SEM 5903 – Dinâmica de Sistemas Rotativos

AULA 6 – Função de Resposta em Frequência Convencional e Direcional

Prof. Rodrigo Nicoletti

Modelo Geral de Rotor

Na aula passada, vimos que:

Equação do Elemento de Eixo

$$(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e)\ddot{\boldsymbol{q}} - \Omega \boldsymbol{G}^e \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Equação do Elemento de Disco

$$\boldsymbol{M}^d \ddot{\boldsymbol{q}}^d - \Omega \boldsymbol{G}^d \dot{\boldsymbol{q}}^d = \boldsymbol{0}$$

Equação do Elemento de Mancal

$$\boldsymbol{D}^m \dot{\boldsymbol{q}}^m + \boldsymbol{K}^m \boldsymbol{q}^m = \boldsymbol{0}$$

Equação de Movimento

$$\underbrace{(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e + \boldsymbol{M}^d)}_{\boldsymbol{M}_G}\ddot{\boldsymbol{q}} + \left[\underbrace{\boldsymbol{D}^m}_{\boldsymbol{D}_G} - \Omega\underbrace{(\boldsymbol{G}^e + \boldsymbol{G}^d)}_{\boldsymbol{G}_G}\right]\dot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{(\boldsymbol{K}^e + \boldsymbol{K}^m)}_{\boldsymbol{K}_G}\boldsymbol{q} = \underbrace{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{K}_G}$$

Matriz Global de Inércia

Matriz Global de Amortecimento

Matriz Global Giroscópica

Matriz Global de Rigidez

Vetor de Forças Externas

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{D} - \Omega\boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Equação geral de movimento de um sistema rotativo

Função de Resposta em Frequência Convencional (FRF)

Seja a equação de movimento: $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{D} - \Omega\boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}$

equação diferencial ordinária de segunda ordem

Considere que o vetor de forças externas atuantes no sistema tem a forma: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}e^{i\omega t}$

forças harmônicas de frequência ω

Assim, a solução desta equação pode assumir a forma: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{X}e^{i\omega t}$

resposta harmônica de frequência ω

Substituindo-se na equação de movimento, temos:

$$-\omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}e^{i\omega t} + i\omega(\boldsymbol{D} - \Omega\boldsymbol{G})\boldsymbol{X}e^{i\omega t} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}e^{i\omega t} = \boldsymbol{F}e^{i\omega t} \Rightarrow \underbrace{\left[-\omega^2\boldsymbol{M} + i\omega(\boldsymbol{D} - \Omega\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{K}\right]}_{\boldsymbol{Z}(\Omega)}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}$$

Matriz de Impedância

$$\Rightarrow \boldsymbol{X} = \underbrace{\left[-\omega^2\boldsymbol{M} + i\omega(\boldsymbol{D} + \Omega\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{K}\right]^{-1}}_{\boldsymbol{H}(\Omega)}\boldsymbol{F} \Rightarrow$$

Matriz de Receptância

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}(\Omega)\,\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{H}(\Omega) = \boldsymbol{Z}^{-1}(\Omega)$$

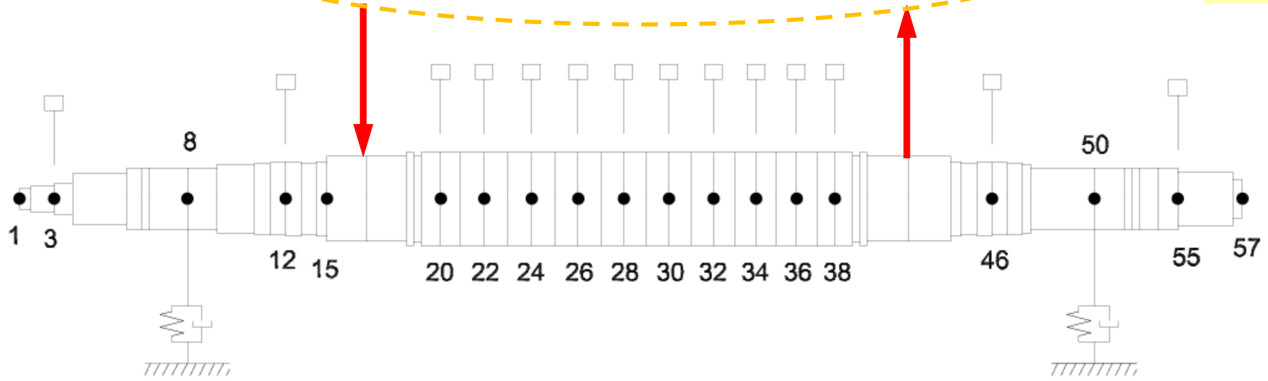
Função de Resposta em Frequência Convencional (FRF)

Significado Físico da Matriz de Receptância

$$\boldsymbol{H}(\Omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\Omega) & H_{12}(\Omega) & \cdots & H_{1n}(\Omega) \\ H_{21}(\Omega) & H_{22}(\Omega) & \cdots & H_{2n}(\Omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\Omega) & H_{n2}(\Omega) & \cdots & H_{nn}(\Omega) \end{bmatrix}$$

➡ $H_{ij}(\Omega)$ = **resposta no i-ésimo grau de liberdade** devido a uma **força de excitação aplicada no j-ésimo grau de liberdade**

$$F_j = Fe^{i\omega t} \qquad X_i = Xe^{i\omega t}$$



$$X_i = H_{ij}(\Omega)\, F_j$$

ESTABELECE A RELAÇÃO ENTRE ENTRADA E SAÍDA DO SISTEMA !!!

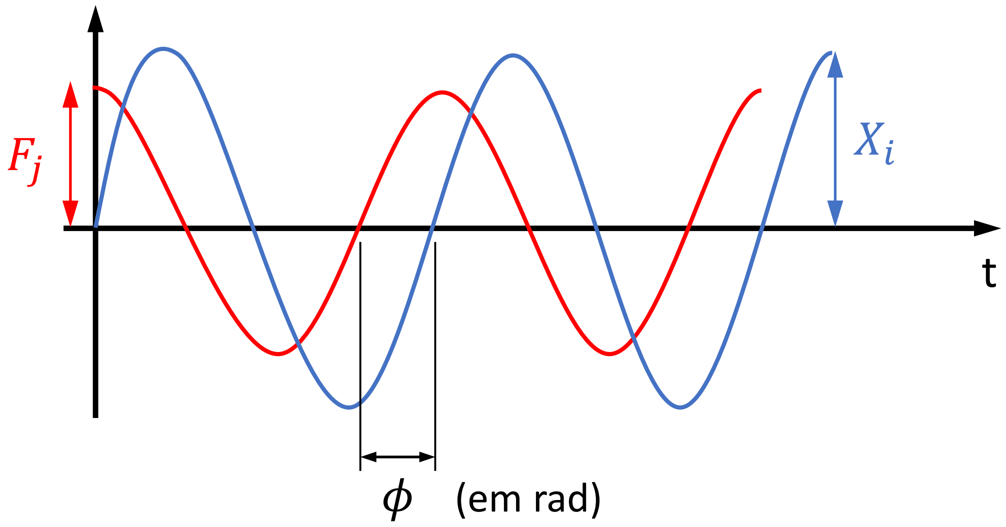
Função de Resposta em Frequência Convencional (FRF)

Como a entrada (força externa) e a saída (deslocamento) estão definidas no espaço complexo:

$H_{ij}(\Omega)$ **é um número complexo !!!**

Assim: $\left|H_{ij}(\Omega)\right| = \left|\dfrac{X_i(\omega,\Omega)}{F_j(\omega,\Omega)}\right|$ amplitude da resposta

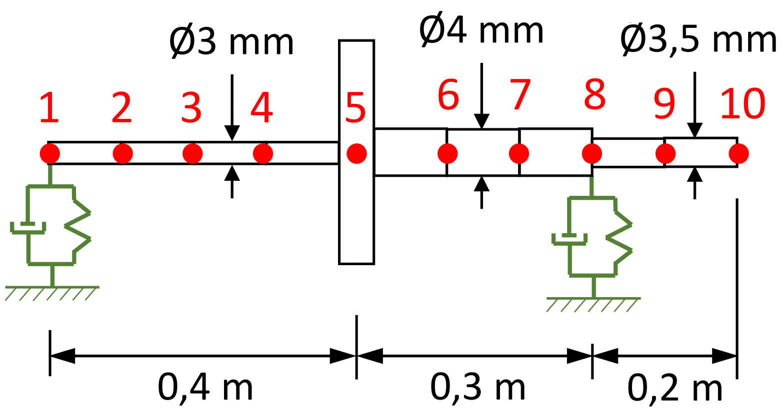
$\angle H_{ij}(\Omega) = \phi$ fase da resposta *(atraso da resposta harmônica em relação à excitação harmônica)*



Em **sistemas lineares**:

$$\left|H_{ij}(\Omega)\right| = cte$$

Exemplo



$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{D} - \Omega\boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}$$

Tomemos o caso de:

- Força externa aplicada no nó 10 na direção horizontal
- Observação do deslocamento do nó 5 (disco) na direção horizontal
- Velocidade de rotação de 2000 rpm

DISCO: m_d = 2 kg
I_p = 0,06 kg.m^2
I_t = 0,02 kg.m^2

EIXO: ρ = 7850 kg/m^3
E = 2,1 x 10^{11} kg/m^2
I_t = 0,02 kg.m^2

MANCAL: $k_{xx} = k_{yy}$ = 1000 N/m
$k_{\beta\beta} = k_{\gamma\gamma}$ = 10 N.m/rad
$d_{xx} = d_{yy}$ = 10 N.s/m

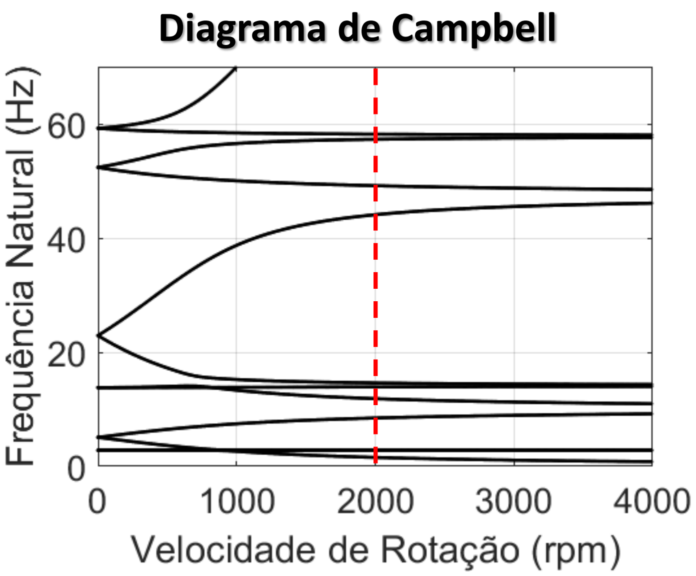
Se temos 4 gdl por nó:

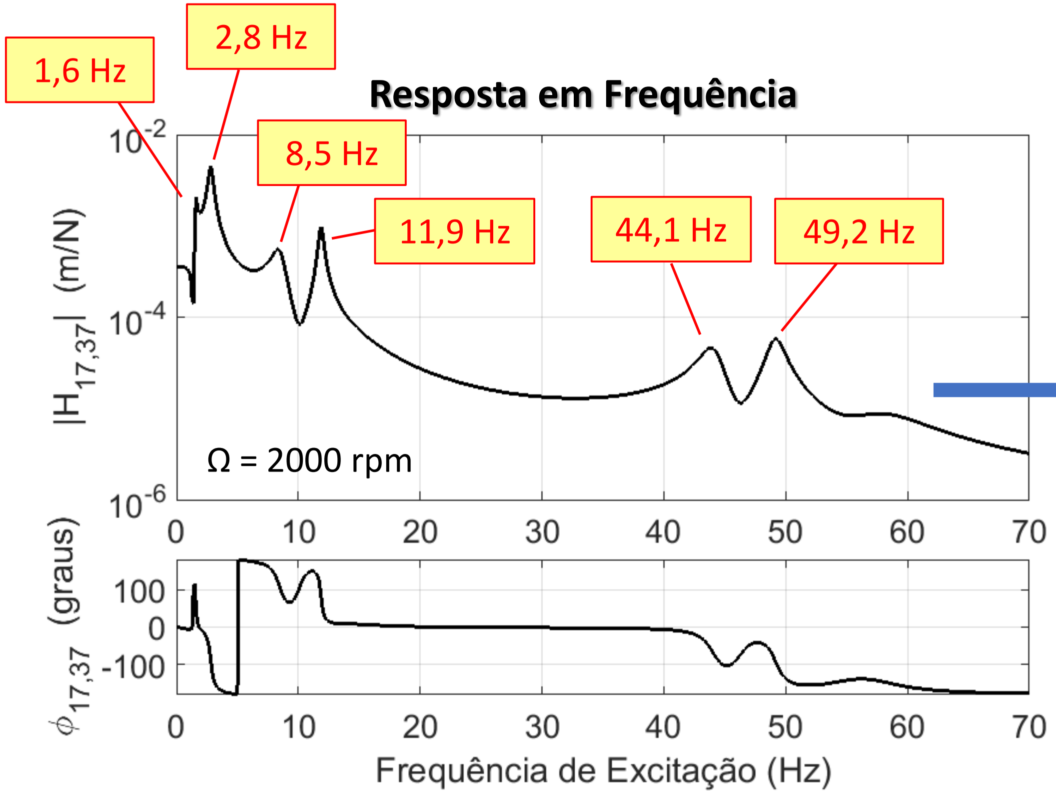
nó 10 (horizontal) = gdl #37

nó 5 (horizontal) = gdl #17

$$\boxed{H_{17,37}(\Omega)}$$

Exemplo





RELAÇÃO ENTRADA-SAÍDA CONSTANTE !!!

frequências naturais

1,6 Hz
2,8 Hz
8,5 Hz
11,9 Hz
13,9 Hz
14,6 Hz
44,1 Hz
49,2 Hz
57,3 Hz
58,2 Hz

Possíveis razões:

- modos não foram excitados (nó modal)
- modos superamortecidos

FRF é uma “fatia” do Diagrama de Cambell

Diagrama de Cascata

Calculando-se a FRF para cada velocidade de rotação:

Diagrama de Campbell é uma “vista aérea” do Diagrama de Cascata

Diagrama de Cascata

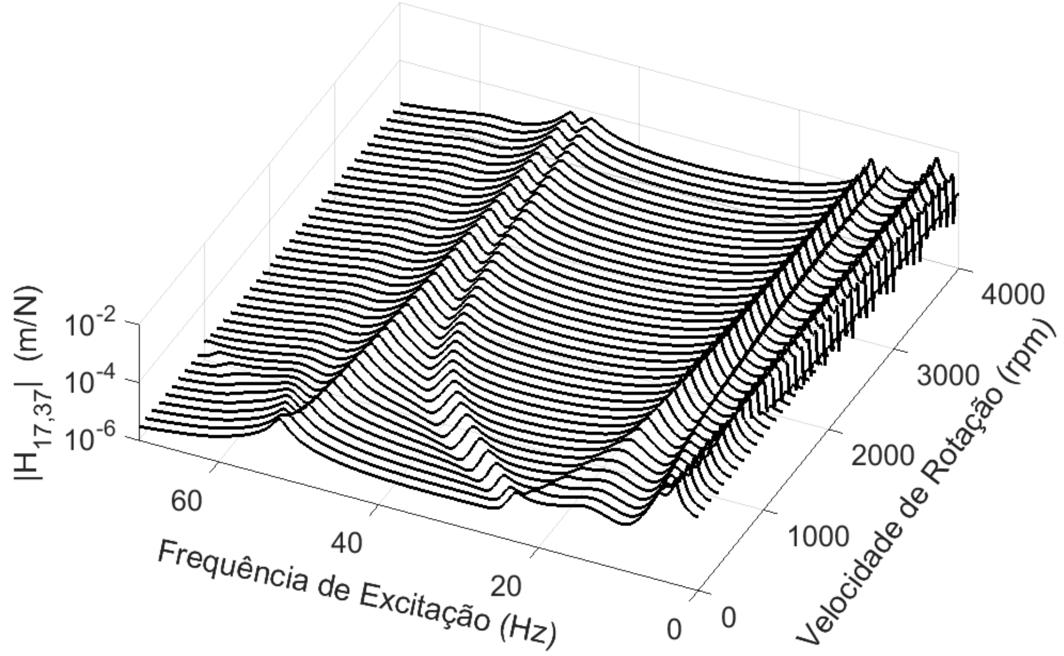
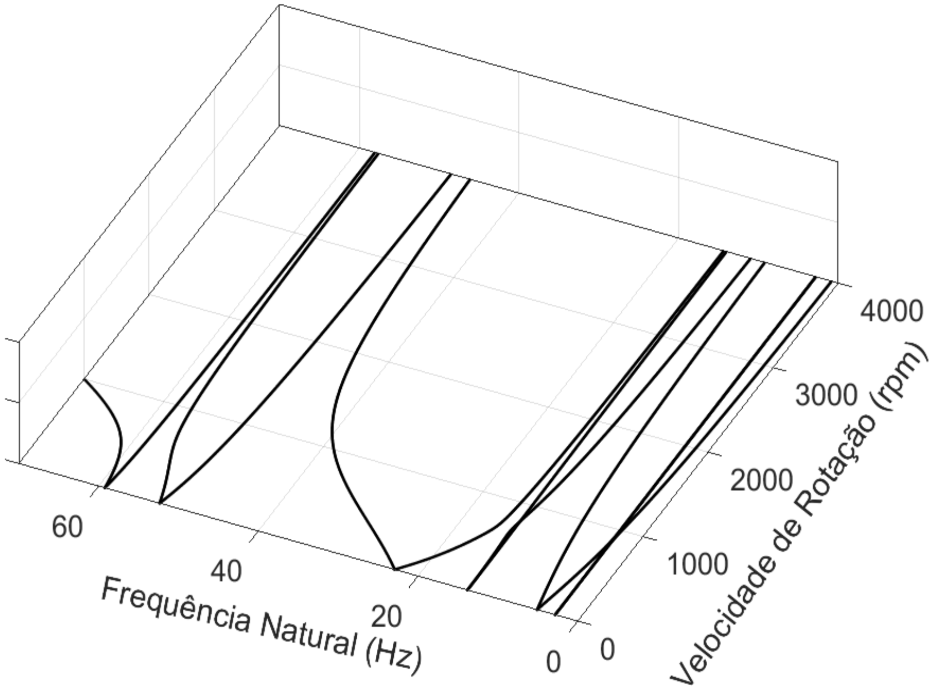


Diagrama de Campbell



Resumo

Função de Resposta em Frequência (FRF)

- Estabelece a relação entre entrada (força) e saída (deslocamento) do sistema
- Esta relação é constante em sistemas lineares
- A FRF é uma "fatia" do diagrama de Campbell

(picos podem não aparecer por serem superamortecidos ou não serem excitados pela força)

- O diagrama de Campbell é uma "vista aérea" do diagrama de Cascata

(linhas podem não aparecer por serem superamortecidos ou não serem excitados pela força)

Função de Resposta em Frequência Direcional (dFRF)

LEE, C.W., A Complex Modal Testing Theory for Rotating Machinery, **Mechanical Systems and Signal Processing** 5(2), pp.119-137, 1991

KESSLER, C., KIM, J., Vibration Analysis of Rotors Utilizing Implicit Directional Information of Complex Variable Descriptions, **J. Vibration and Acoustics** 124(3), pp.340-349, 2002

Considere a seguinte transformação: $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{q}_y(t) + i\,\boldsymbol{q}_z(t)$

gdl na horizontal

gdl na vertical

Assim, pode-se escrever: $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_y \\ \boldsymbol{q}_z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}^* \end{Bmatrix}$ ← complexo conjugado

Onde a matriz de transformação é dada por: $\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ -i\,\boldsymbol{I} & i\,\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{I} =$ matriz identidade

Função de Resposta em Frequência Direcional (dFRF)

Substituindo-se na equação de movimento do sistema e pré-multiplicando-se por $\boldsymbol{T}^{-1}$:

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{p}}\\ \ddot{\boldsymbol{p}}^*\end{Bmatrix}+\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{D}-\Omega\boldsymbol{G})\boldsymbol{T}\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{p}}\\ \dot{\boldsymbol{p}}^*\end{Bmatrix}+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{p}^*\end{Bmatrix}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_y\\ \boldsymbol{f}_z\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{M}_c\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{p}}\\ \ddot{\boldsymbol{p}}^*\end{Bmatrix}+\boldsymbol{D}_c\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{p}}\\ \boldsymbol{p}^*\end{Bmatrix}+\boldsymbol{K}_c\begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{p}^*\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{g}^*\end{Bmatrix}$$

equação de movimento em coordenadas complexas

Onde: $$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{g}^*\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_y+i\,\boldsymbol{f}_z\\ \boldsymbol{f}_y-i\,\boldsymbol{f}_z\end{Bmatrix}$$

excitação forward

excitação backward

Considere uma excitação harmônica da forma: $$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{G}_f e^{i\omega t}+\boldsymbol{G}_b e^{-i\omega t}$$

Pode-se assumir como solução da equação: $$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{P}_f e^{i\omega t}+\boldsymbol{P}_g e^{-i\omega t}$$

resposta forward

resposta backward

Função de Resposta em Frequência Direcional (dFRF)

Substituindo-se na equação de movimento, chega-se a duas equações complexas conjugadas:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_f \\ \boldsymbol{P}_b^* \end{Bmatrix} = (-\omega^2 \boldsymbol{M}_c + i\omega \boldsymbol{D}_c + \boldsymbol{K}_c)^{-1} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{G}_f \\ \boldsymbol{G}_b^* \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_f^* \\ \boldsymbol{P}_b \end{Bmatrix} = (-\omega^2 \boldsymbol{M}_c - i\omega \boldsymbol{D}_c + \boldsymbol{K}_c)^{-1} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{G}_f^* \\ \boldsymbol{G}_b \end{Bmatrix}$$

Entretanto, ambas geram os mesmos resultados. Assim, pode-se considerar apenas uma delas:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{pg} & \boldsymbol{H}_{pg^*} \\ \boldsymbol{H}_{p^*g} & \boldsymbol{H}_{p^*g^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^* \end{Bmatrix}$$

Significado Físico

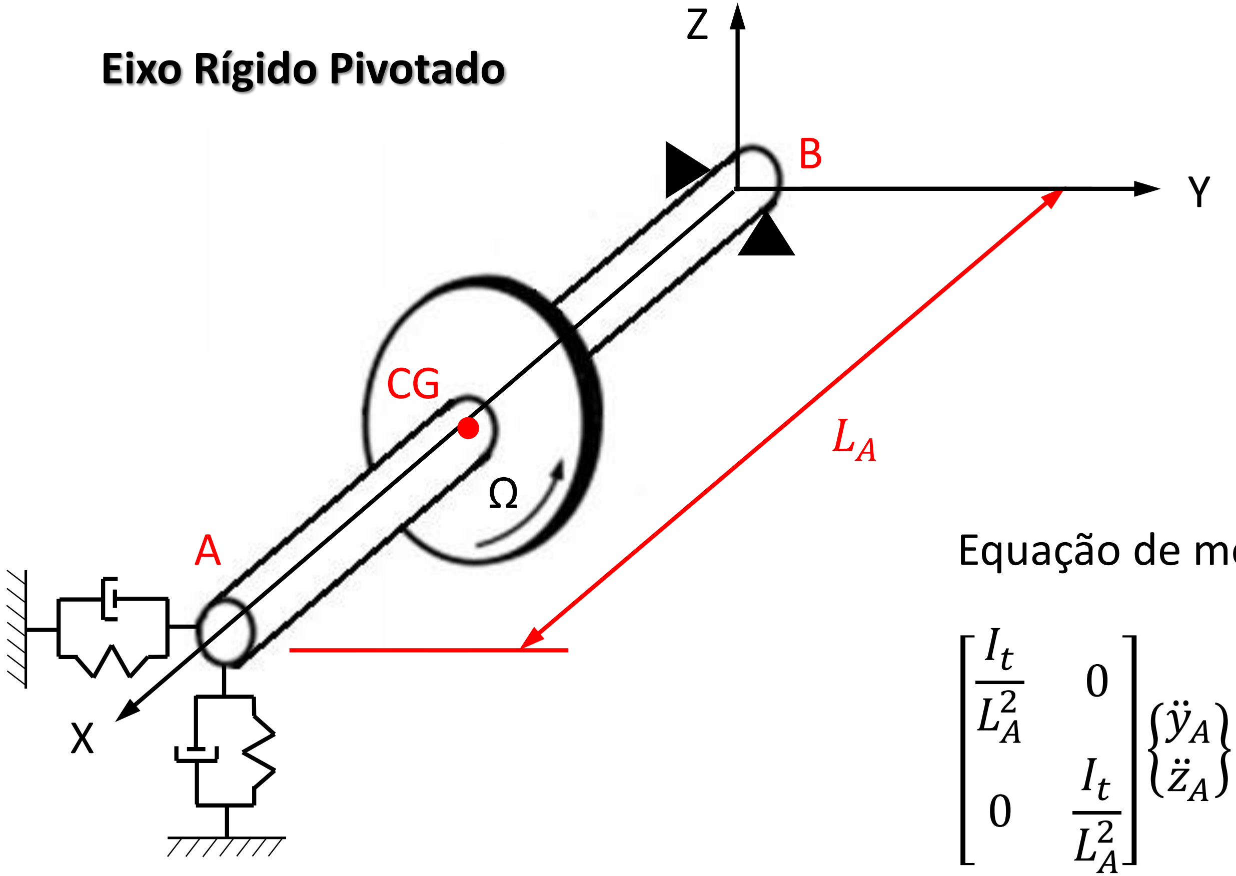
$\boldsymbol{H}_{pg}$ = **resposta em precessão direta (forward)** devido a uma força de excitação na direção de **precessão direta (forward)**

$\boldsymbol{H}_{p^*g^*}$ = **resposta em precessão retrógrada (backward)** devido a uma força de excitação na direção de **precessão retrógrada (backward)**

dFRF separa a resposta de precessão direta da resposta de precessão retrógrada !!!

Exemplo

Eixo Rígido Pivotado



Equação de movimento:

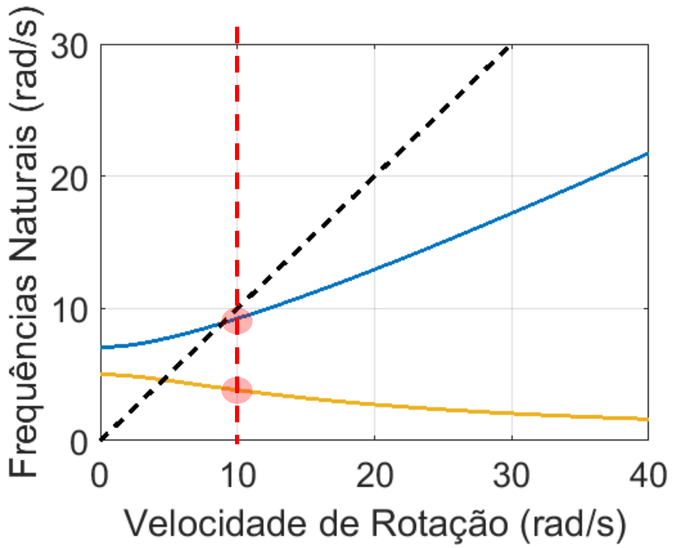
$$\begin{bmatrix} \frac{I_t}{L_A^2} & 0 \\ 0 & \frac{I_t}{L_A^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_p}{L_A^2} \\ -\frac{I_p}{L_A^2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y}_A \\ \dot{z}_A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix}$$

Dados:

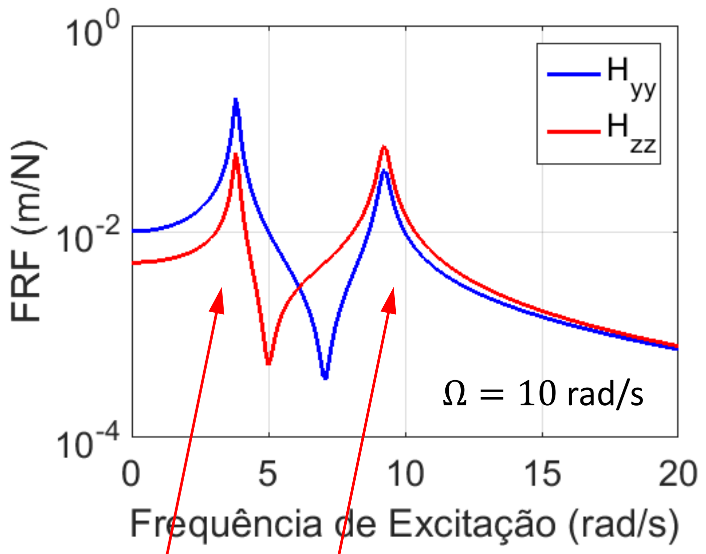
I_t = 1 kg.m²	d = 1 N.s/m
I_p = 0.5 kg.m²	k_y = 100 N/m
L_A = 0.5 m	k_z = 200 N/m

Exemplo

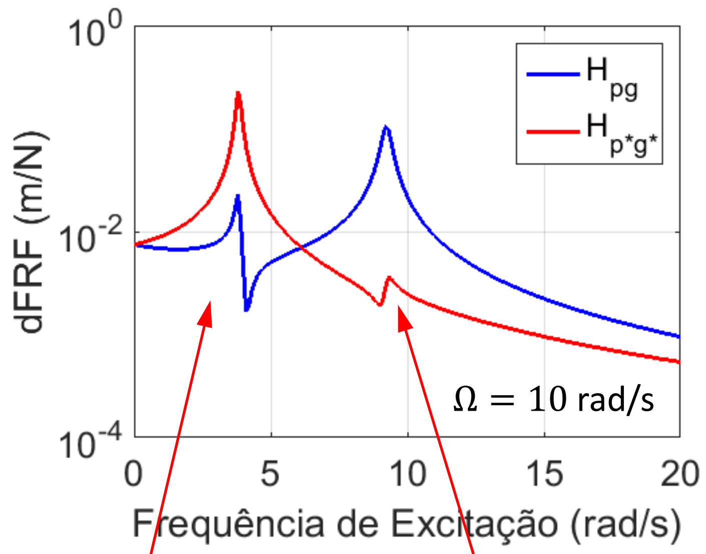
Diagrama de Campbell



Resposta em Frequência



Resposta em Frequência Direcional



picos de ressonância e frequências naturais

modo de precessão retrógrada (backward)

modo de precessão direta (forward)

Relação entre FRF e dFRF

Do ponto de vista prático, é mais fácil obter experimentalmente as FRFs: $\boldsymbol{H}(i\omega) = \begin{bmatrix} H_{yy} & H_{yz} \\ H_{zy} & H_{zz} \end{bmatrix}$

Porém, é possível obter as dFRFs a partir das FRFs: $\begin{bmatrix} H_{pg} & H_{pg^*} \\ H_{p^*g} & H_{p^*g^*} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H}(i\omega)\boldsymbol{T}$

⬇

$$H_{pg} = \frac{1}{2}\left[H_{yy} + H_{zz} - i\left(H_{zy} - H_{yz}\right)\right]$$

$$H_{pg^*} = \frac{1}{2}\left[H_{yy} - H_{zz} + i\left(H_{zy} + H_{yz}\right)\right]$$

$$H_{p^*g} = \frac{1}{2}\left[H_{yy} - H_{zz} - i\left(H_{zy} + H_{yz}\right)\right]$$

$$H_{p^*g^*} = \frac{1}{2}\left[H_{yy} + H_{zz} + i\left(H_{zy} - H_{yz}\right)\right]$$

Conclusão

Função de Resposta em Frequência (FRF)

- Estabelece a relação entre entrada (força) e saída (deslocamento) do sistema
- Esta relação é constante em sistemas lineares
- A FRF é uma “fatia” do diagrama de Campbell

(picos podem não aparecer por serem superamortecidos
ou não serem excitados pela força)

- O diagrama de Campbell é uma “vista aérea” do diagrama de Cascata

(linhas podem não aparecer por serem superamortecidos
ou não serem excitados pela força)

Função de Resposta em Frequência Direcional (dFRF)

- Estabelece a relação entre entrada (forward ou backward) e modo de precessão (forward ou backward) do sistema

Projeto – PARTE 2

O sistema rotativo com eixo flexível ilustrado abaixo tem as seguintes frequências naturais (medidas experimentalmente) em velocidade de rotação nula:

	1ª frequência natural (Hz)	*2ª frequência natural (Hz)*
Horizontal	**18,25**	**32,25**
Vertical	**21,75**	**45,50**

Os dados geométricos da bancada são:

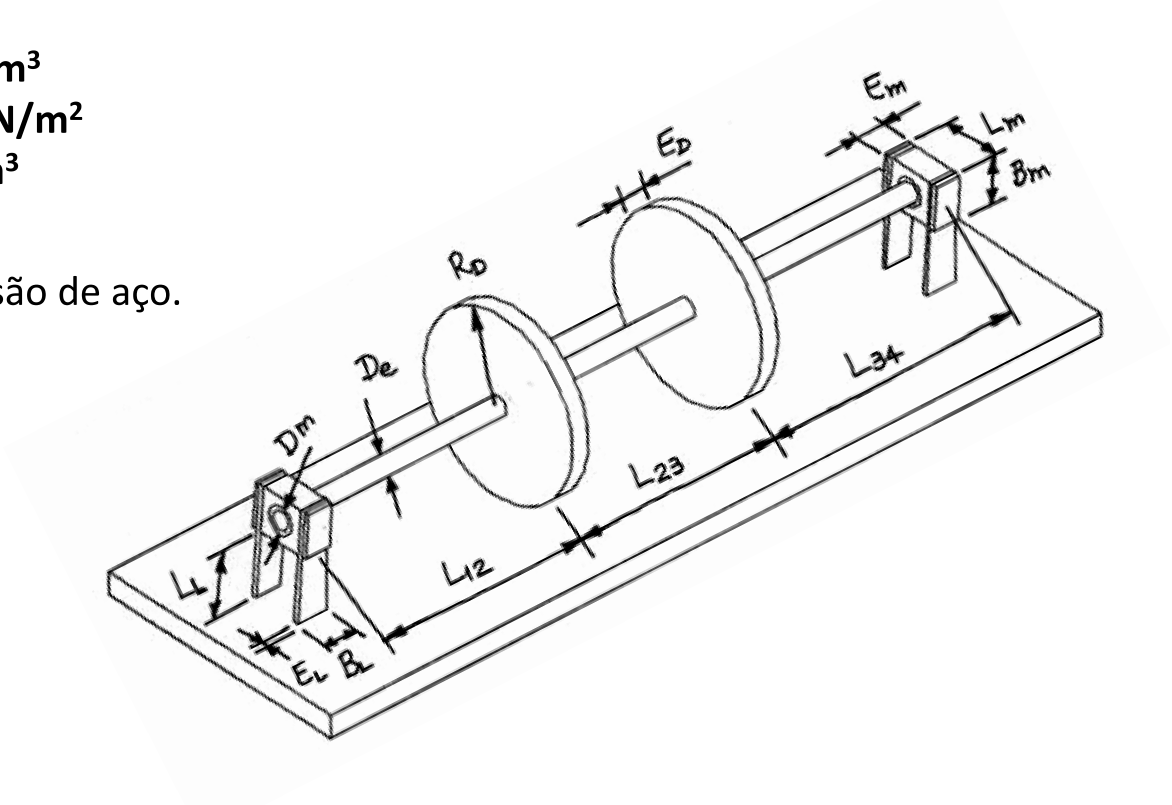
R_D = 60 mm **E_m = 30 mm** **L_{23} = 266 mm** **L_L = 70 mm**
E_D = 10 mm **D_m = 20 mm** **L_{34} = 75 mm** **$\rho_{AÇO}$ = 7850 kg/m^3**
L_m = 44 mm **D_e = 6 mm** **B_L = 29 mm** **$E_{AÇO}$ = 2,1x10^{11} N/m^2**
B_m = 40 mm **L_{12} = 55 mm** **E_L = 1 mm** **ρ_{AL} = 2700 kg/m^3**

Onde as caixas dos mancais são de alumínio e os demais componentes são de aço.

a) Desenvolva o modelo do sistema pelo Método dos Elementos Finitos e encontre as frequências naturais de rotação nula.

b) Ajuste o modelo para que as frequências naturais coincidam com as frequências medidas (tabela).

c) Com o modelo ajustado, construa o Diagrama de Campbell do sistema.



d) Calcule as funções de resposta em frequência (FRFs) dos discos nas direções horizontal e vertical, para excitações no disco 1 na direção horizontal, na rotação do eixo de 50 Hz.

Dúvidas ?