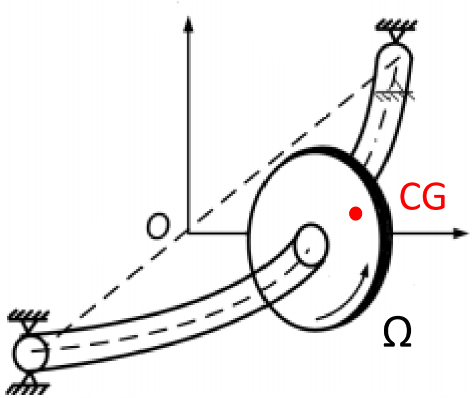
SEM 5903 – Dinâmica de Sistemas Rotativos

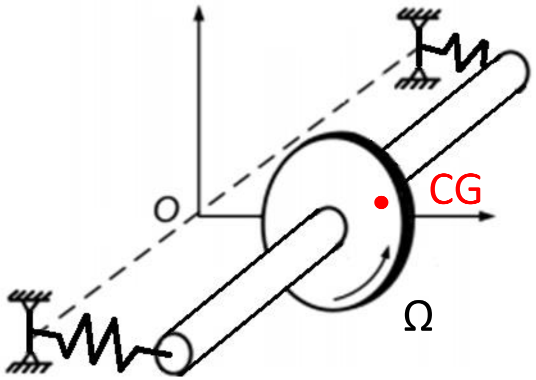
AULA 5 – Modelagem do Rotor por Elementos Finitos

Prof. Rodrigo Nicoletti

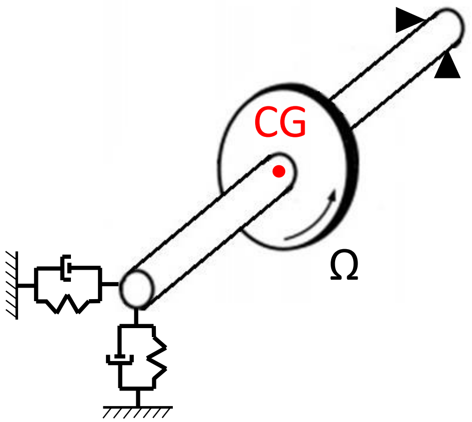
Sistemas Rotativos Complexos



disco sobre eixo flexível
e mancais rígidos

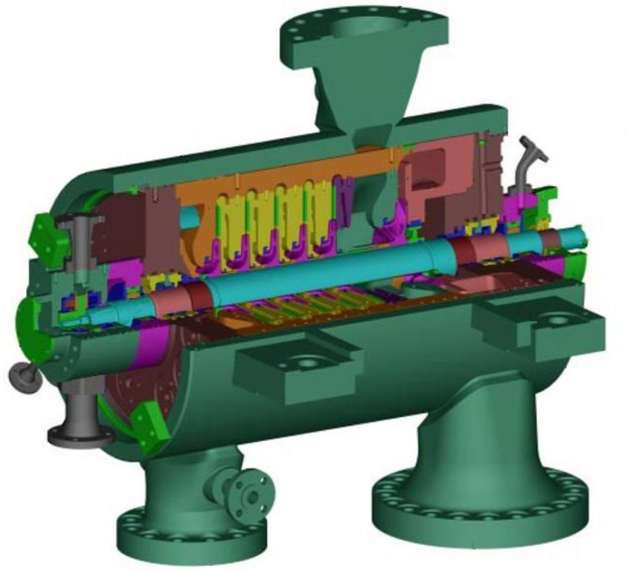


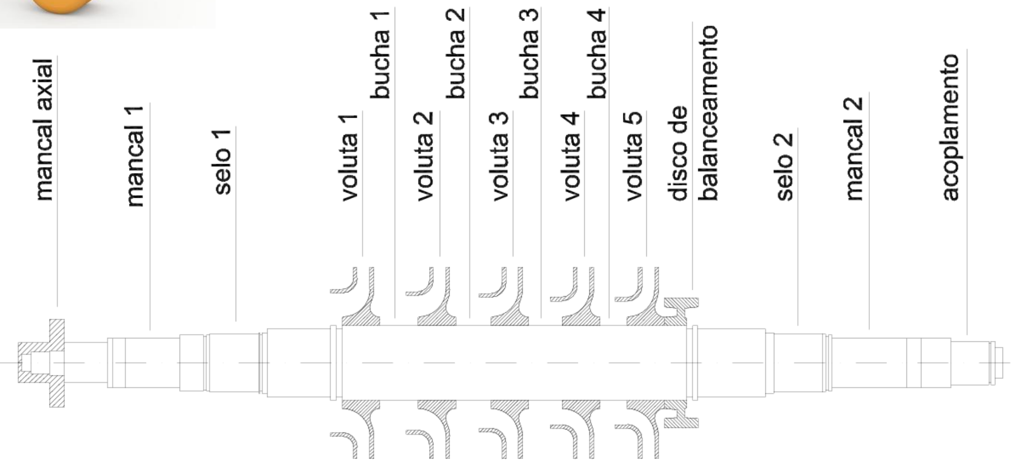
disco sobre eixo rígido
e mancais flexíveis



disco sobre eixo rígido
e mancais flexíveis
com efeito giroscópico

Compressor
de 5 estágios
Dresser-Rand



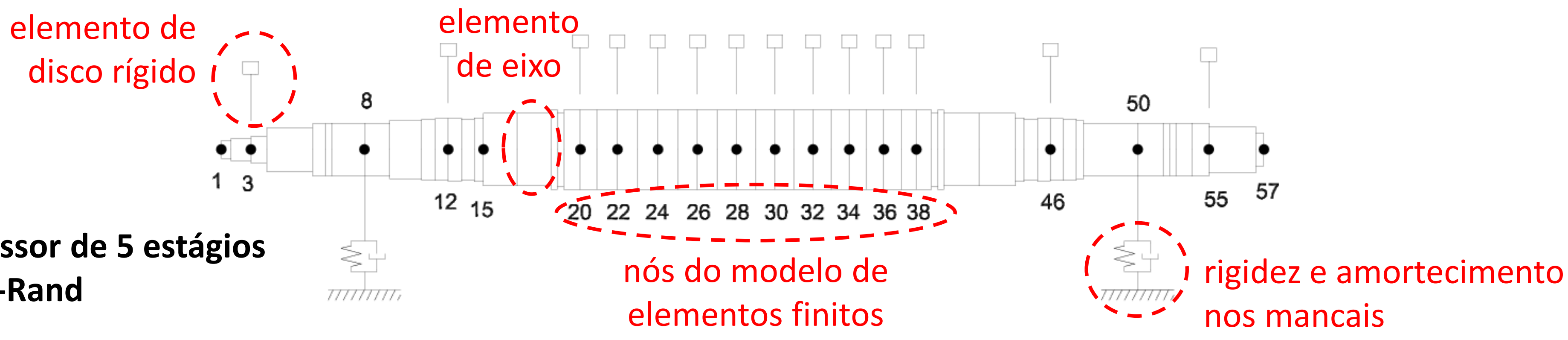


Modelo em Elementos Finitos

NELSON, H.D., McVAUGH, J.M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, **Journal of Engineering for Industry** 98(2), pp.593-600, 1976

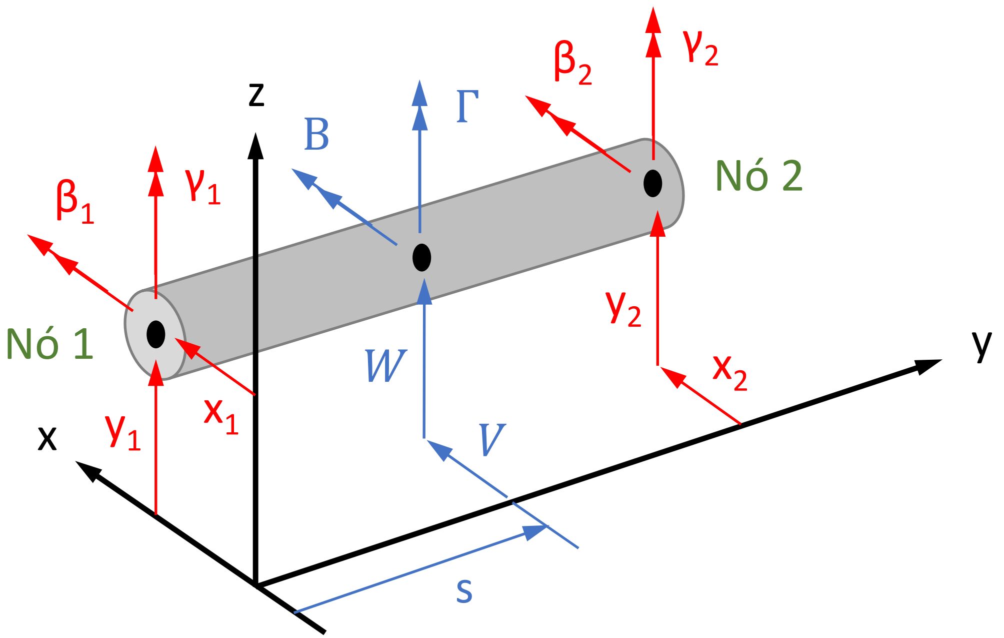
Ideia:

- Discretizar o sistema rotativo em partes de geometria conhecida
- **Seções de eixo com raio constante** são representados por **vigas de Euler-Bernoulli circulares**
- **Corpos com menor flexibilidade montados sobre o eixo** (volutas, volantes, polias, flanges, discos palhetados, etc) são representados por **discos rígidos**
- **Mancais, selos e acoplamentos** são representados por suas **matrizes de rigidez e de amortecimento**



Compressor de 5 estágios Dresser-Rand

Elementos Finito de Eixo



As rotações estão relacionadas com as translações:
$$\begin{cases} \mathrm{B} = -\dfrac{\partial w}{\partial s} \\ \Gamma = \dfrac{\partial v}{\partial s} \end{cases}$$

As translações podem ser expressas como função dos graus-de-liberdade dos nós através de funções Hermitianas:

$$\begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}(s)\boldsymbol{q}(t)$$

Onde:
$$\boldsymbol{q}(t) = \{x_1 \quad y_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2\}^T$$

$$\boldsymbol{\Psi}(s) = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ são funções Hermitianas

Elementos Finito de Eixo

Da mesma forma, pode-se escrever: $\begin{Bmatrix} \mathrm{B} \\ \Gamma \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{q}(t)$

Onde: $\boldsymbol{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{\Phi}_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_1' & \psi_2' & 0 & 0 & -\psi_3' & \psi_4' & 0 \\ \psi_1' & 0 & 0 & \psi_2' & \psi_3' & 0 & 0 & \psi_4' \end{bmatrix}$

$(\psi_1', \psi_2', \psi_3', \psi_4')$ são derivadas das funções Hermitianas em *s*

Para um disco de espessura diferencial localizado na posição *s* do elemento de eixo:

ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA

$$dU = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} V'' \\ W'' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V'' \\ W'' \end{Bmatrix} ds = \frac{1}{2} EI\, \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{\Psi}''^T\, \boldsymbol{\Psi}'' \boldsymbol{q}\, ds$$

ENERGIA CINÉTICA

$$dT = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} ds + \frac{1}{2}\Omega^2 I_p\, ds + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \dot{\mathrm{B}} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathrm{B}} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} ds - \Omega \dot{\Gamma} \mathrm{B} I_p\, ds =$$

$$= \frac{1}{2}\rho A \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \dot{\boldsymbol{q}}\, ds + \frac{1}{2}\Omega^2 I_p\, ds + \frac{1}{2} I_t \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \dot{\boldsymbol{q}}\, ds - \Omega I_p \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Phi}_{\Gamma}^T \boldsymbol{\Phi}_{\Gamma} \boldsymbol{q}\, ds$$

Elementos Finito de Eixo

Integrando-se no intervalo [0,L] do comprimento do elemento de eixo, obtêm-se as energias potencial e cinética do elemento de eixo

Inserindo-se estas expressões da energia potencial e cinética na Equação de Lagrange, chega-se a:

$$(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e)\ddot{\boldsymbol{q}} - \Omega \boldsymbol{G}^e \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Equação do Elemento de Eixo

Onde:

$$\boldsymbol{M}_T^e = \int_0^L \rho A \, \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \, ds$$ (matriz de inércia de translação)

$$\boldsymbol{M}_R^e = \int_0^L I_t \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \, ds$$ (matriz de inércia de rotação)

$$\boldsymbol{K}^e = \int_0^L EI \, \boldsymbol{\Psi}''^T \boldsymbol{\Psi}'' \, ds$$ (matriz de rigidez)

$$\boldsymbol{G}^e = \boldsymbol{N}^e - \boldsymbol{N}^{eT}$$ (matriz giroscópica)

$$\boldsymbol{N}^e = \int_0^L I_p \boldsymbol{\Phi}_\Gamma^T \boldsymbol{\Phi}_\mathrm{B} \, ds$$

Elementos Finito de Eixo

Matriz de Inércia de Translação

$$
\boldsymbol{M}_T^e = \frac{\rho A L}{420}\begin{bmatrix}
156 & & & & & & & \\
0 & 156 & & & & & sim. & \\
0 & -22L & 4L^2 & & & & & \\
22L & 0 & 0 & 4L^2 & & & & \\
54 & 0 & 0 & 13L & 156 & & & \\
0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 156 & & \\
0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 4L^2 & \\
-13L & 0 & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 0 & 4L^2
\end{bmatrix}
$$

Matriz Giroscópica

$$
\boldsymbol{G}^e = \frac{\rho A r^2}{60L}\begin{bmatrix}
0 & & & & & & & \\
36 & 0 & & & & & antissim. & \\
-3L & 0 & 0 & & & & & \\
0 & -3L & 4L^2 & 0 & & & & \\
0 & 36 & -3L & 0 & 0 & & & \\
-36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & & \\
-3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & \\
0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0
\end{bmatrix}
$$

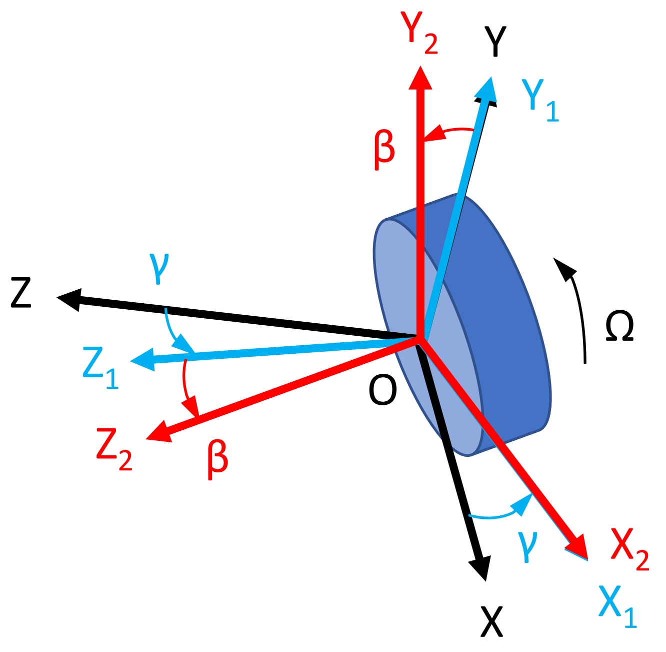
Matriz de Inércia de Rotação

$$
\boldsymbol{M}_R^e = \frac{\rho A r^2}{120L}\begin{bmatrix}
36 & & & & & & & \\
0 & 36 & & & & & sim. & \\
0 & -3L & 4L^2 & & & & & \\
3L & 0 & 0 & 4L^2 & & & & \\
-36 & 0 & 0 & -3L & 36 & & & \\
0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & & \\
0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & \\
3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2
\end{bmatrix}
$$

Matriz de Rigidez

$$
\boldsymbol{K}^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}
12 & & & & & & & \\
0 & 12 & & & & & sim. & \\
0 & -6L & 4L^2 & & & & & \\
6L & 0 & 0 & 4L^2 & & & & \\
-12 & 0 & 0 & -6L & 12 & & & \\
0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & & \\
0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & \\
6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2
\end{bmatrix}
$$

Elementos Finito de Disco Rígido



Matrizes de Transformação

$$\boldsymbol{T}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Vetor Posição do CG

$$_{I}\boldsymbol{r}_{o} = \begin{Bmatrix} x_d \\ y_d \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vetor Velocidade Angular do Disco

$$_{B2}\boldsymbol{\omega}_{d} = \boldsymbol{T}_{\beta\,B1}\dot{\boldsymbol{\gamma}} + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\beta}} + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma}\cos\beta \\ \Omega - \dot{\gamma}\sin\beta \end{Bmatrix}$$

Energia Cinética do Disco

$$T_d = \frac{1}{2} m_d \; {}_{I}\boldsymbol{r}_{o}^{T} \; {}_{I}\boldsymbol{r}_{o} + \frac{1}{2} \, {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_{d}^{T} \, {}_{B2}\boldsymbol{I}_{o} \, {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_{d}$$

Elementos Finito de Disco Rígido

Energia Cinética do Disco

$$T_d = \frac{1}{2} m_d \dot{x}_o^2 + \frac{1}{2} m_d \dot{y}_o^2 + \frac{1}{2} I_t \left(\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 \cos^2 \beta \right) + \frac{1}{2} I_p \left(\Omega^2 - 2\Omega \dot{\gamma} \sin \beta + \dot{\gamma}^2 \sin^2 \beta \right)$$

Linearizando-se, pode-se escrever matricialmente:

$$T_d = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} I_p \left(\Omega^2 - 2\Omega \dot{\gamma} \beta \right)$$

Inserindo-se na Equação de Lagrange, chega-se a:

$$\boldsymbol{M}^d \ddot{\boldsymbol{q}}^d - \Omega \boldsymbol{G}^d \dot{\boldsymbol{q}}^d = \boldsymbol{0}$$

Equação do Elemento de Disco

Onde: $\boldsymbol{q}^d = \begin{Bmatrix} x_d \\ y_d \\ \beta_d \\ \gamma_d \end{Bmatrix}$

Matrix de Inércia

$$\boldsymbol{M}^d = \begin{bmatrix} m_d & & & \\ & m_d & & \\ & & I_t & \\ & & & I_t \end{bmatrix}$$

Matrix Giroscópica

$$\boldsymbol{G}^d = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -I_p \\ & & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

Elementos Finito de Mancal

Mancais, selos e acoplamentos podem ser representados por suas respectivas matrizes de rigidez e amortecimento:

$$\boldsymbol{D}^m \dot{\boldsymbol{q}}^m + \boldsymbol{K}^m \boldsymbol{q}^m = \boldsymbol{0}$$

Equação do Elemento de Mancal

Matrix de Rigidez

Matrix de Amortecimento

Onde: $\boldsymbol{q}^m = \begin{Bmatrix} x_m \\ y_m \\ \beta_m \\ \gamma_m \end{Bmatrix}$

$$\boldsymbol{K}^m = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\beta} & k_{x\gamma} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\beta} & k_{y\gamma} \\ k_{\beta x} & k_{\beta y} & k_{\beta\beta} & k_{\beta\gamma} \\ k_{\gamma x} & k_{\gamma y} & k_{\gamma\beta} & k_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^m = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{x\beta} & d_{x\gamma} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{y\beta} & d_{y\gamma} \\ d_{\beta x} & d_{\beta y} & d_{\beta\beta} & d_{\beta\gamma} \\ d_{\gamma x} & d_{\gamma y} & d_{\gamma\beta} & d_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}$$

Matrizes Globais do Modelo

Assim, agrupando-se todas as equações de movimento, tem-se:

Equação do Elemento de Eixo

$$(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e)\ddot{\boldsymbol{q}} - \Omega\boldsymbol{G}^e\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}^e\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Equação do Elemento de Disco

$$\boldsymbol{M}^d\ddot{\boldsymbol{q}}^d - \Omega\boldsymbol{G}^d\dot{\boldsymbol{q}}^d = \boldsymbol{0}$$

Equação do Elemento de Mancal

$$\boldsymbol{D}^m\dot{\boldsymbol{q}}^m + \boldsymbol{K}^m\boldsymbol{q}^m = \boldsymbol{0}$$

Equação de Movimento

$$\underbrace{\left(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e + \boldsymbol{M}^d\right)}_{\boldsymbol{M}_G}\ddot{\boldsymbol{q}} + \left[\underbrace{\boldsymbol{D}^m}_{\boldsymbol{D}_G} - \Omega\underbrace{\left(\boldsymbol{G}^e + \boldsymbol{G}^d\right)}_{\boldsymbol{G}_G}\right]\dot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{K}^e + \boldsymbol{K}^m\right)}_{\boldsymbol{K}_G}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

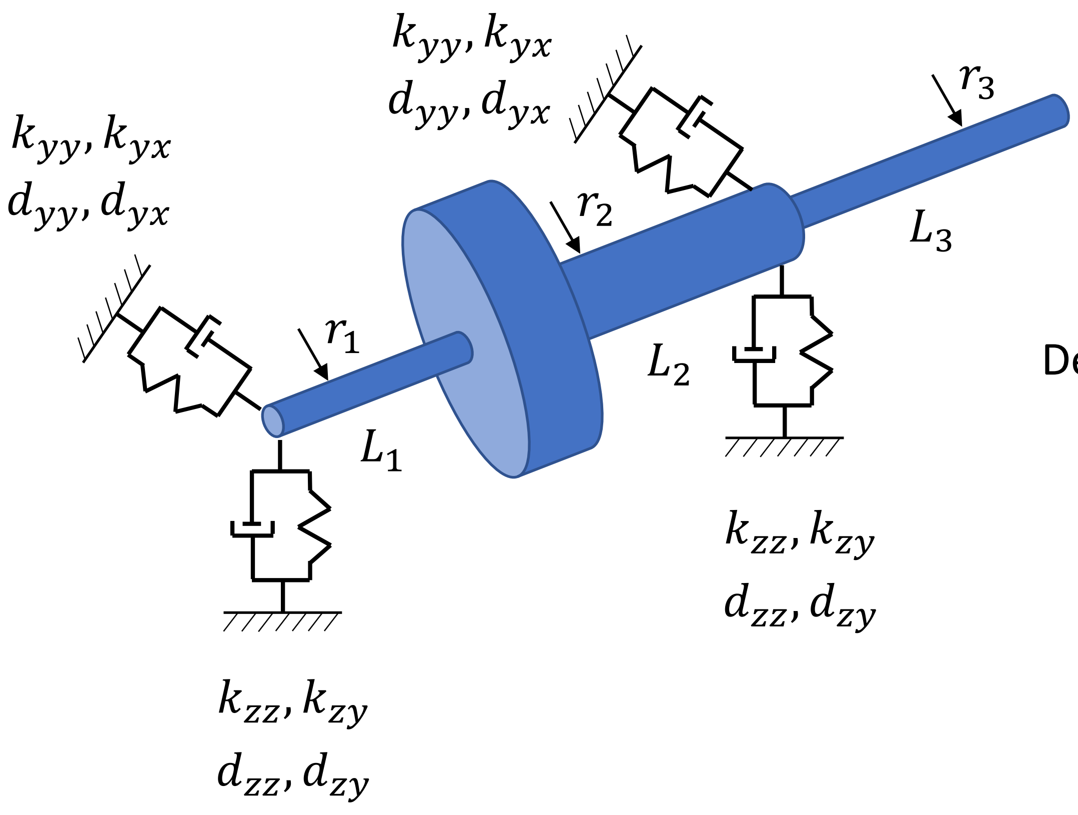
Matriz Global de Inércia

Matriz Global de Amortecimento

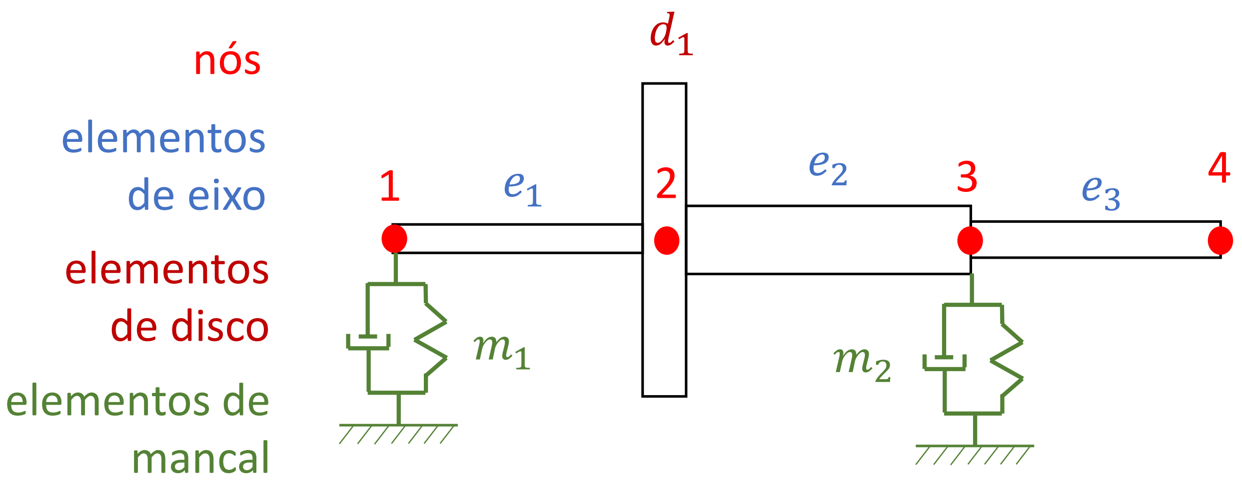
Matriz Global Giroscópica

Matriz Global de Rigidez

Exemplo

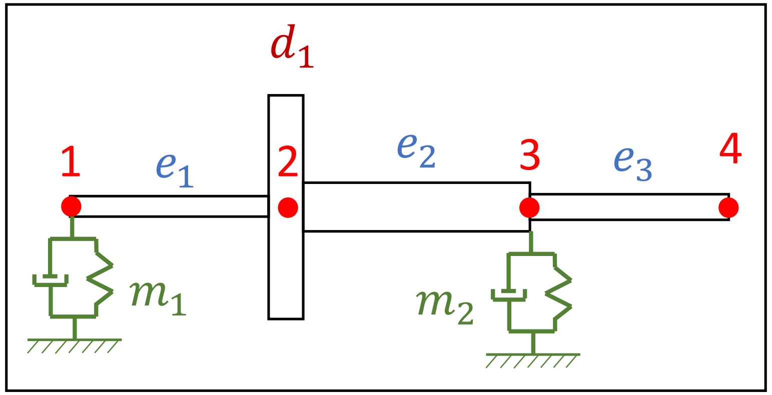


Desenho esquemático do modelo em elementos finitos:



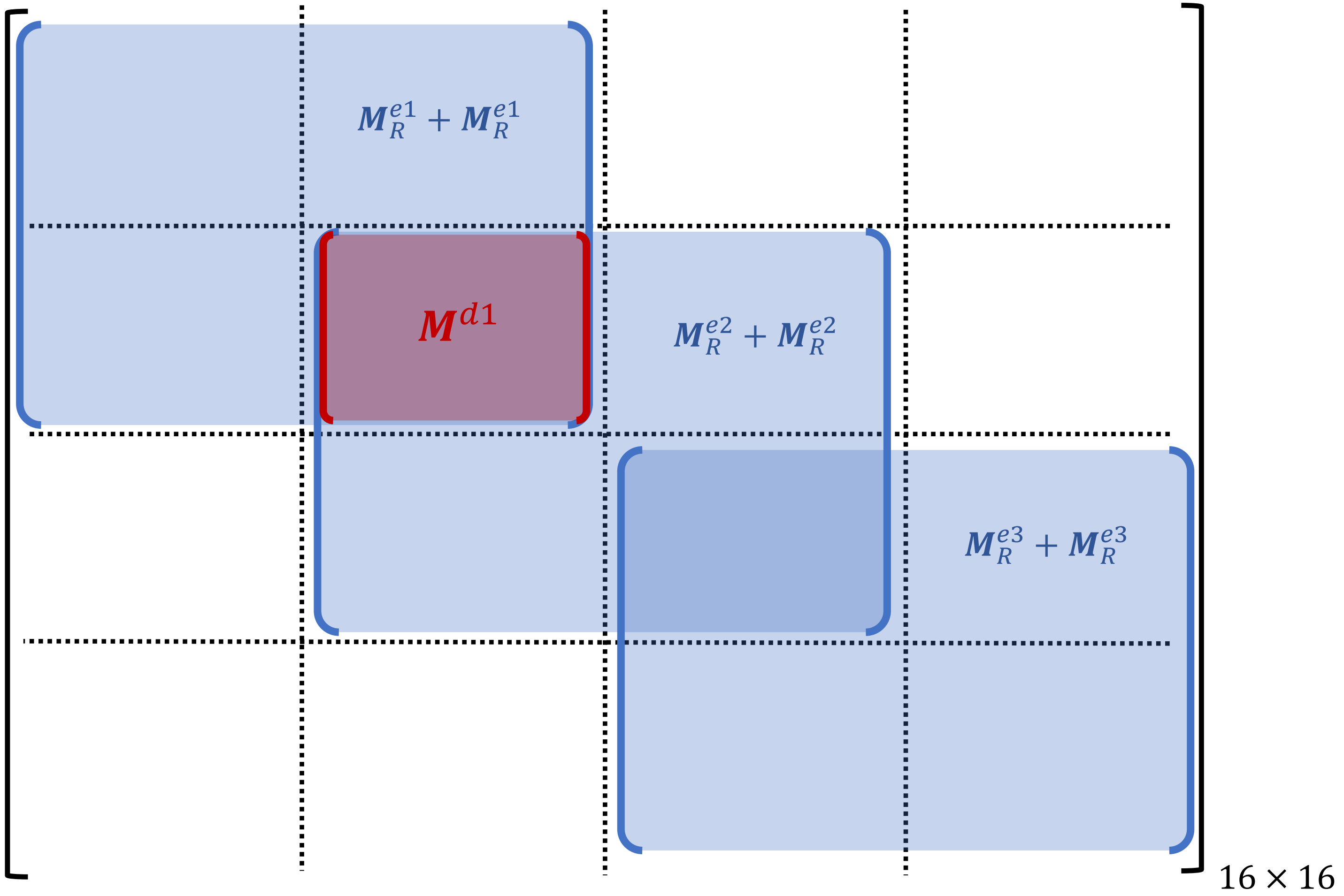
Vetor de graus-de-liberdade: $\boldsymbol{q} = \{x_1 \quad y_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \beta_3 \quad \gamma_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad \beta_4 \quad \gamma_4\}^T$

Exemplo

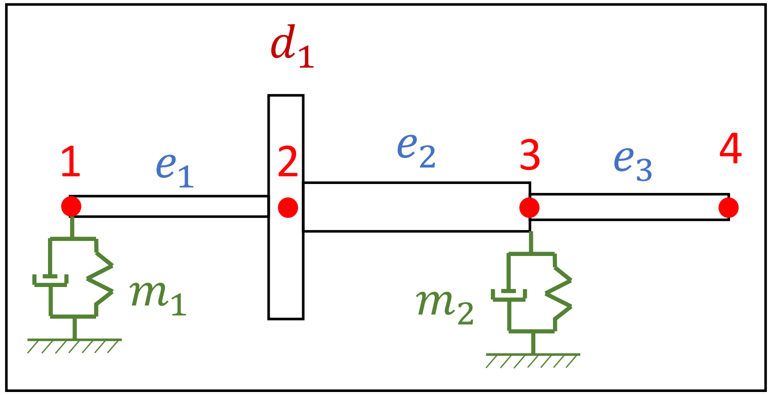


Montagem da **matriz de inércia global**:

$$\boldsymbol{M}_G = \sum \boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e + \boldsymbol{M}^d =$$

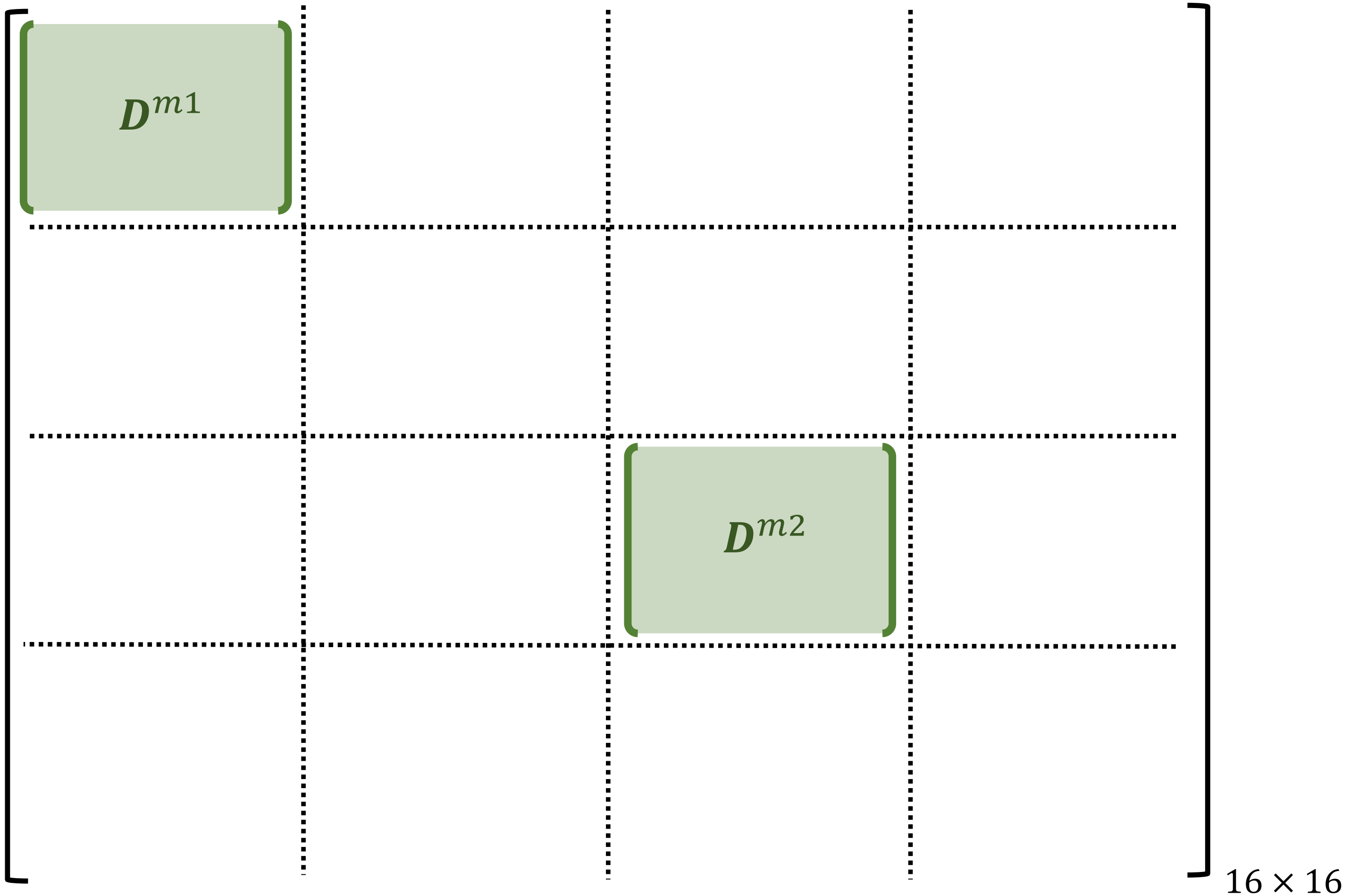


Exemplo

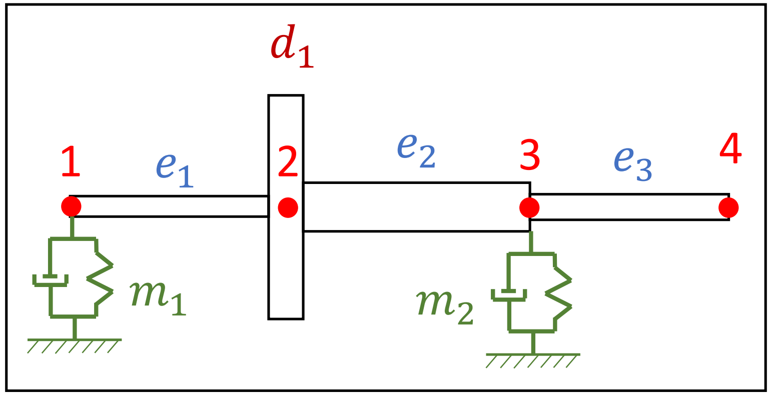


Montagem da **matriz de amortecimento global**:

$$\boldsymbol{D}_G = \sum \boldsymbol{D}^m =$$

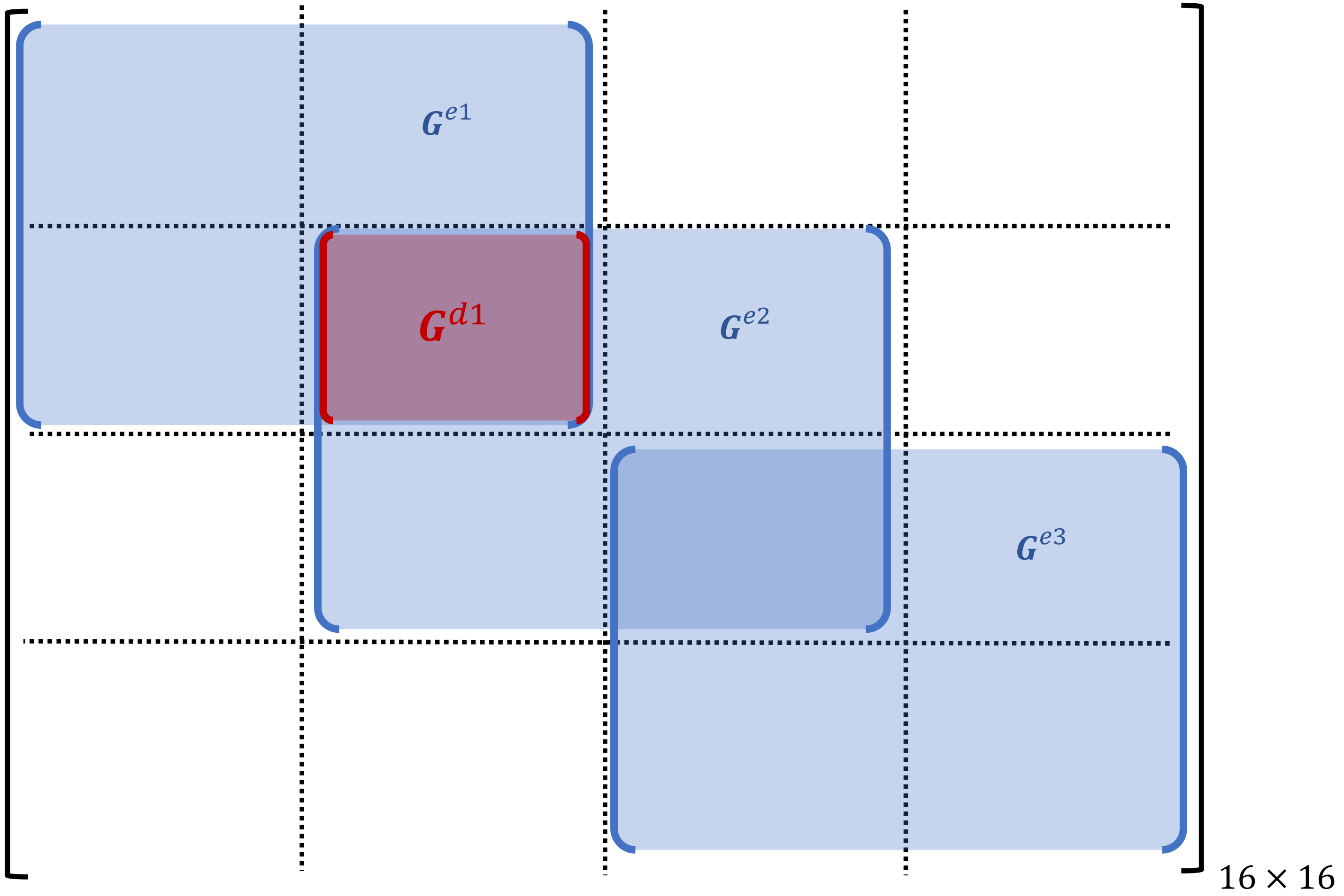


Exemplo

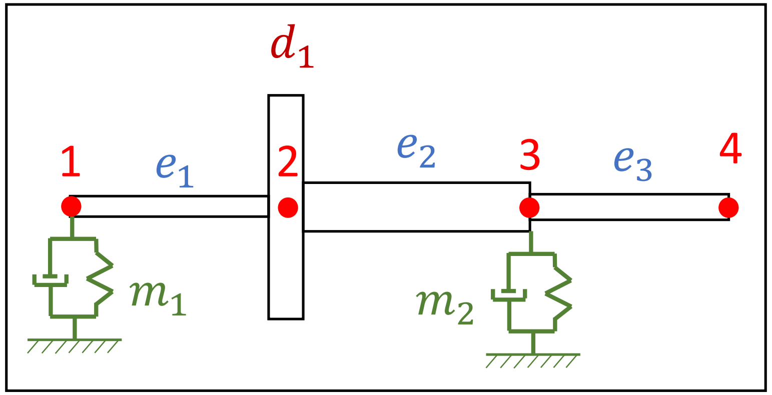


Montagem da **matriz giroscópica global**:

$$\boldsymbol{G}_G = \sum \boldsymbol{G}^e + \boldsymbol{G}^d =$$

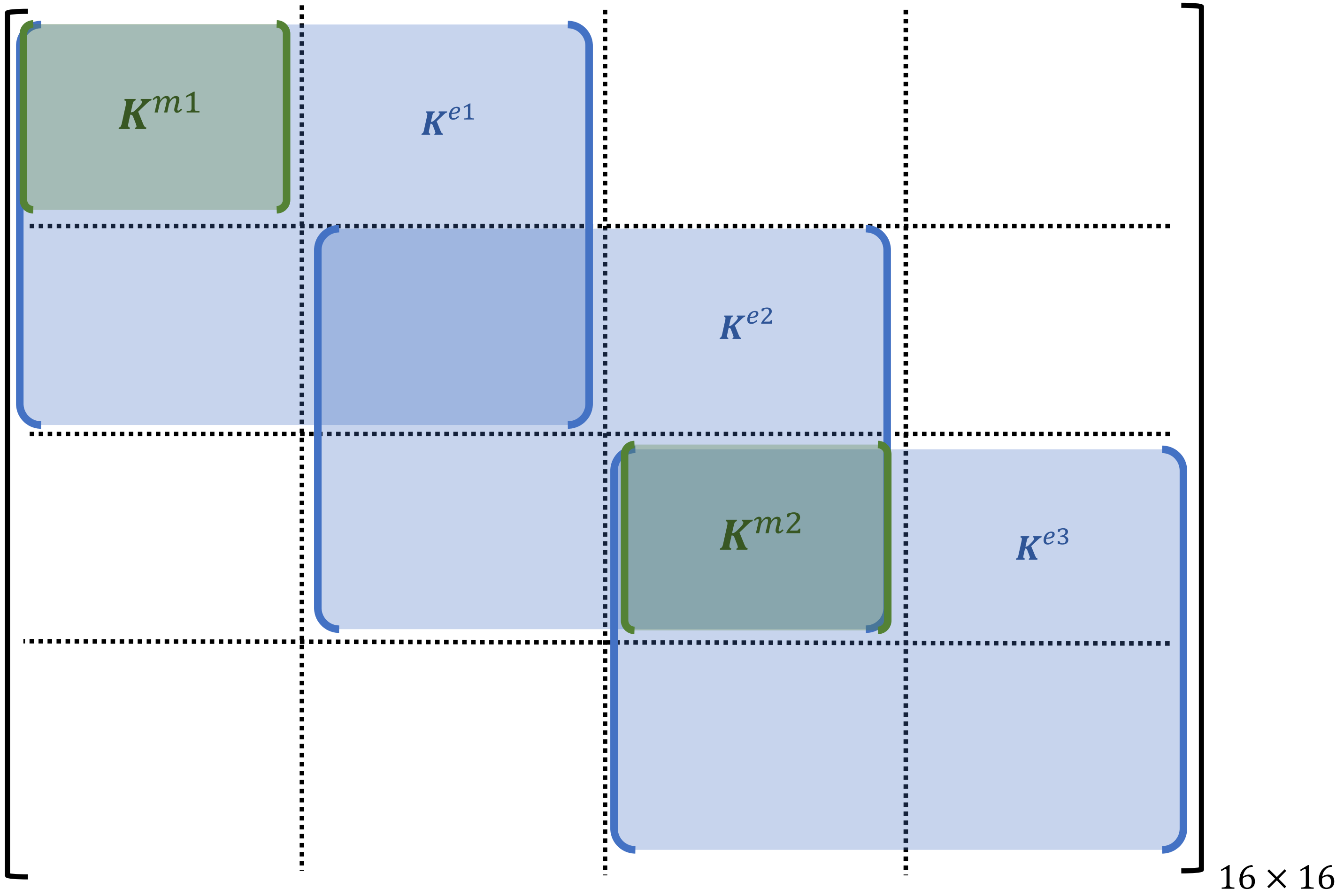


Exemplo

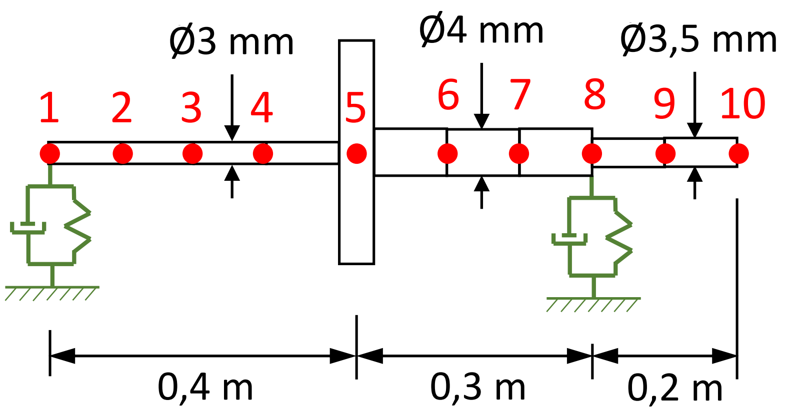


Montagem da **matriz de rigidez global**:

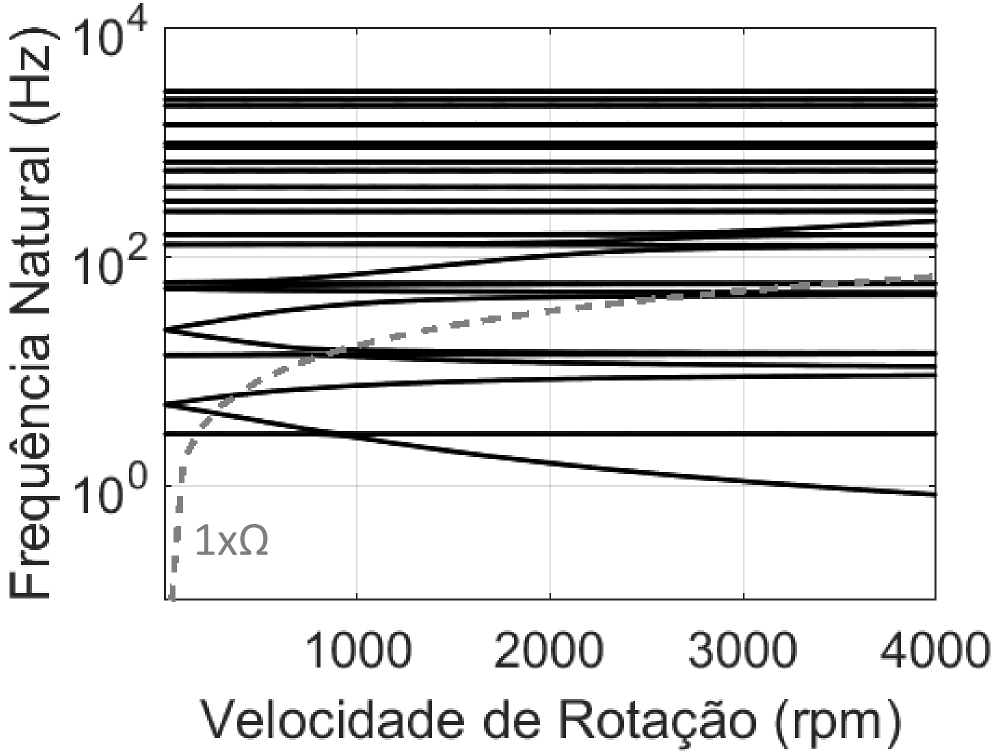
$$\boldsymbol{K}_G = \sum \boldsymbol{K}^e + \boldsymbol{K}^m =$$



Exemplo



10 nós → 40 gdls



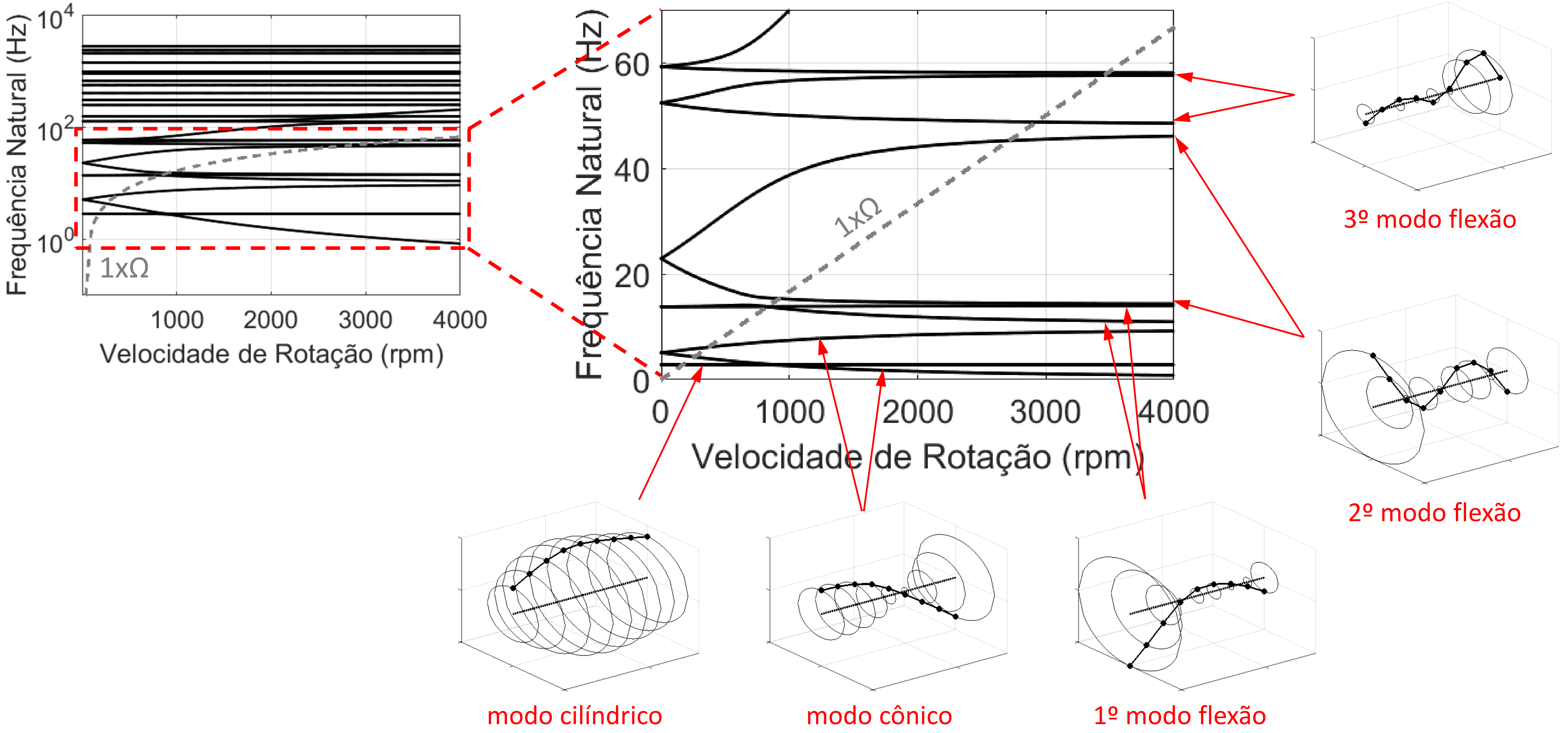
40 frequências naturais !!!

DISCO: $m_d = 2$ kg
$I_p = 0{,}06$ kg.m²
$I_t = 0{,}02$ kg.m²

EIXO: $\rho = 7850$ kg/m³
$E = 2{,}1 \times 10^{11}$ kg/m²
$I_t = 0{,}02$ kg.m²

MANCAL: $k_{xx} = k_{yy} = 1000$ N/m
$k_{\beta\beta} = k_{\gamma\gamma} = 10$ N.m/rad
$d_{xx} = d_{yy} = 10$ N.s/m

Exemplo



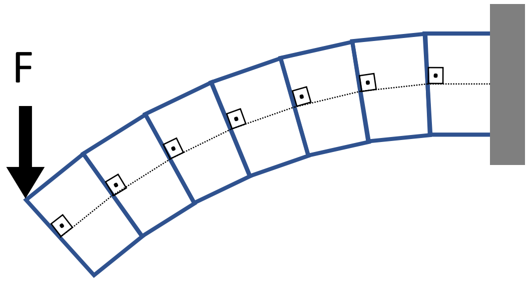
Frequência Natural (Hz)
10^4
10^2
10^0
1xΩ
1000
2000
3000
4000
Velocidade de Rotação (rpm)
Frequência Natural (Hz)
60
40
20
0
1xΩ
0
1000
2000
3000
4000
Velocidade de Rotação (rpm)
3º modo flexão
2º modo flexão
modo cilíndrico
modo cônico
1º modo flexão

Modelo em Elementos Finitos

NELSON, H.D., McVAUGH, J.M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, **Journal of Engineering for Industry** 98(2), pp.593-600, 1976

Teoria de viga de Euler-Bernoulli

- Despreza a tensão de cisalhamento no interior da viga
- Considera que a seção transversal da viga permanece perpendicular à linha neutra



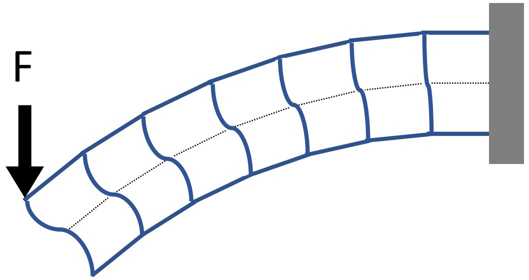
- Hipótese válida para vigas com relação L/D > 10

Modelo em Elementos Finitos

NELSON, H.D., A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, **Journal of Mechanical Design** 102(4), pp.793-803, 1980

Teoria de viga de Timoshenko

- Considera a tensão de cisalhamento no interior da viga
- A seção transversal da viga não permanece perpendicular à linha neutra



Equação de movimento: $$\left(\boldsymbol{M}_T^e + \boldsymbol{M}_R^e + \boldsymbol{M}^d\right)\ddot{\boldsymbol{q}} + \left[\boldsymbol{D}^m - \Omega\left(\boldsymbol{G}^e + \boldsymbol{G}^d\right)\right]\dot{\boldsymbol{q}} + \left(\boldsymbol{K}^e + \boldsymbol{K}^m\right)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Mas:

$$\boldsymbol{M}_T^e = \boldsymbol{M}_0 + \Phi\boldsymbol{M}_1 + \Phi^2\boldsymbol{M}_2$$
$$\boldsymbol{M}_R^e = \boldsymbol{N}_0 + \Phi\boldsymbol{N}_1 + \Phi^2\boldsymbol{N}_2$$
$$\boldsymbol{G}^e = \boldsymbol{G}_0 + \Phi\boldsymbol{G}_1 + \Phi^2\boldsymbol{G}_2$$
$$\boldsymbol{K}^e = \boldsymbol{K}_0 + \Phi\boldsymbol{K}_1$$

mesmas matrizes do modelo de Euler-Bernoulli !!!

Onde: $$\Phi = \frac{12EI}{kAGL^2}$$

$$\begin{cases} k \approx 0{,}9 & \text{seção quadrada (aço ou alumínio)} \\ k \approx {}^5\!/_6 & \text{seção circular (aço ou alumínio)} \end{cases}$$

COWPER, G.R., The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, **Journal of Applied Mechanics** 33(2), pp.335-340, 1966

Projeto – PARTE 1

O sistema rotativo com eixo flexível ilustrado abaixo tem as seguintes frequências naturais (medidas experimentalmente) em velocidade de rotação nula:

	1ª frequência natural (Hz)	*2ª frequência natural (Hz)*
Horizontal	**18,25**	**32,25**
Vertical	**21,75**	**45,50**

Os dados geométricos da bancada são:

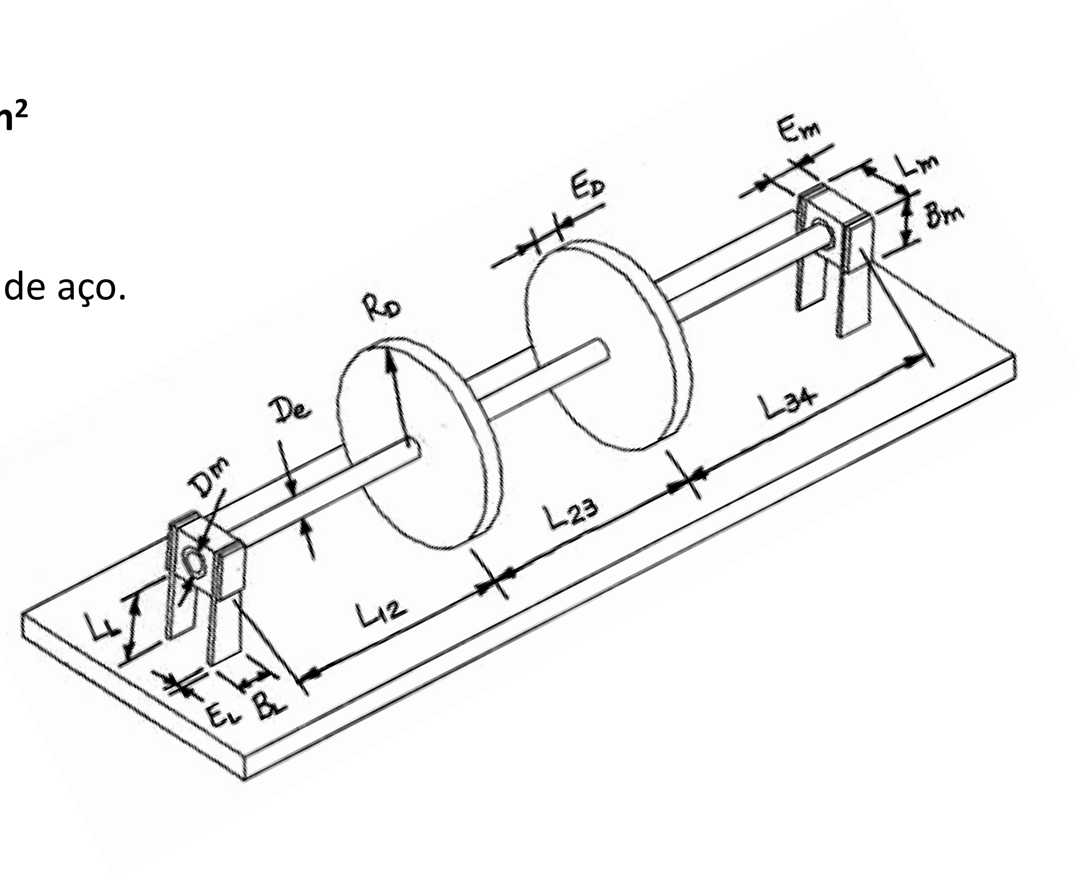
R_D = 60 mm	**E_m = 30 mm**	**L_{23} = 266 mm**	**L_L = 70 mm**
E_D = 10 mm	**D_m = 20 mm**	**L_{34} = 75 mm**	**$\rho_{AÇO}$ = 7850 kg/m^3**
L_m = 44 mm	**D_e = 6 mm**	**B_L = 29 mm**	**$E_{AÇO}$ = 2,1x10^{11} N/m^2**
B_m = 40 mm	**L_{12} = 55 mm**	**E_L = 1 mm**	**ρ_{AL} = 2700 kg/m^3**

Onde as caixas dos mancais são de alumínio e os demais componentes são de aço.

a) Desenvolva o modelo do sistema pelo Método dos Elementos Finitos e encontre as frequências naturais de rotação nula.

b) Ajuste o modelo para que as frequências naturais coincidam com as frequências medidas (tabela).

c) Com o modelo ajustado, construa o Diagrama de Campbell do sistema.



Conclusão

Modelagem por **Elementos Finitos** permite a análise de rotores complexos:

- eixo flexível com diferentes raios (eixo escalonado)
- qualquer número de discos e posicionados em qualquer lugar no eixo
- mancais anisotrópicos e posicionados em qualquer lugar no eixo
- possibilidade de inclusão dos efeitos de selos e acoplamentos

Modelo baseado na **teoria de viga de Euler-Bernoulli**

- despreza os efeitos da tensão de cisalhamento
- hipótese válida para vigas com relação L/D > 10

Modelo baseado na **teoria de viga de Timoshenko**

- considera os efeitos da tensão de cisalhamento

Dúvidas ?