PMR3306 – Sistemas Dinâmicos II para Mecatrônica

"Everyone wants the project to be good, fast and cheap... pick two!"
- *Unknown*

DIAGRAMA DE BODE
PARTE I

Larissa Driemeier

NOSSO CALENDÁRIO

#	Data	Conteúdo	Teste
I -12	4/10	Transformada de Fourier	
II -13	10/10	Transformada de Fourier	
III -14	11/10	Transformada de Fourier	
IV -15	17/10	Transformada de Fourier	
V -16	18/10	Diagrama de Bode	
VI -17,18	19/10	Diagrama de Bode	
VII - 19	24/10		TESTE – TODO CONTEÚDO

BODE PLOTS

Os diagramas de Bode (de módulo e fase) são uma forma de caracterizar sinais no domínio da frequência.

Eng. Americano Hendrik Wade Bode (1905-1982)

Diagrama de Bode de **Módulo**

$|G(j\omega)|$ em dB $\times$ ω (com escala logaritmica)

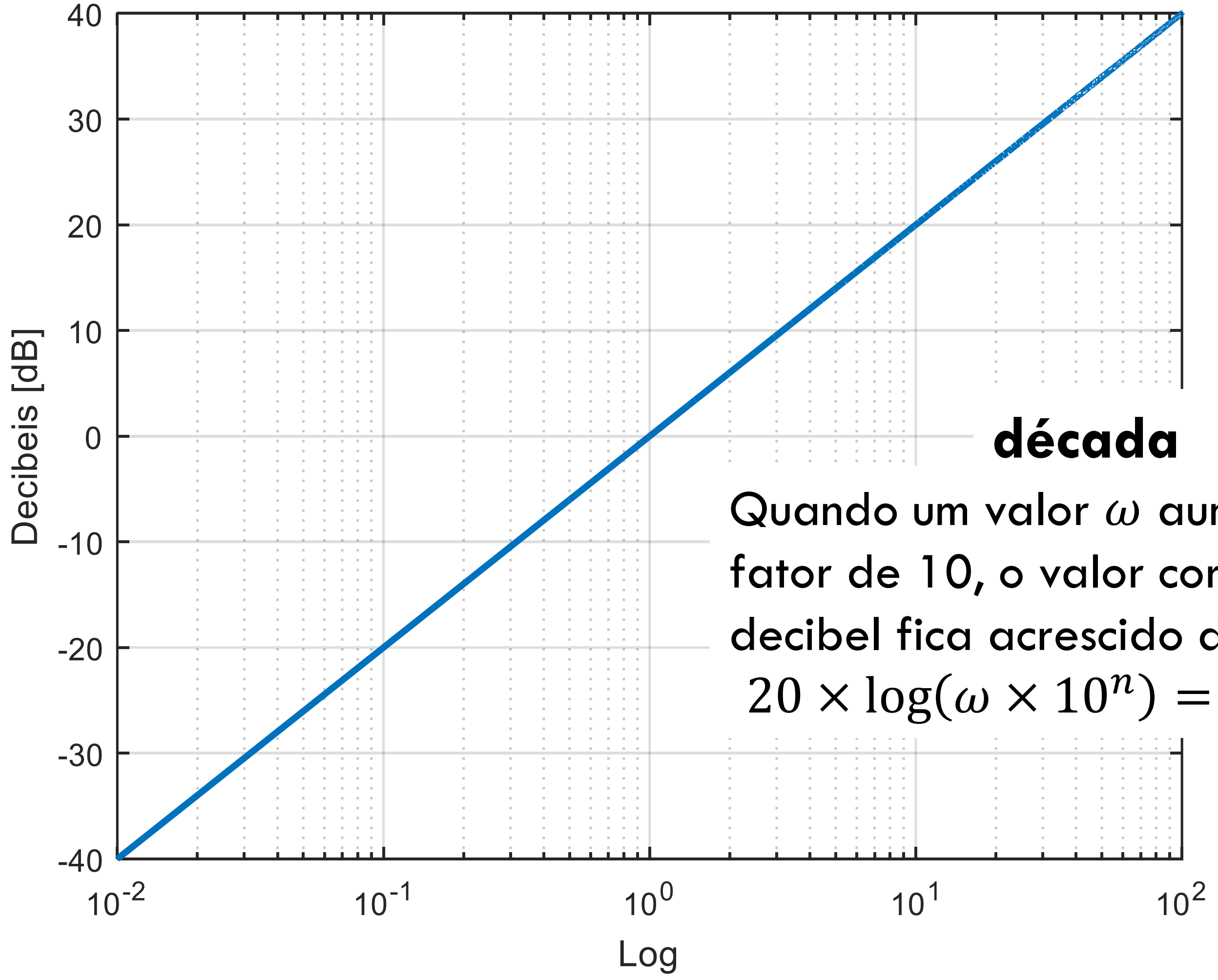
Diagrama de Bode de **Fase**

$\angle G(j\omega)$ em graus $\times$ ω (com escala logaritmica)

No diagrama de Bode as relações entre as frequências são dadas em termos de oitavas ou décadas:

Uma década é um intervalo compreendido entre ω e 10ω.

1 KHz está uma década acima de 100Hz e 1 década abaixo de 10KHz



década

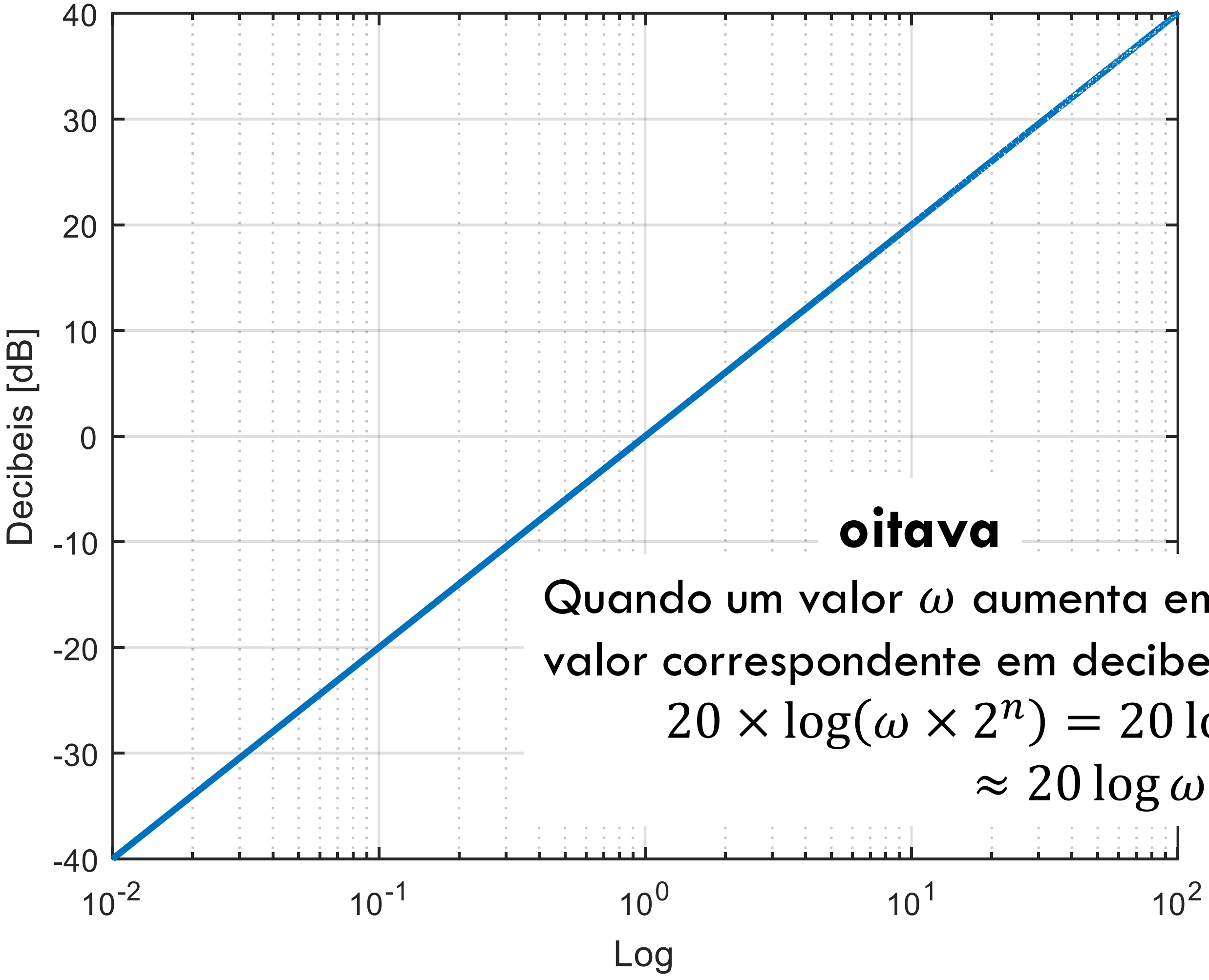
Quando um valor ω aumenta em um fator de 10, o valor correspondente em decibel fica acrescido de 20,

$$20 \times \log(\omega \times 10^{n}) = 20 \log \omega + 20n$$

No diagrama de Bode as relações entre as frequências são dadas em termos de oitavas ou décadas:

Uma oitava é um intervalo compreendido entre ω e 2ω.

1Khz está uma oitava acima de 500 Hz e 1 oitava abaixo de 2KHz



oitava

Quando um valor ω aumenta em um fator de 2, o valor correspondente em decibel fica acrescido de 6,

$$20 \times \log(\omega \times 2^n) = 20 \log \omega + 20n \log 2$$
$$\approx 20 \log \omega + 6n$$

FATORES BÁSICOS PARA CONSTRUÇÃO DE UM DIAGRAM DE BODE

O ganho de Bode, K

Os fatores integrativos (polos na origem) $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$

Os fatores derivativos (zeros na origem) $(j\omega)^n$

Fatores de primeira ordem tipo *polos reais* $\left(\frac{1}{j\omega\tau+1}\right)^n$

Fatores de primeira ordem tipo *zeros reais* $(\tau j\omega + 1)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *polos complexos* $\left(\frac{1}{1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}\right)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *zeros complexos* $\left(1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)^n$

AMPLITUDE E FASE

$$|G(j\omega)| = \frac{|K||\tau_2 j\omega + 1|\left|1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_2}^2}\right|}{|j\omega||\tau_1 j\omega + 1|\left|1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_1}^2}\right|}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|G(j\omega)|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + |\tau_2 j\omega + 1|_{dB} + \left|1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_2}^2}\right|_{dB} - |j\omega|_{dB} - |\tau_1 j\omega + 1|_{dB} - \left|1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_1}^2}\right|_{dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle K + \angle(\tau_2 j\omega + 1) + \angle\left(1 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n_2}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_2}^2}\right) - \angle j\omega - \angle(\tau_1 j\omega + 1) - \angle\left(1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n_1}} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{n_1}^2}\right)$$

GANHO

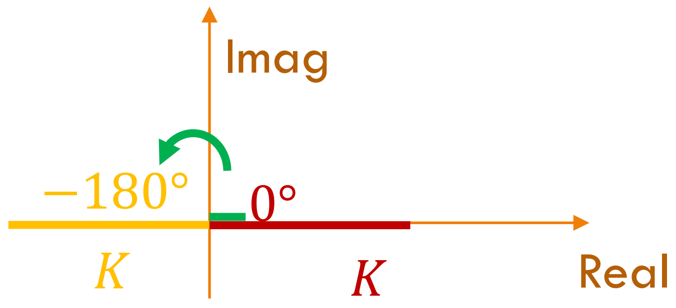
K

O GANHO K

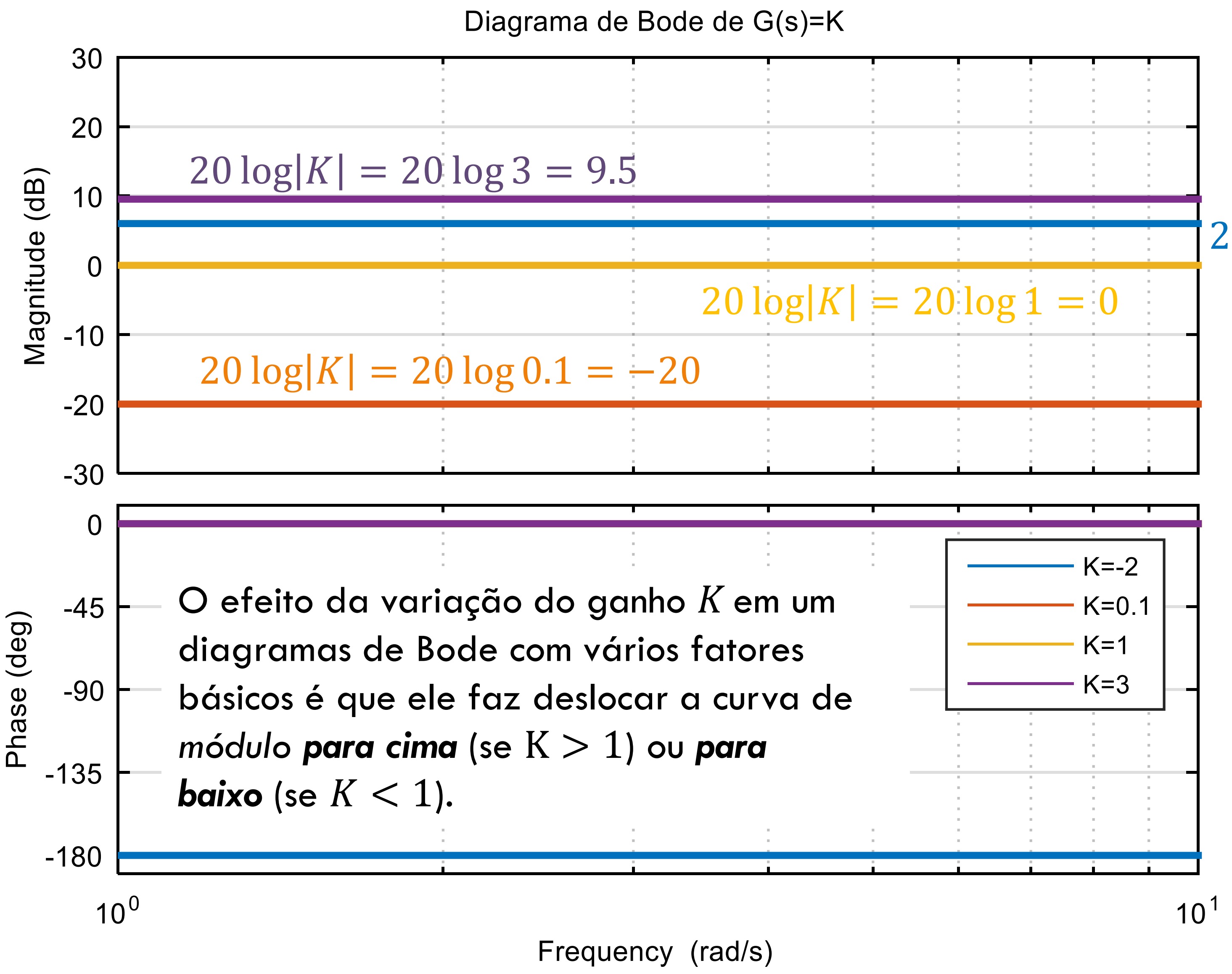
Como $G(j\omega) = K$ é uma constante (não varia com ω),

$|K|_{dB} = 20\log|K|$

$\angle K = 0°$ para $K > 0$
$\angle K = \pm 180°$ para $K < 0$



A curva de módulo em dB de um ganho constante K é uma reta de valor $20\log|K|$dB.



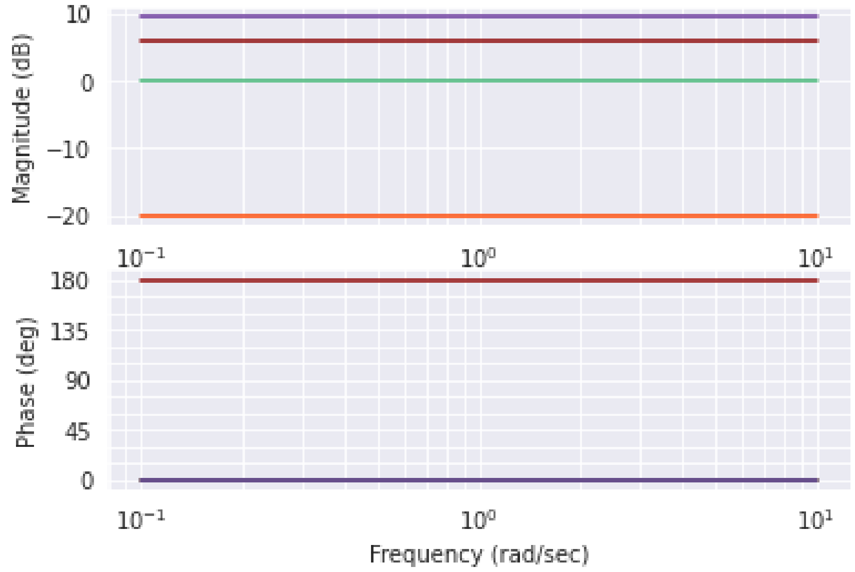
$20 \log|K| = 20 \log 3 = 9.5$

$20 \log|K| = 20 \log 2 = 6.02$

$20 \log|K| = 20 \log 1 = 0$

$20 \log|K| = 20 \log 0.1 = -20$

O efeito da variação do ganho K em um diagramas de Bode com vários fatores básicos é que ele faz deslocar a curva de *módulo* ***para cima*** (se $\mathrm{K} > 1$) ou ***para baixo*** (se $K < 1$).



FATORES INTEGRAL E DERIVATIVO

$(j\omega)^{\pm 1}$

FATOR INTEGRAL

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega$$

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j\omega} = -\operatorname{atan}\frac{Im}{Re} = -90°$$

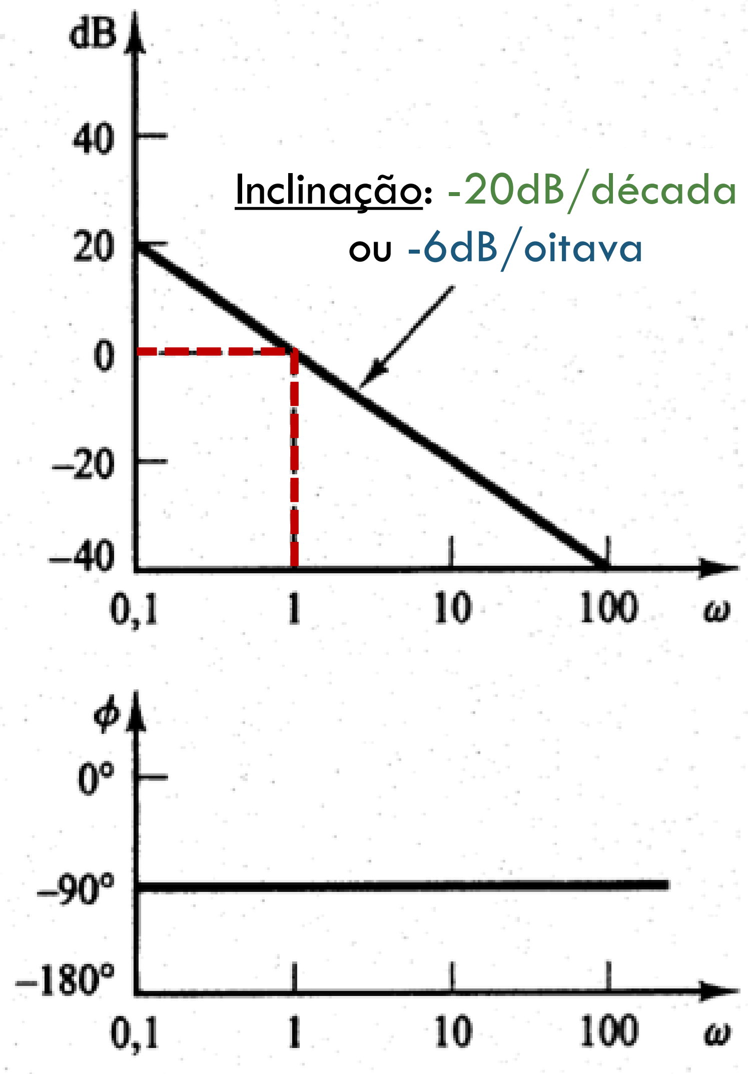


Diagrama de Bode
de $G(j\omega) = 1/j\omega$

(Ogata)

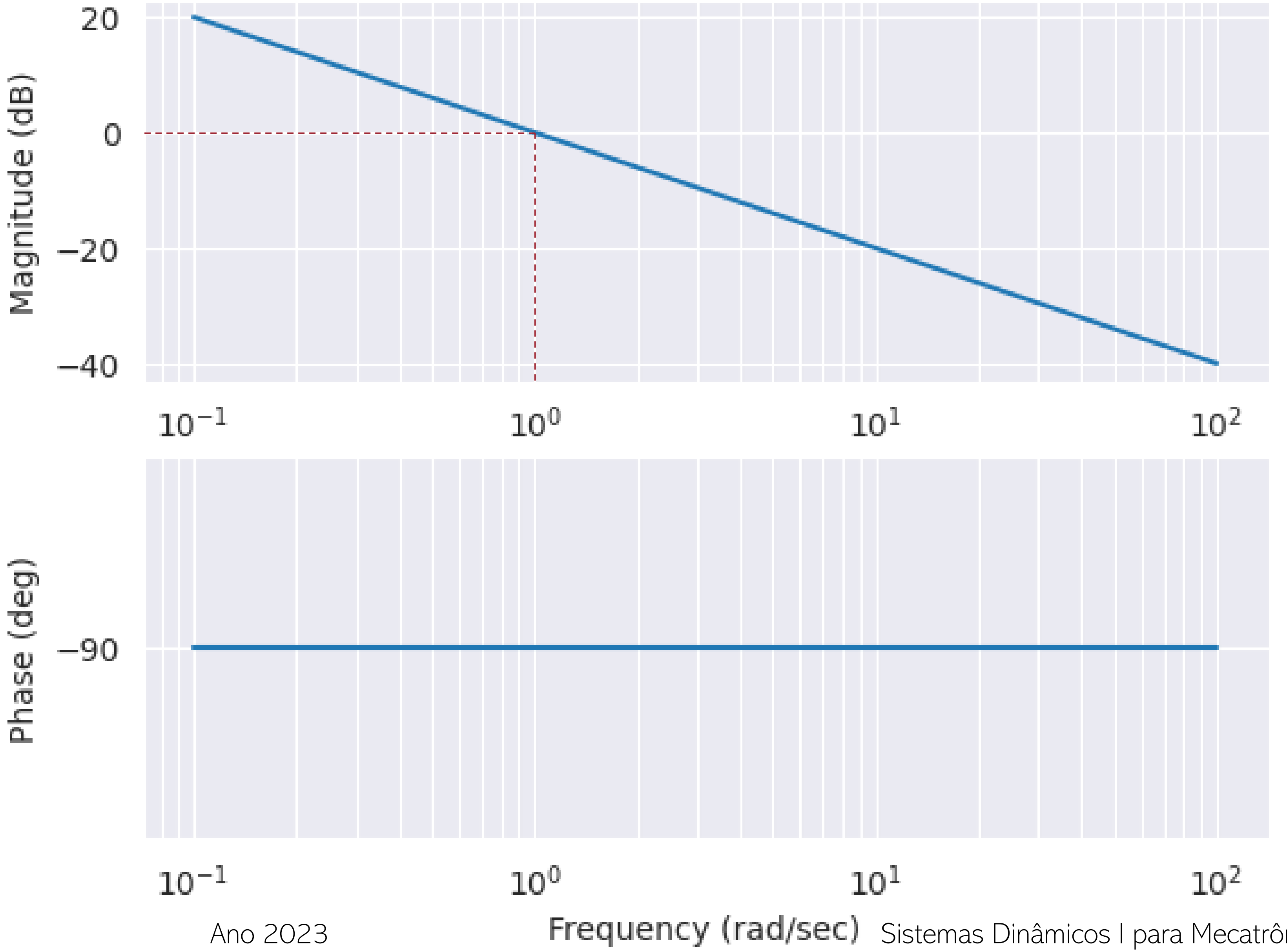
$$|G(j\omega)| = -20\log\omega \text{ dB}$$

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ em } \omega = 1$$

para $\omega = 0{,}01 \quad |G(j\omega)| = 40$ dB
para $\omega = 0{,}10 \quad |G(j\omega)| = 20$ dB
para $\omega = 1{,}00 \quad |G(j\omega)| = 0$ dB
para $\omega = 10{,}0 \quad |G(j\omega)| = -20$ dB
para $\omega = 100 \quad |G(j\omega)| = -40$ dB

para $\omega = 0{,}5 \quad |G(j\omega)| = 6{,}0206 \cong 6$ dB
para $\omega = 1{,}0 \quad |G(j\omega)| = 0$ dB
para $\omega = 2{,}0 \quad |G(j\omega)| = -6{,}0206 \cong -6$ dB
para $\omega = 4{,}0 \quad |G(j\omega)| = -12{,}0412 \cong -12$ dB
para $\omega = 8{,}0 \quad |G(j\omega)| = -18{,}0618 \cong -18$ dB

$$G(s) = \frac{1}{s}$$


20
0
−20
−40
Magnitude (dB)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
−90
Phase (deg)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)

FATOR DERIVATIVO $G(j\omega) = j\omega$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|j\omega| = 20\log\omega \text{ dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90°$$

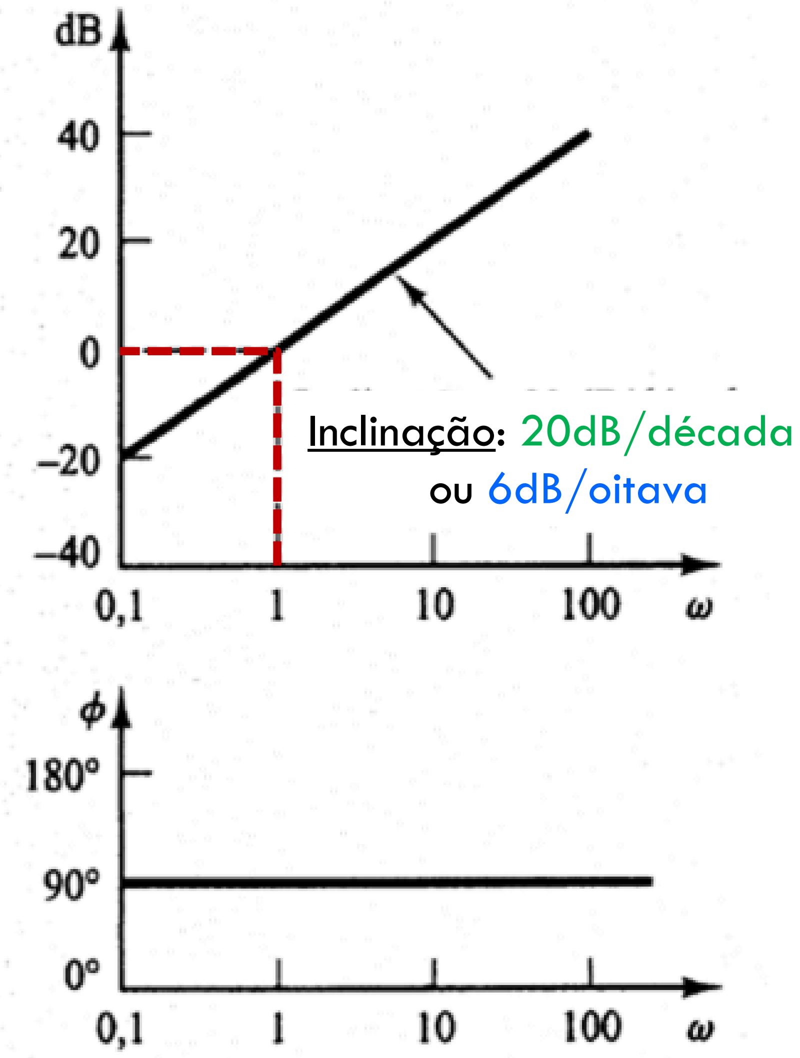


Diagrama de Bode de $G(j\omega) = j\omega$

(Ogata)

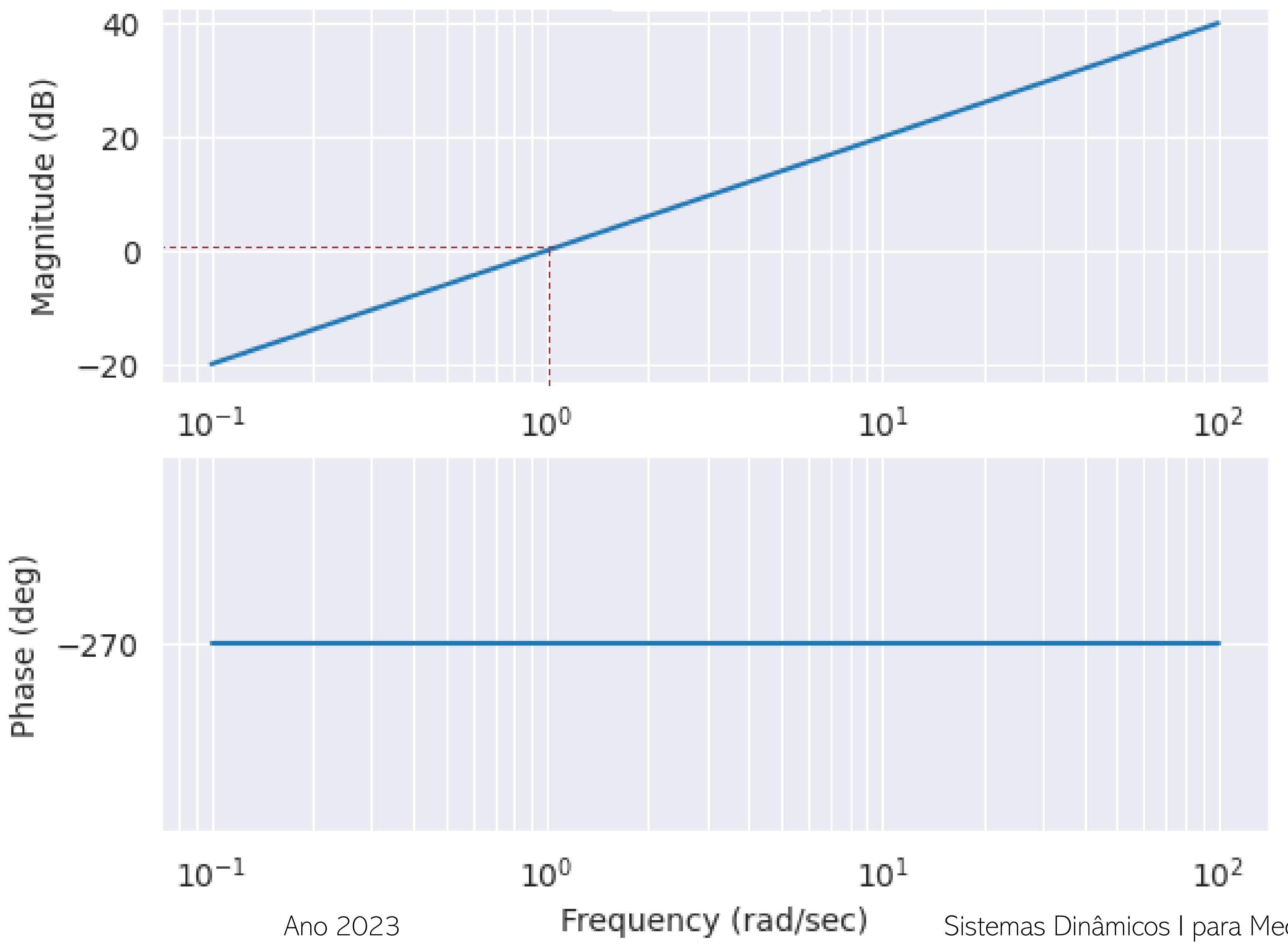
$|G(j\omega)| = 20\log\omega$ dB

$|G(j\omega)| = 0$ em $\omega = 1$

para $\omega = 0{,}10$ $|G(j\omega)| = -20$ dB
para $\omega = 1{,}00$ $|G(j\omega)| = 0$ dB
para $\omega = 10{,}0$ $|G(j\omega)| = 20$ dB
para $\omega = 100$ $|G(j\omega)| = 40$ dB

para $\omega = 0{,}5$ $|G(j\omega)| = -6{,}0206 \cong -6$ dB
para $\omega = 1{,}0$ $|G(j\omega)| = 0$ dB
para $\omega = 2{,}0$ $|G(j\omega)| = 6{,}0206 \cong 6$ dB
para $\omega = 4{,}0$ $|G(j\omega)| = 12{,}0412 \cong 12$ dB
para $\omega = 8{,}0$ $|G(j\omega)| = 18{,}0618 \cong 18$ dB

$G(s) = s$



Magnitude (dB)
40
20
0
−20
10−1
100
101
102
Phase (deg)
−270
Frequency (rad/sec)

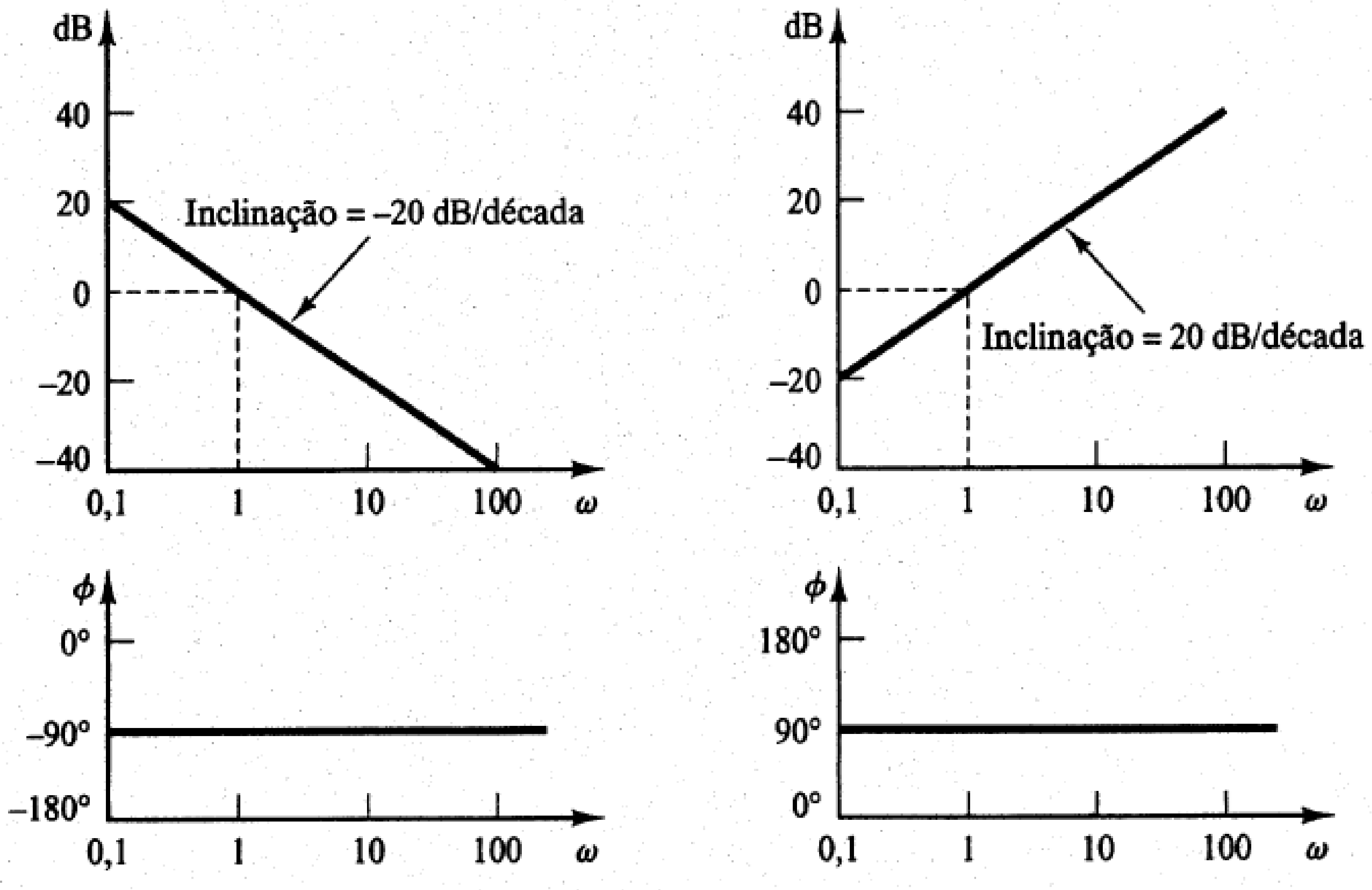


Diagrama de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$

Diagrama de Bode de $G(j\omega) = j\omega$

FATORES INTEGRAL E DERIVATIVO $(j\omega)^{\pm n}$

Se a função de transferência possuir o fator $(1/j\omega)^n$ ou $(j\omega)^n$, as grandezas logarítmicas se tornarão respectivamente:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \left(\frac{1}{j\omega} \right)^n \right| = 20n \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20n \log \omega \quad dB$$

ou

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |(j\omega)^n| = 20n \log |j\omega| = 20n \log \omega \quad dB$$

As inclinações passam a ser respectivamente $-20n$ dB/década ou $20n$ dB/década

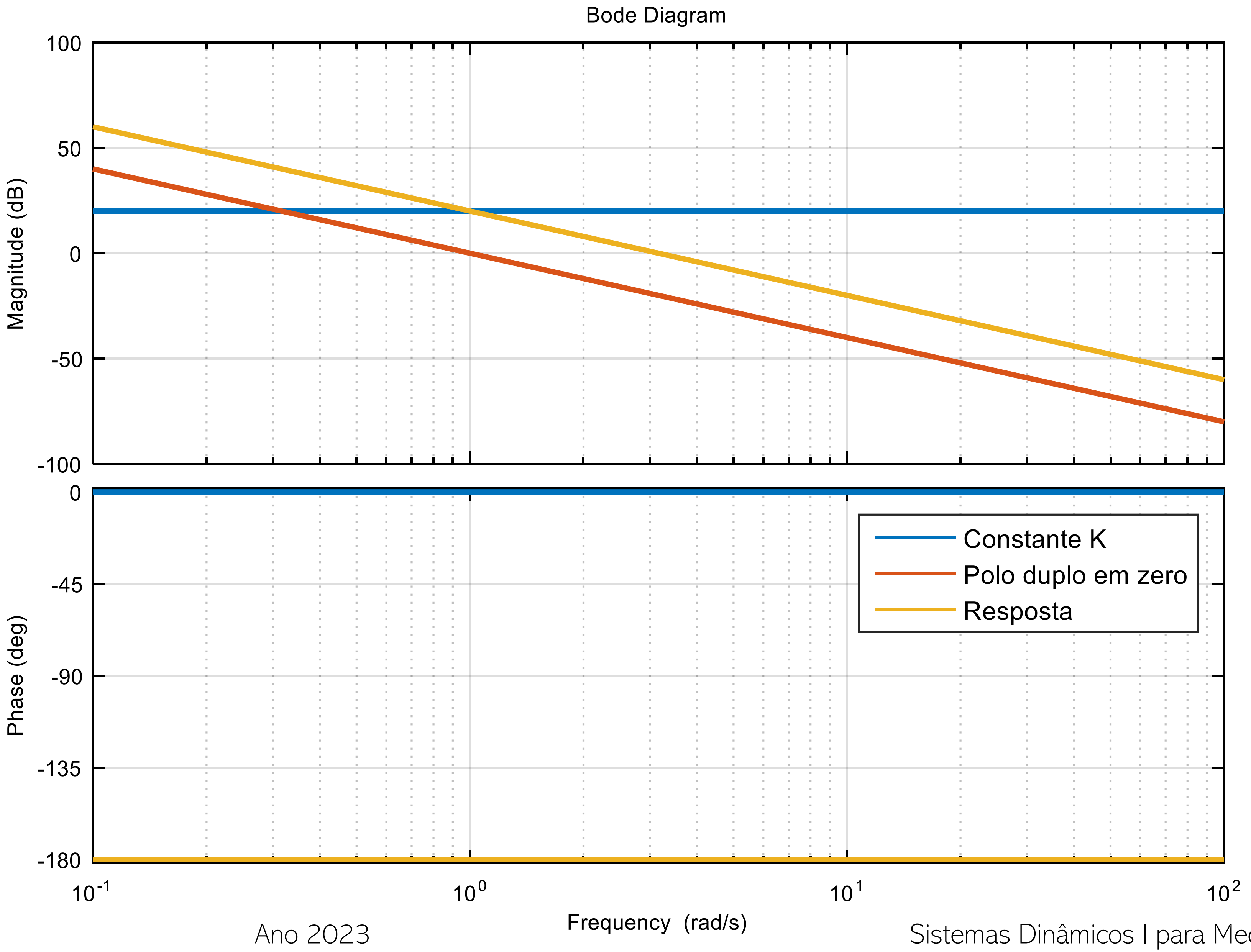
O ângulo de fase de $(1/j\omega)^n$ é igual a $-90n$ em toda a faixa de frequência, enquanto que o de $(j\omega)^n$ é igual a $90n$ em toda a faixa de frequência.

EXEMPLO

Trace o diagrama de Bode

$$G(s) = \frac{10}{s^2}$$

Fator	Parâmetros	Módulo	Fase
Constante $K = 10$	---	$20\log\lvert 10\rvert = 20$	0^0
Polo duplo na origem $(j\omega)^{-2}$	$\omega = \frac{1rad}{s}$ $em\ 0\ dB$	$-20n\log\omega = -40\log\omega$	$-90n = -180^0$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)
Constante K
Polo duplo em zero
Resposta

FATORES DE PRIMEIRA ORDEM

$$(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$$

FATOR POLO DE PRIMEIRA ORDEM $G(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right| = 20\log 1 - 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} = 0 - 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right|$$

Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$

$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \cong -20\log 1 = 0$ dB

Para $\omega = 1/\tau$

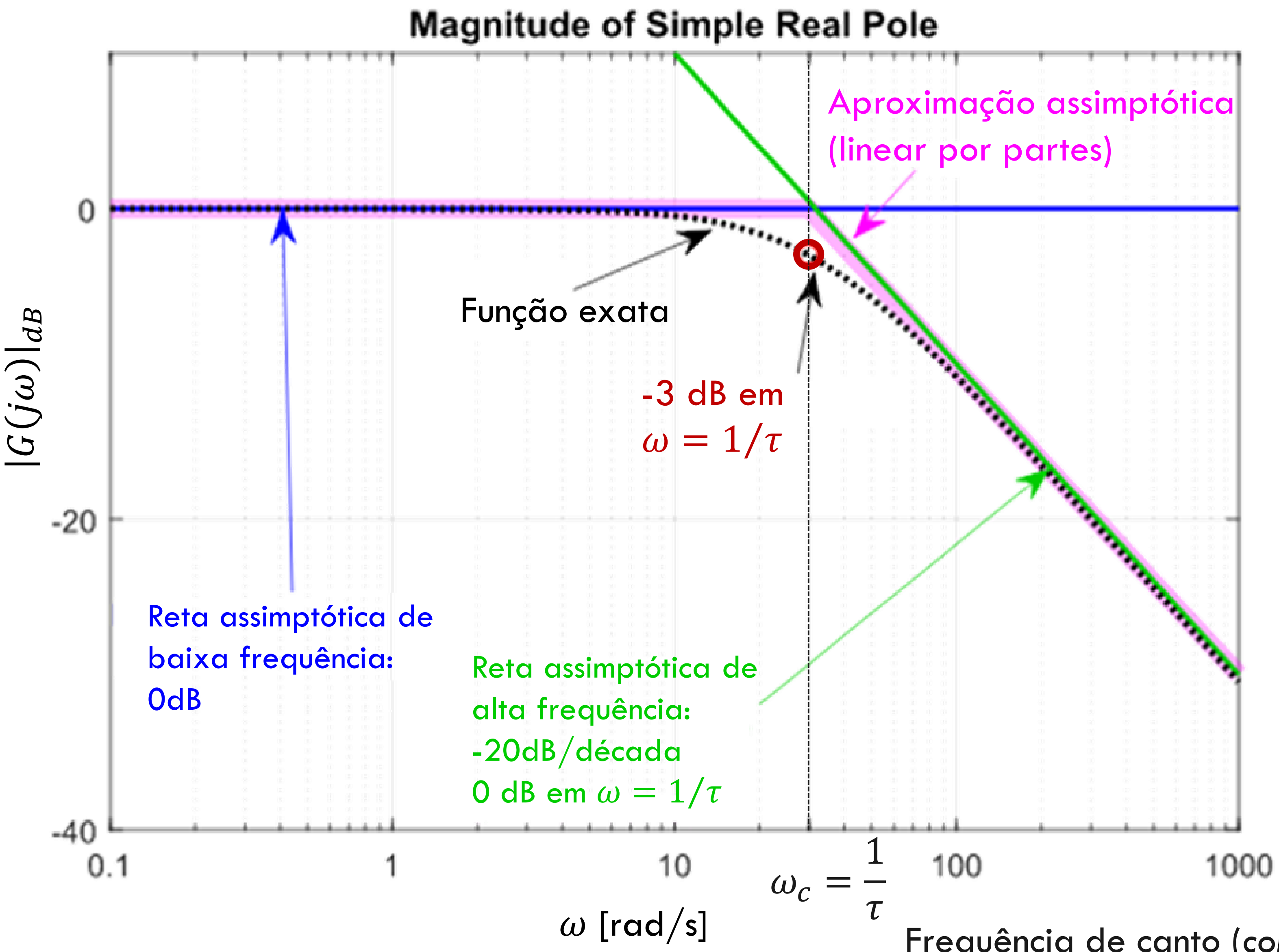
$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{2} \cong -3$ dB

Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$

$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \cong -20\log\omega\tau$ dB

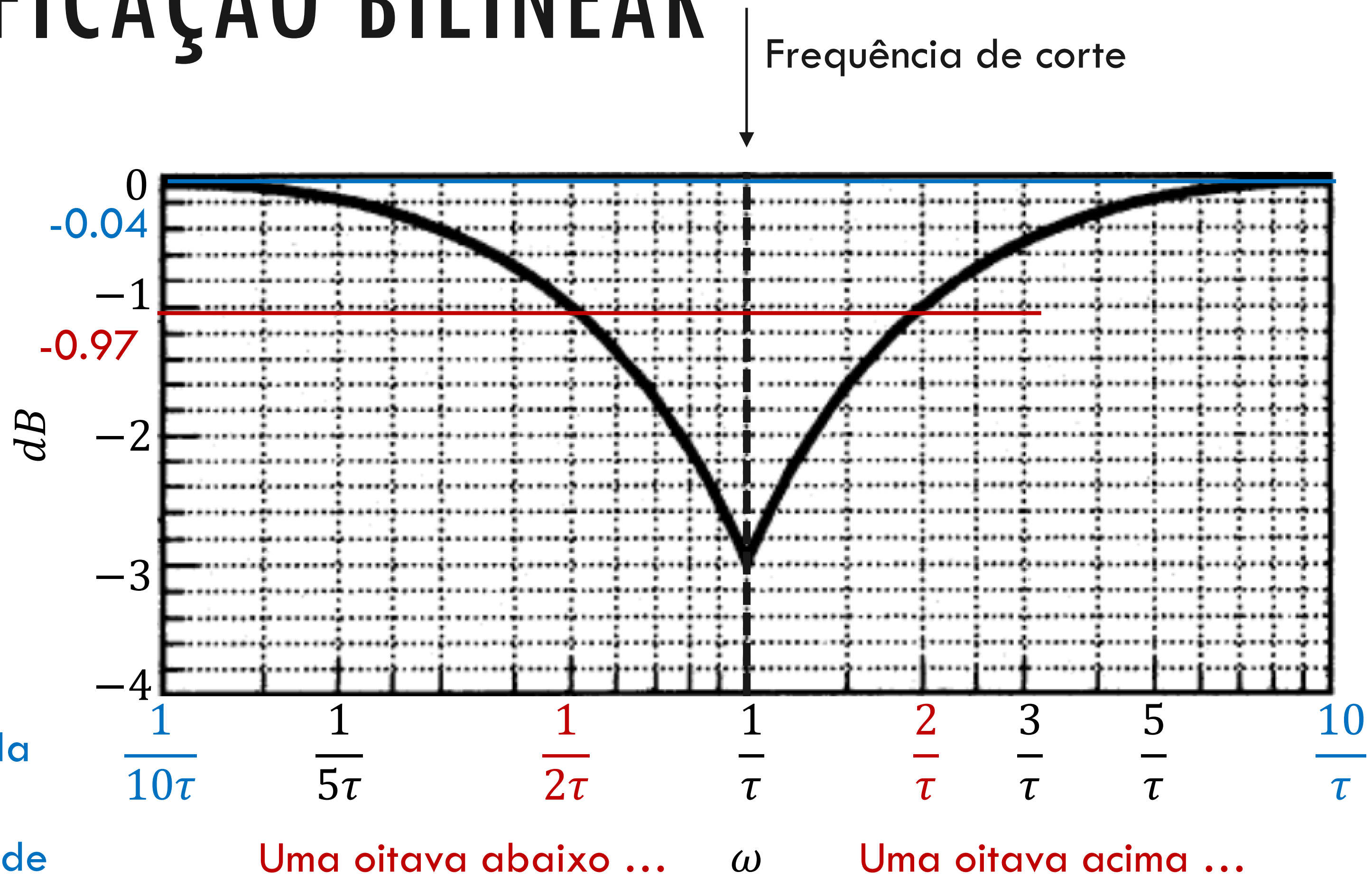
$\omega = 1/\tau \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0$ dB
$\omega = 10/\tau \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20$ dB

Decresce em 20 dB para cada década de ω



Frequência de canto (*corner frequency*) ou frequência de corte

ERRO DO MODULO, EM DB, NO USO DA SIMPLIFICAÇÃO BILINEAR



Uma década abaixo da frequencia de corte…

Uma década acima da frequencia de corte…

FASE DO FATOR POLO DE PRIMEIRA ORDEM

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

A fase para o fator pólo de primeira ordem é:

$$\angle G(j\omega) = \angle\left(\frac{1}{1 + j\omega\tau}\right) = -\angle(1 + j\omega\tau) = -\operatorname{atan}\omega\tau$$

Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} 0 = 0°$$

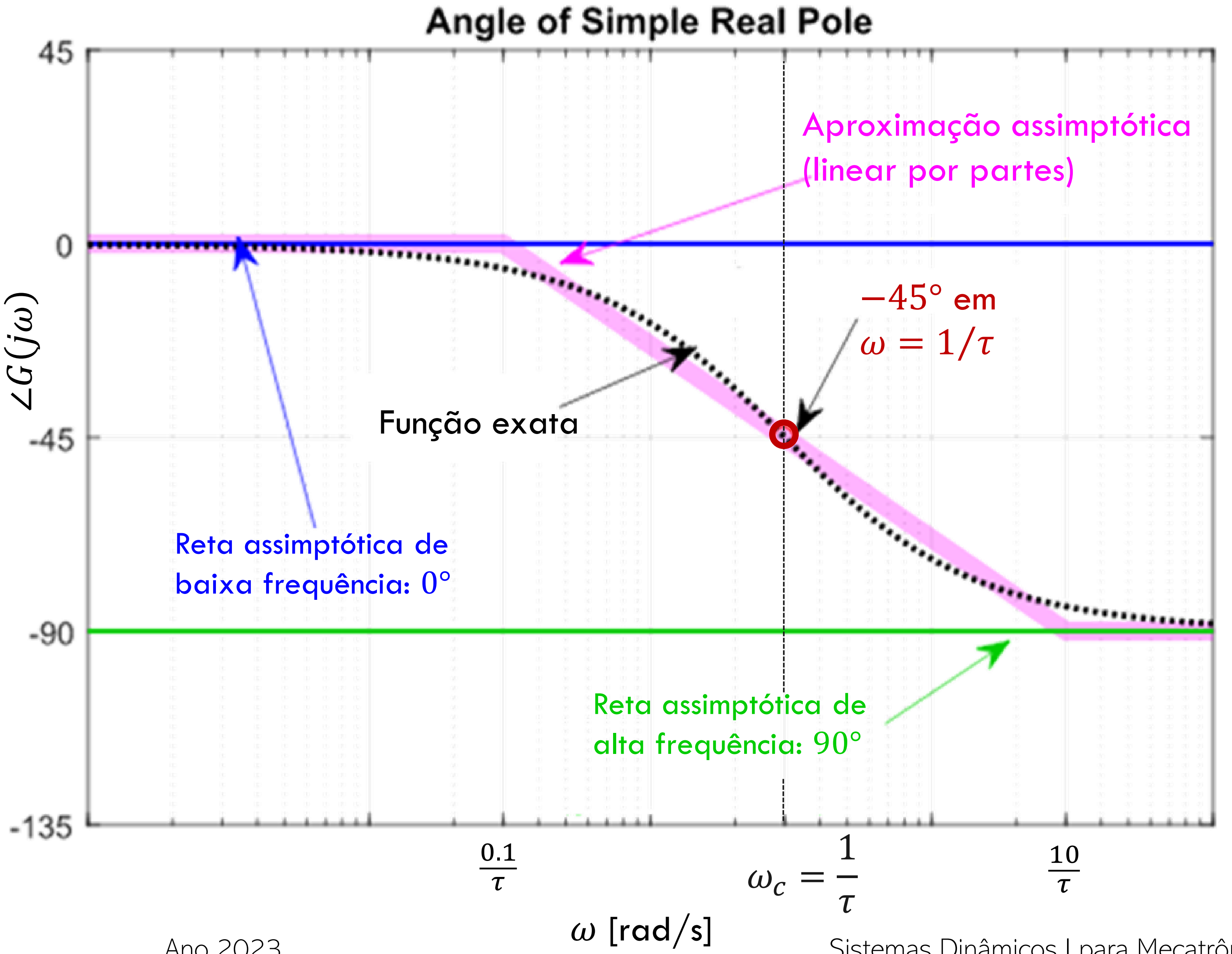
Para $\omega = 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} 1 = -45°$$

Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} \infty = -90°$$

$$10^{-1}/\tau < \omega < 10/\tau$$
$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan}\omega\tau$$


Angle of Simple Real Pole
45
0
-45
-90
-135
$\angle G(j\omega)$
Aproximação assimptótica
(linear por partes)
$-45°$ em
$\omega = 1/\tau$
Função exata
Reta assimptótica de
baixa frequência: 0°
Reta assimptótica de
alta frequência: 90°
$\frac{0.1}{\tau}$
$\omega_c = \frac{1}{\tau}$
$\frac{10}{\tau}$
ω [rad/s]

FATOR ZEROS DE PRIMEIRA ORDEM

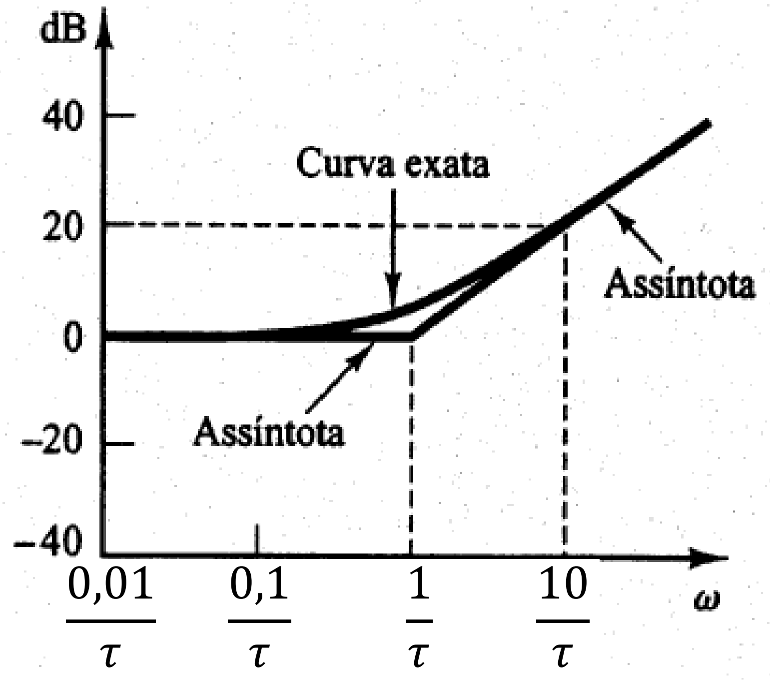
$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

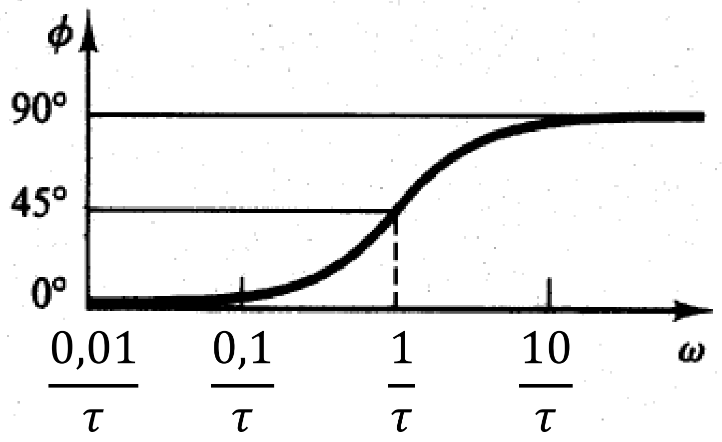
O módulo em dB para o fator de primeira ordem $(1 + j\omega\tau)$ é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|1 + j\omega\tau| = 20\log\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB}$$

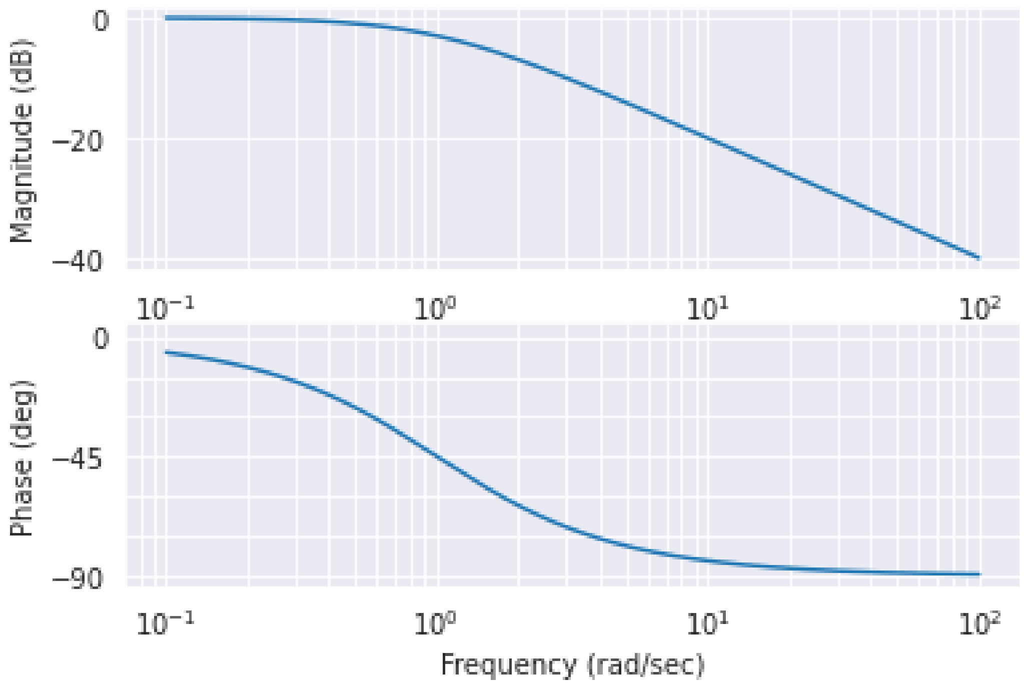
A fase para o fator de primeira ordem $(1 + j\omega\tau)$ é:

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau) = \operatorname{atan}\omega\tau$$

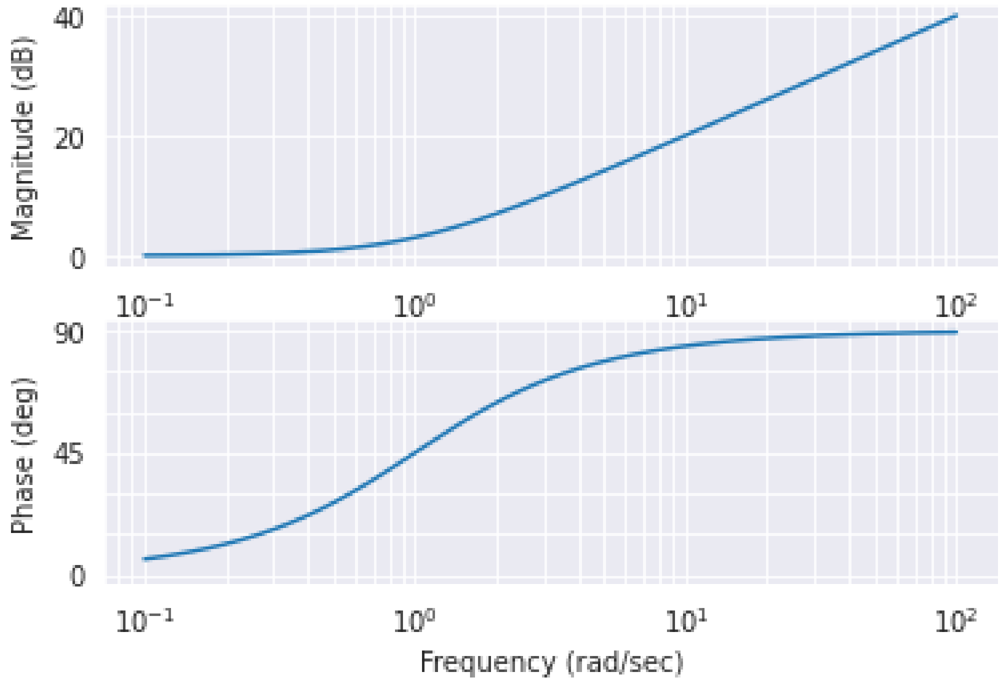

dB
40
20
0
-20
-40
Curva exata
Assíntota
Assíntota
0,01/τ
0,1/τ
1/τ
10/τ
ω


ϕ
90°
45°
0°
0,01/τ
0,1/τ
1/τ
10/τ
ω

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$



$$G(s) = s + 1$$



FATORES DE PRIMEIRA ORDEM $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm n}$

A frequência de canto ainda está em $\omega = \frac{1}{\tau}$;

A assíntota de baixa frequência é uma reta em 0 dB;

A assíntota de alta frequência tem inclinação de $-20n$ dB/década ou $20n$ dB/década;

O erro envolvido nas expressões assintóticas é n vezes o erro correspondente a $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$ em cada ponto de frequência;

O erro envolvido no ângulo de fase é n vezes o erro correspondente a $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$ em cada ponto de frequência.

DIAGRAMA DE BODE PASSO A PASSO

Vamos desenhar passo a passo o Diagrama de Bode para seguinte função de transferência,

$$G(s) = 100\frac{s+1}{s^2+110s+1000}$$

PASSOS 1 E 2

1. Reescreva a função de transferência na forma adequada

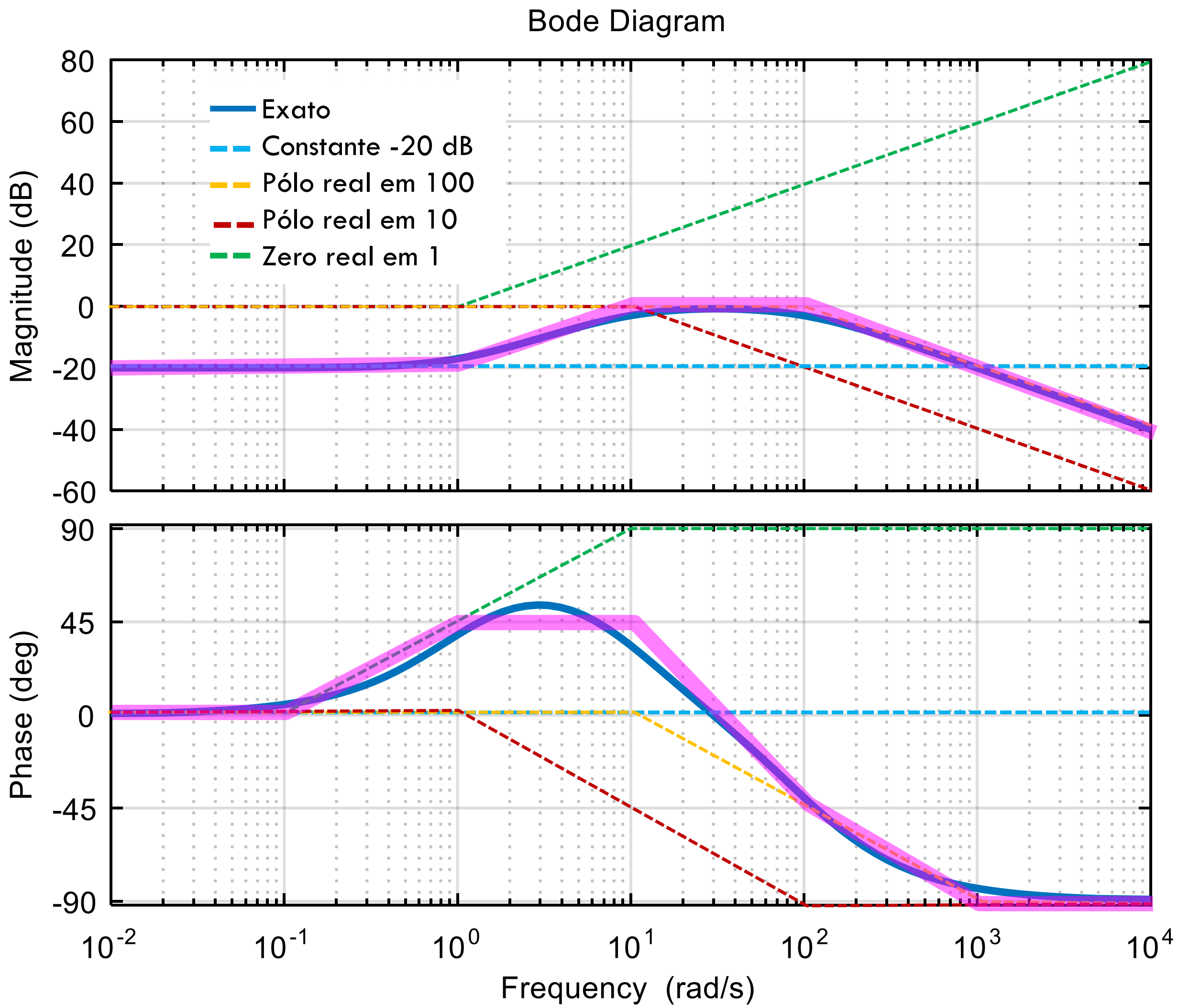
$$G(s) = 100\frac{(s+1)}{(s+10)(s+100)}$$

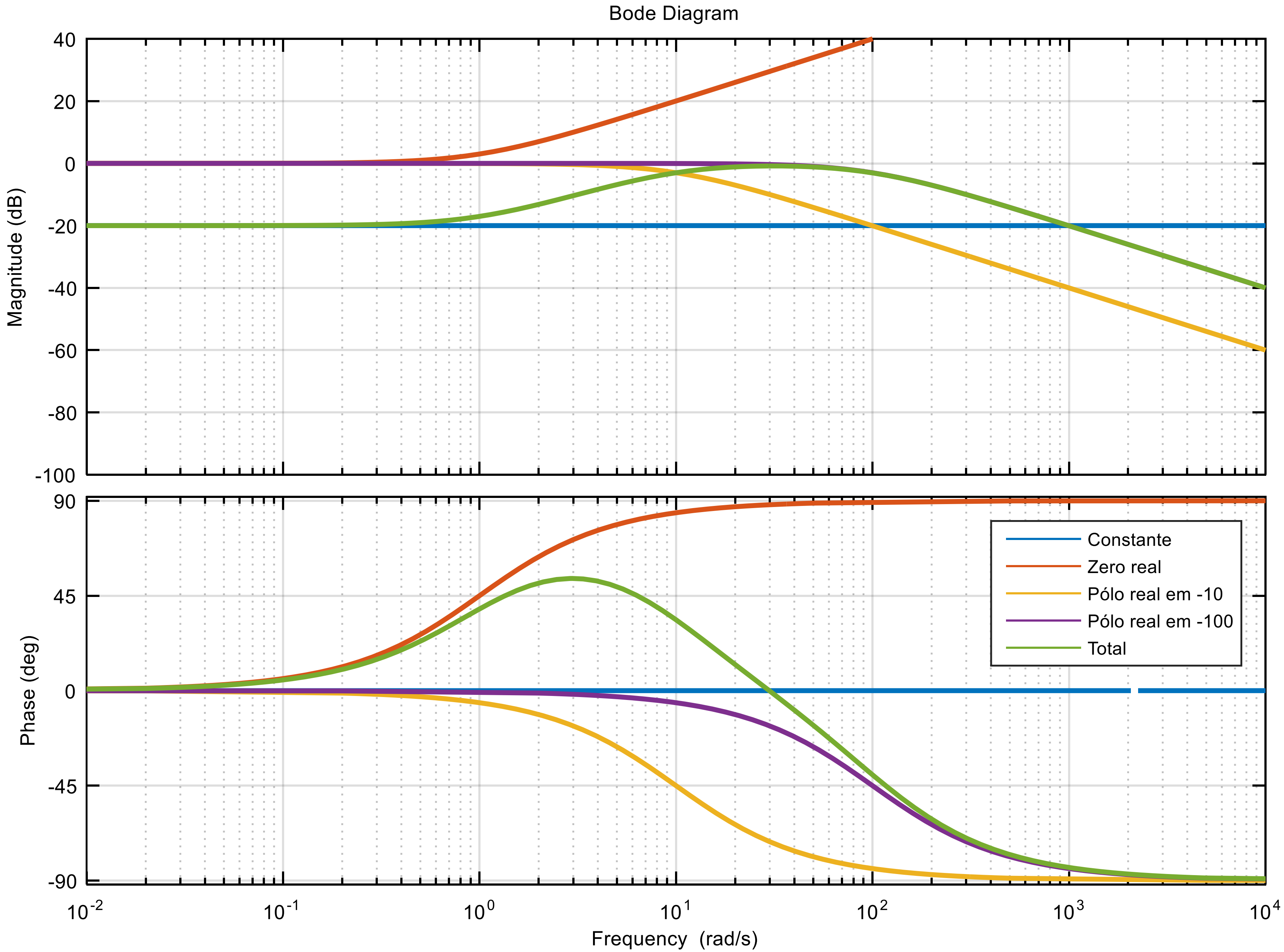
2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos. Existem 7 fatores básicos: constantes, pólos na origem, zeros na origem, pólos reais, zeros reais, pólos complexos conjugados, zeros complexos conjugados. Particularmente nossa função tem,

PASSO 3

$$G(s) = 0{,}1 \frac{s+1}{\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

Fator básico	Parâmetros	Módulo	Fase
Constante	$K = 0{,}1$	$\lvert K \rvert_{dB} = 20\log\lvert 0{,}1 \rvert = -20\,\text{dB}$	$\angle K = 0°$
Zero real	$\tau = 1$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em+20dB/década Conexão das assintóticas em $\boldsymbol{\omega_c = 1\, rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em $0°$ Altas frequências: assintótica em $+90°$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 0{,}1\, rad/s$ até $\omega = 10\, rad/s$
Pólo real	$\tau = \frac{1}{10}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -20dB/década Conexão das assintóticas em $\boldsymbol{\omega_c = 10\, rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em $0°$ Altas frequências: assintótica em $-90°$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 1\, rad/s$ até $\omega = 100\, rad/s$
Pólo real	$\tau = \frac{1}{100}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -20dB/década Conexão das assintóticas em $\boldsymbol{\omega_c = 100\, rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em $0°$ Altas frequências: assintótica em $-90°$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 10\, rad/s$ até $\omega = 1000\, rad/s$


Bode Diagram
Exato
Constante -20 dB
Pólo real em 100
Pólo real em 10
Zero real em 1
Magnitude (dB)
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
Phase (deg)
90
45
0
-45
-90
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
Constante
Zero real
Pólo real em -10
Pólo real em -100
Total

Rules for Drawing Bode Magnitude Plots with Simple Poles and Zeroes

- First determine all the break points (pole and zero locations) and arrange in order of increasing frequency. Choose a frequency range for the plot that encompasses all these points, adding an extra decade of frequency above and below this range.
- Based on the poels and zeroes, make a quick sketch of the expected shape of the Bode plot on a piece of scrap paper. This will help you find the appropriate vertical scales. For a simple pole or zero of the form $(s+a)$ the slope of the uncorrected Bode plot changes at the break point $\omega = a$, increasing by 20 dB/decade for a zero, and decreasing by 20dB/decade for a pole. For a *repeated* pole or zero $(s+a)^r$ the slope changes by $20r$ dB/decade, or 20 dB for each time the pole or zero is repeated.
- To find a reference level we first consider the behavior of the function for low-frequencies ($\omega \to 0$) or high frequencies ($\omega \to \infty$). If the limiting behavior approaches a constant value at these extremes that is a good starting point. Otherwise, we must evaluate the function numerically at some particular frequency, preferably in a region with a constant-value "plateau".
- Once the uncorrected Bode plot is finished, a corrected version can be drawn. For simple/repeated roots the true response passes through a point that is $3r$ dB below the uncorrected curve at the break point, or 3dB for each time the pole is repeated

https://aprender.ead.unb.br/pluginfile.php/258332/mod_resource/content/1/Frequency%20Response.pdf

FATORES QUADRÁTICOS

$$\left[1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm n}$$

FATORES PÓLOS QUADRÁTICOS

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$$

Pólos complexos $0 \leq \zeta < 1$

Produto de dois fatores complexos conjugados.

Pólos duplos $\zeta = 1$

Pólos duplos de primeira ordem.

Pólos reais distintos $\zeta > 1$

Expresso como um produto de dois fatores de primeira ordem com pólos reais.

Casos já cobertos nos fatores básicos anteriores.

FATOR PÓLO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n}$$

O módulo em dB para o fator pólo quadrático é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20n \log \left| \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n} \right| = -20n \log \left| 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n \ \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n\ \log \sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n\log\sqrt{1+0} \cong -20n\log 1 = 0\ \text{dB}$$

Para altas frequências, $\omega \gg \omega_n$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n\log\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} \cong -40n\log\frac{\omega}{\omega_n}\ \text{dB}$$

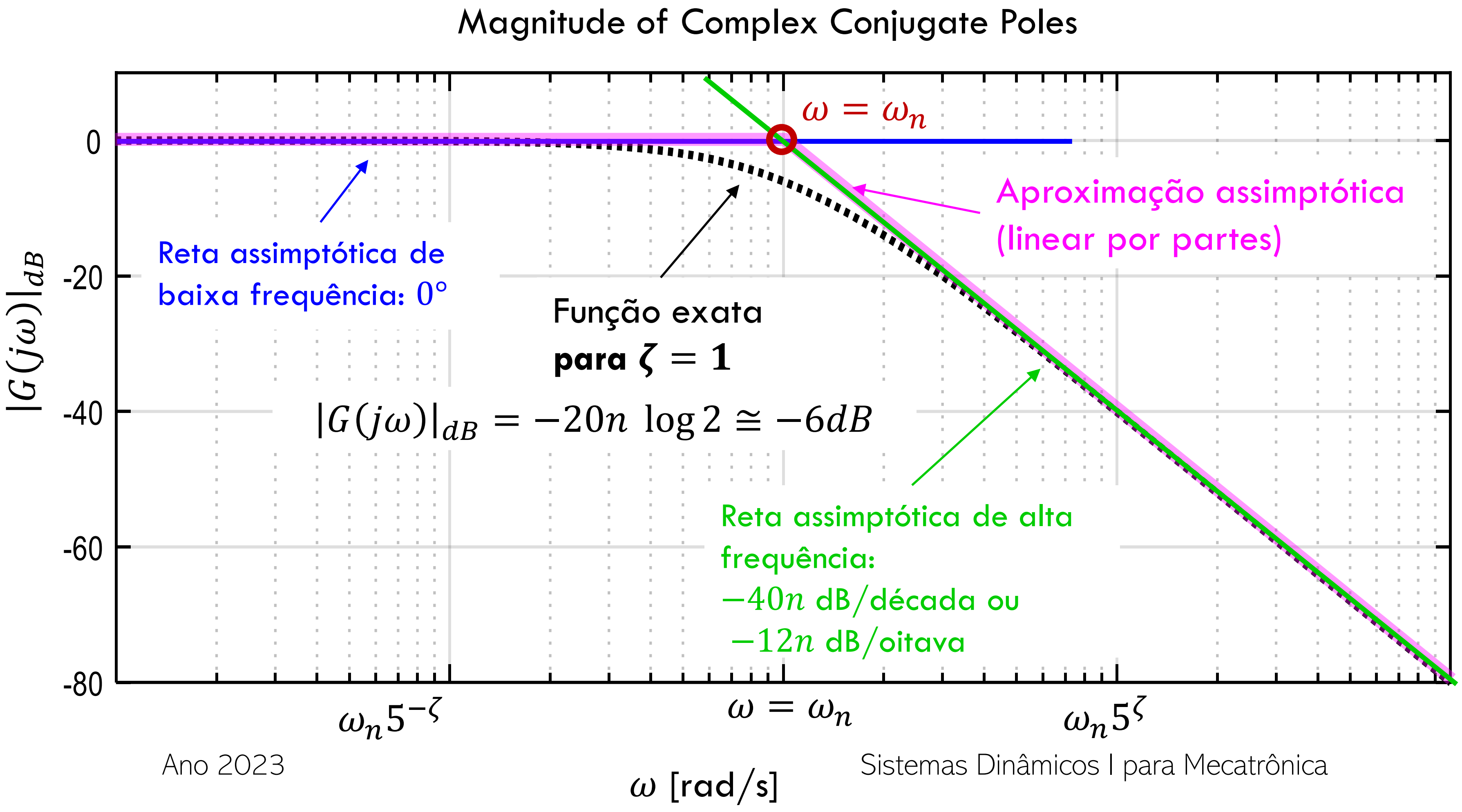
A assintótica de alta frequência cruza a de baixa frequência em $\omega = \omega_n$

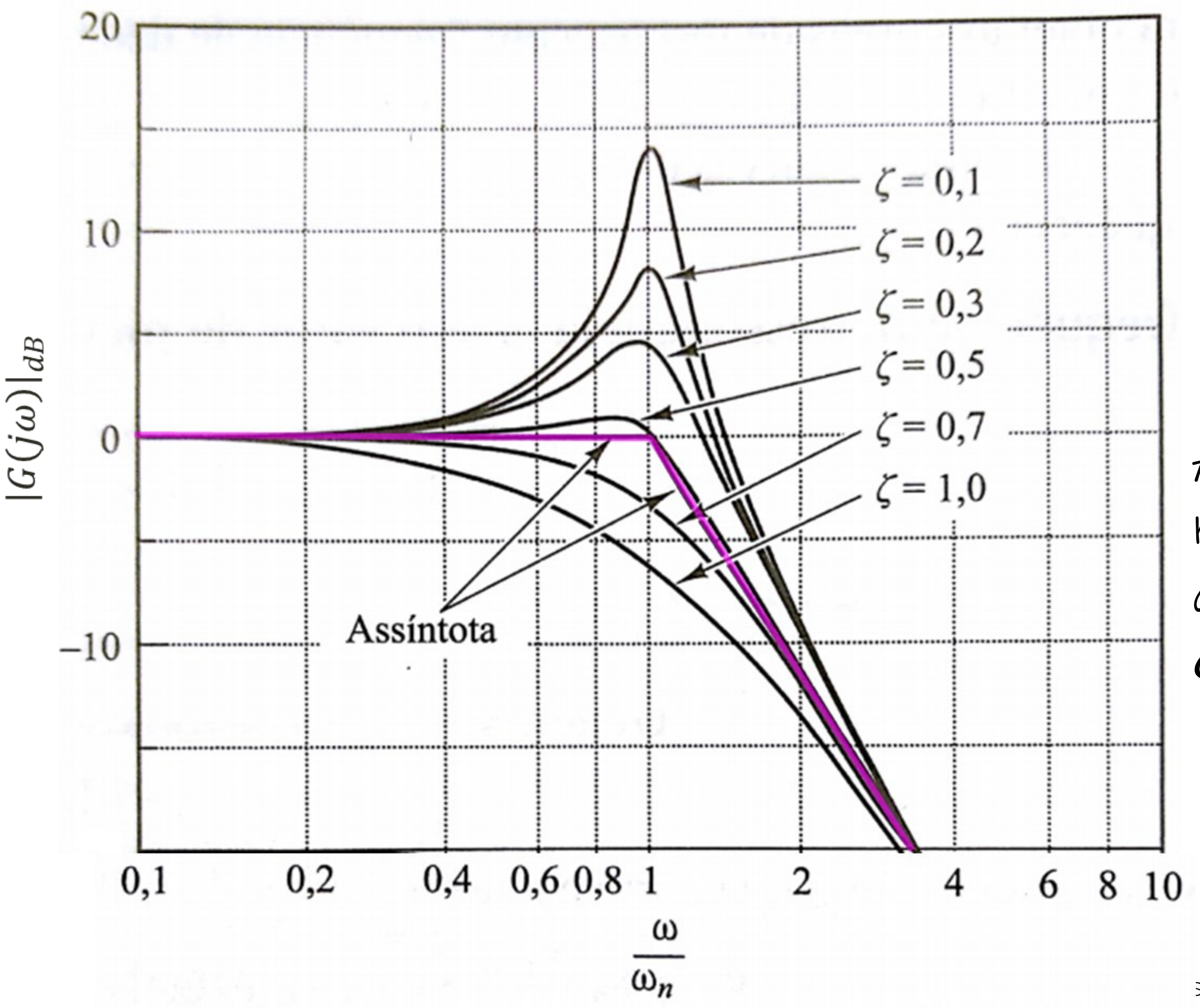
Para $\omega = \omega_n$

$$|G(j\omega_n)|_{dB} = -20n\log 2\zeta = 0\ \text{dB}$$

Para o caso particular $\zeta = 1$

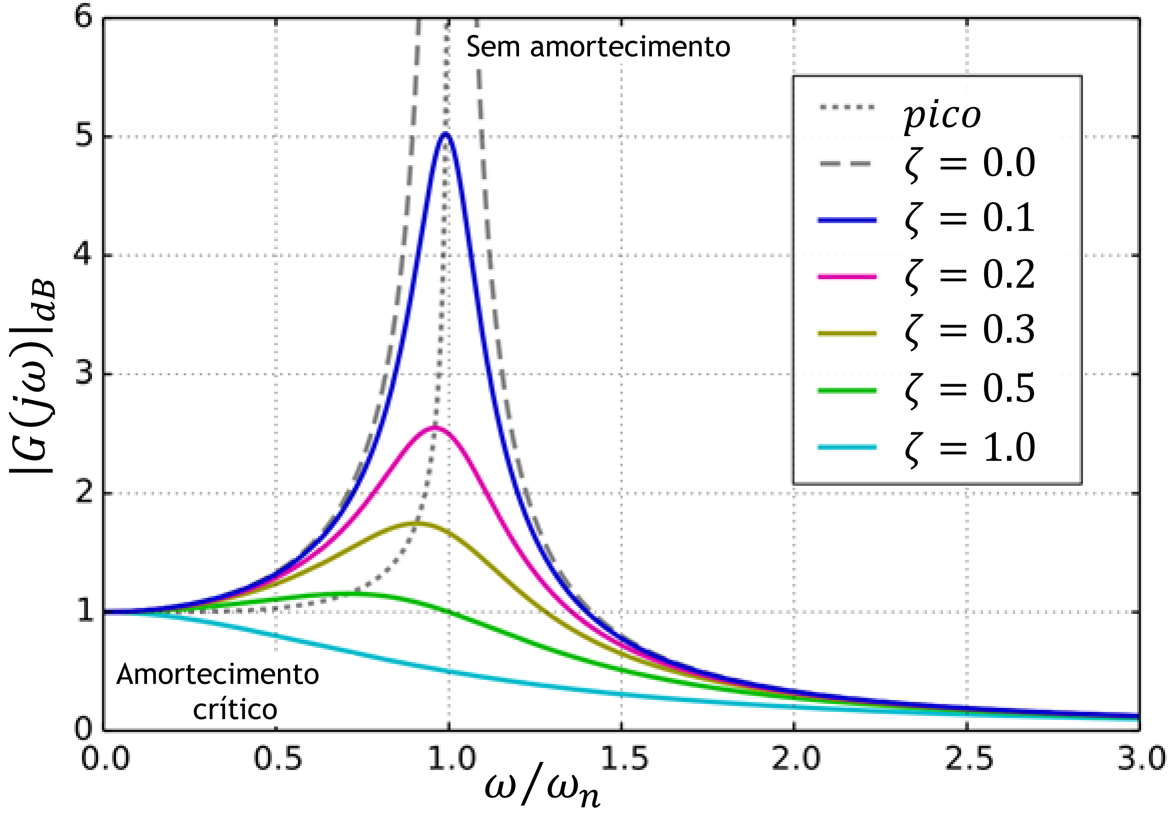
Nas proximidades da frequência natural ω_n as assintóticas apenas aproximam da curva real de $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$, apresentando um erro máximo de $\approx$ $\boldsymbol{6n}$ **dB** que ocorre exatamente na frequência de corte ω_n , o ponto onde as duas assintóticas se encontram.





Amplitude do erro em relação às assintóticas dependerá do valor de ζ.

PICO É NA FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA!



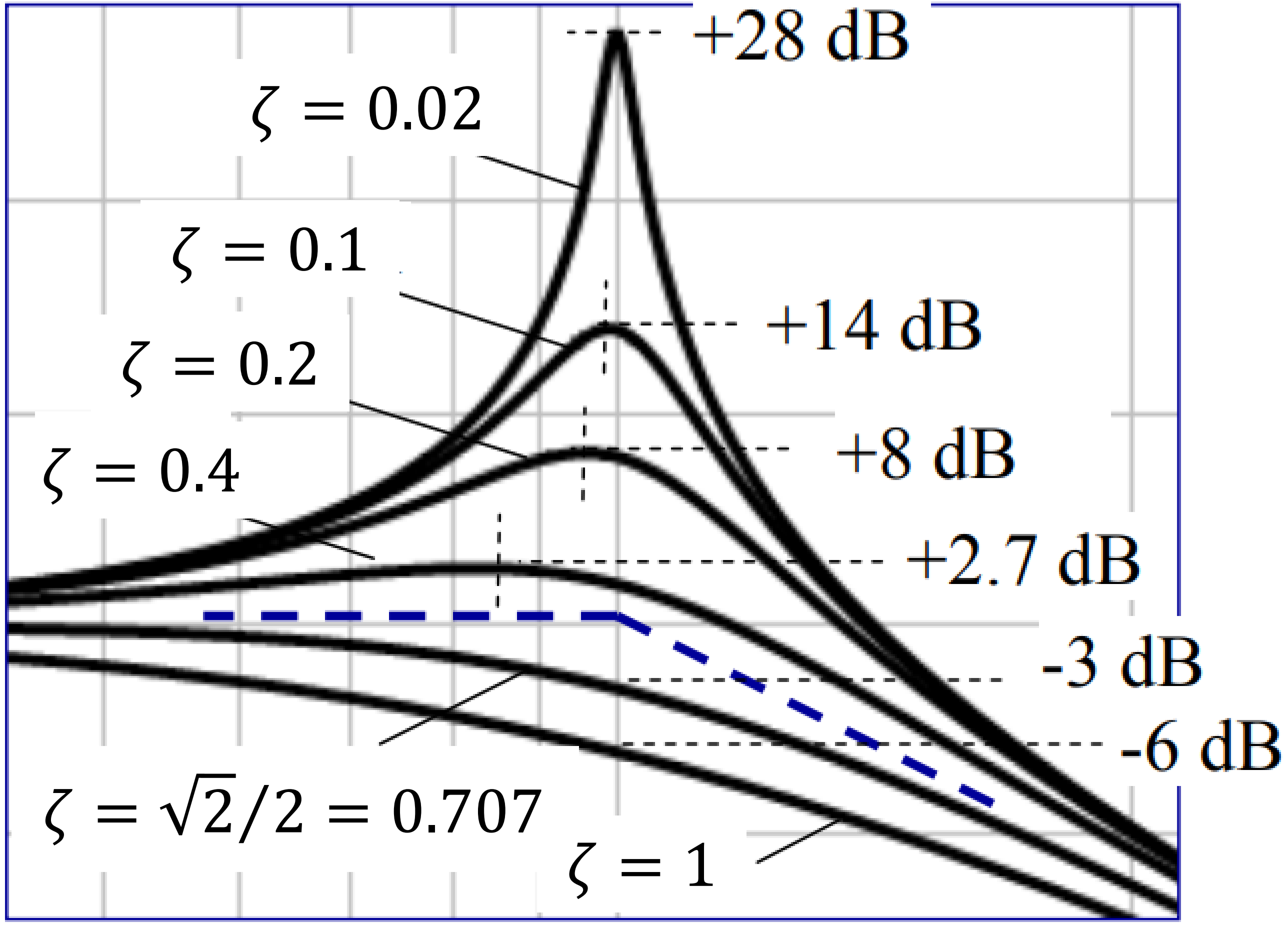
$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n\ \log\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n\ \log\sqrt{\left[1-\left(\sqrt{1-2\zeta^2}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n\ \log\sqrt{(2\zeta^2)^2+4\zeta^2(1-2\zeta^2)}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n\ \log\sqrt{4\zeta^4+4\zeta^2-8\zeta^4} = -20n\ \log 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

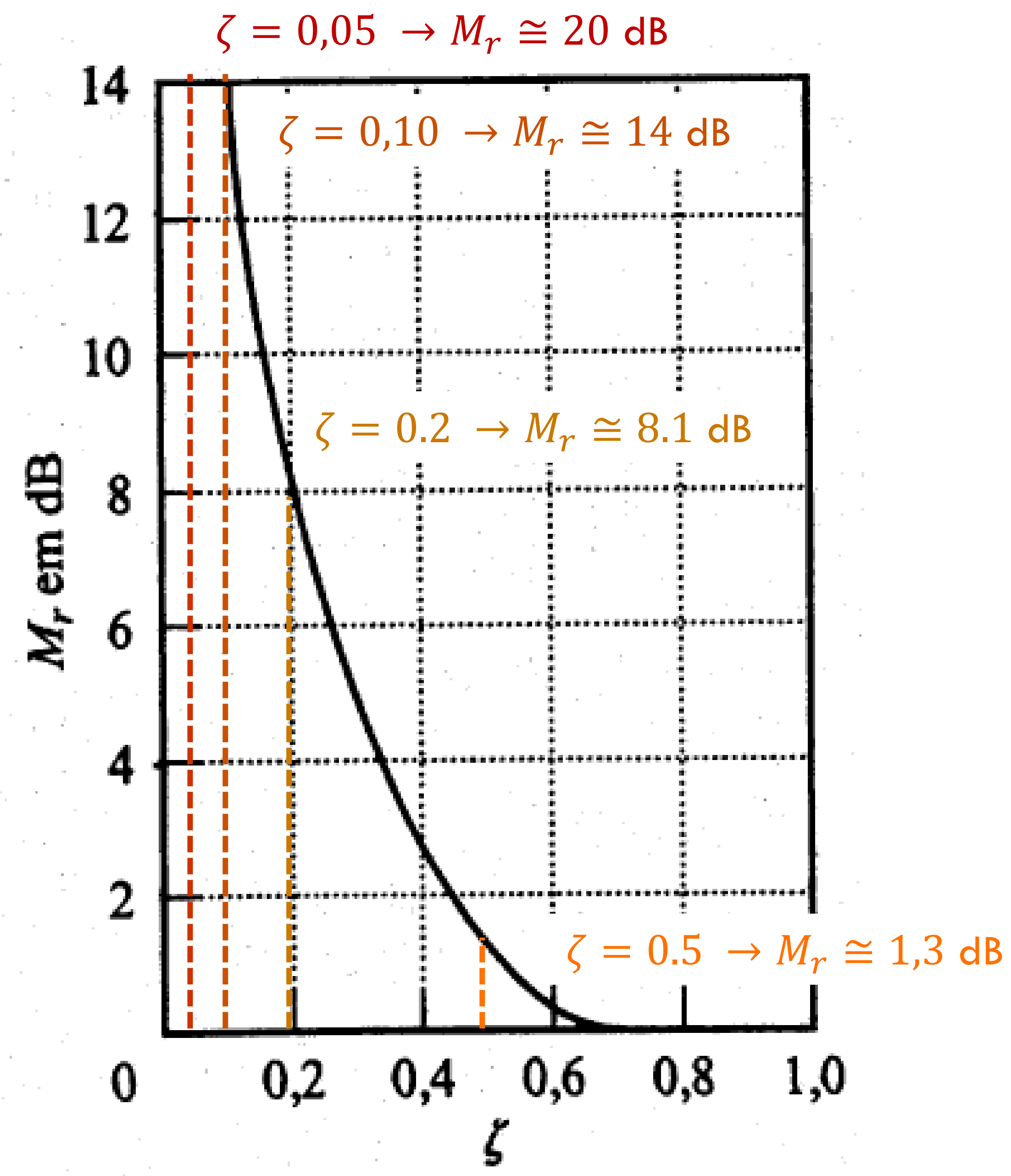
A medida que o valor de ζ diminui, as curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ vão ficando mais altas.
Para $\zeta > \sqrt{2}/2$ surgem picos, que vão se tornando cada vez mais altos a medida que $\zeta \to 0$.
Esses picos ocorrem nas chamadas frequências de ressonância $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$



$$|G(j\omega_n)|_{dB} = -20 \log 2\zeta$$

$$|G(j\omega_r)|_{dB} = -20 \log \left[2\zeta\sqrt{(1-\zeta^2)}\right]$$

ζ	$\lvert G(j\omega_n)\rvert_{dB}$	ω_r / ω_n	$\lvert G(j\omega_r)\rvert_{dB}$
0.02	$+28\ dB$	≈ 1	$+28\ dB$
0.05	$+20\ dB$	0.997	$+20\ dB$
0.1	$+14\ dB$	0.990	$+14\ dB$
0.2	$+8\ dB$	0.959	$+8.1\ dB$
0.4	$+1.9 dB$	0.825	$+2.7\ dB$
0.5	$0\ dB$	0.707	$+1.3\ dB$
$\sqrt{2}/2 = 0.707$	$-3\ dB$	0	$0\ dB$
1	$-6\ dB$	–	–



$$|G(j\omega_r)|_{dB} = -20 \log 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

FASE DO FATOR PÓLO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n}$$

A fase para o fator pólo quadrático é:

$$\angle G(j\omega) = \angle\left(\frac{1}{1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)^n = -\angle\left(1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^n$$

$$\angle G(j\omega) = -n\,\mathrm{atan}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}}\right] = -\,n\,\mathrm{atan}\left[\frac{2\zeta\omega_n\omega}{{\omega_n}^2 - \omega^2}\right]$$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan}\left[\frac{2\zeta\omega_n\omega}{{\omega_n}^2 - \omega^2}\right]$$

Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} 0 = 0°$$

Para $\omega = \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} \infty = -90°$$

Em $\omega \gg \omega_n$

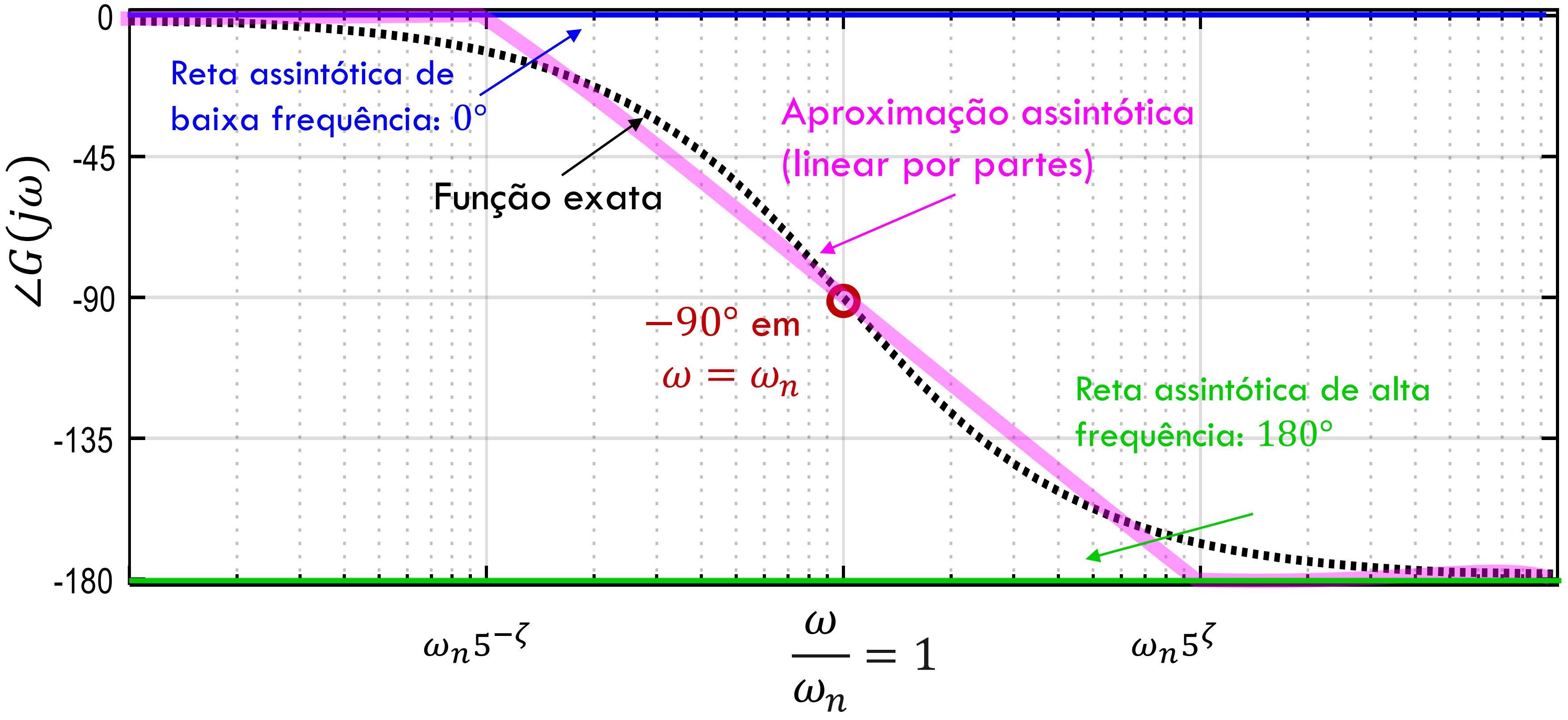
$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} 0 = -180°$$

$$\omega_n 5^{-\zeta} < \omega < \omega_n 5^{\zeta}$$

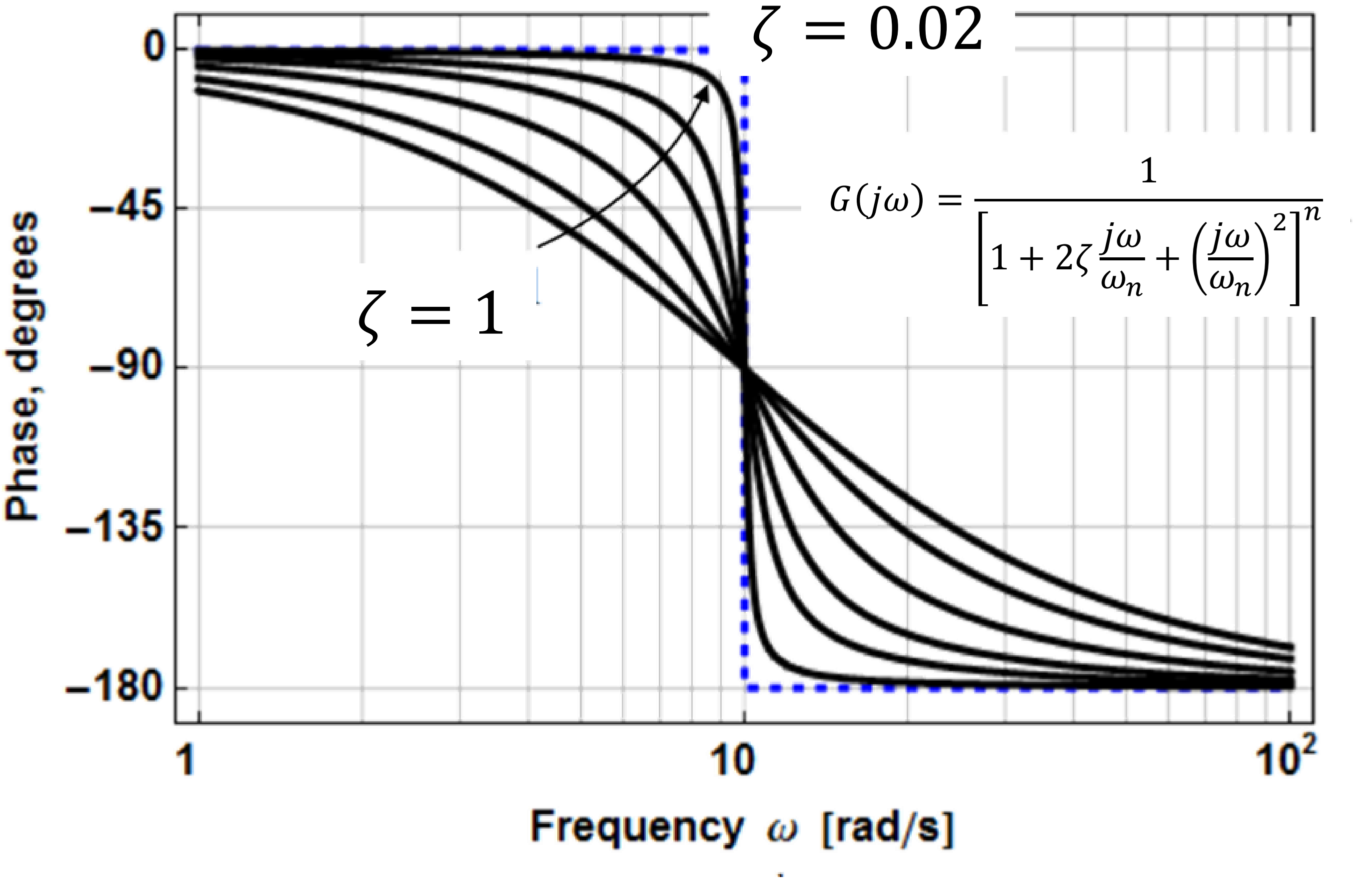
$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan}\left[\frac{2\zeta\omega_n\omega}{{\omega_n}^2 - \omega^2}\right]$$

O diagrama de Bode de fase se torna mais íngreme (com declive mais acentuado) a medida que $\zeta \to 0$

Angle of Complex Conjugate Poles



$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan}\left[\frac{2\zeta\omega_n\omega}{{\omega_n}^2 - \omega^2}\right]$$



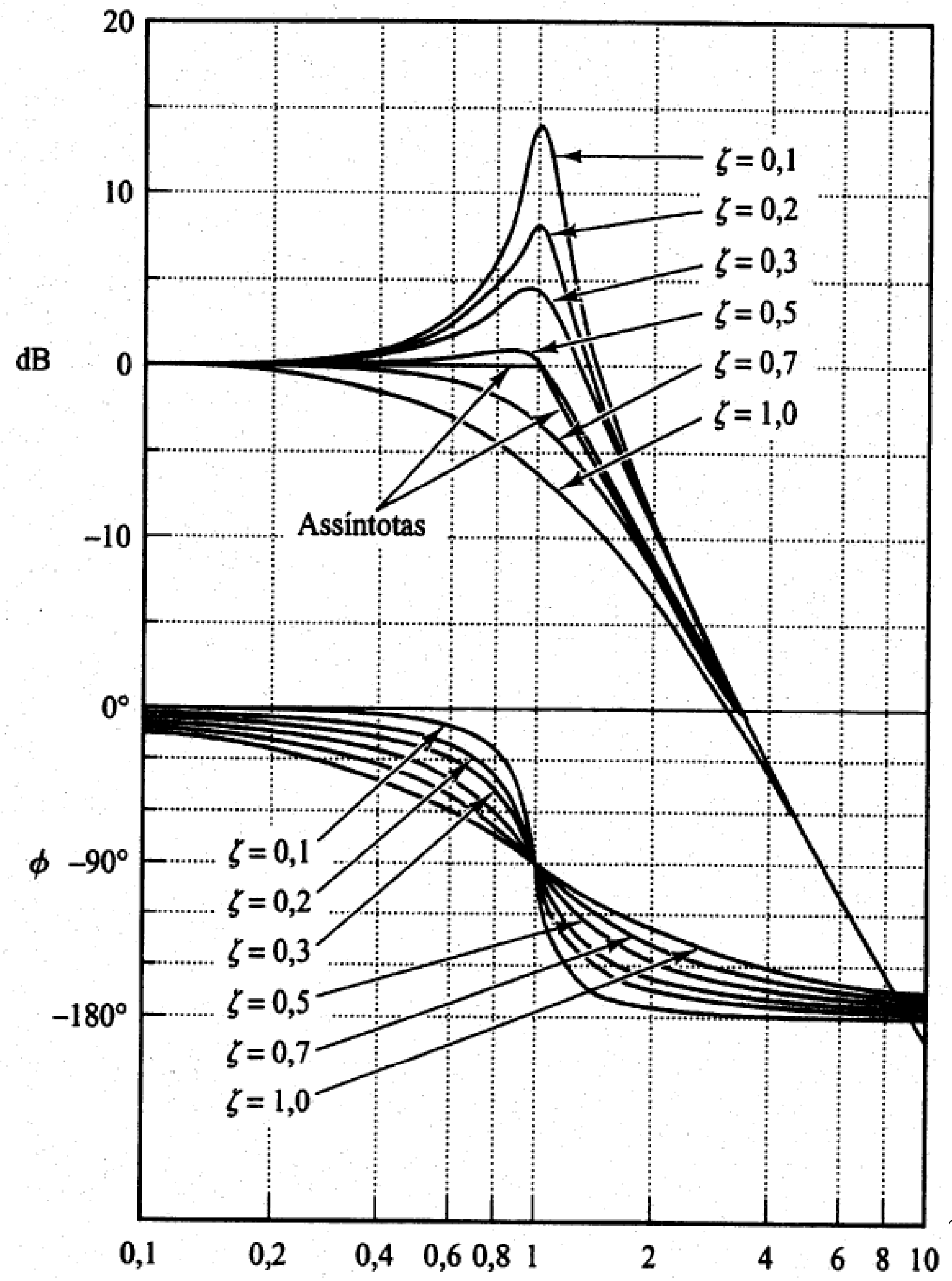
ζ	$\mathbf{0.1}\omega_n$	$\mathbf{0.2}\omega_n$	$\mathbf{0.5}\omega_n$
0.02	-0.2^o	-0.5^o	-1.5^o
0.05	-0.6^o	-1.2^o	-3.8^o
0.1	-1.2^o	-2.4^o	-7.6^o
0.2	-2.3^o	-4.8^o	-15^o
0.3	-3.5^o	-7.1^o	-22^o
0.4	-4.6^o	-9.5^o	-28^o
0.5	-5.8^o	-12^o	-34^o
$\sqrt{2}/2 = 0.707$	-8.1^o	-16^o	-43^o
1	-11.4^o	-23^o	-53^o

IMPORTANTE VERIFICAR QUE...

As aproximações assintóticas para as curvas de resposta em frequência não são precisas para um fator com baixos valores de ζ.

O módulo e a fase do fator quadrático dependem tanto da freqüência de canto ω_n como do coeficiente de amortecimento ζ.

Raízes complexas estão associadas a $0 \leq \zeta < 1$. Para $\zeta \geq 1$ as raízes são reais e, portanto, correspondem a pólos ou zeros reais que já consideramos.

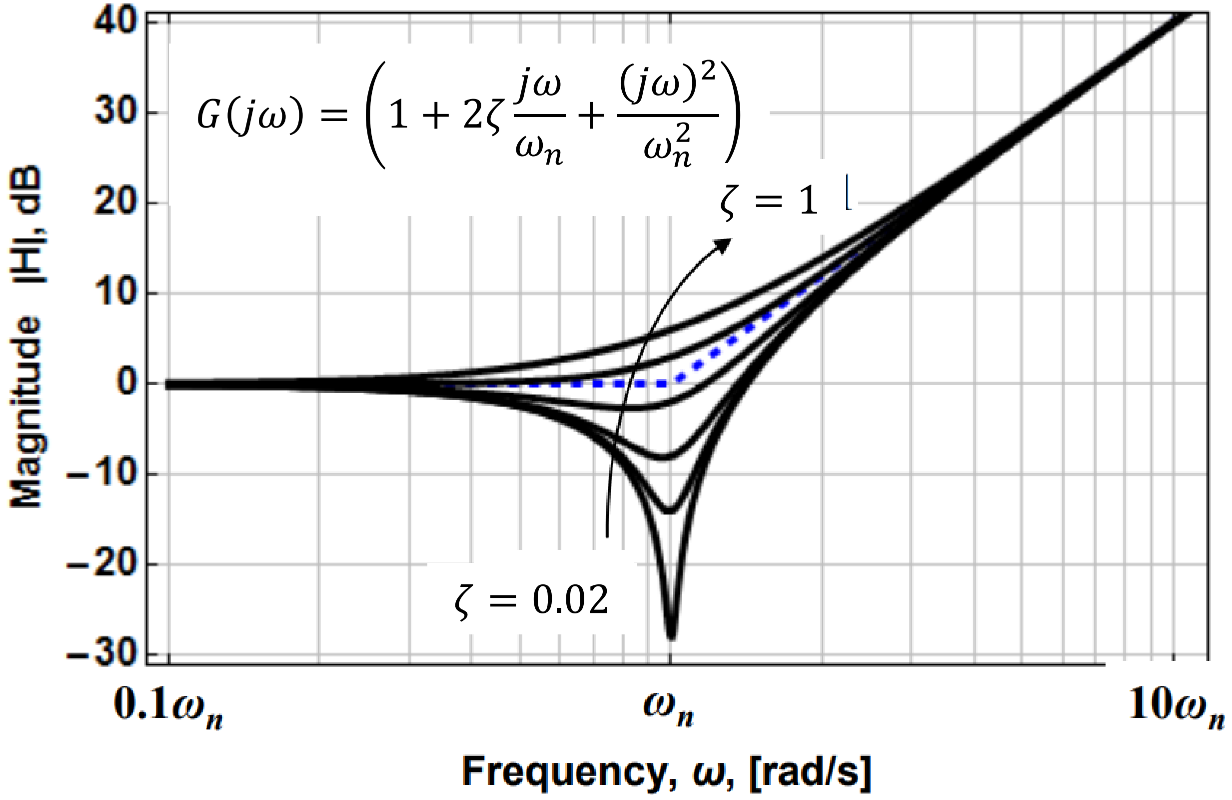

20
10
dB
0
−10
0°
ϕ
−90°
−180°
$\zeta = 0{,}1$
$\zeta = 0{,}2$
$\zeta = 0{,}3$
$\zeta = 0{,}5$
$\zeta = 0{,}7$
$\zeta = 1{,}0$
Assíntotas
0,1
0,2
0,4
0,6
0,8
1
2
4
6
8
10

FATOR ZERO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n$$

Curvas de módulo e fase para zeros quadráticos podem ser obtidas invertendo-se o sinal das curvas de módulo e fase dos fatores pólos quadráticos.

As principais diferenças são que os picos de ressonância são para baixo em vez de para cima e as curvas de fase vão de $0°$ a $180°$ em vez de de $0°$ a $-180°$



$G(j\omega) = \left(1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)$
$\zeta = 1$
$\zeta = 0.02$
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
Magnitude |H|, dB
$0.1\omega_n$
ω_n
$10\omega_n$
Frequency, ω, [rad/s]

PROCEDIMENTOS GERAL PARA A CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE PARA POLOS/ZEROS COMPLEXOS

Reescreva a função de transferência como produto de fatores básicos;

Extraia a frequência de canto ω_n e o fator de amortecimento ζ;

Trace as curvas assintóticas com módulo em dB. Se as raízes complexas estão no numerador, a inclinação aumenta em 40dB/década depois da frequência de canto. Se as raízes complexas estiverem no denominador, a inclinação diminui em 40 dB/década.

Corrija com o valor de pico e sua localização;

Trace as curvas assintóticas do ângulo de fase.

DIAGRAMA DE BODE PASSO A PASSO

Vamos desenhar passo a passo o Diagrama de Bode para seguinte função de transferência,

$$H(s) = 30\frac{s+10}{s^2+3s+50}$$

PASSOS 1 E 2

1. Reescreva a função de transferência na forma adequada.

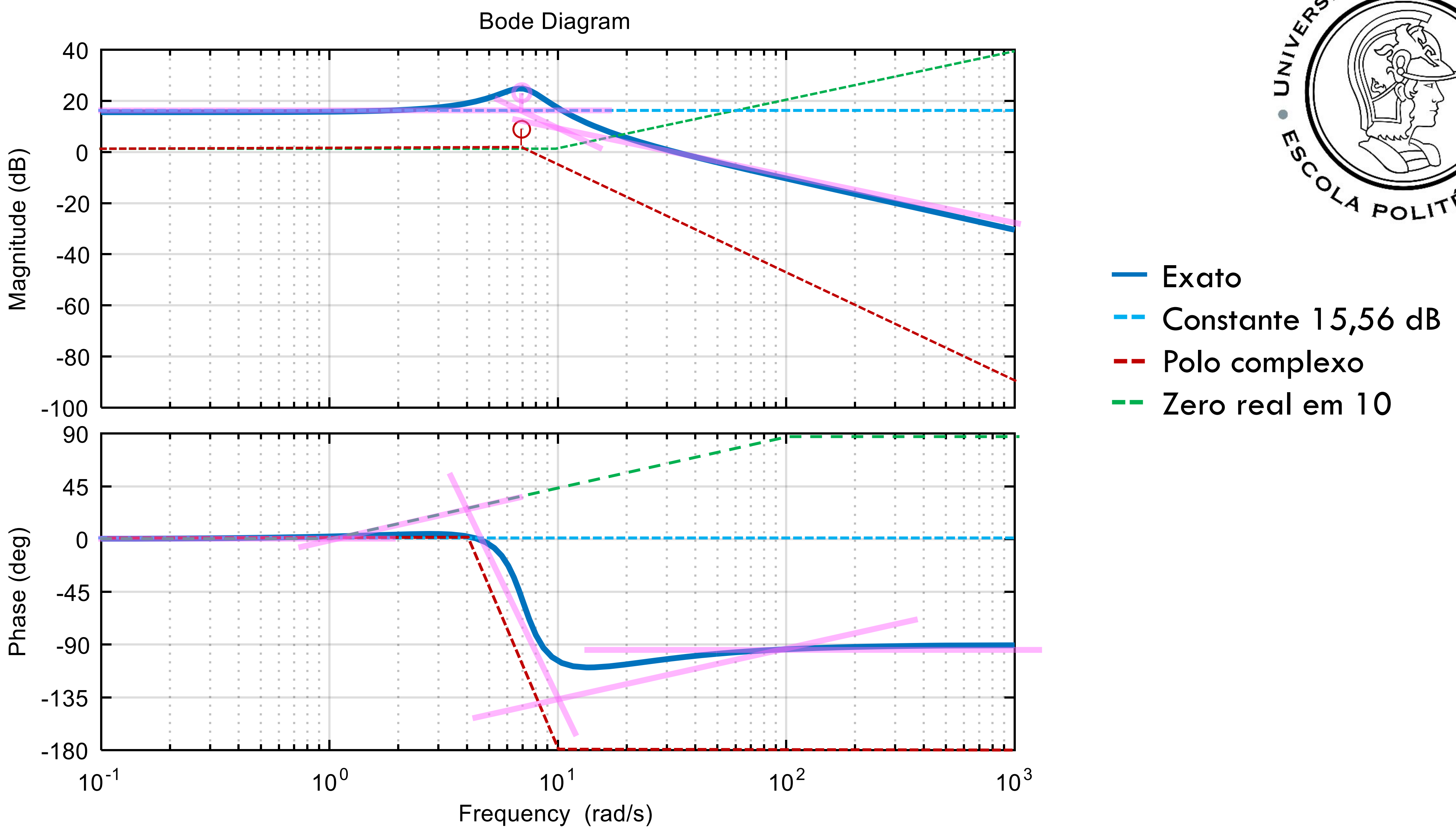
$$H(s) = 6\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s^2}{50}+\frac{3}{50}s+1}$$

2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos.
   - uma constante 6,
   - um zero real $\frac{s}{10}+1$, constante de tempo $\tau = 1/10$
   - um par de pólos complexos conjugados de $\frac{s^2}{50}+\frac{3}{50}s+1$ em

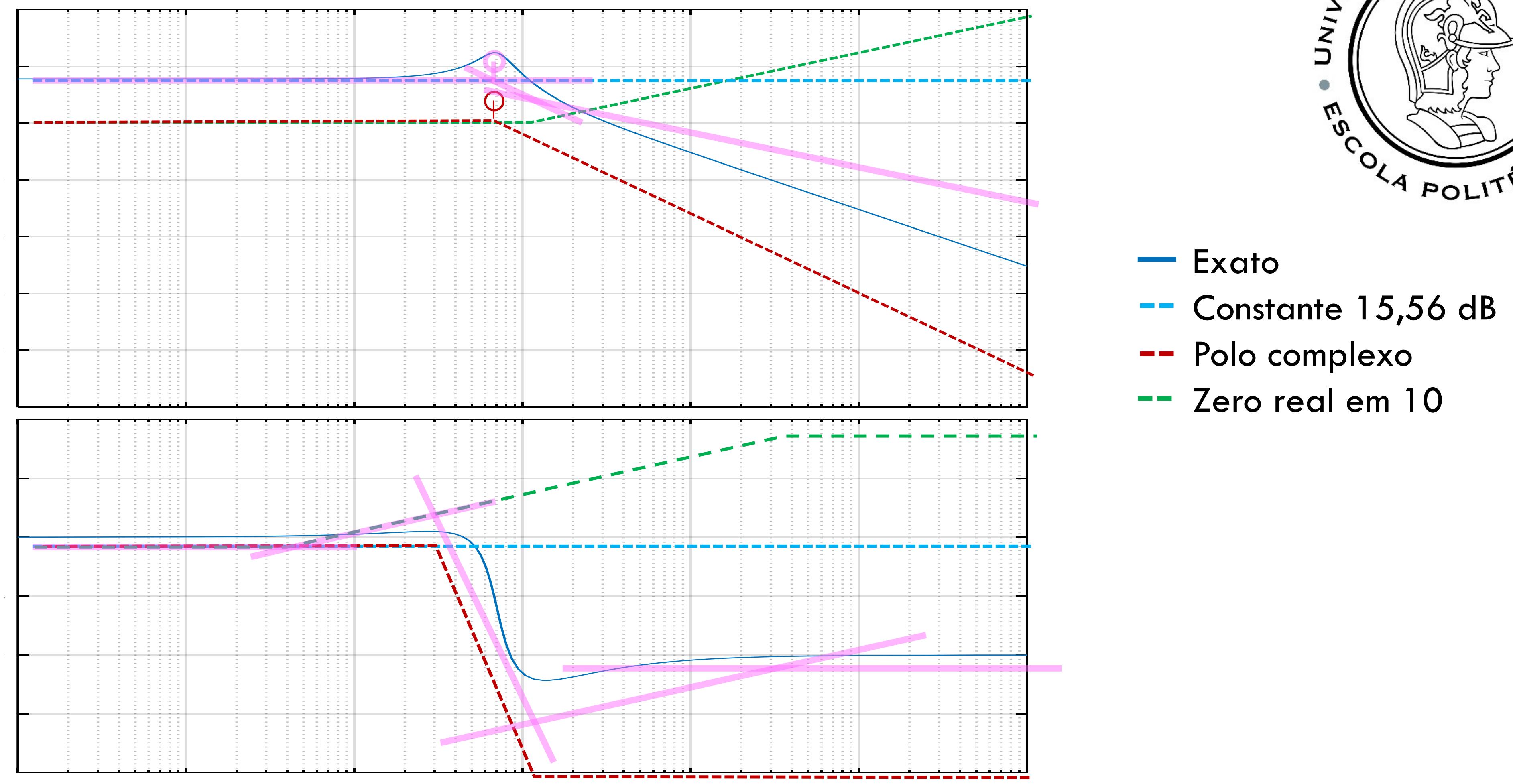
$s = -1.5 \pm j6.9.$ $\omega_n = 7{,}07$ e $\zeta = 0{,}21.$

PASSO 3

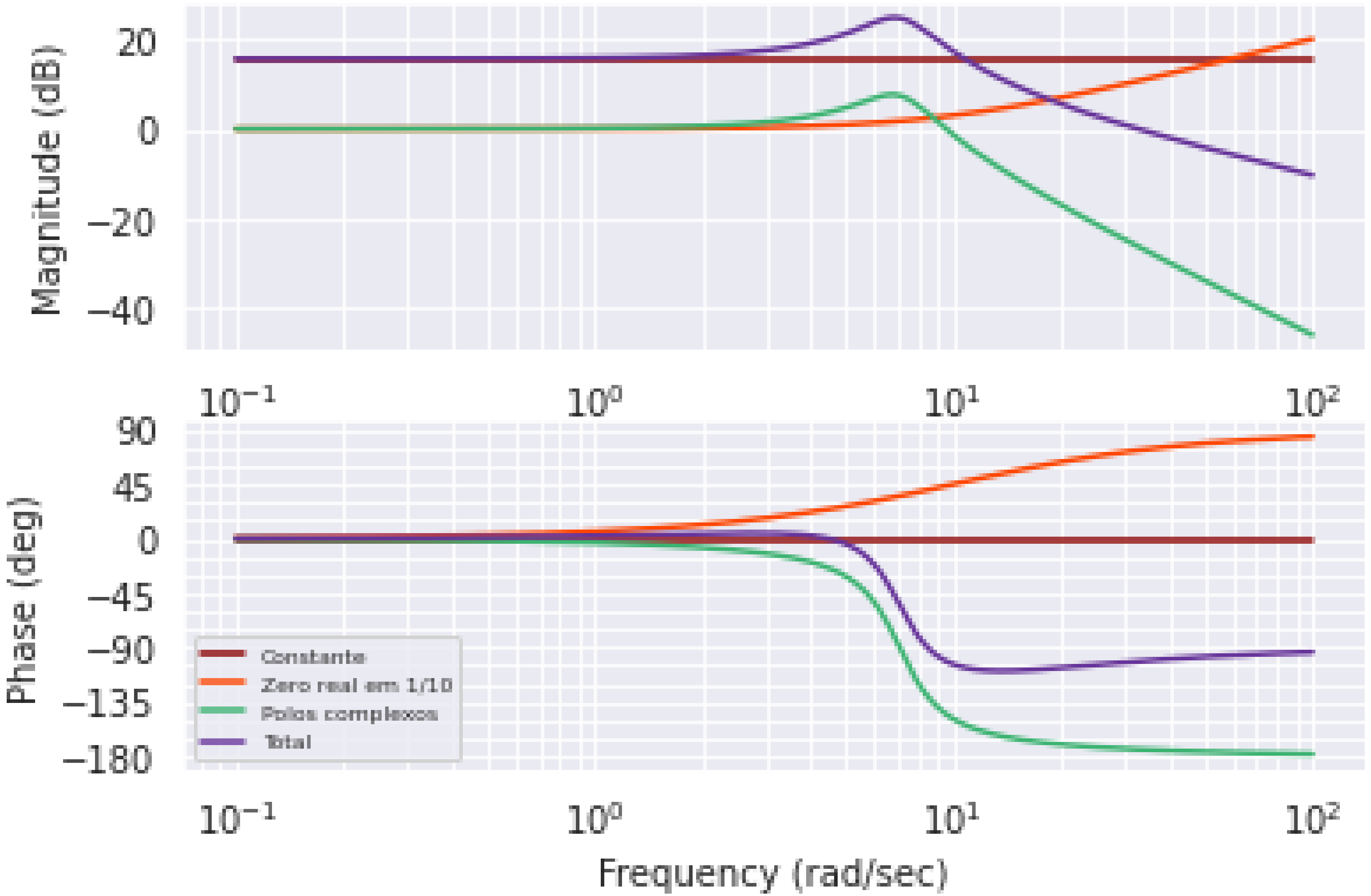
Fator básico	Parâmetros	Módulo	Fase
Constante	$K = 6$	$\lvert K \rvert_{dB} = 20 \log\lvert 6 \rvert = 15{,}56\,\mathrm{dB}$	$\angle K = 0°$
Zero real	$\tau = \frac{1}{10}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em +20dB/década Conexão das assintóticas em $\boldsymbol{\omega_c} = \mathbf{10}\, rad/s$	Baixas frequências: assintótica em $0°$ Altas frequências: assintótica em $+90°$ Conexão linear das assintóticas de $\omega =$ $1\, rad/s$ até $\omega = 100\, rad/s$
Pólos complexos conjugados	$\omega_n = 7{,}07$ $\zeta = 0{,}21$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -40dB/década Conexão das assintóticas em $\boldsymbol{\omega_n} = \mathbf{7{,}07}\, rad/s$ Desenho do pico em $\omega_r = 7{,}07\sqrt{1 - 2 \times 0{,}21^2} = \mathbf{6.75}$ rad/s, com amplitude $\lvert G(\omega) \rvert_{dB} =$ $-20 \log 0{,}42\sqrt{1 - 0{,}21^2} = \mathbf{7{,}7}\, dB$	Baixas frequências: assintótica em $0°$ Altas frequências: assintótica em $-180°$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 7{,}07 \times 5^{-0.21} = 5{,}04\, rad/s$ até $\omega = 7{,}07 \times 5^{0.21} = 9{,}91\, rad/s$



Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
Exato
Constante 15,56 dB
Polo complexo
Zero real em 10



Exato
Constante 15,56 dB
Polo complexo
Zero real em 10



Magnitude (dB)
20
0
−20
−40
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Phase (deg)
90
45
0
−45
−90
−135
−180
Constante
Zero real em 1/10
Polos complexos
Total
Frequency (rad/sec)

ATRASO NO TRANSPORTE

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

O módulo é sempre igual à unidade,

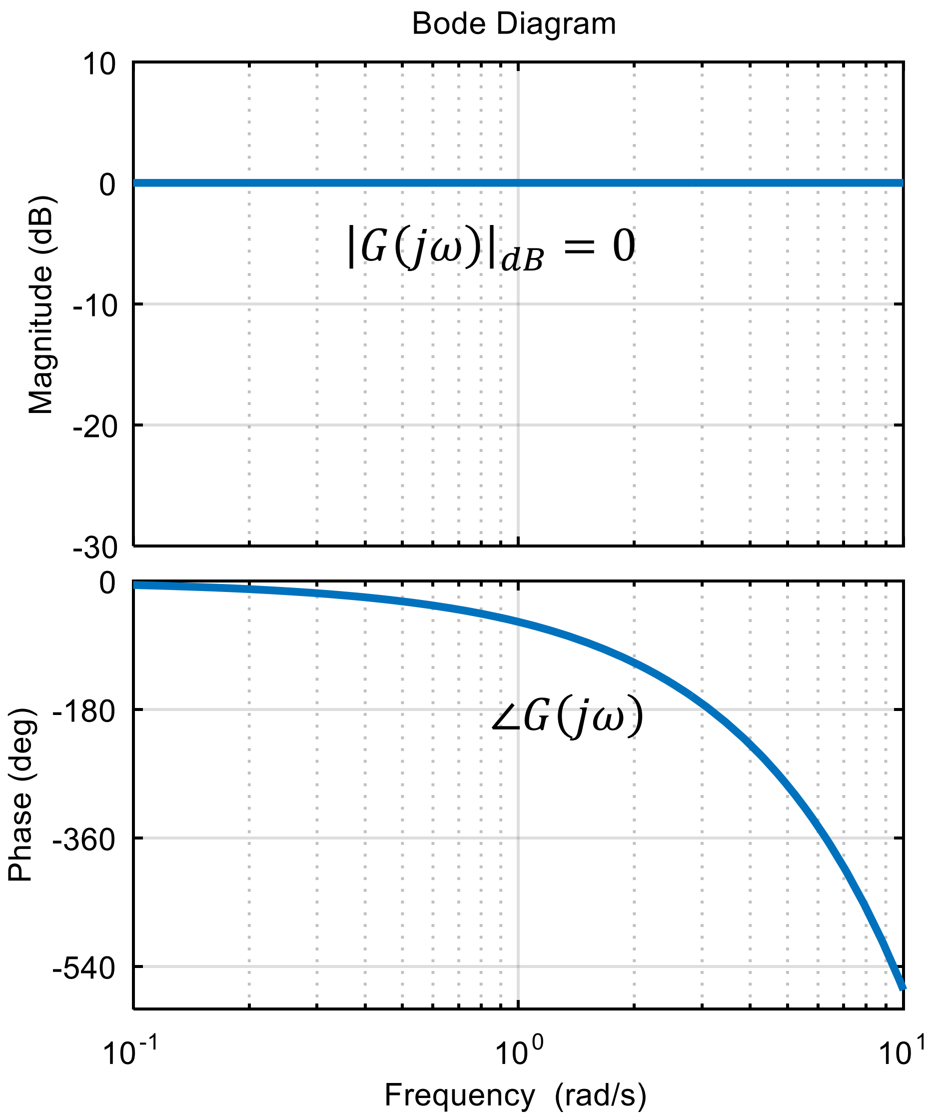
$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$

Portanto, o módulo em dB do retardo de transporte $e^{-j\omega T}$ é $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ dB.

O ângulo de fase é

$$\angle G(j\omega) = -\omega T \text{ (radianos)}$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{180}{\pi}\ \omega T \text{ (graus)}$$



Bode Diagram
10
0
-10
-20
-30
Magnitude (dB)
$|G(j\omega)|_{dB} = 0$
0
-180
-360
-540
Phase (deg)
$\angle G(j\omega)$
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency (rad/s)

EXEMPLO

Construa o diagrama de Bode da seguinte função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T}}{1 + j\omega\tau}$$

O módulo em dB

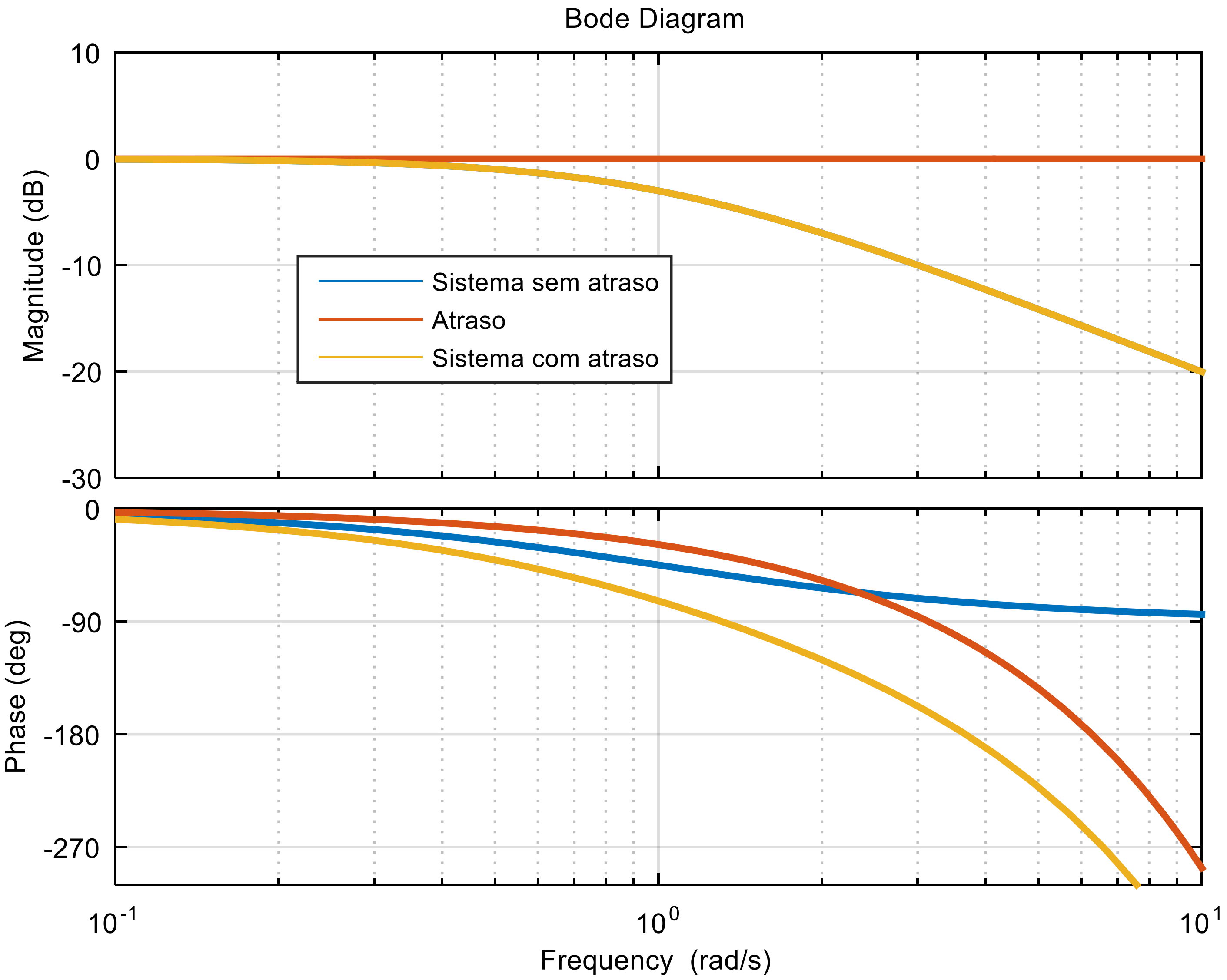
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\ \log\left|e^{-j\omega T}\right| - 20\ \log\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right|$$

$$= 0 - 20\ \log\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right|$$

O ângulo de fase é

$$\angle G(j\omega) = -\omega T - \operatorname{atan}\omega\tau$$

Portanto, basta combinar o efeito do retardo, ie, um decréscimo em fase...



$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T}}{1 + j\omega\tau}$$

$$T = 0{,}5$$
$$\tau = 1$$

EXEMPLO

Construa o diagrama de Bode para a função de transferência,

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

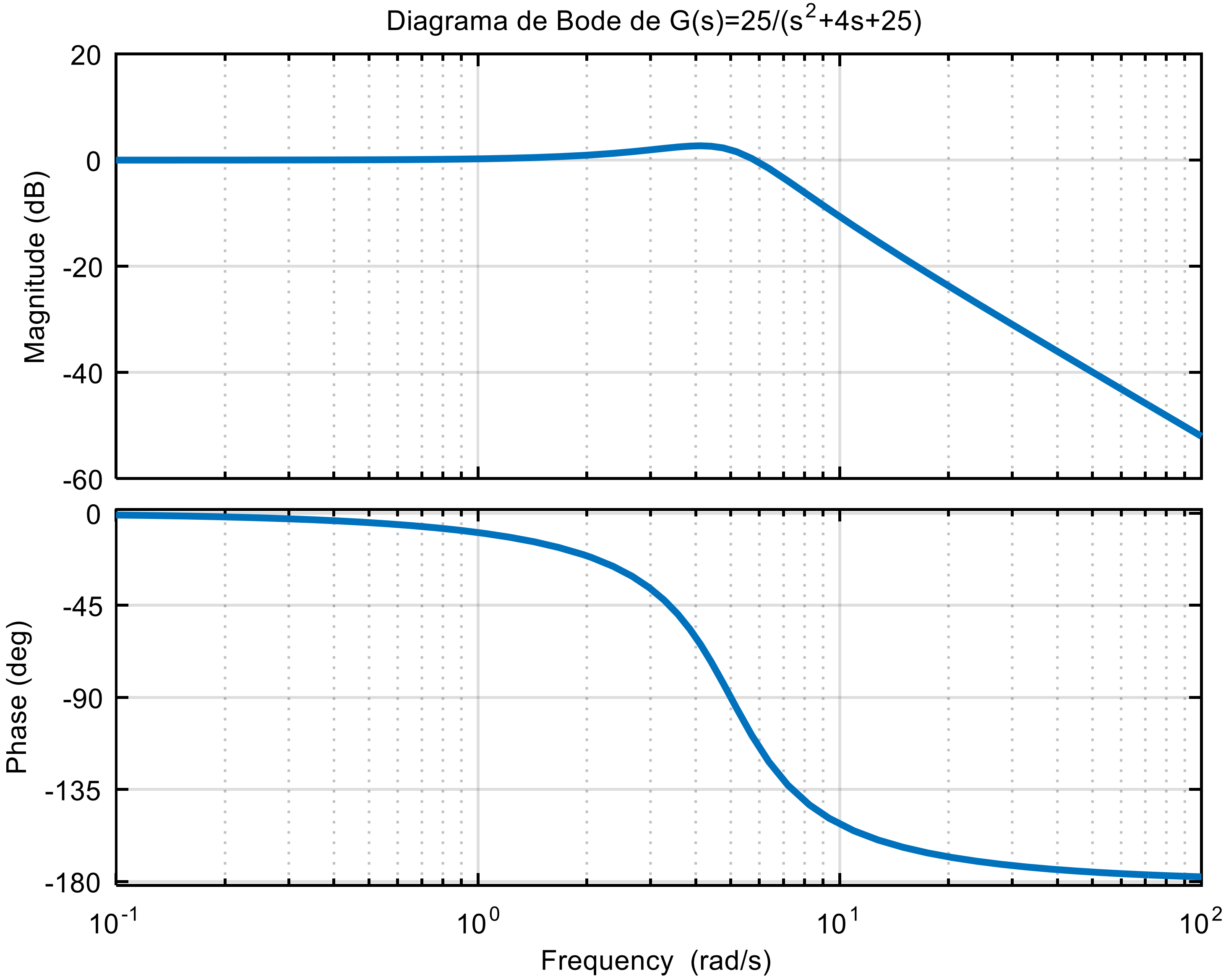


Diagrama de Bode de G(s)=25/(s^2+4s+25)
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/s)

EXEMPLO

Desenhe o diagrama de Bode para função de transferência abaixo (Ogata, ex. 7.3)

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

PASSOS 1 E 2

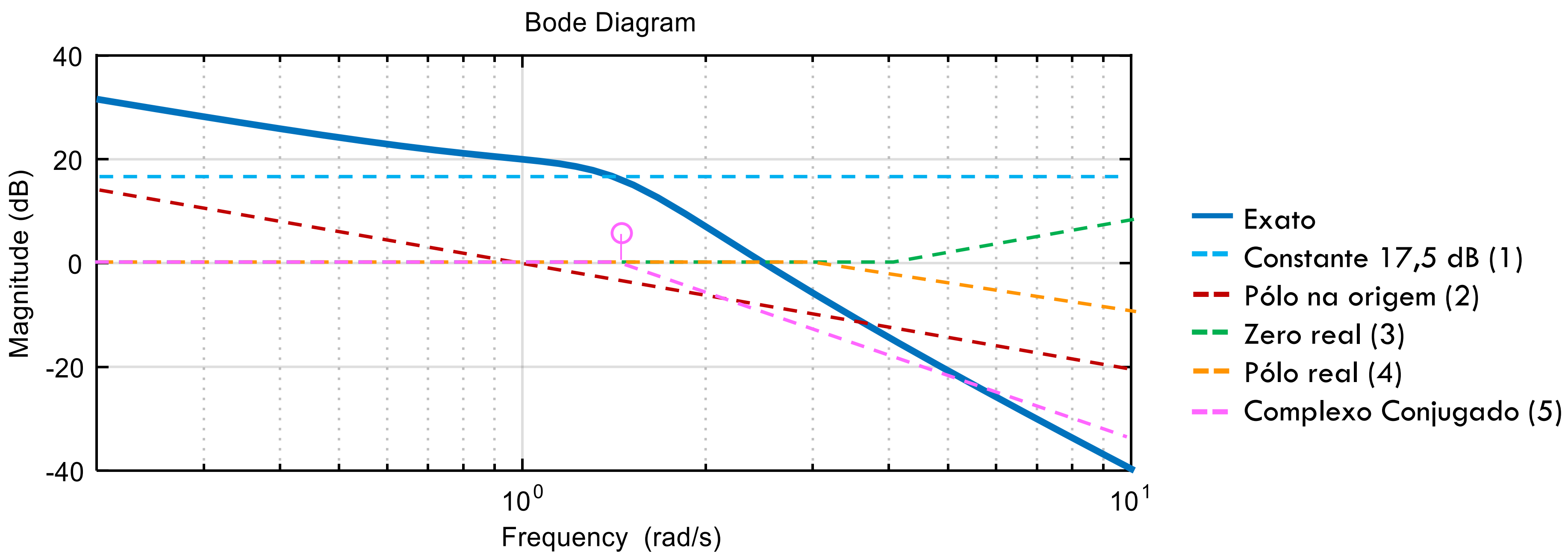
1. Reescreva a função de transferência na forma adequada.

$$G(j\omega) = \frac{7{,}5\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)\left(\frac{(j\omega)^2}{2}+\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$

2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos.
   - Constante $K = 7{,}5$
   - Polo na origem $(j\omega)^{-1}$
   - Zero real $\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)$ Pólo real $\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^{-1}$
   - Par de polos complexos conjugados $\left[1+\frac{j\omega}{2}+\frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$

PASSO 3

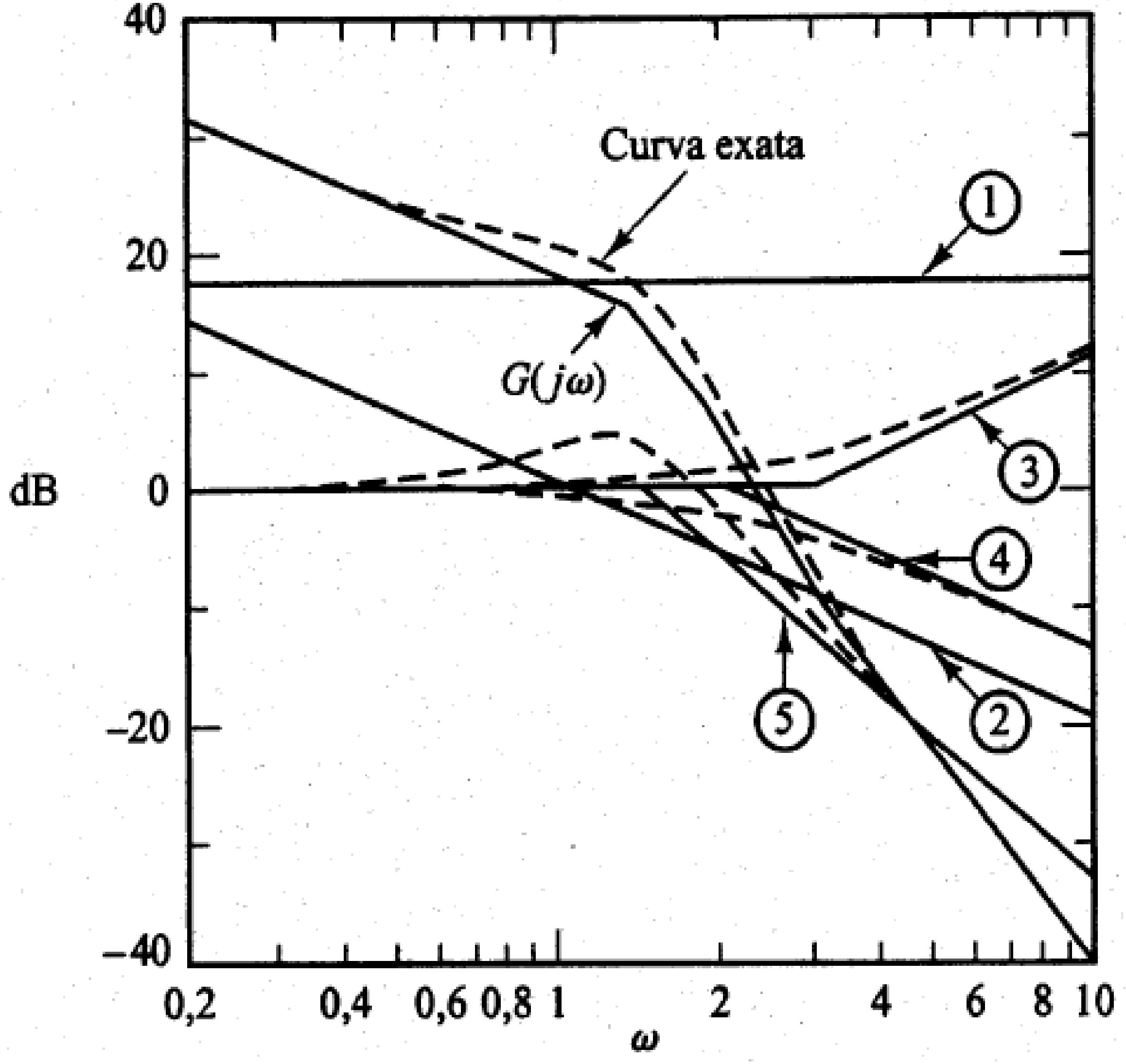
Fator	Parâmetros	Módulo	Fase
Ganho	$K = 7.5$	$20\log\lvert 7.5\rvert = 17.5$ dB	0^o
Polo origem $(j\omega)^{-1}$	$\omega_c = 1$ rad/s em 0 dB	$-20\log\omega$	-90^o
Polo real	$\tau = \frac{1}{2}$	Baixas frequências: assintótica em 0 dB Altas frequências: assintótica em -20 dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 2$ rad/s	Baixas frequências: assintótica em 0^o Altas frequências: assintótica em -90^o Conexão linear das assintóticas de $\omega = 0.2$ rad/s até $\omega = 20$rad/s
Zero real	$\tau = \frac{1}{3}$	Baixas frequências: assintótica em 0 dB Altas frequências: assintótica em $+20$ dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 3$ rad/s	Baixas frequências: assintótica em 0^o Altas frequências: assintótica em $+90^o$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 0.3$ rad/s até $\omega = 30$rad/s
Polos complexos	$\omega_n = \sqrt{2}$ $\zeta = 0.35$	Baixas frequências: assintótica em 0 dB Altas frequências: assintótica em -40 dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_n = \sqrt{2} \approx 1.41$ rad/s Magnitude de pico em $\omega_r = 1.2$ rad/s com amplitude $\lvert G(j\omega)\rvert_{dB} = 3.59$ dB	Baixas frequências: assintótica em 0^o Altas frequências: assintótica em -180^o Conexão linear das assintóticas de $\omega = 0.8$ rad/s até $\omega = 2.5$ rad/s



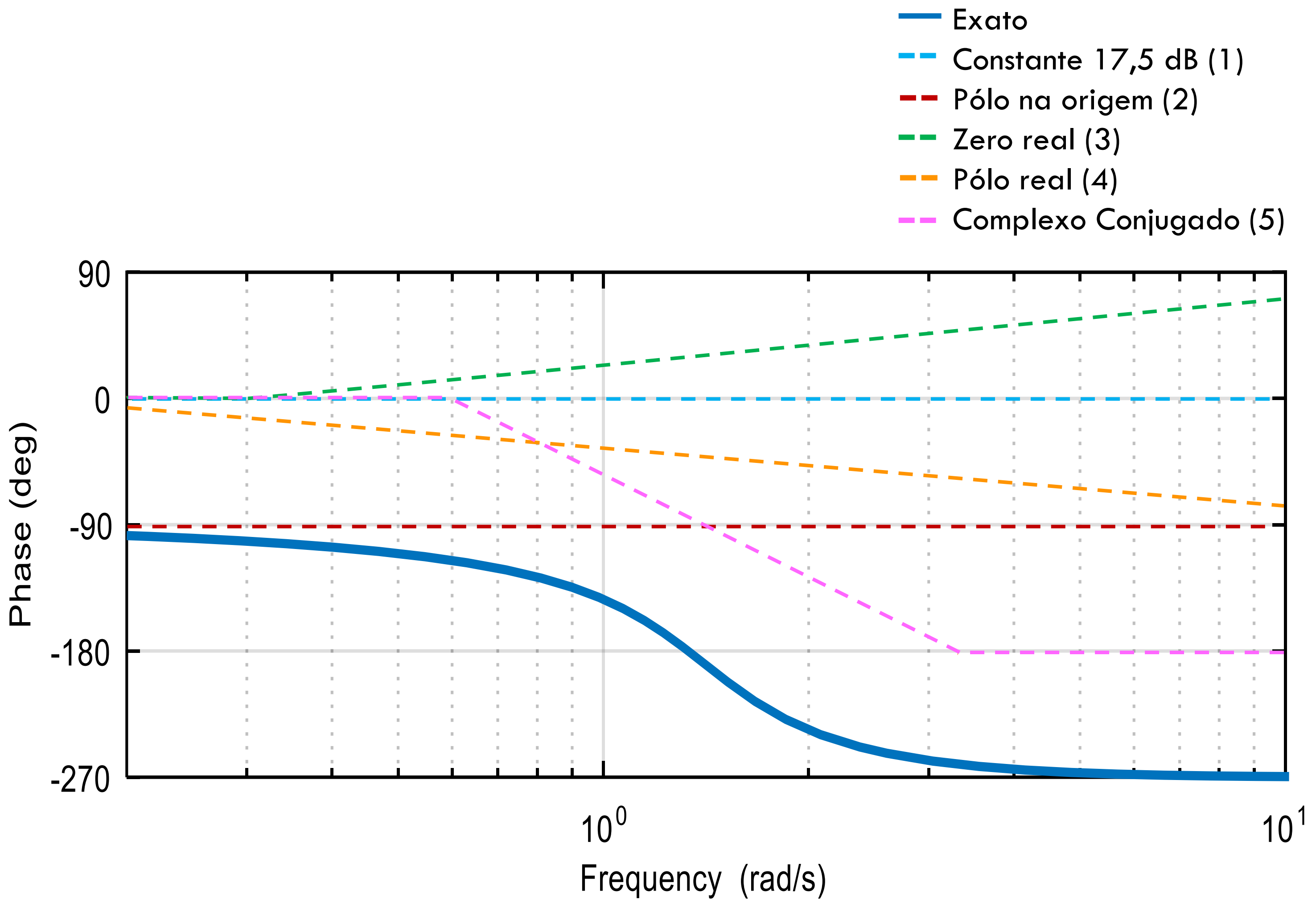
A inclinação da curva é acumulativa:

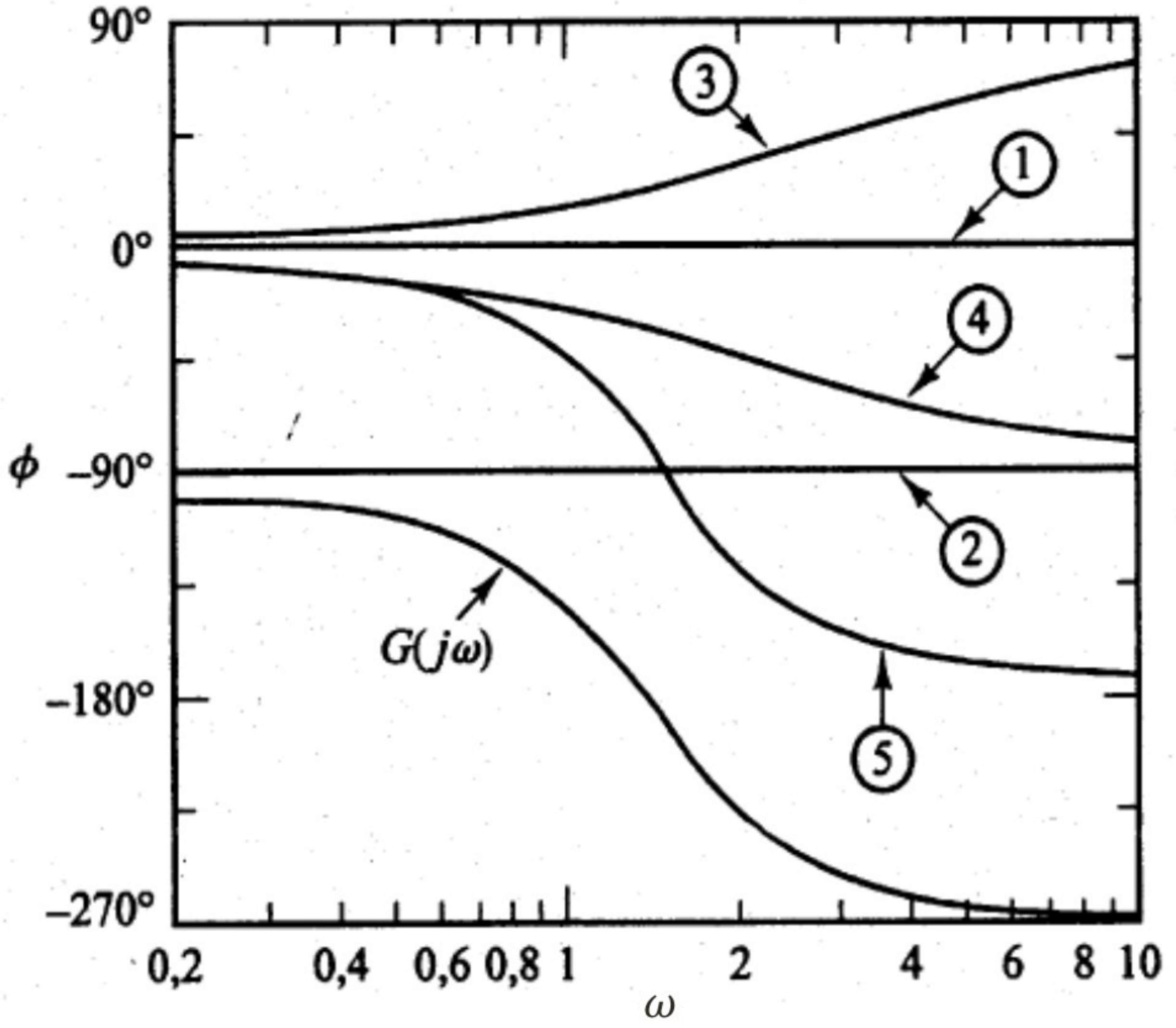
- Abaixo de $\omega_c = \sqrt{2}$, o gráfico tem uma inclinação de -20 dB/década
- Na primeira frequência de canto $\omega_c = \sqrt{2}$, a inclinação de -60 dB/década
- Na segunda frequência de canto $\omega_c = 2$, a inclinação de -80 dB/década
- Na terceira frequência de canto $\omega_c = 3$, a inclinação de -60 dB/década

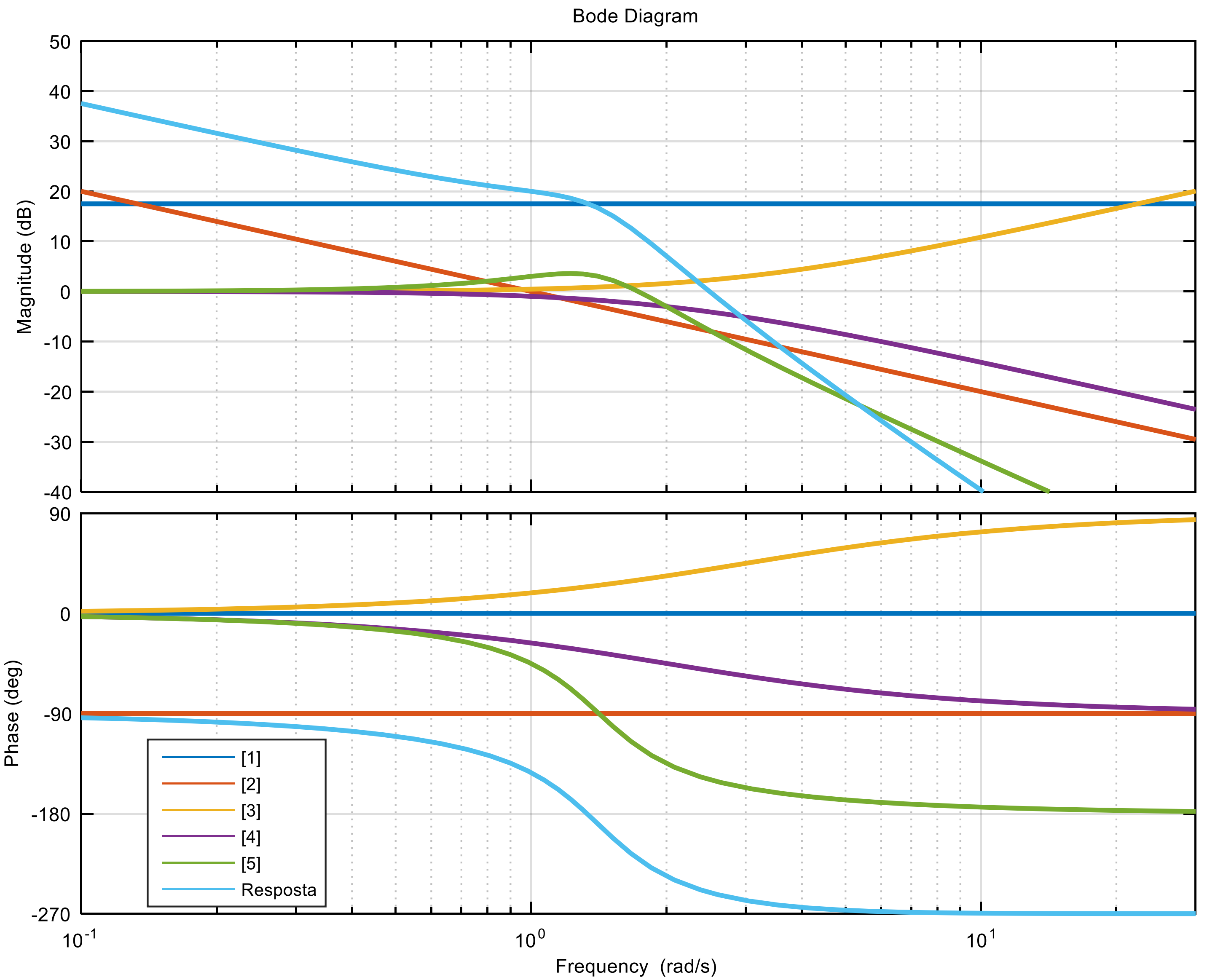
Uma vez que a curva aproximada tenha sido desenhada, a curva real pode ser obtida adicionando-se as correções a cada frequência de canto e às frequências uma oitava abaixo e acima das frequências de canto.



40
20
0
−20
−40
dB
Curva exata
G(jω)
1
2
3
4
5
0,2
0,4
0,6
0,8
1
2
4
6
8
10
ω


Exato
Constante 17,5 dB (1)
Pólo na origem (2)
Zero real (3)
Pólo real (4)
Complexo Conjugado (5)
90
0
-90
-180
-270
Phase (deg)
10^0
10^1
Frequency (rad/s)


90°
0°
ϕ −90°
−180°
−270°
0,2
0,4
0,6
0,8
1
2
4
6
8
10
ω
1
2
3
4
5
$G(j\omega)$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Phase (deg)
90
0
-90
-180
-270
[1]
[2]
[3]
[4]
[5]
Resposta
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency (rad/s)

EXEMPLO

Trace o diagrama de Bode da função de transferência abaixo,

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0{,}2s + 1)}{s(s^2 + 1{,}2s + 9)}$$

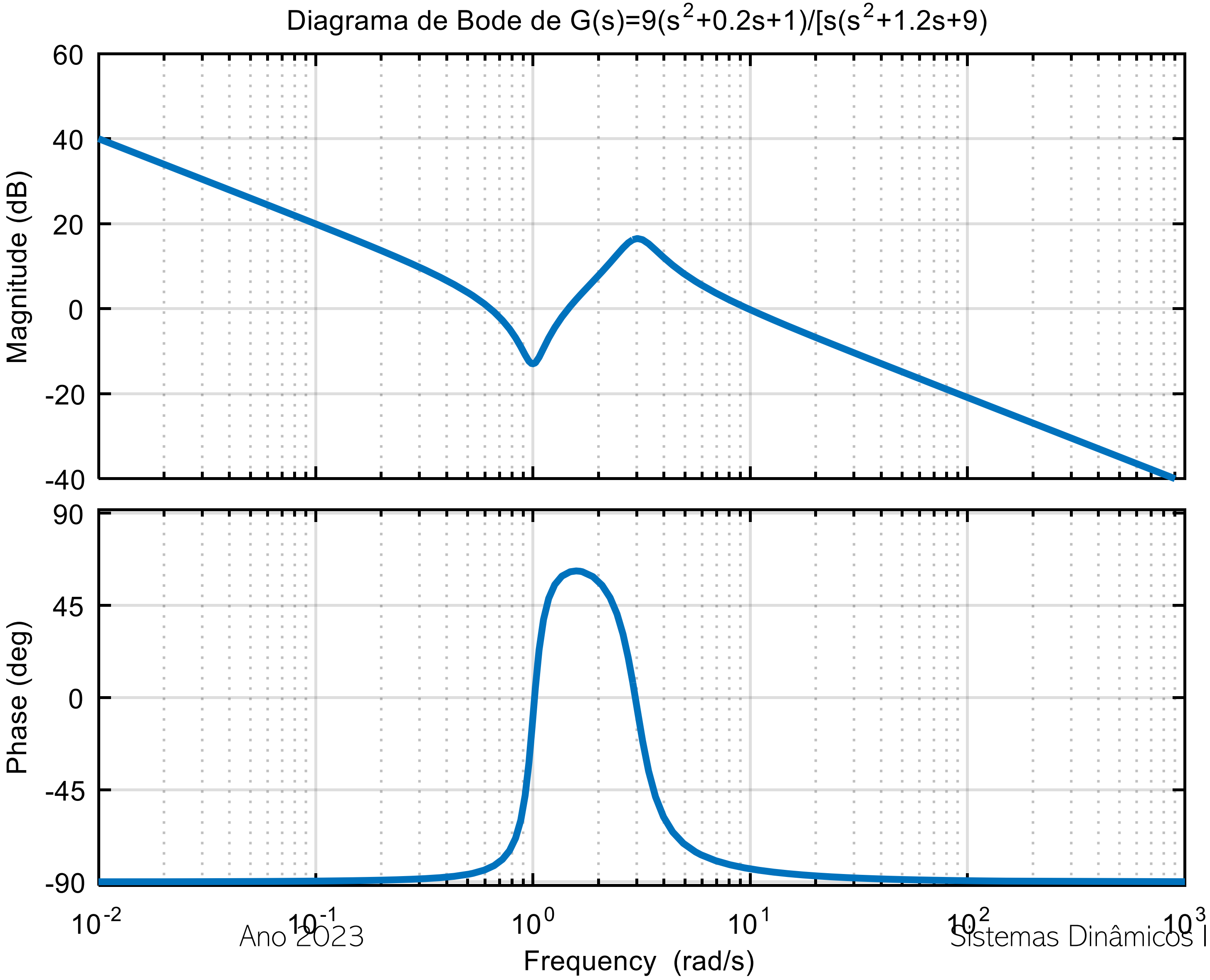
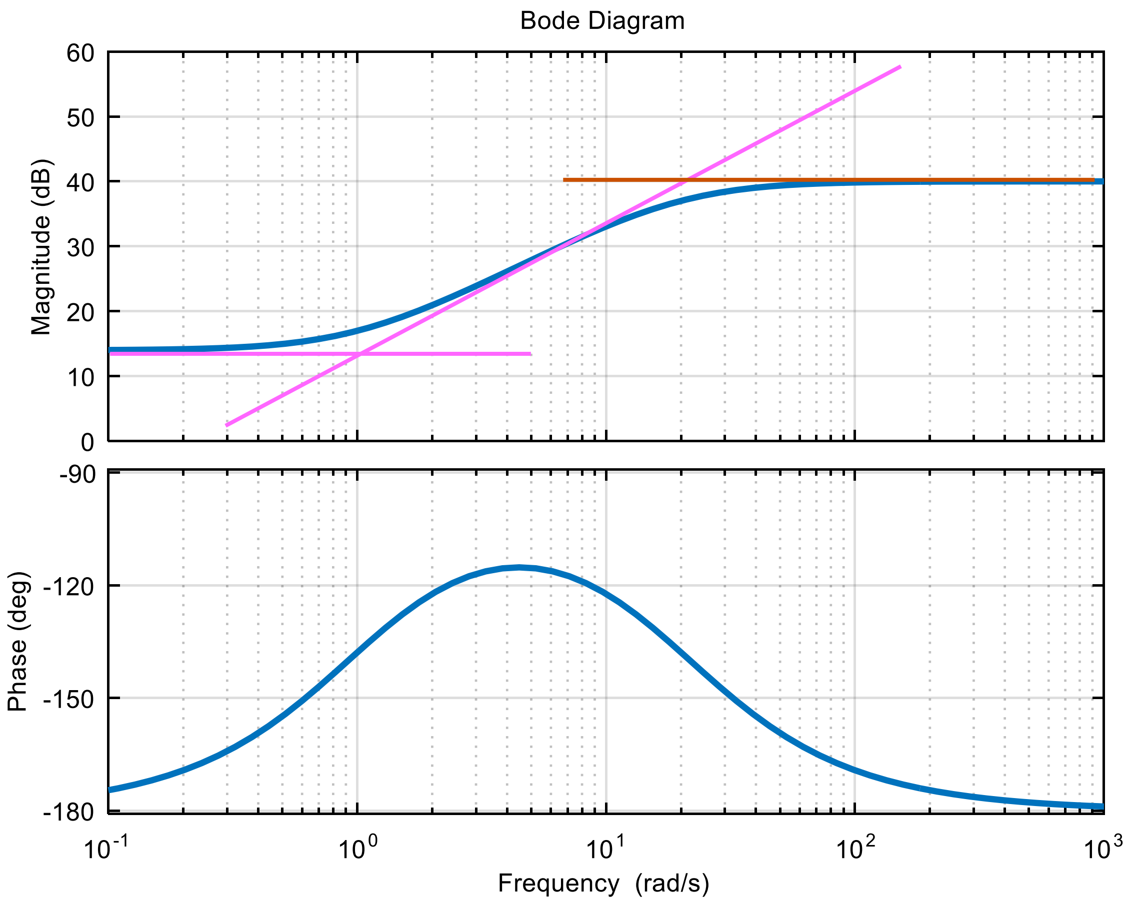


Diagrama de Bode de G(s)=9(s^2+0.2s+1)/[s(s^2+1.2s+9)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
60
40
20
0
-20
-40
90
45
0
-45
-90
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3

VAMOS FAZER O EXERCÍCIO INVERSO



$$\begin{cases} |K|_{dB} = 14\ dB \\ \angle K = -180° \end{cases} \rightarrow K = -5$$

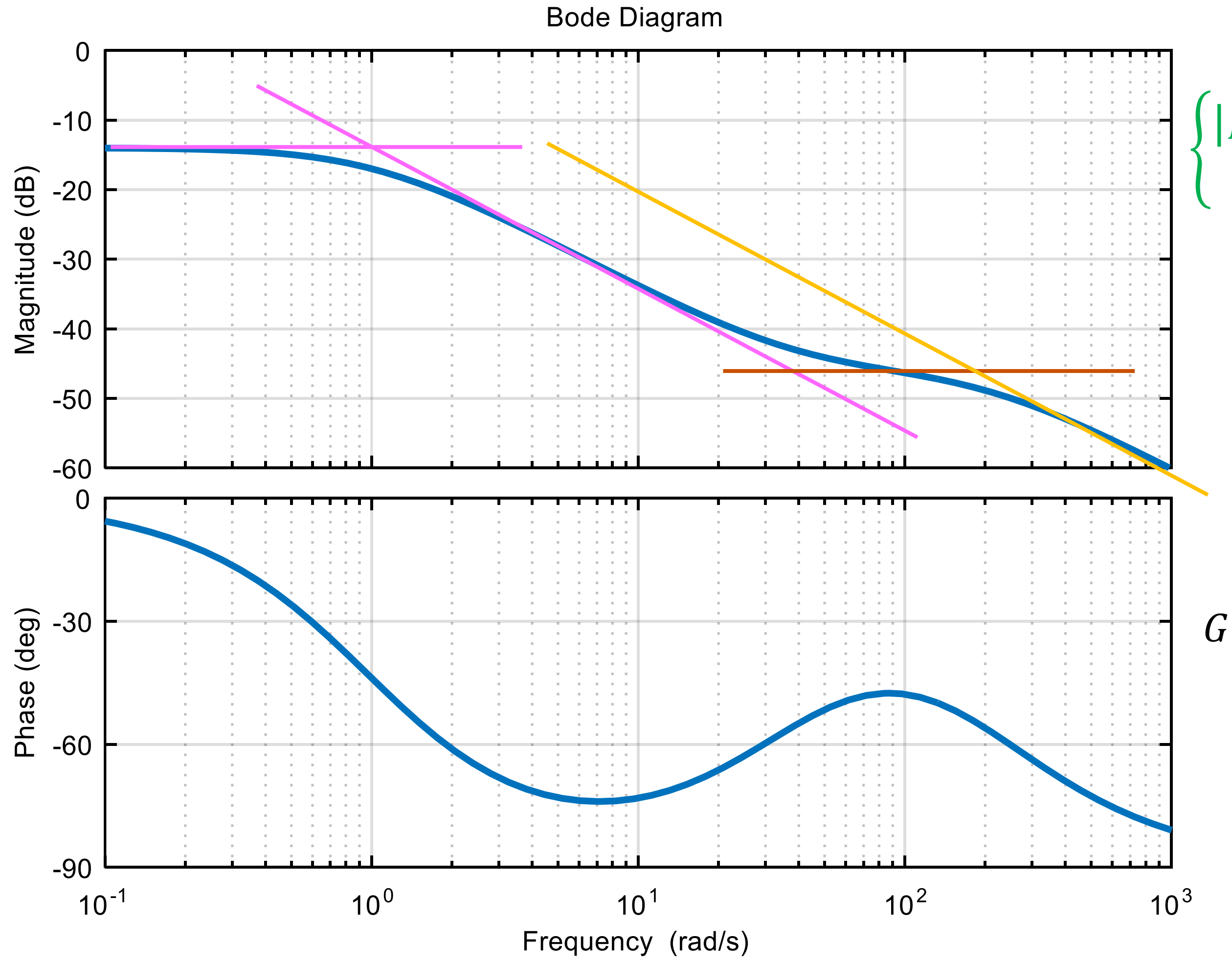
1 zero em $s = -1$

1 pólo em $s = -20$

$$G(s) = -5\frac{s+1}{1}\frac{20}{s+20}$$

$$\boxed{G(s) = -100\frac{s+1}{s+20}}$$

OUTRO UM POUCO PIOR...



$$\begin{cases} |K|_{dB} = -14\ dB \\ \angle K = 0° \end{cases} \rightarrow K = 0{,}2$$

1 pólo em $s = -1$

1 zero em $s = -40$

1 pólo em $s = -200$

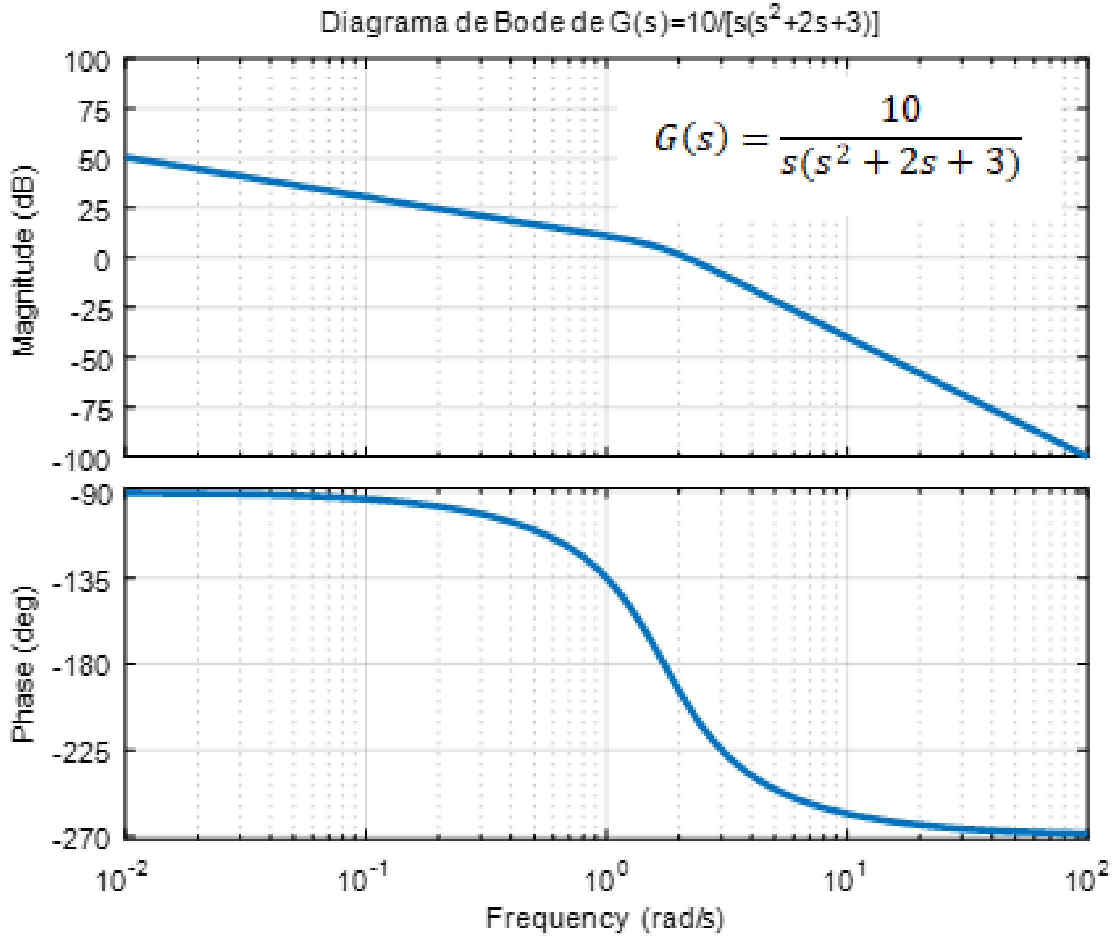
$$G(s) = 0{,}2 \frac{1}{s+1} \frac{s+40}{40} \frac{200}{s+200}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{s+40}{(s+1)(s+200)}}$$

UM EXEMPLO DO NOTEBOOK...

Considere o sistema abaixo e o seu respectivo diagrama de Bode. Pela análise do diagrama, determine as saídas do sistema considerando as seguintes entradas,

$$x(t) = 5\sin\left(0.1t + 30^0\right)$$
$$x(t) = 10\sin\left(2t + 60^0\right)$$



FIM

Próxima aula: prova