É chamada de velocidade porque tem dimensão de velocidade de rotação angular, i.e., sua unidade é  $\frac{rad}{s}$ .

Embora a velocidade crítica  $\omega_{cr}$  tenha expressão semelhante à da frequência natural  $\omega_n$ , os dois fenômenos são distintos e não devem ser confundidos. O eixo em rotação apresenta deformação constante ou pulsante e não alternada. As tensões mecânicas no eixo produzidas pelo desbalanceamento não mudam de sinal, i.e., não se alternam entre compressão e tração. Na maioria das vezes permanecem com valores praticamente constantes. Por isso, o desbalanceamento por si não provoca fadiga do eixo. Enquanto na vibração de sistemas mecânicos o movimento é alternado, produzindo tensões de compressão seguidas de tração sucessivamente, resultando em fadiga do material. A semelhança das duas expressões vem do fato que os dois fenômenos relacionam forças de inércia com forças de restituição elástica. Na velocidade crítica as forças de inércia são centrífugas. No segundo caso as forças de inércia são de aceleração e desaceleração.

Num eixo com velocidade de rotação abaixo da velocidade crítica as fibras do eixo em tração localizam-se do lado do ponto pesado, ou seja, na direção angular do centro de massa. Quando a velocidade de rotação é superior à crítica as fibras do eixo em tração são opostas ao ponto pesado. Isto porque ocorre a inversão de  $180^\circ$  da deflexão do eixo na passagem pela velocidade crítica.

Por último é importante notar que equações, esquemas e gráficos aqui analisados consideraram sempre a condição de equilíbrio. Para que isso ocorra é necessário que a variação da velocidade de rotação seja lenta, para que o movimento possa ocorrer em regime permanente, isto é, a variação de velocidade de rotação é tão baixa que em cada



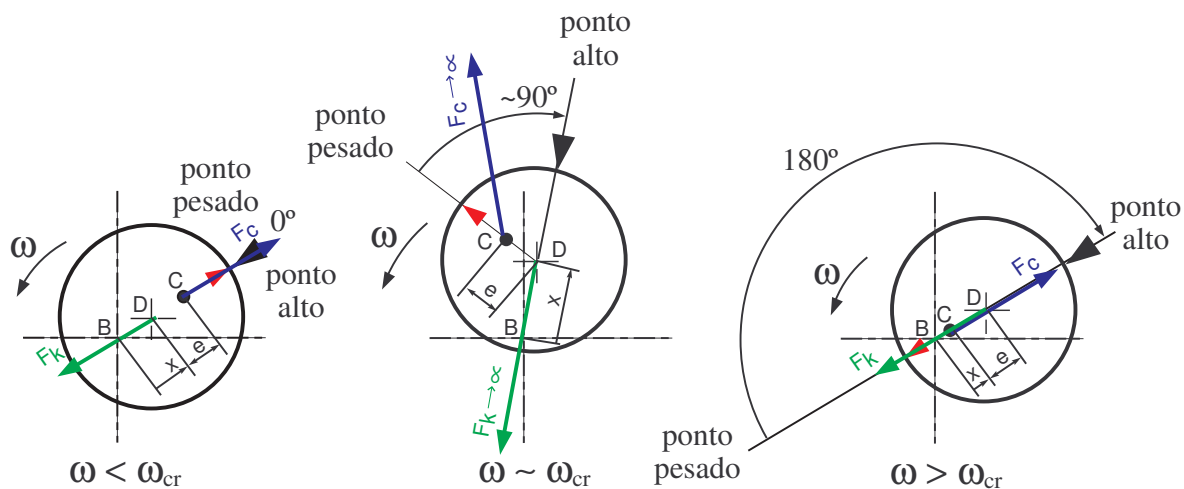


Figura 8: Croqui do equilíbrio dinâmico do rotor

rotação a deflexão tem tempo se estabilizar na condição de equilíbrio entre força elástica e centrífuga. Quando a velocidade de rotação se aproxima da velocidade crítica a deflexão cresce infinitamente, mas não instantaneamente. É necessário que a massa do disco seja acelerada radialmente, é isso leva tempo. Por isso é possível ultrapassar a velocidade crítica executando-se uma variação rápida da velocidade de rotação, com isso não se permite que a deflexão cresça infinitamente na passagem pela crítica.

Na subida de rotação de grandes turbinas que operam acima da velocidade crítica é utilizado essa estratégia. Inicialmente a turbina é ligada e opera numa baixa rotação até que ela entre em equilíbrio térmico. Então sobe-se a rotação para um patamar abaixo da primeira velocidade crítica, onde as deflexões do eixo e vibrações dos mancais ainda são toleráveis. Aguarda-se o equilíbrio térmico da turbina nessa condição. Em seguida a velocidade de rotação é aumentada rapidamente para uma passagem veloz pela velocidade de rotação crítica. Estabeliza-se a rotação em um novo patamar ligeiramente acima da velocidade crítica para aguardar novamente o equilíbrio térmico da turbina. Finalmente a velocidade de rotação é aumentada até a velocidade de rotação de operação.

Com isso reduz-se o tempo que a turbina opera próximo da velocidade de rotação crítica, assim minimizando os danos causados pela passagem pela rotação crítica. Também é importante observar que na passagem pela velocidade crítica parte da energia destinada à aceleração angular da turbina desvia-se para a vibração da máquina. Na proximidade da velocidade crítica as forças crescem e portanto as forças de atrito também, absorvendo mais energia do movimento giratório. Por isso, é necessário dispor-se de um excedente de potência para que não se fique preso na rotação crítica. Isso pode acontecer em alguns caso, com conseqüências danosas para a máquina caso se opere por muito tempo próxima à velocidade de rotação crítica.