SEM 5903 – Dinâmica de Sistemas Rotativos

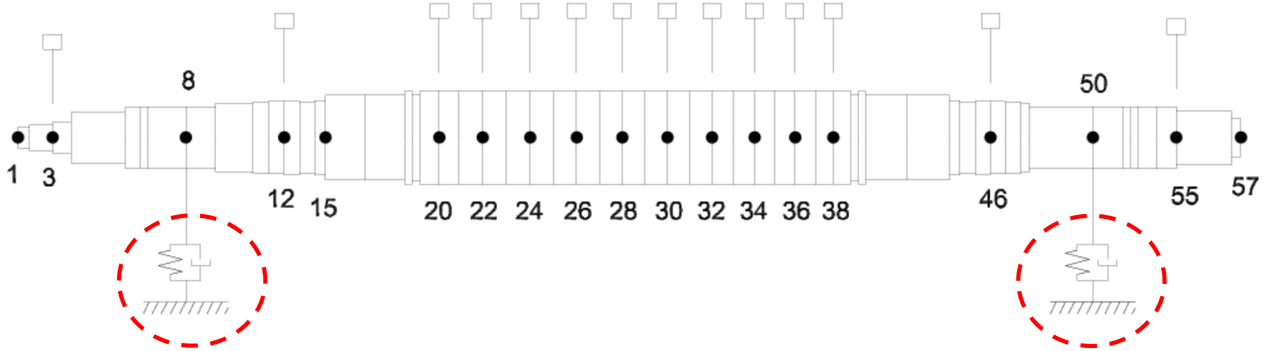
AULA 7 – Técnicas de Identificação Experimental das Matrizes de Rigidez e Amortecimento

Prof. Rodrigo Nicoletti

Equação de Movimento

$$\boxed{\left(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e + \boldsymbol{M}^d\right)}\ddot{\boldsymbol{q}} + \left[\boldsymbol{D}^m - \Omega\boxed{\left(\boldsymbol{G}^e + \boldsymbol{G}^d\right)}\right]\dot{\boldsymbol{q}} + \left(\boxed{\boldsymbol{K}^e} + \boldsymbol{K}^m\right)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}$$

termos fáceis de identificar os parâmetros



Como identificar as matrizes de rigidez e amortecimento dos mancais do sistema rotativo?

Identificação Numérica

Se há um modelo matemático disponível para o mancal:

1. Impor um deslocamento (pequeno) ao eixo na direção j - Δx_j

2. Calcular a força resultante no mancal devido a este deslocamento (perturbação) na direção i - Δf_i

3. A rigidez será dada por: $k_{ij} = \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_j}$

4. Impor uma velocidade (pequena) ao eixo na direção j - $\Delta \dot{x}_j$

5. Calcular a força resultante no mancal devido a esta velocidade (perturbação) na direção i - Δf_i

6. O amortecimento será dada por: $d_{ij} = \dfrac{\Delta f_i}{\Delta \dot{x}_j}$

Método difícil de implementar experimentalmente por causa dos ruídos nos sinais de medição !!!

Identificação Experimental – MÉTODO 1

A equação de movimento do sistema rotativo é dada por: $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{D} - \Omega\boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}$

Dada uma excitação harmônica do tipo: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}e^{i\omega t}$

Pode-se assumir uma resposta harmônica do tipo: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{X}e^{i\omega t}$

Substituindo-se na equação de movimento:

$$\underbrace{(-\omega^2\boldsymbol{M} + i\omega\boldsymbol{D} - i\omega\Omega\boldsymbol{G} + \boldsymbol{K})}_{\boldsymbol{Z}(\Omega)}\,\boldsymbol{X}e^{i\omega t} = \boldsymbol{F}e^{i\omega t}$$

Matriz de Impedância

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}(\Omega)\,\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{Z}(\Omega) = \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$$

É possível medir experimentalmente ***H(Ω)*** !!!

(FRFs da aula passada)

Então: $-\omega^2\boldsymbol{M} + i\omega\boldsymbol{D} - i\omega\Omega\boldsymbol{G} + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$

Identificação Experimental – MÉTODO 1

Se: $$\underbrace{-\omega^2 \boldsymbol{M} + i\omega \boldsymbol{D} - i\omega\Omega \boldsymbol{G}}_{\text{termos conhecidos}} + \boldsymbol{K} = \underbrace{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)}_{\text{medido experimentalmente}}$$

Então, pode-se agrupar os termos conhecidos: $$i\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K} = \underbrace{\boldsymbol{H}^{-1} + \omega^2 \boldsymbol{M} + i\omega\Omega \boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{S}(\Omega)}$$

Portanto:

$$\boldsymbol{K} = \mathcal{Re}(\boldsymbol{S})$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{\mathcal{Im}(\boldsymbol{S})}{\omega}$$

Desvantagem do Método:

matriz de receptância tem que ser invertida !!!

⬇

pode resultar em matriz mal condicionada

Identificação Experimental – MÉTODO 2

Tomemos a equação com os termos conhecidos e desconhecidos agrupados: $\underbrace{i\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}}_{\text{desconhecido}} = \underbrace{\boldsymbol{H}^{-1} + \omega^2 \boldsymbol{M} + i\omega\Omega \boldsymbol{G}}_{\text{conhecido}}$

Pré-multiplicando-se pela matriz ***H(Ω)***, tem-se: $\boldsymbol{H}\,(i\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}\,(\omega^2 \boldsymbol{M} + i\omega\Omega \boldsymbol{G})$

Se expandirmos a matriz ***H(Ω)*** em termos reais e imaginários, temos:

$$(\boldsymbol{H}_R + i\boldsymbol{H}_I)\,(i\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{H}_R + i\boldsymbol{H}_I)(\omega^2 \boldsymbol{M} + i\omega\Omega \boldsymbol{G})$$

O que resulta em um sistema de equações matricial com termos reais e imaginários.

Separando-se os termos reais dos termos imaginários: $\begin{cases} \boldsymbol{H}_R \boldsymbol{K} - \omega \boldsymbol{H}_I \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I} + \omega^2 \boldsymbol{H}_R \boldsymbol{M} - \omega\Omega \boldsymbol{H}_I \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H}_I \boldsymbol{K} + \omega \boldsymbol{H}_R \boldsymbol{D} = \omega^2 \boldsymbol{H}_I \boldsymbol{M} + \omega\Omega \boldsymbol{H}_R \boldsymbol{G} \end{cases}$

Identificação Experimental – MÉTODO 2

Rearranjando-se, temos: $$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_R & -\omega \boldsymbol{H}_I \\ \boldsymbol{H}_I & \omega \boldsymbol{H}_R \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} + \omega^2 \boldsymbol{H}_R \boldsymbol{M} - \omega\Omega \boldsymbol{H}_I \boldsymbol{G} \\ \omega^2 \boldsymbol{H}_I \boldsymbol{M} + \omega\Omega \boldsymbol{H}_R \boldsymbol{G} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q}}$$

Então: $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{Q}$$

Vantagem do Método:

Apesar de envolver a inversão de uma matriz com termos da matriz de receptância

⬇

a matriz ***W*** é uma matriz com elementos reais (não é complexa) !!!

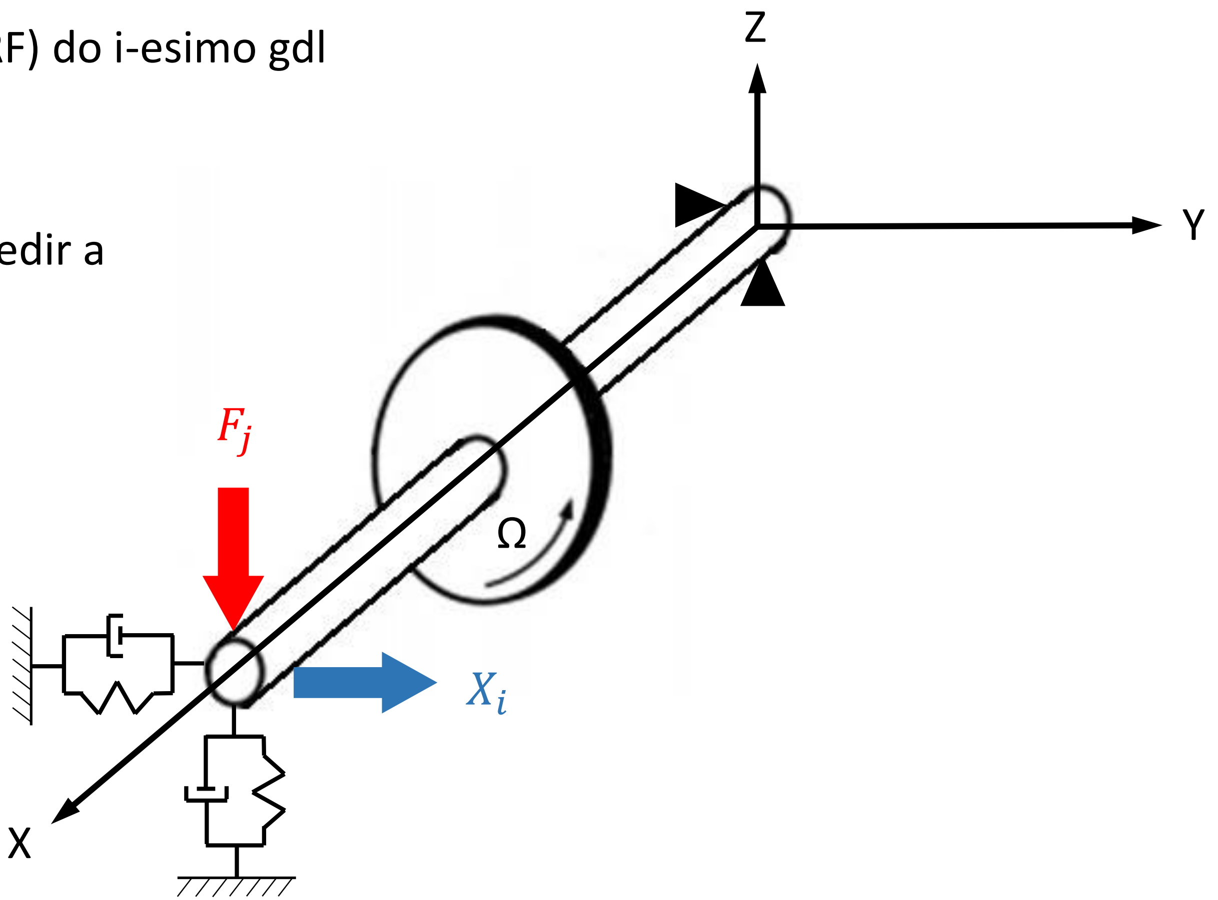
Mas, como medir a matriz de receptância $\boldsymbol{H}(\Omega)$?

Metodologia Experimental para Medição da Matriz *H(Ω)*

Deseja-se medir a Matriz de Receptância: $\boldsymbol{H}(\Omega) = \begin{bmatrix} H_{yy} & H_{yz} \\ H_{zy} & H_{zz} \end{bmatrix}$

Onde: H_{ij} é a função de resposta em frequência (FRF) do i-esimo gdl devido a uma excitação no j-ésimo gdl

Ou seja, deve-se excitar o sistema (APLICAR FORÇA) e medir a resposta (DESLOCAMENTO)



Metodologia Experimental para Medição da Matriz *H(Ω)*

Seja o **sinal de força de excitação**: $F_j(t)$ (medido durante o experimento)

E o **sinal de resposta**: $X_i(t)$ (medido durante o experimento)

Pode-se estimar a FRF através dos Estimadores H_1 e H_2:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{f,x}}{S_{f,f}}$$

➡ Dá mais importância ao sinal de entrada (excitação)

$$H_2(\omega) = \frac{S_{x,x}}{S_{x,f}}$$

➡ Dá mais importância ao sinal de saída (resposta)

Onde: $S_{x,x}$ Densidade espectral de potência (PSD) do sinal de resposta

$S_{f,f}$ Densidade espectral de potência (PSD) do sinal de excitação

$S_{x,f}$ e $S_{f,x}$ Densidade espectral de potência cruzada dos sinais de excitação e da resposta

Metodologia Experimental para Medição da Matriz *H(Ω)*

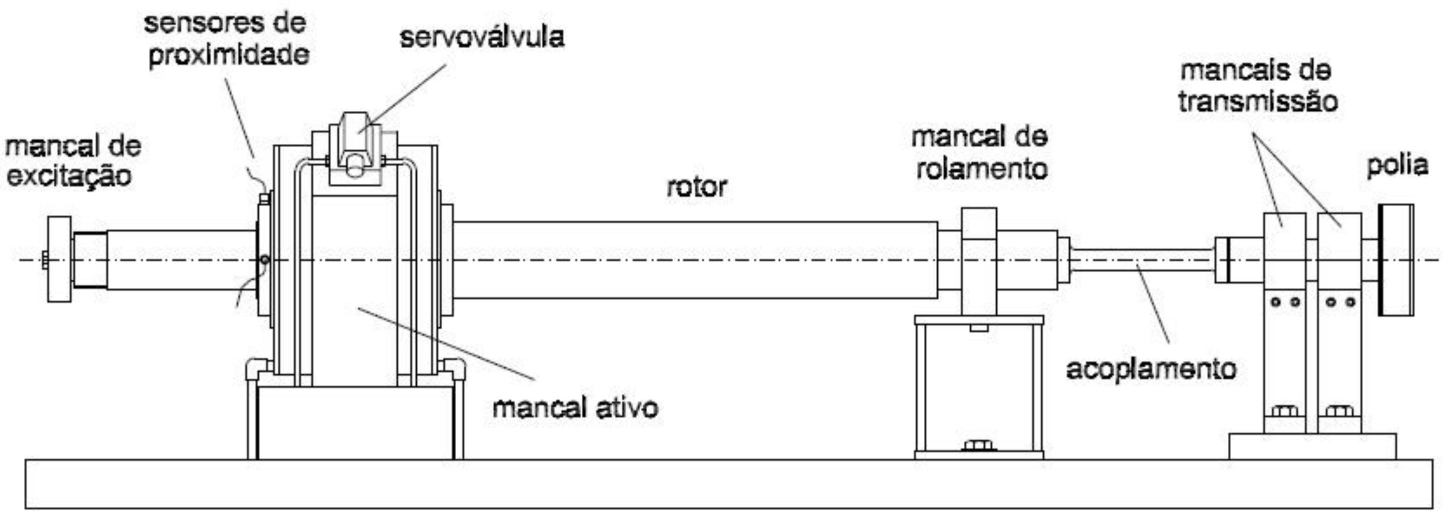
Se as medidas forem bem feitas: $H_1(\omega) = H_2(\omega) = H_{ij}$

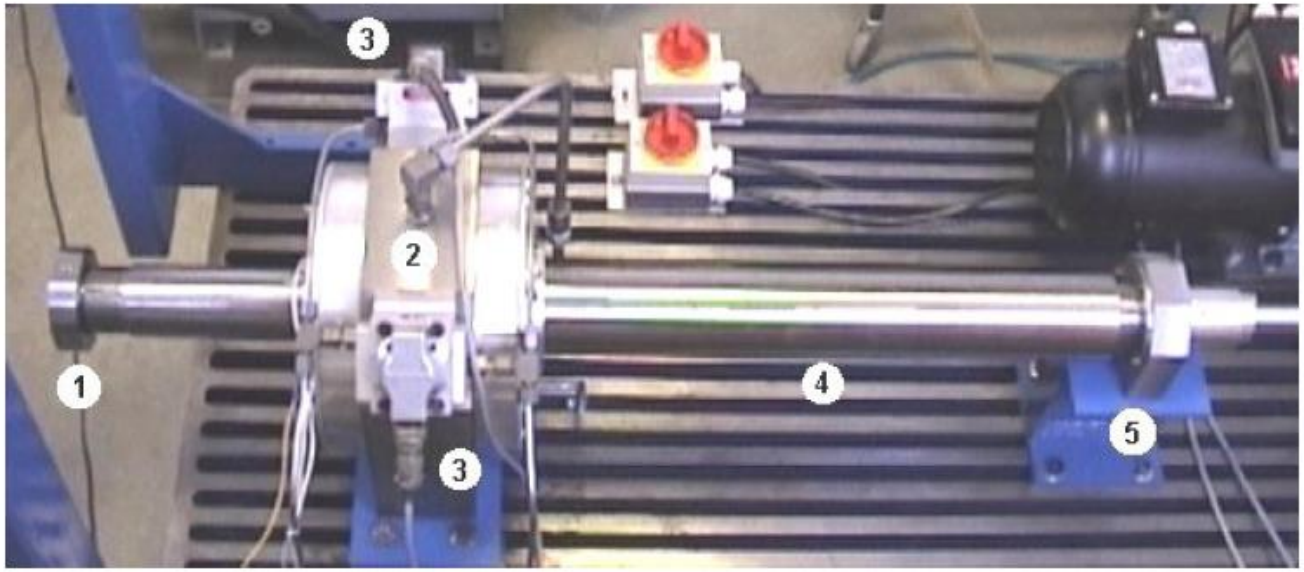
Uma maneira de se medir a qualidade das FRFs identificadas é através da **função coerência**:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}$$

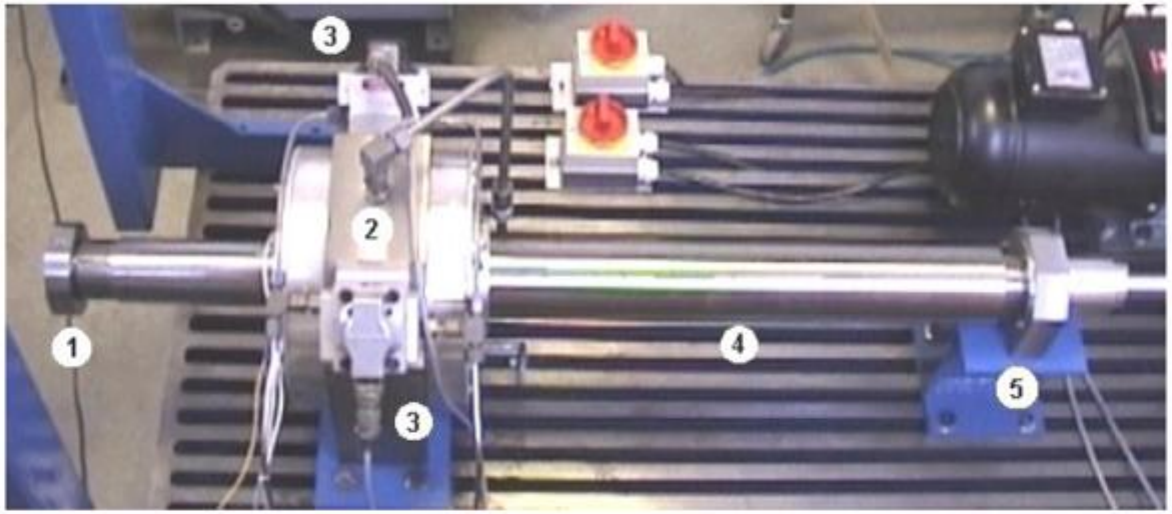
Medidas de boa qualidade: $\gamma^2(\omega) \to 1$

Exemplo


sensores de proximidade
servoválvula
mancal de excitação
rotor
mancal de rolamento
mancais de transmissão
polia
acoplamento
mancal ativo

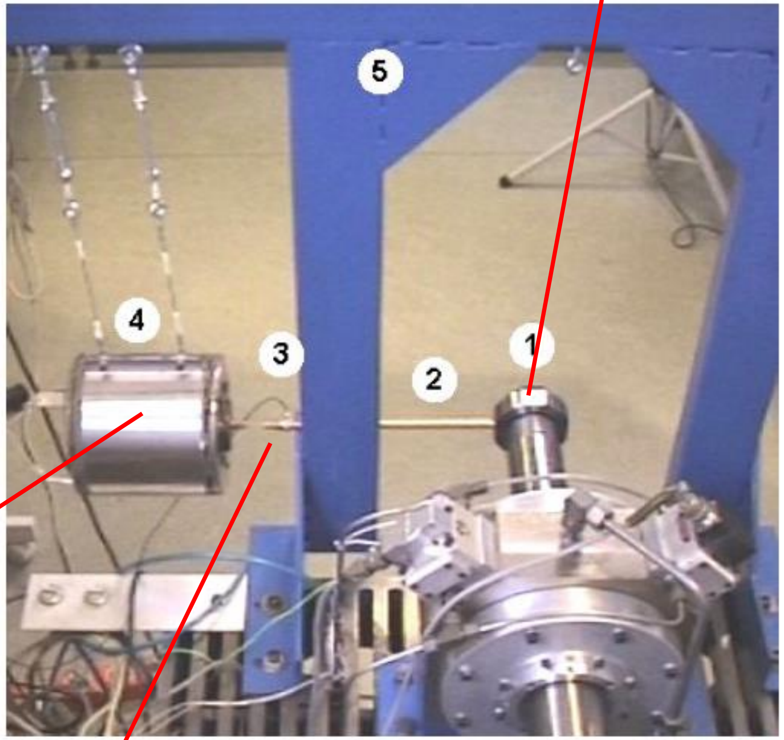

3
2
1
4
3
5

Exemplo



EXCITAÇÃO:

Mancal de Excitação
(transmissão da força para o eixo)



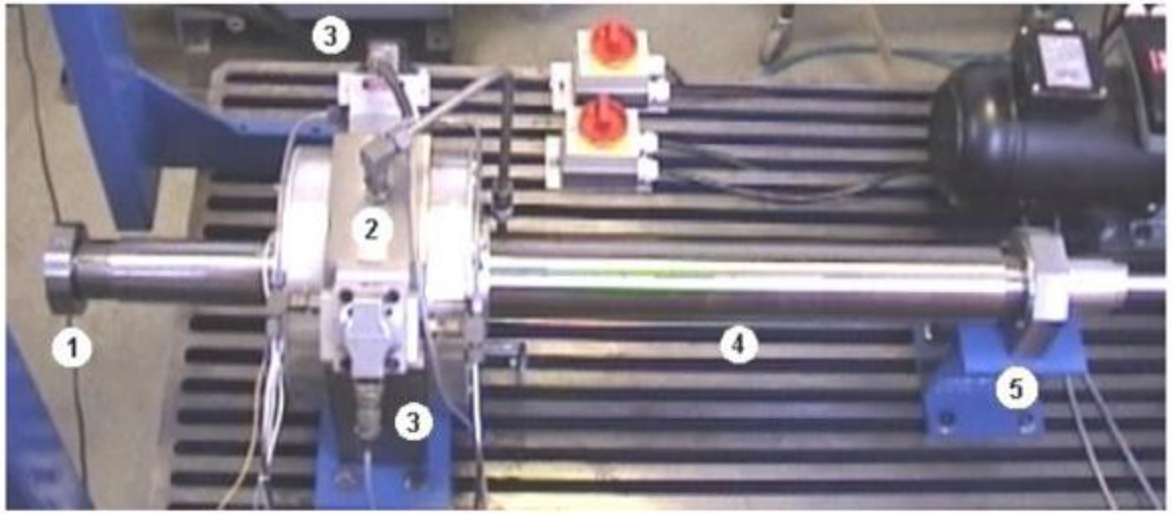
Shaker
(excitador eletrodinâmico)

criação da força de excitação

Célula de Carga
(transdutor de força)

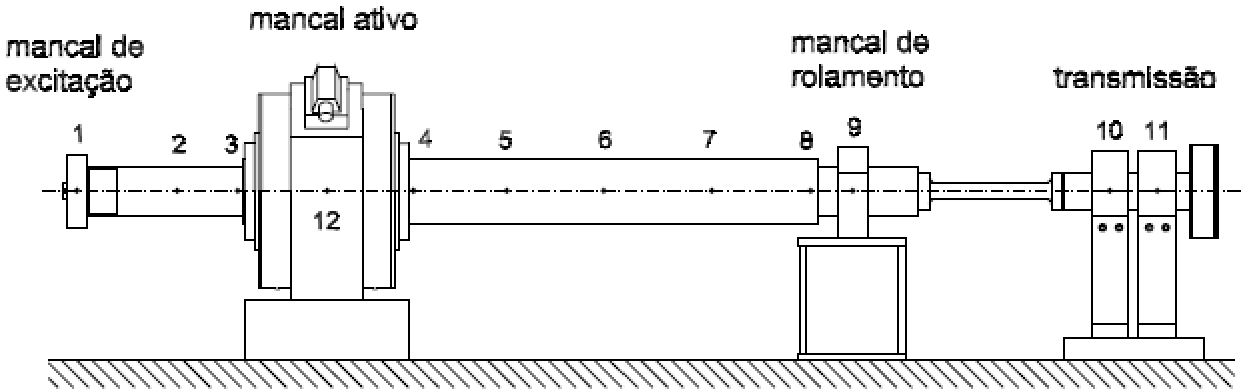
medição da força de excitação

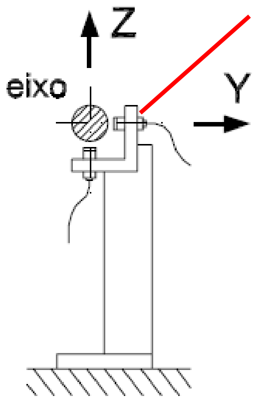
Exemplo



medição da resposta

RESPOSTA:

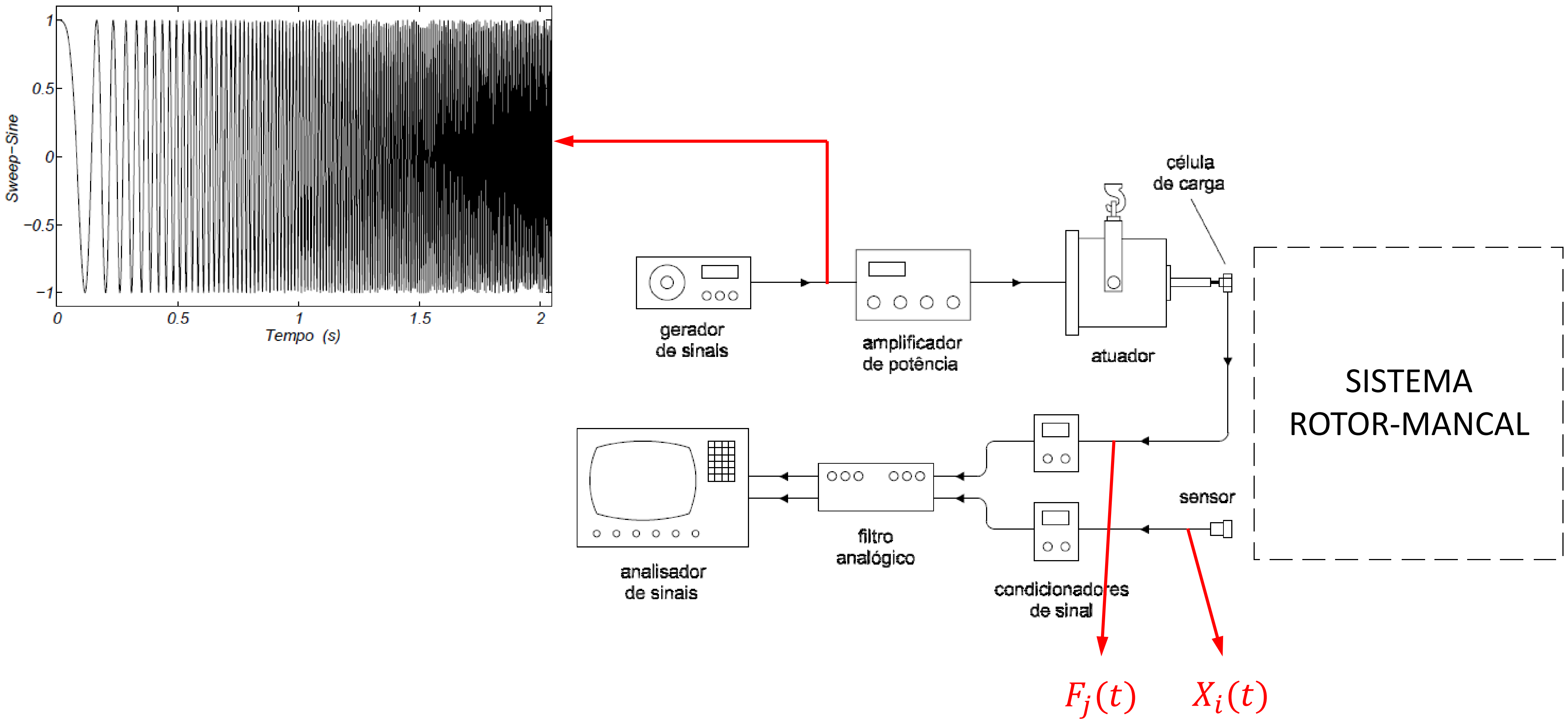




Sensor de Proximidade
(transdutor de deslocamento)

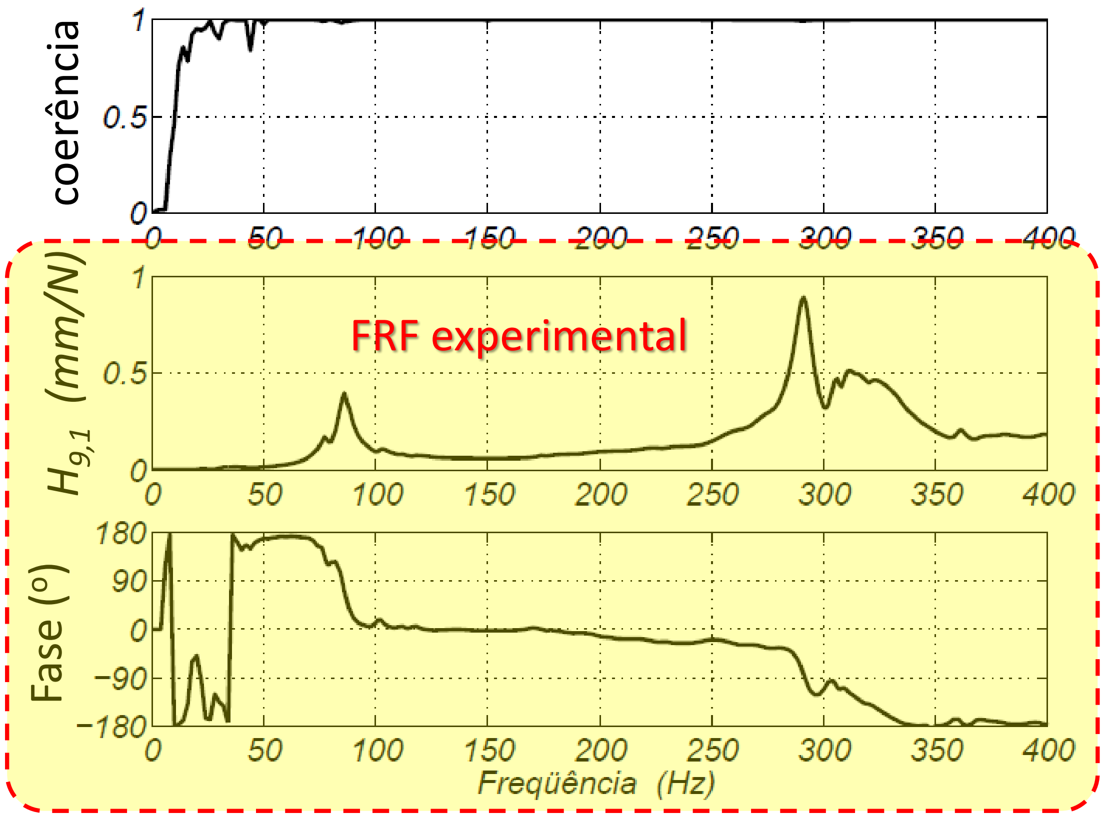
Exemplo

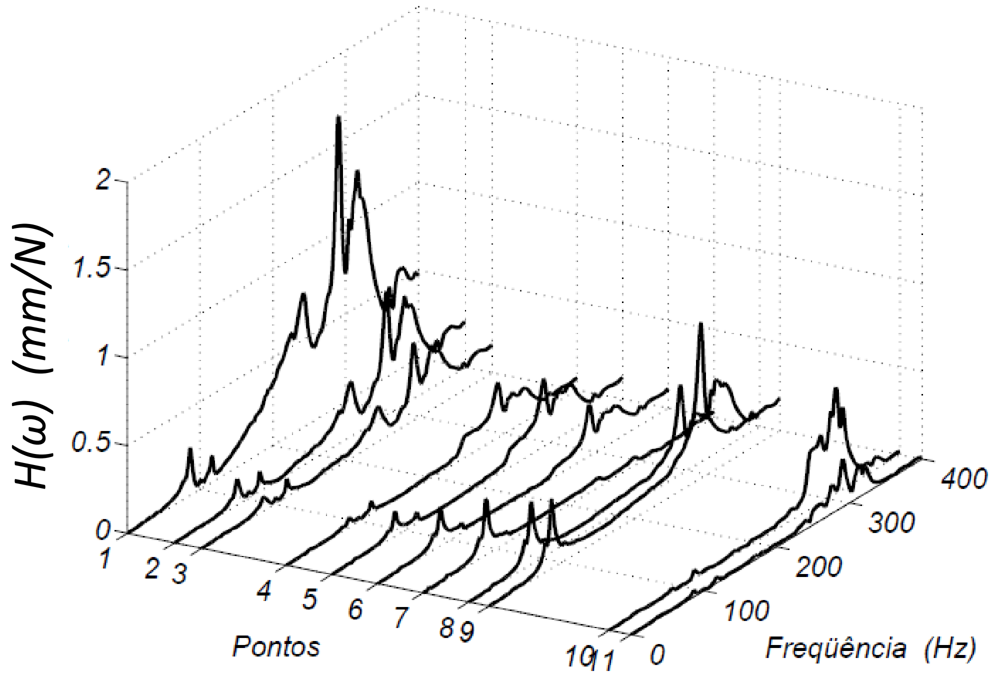
SISTEMA DE MEDIÇÃO:



Exemplo

RESULTADO:





Conclusão

- Para determinar as matrizes de rigidez ***K*** e de amortecimento ***D*** do sistema:

É necessário usar técnicas baseadas nas FRFs

⬇

diminui o efeito do ruído
nos sinais de medição

- Medição de FRFs requer a medição do **sinal de excitação** e do **sinal de resposta:**

É necessário instrumentar o sistema rotativo

- As FRFs podem ser obtidas através dos estimadores H_1 e H_2

- A **função coerência** pode ser usada como medida de qualidade das medições da FRF

Dúvidas ?