Força Bruta / Backtracking

SCC218 - Alg. Avanc. e Aplic.

Baseado em várias fontes:

- Artificial Intelligence: A Modern Approach – Russell & Norvig
  http://aima.eecs.berkeley.edu/slides-ppt/
- Livro do Halim – Competitive Programming 3
- Vários sítios na internet

O paradigma Força Bruta

- aka:
  - Busca completa
  - Backtracking recursivo (sem podas)
- Força Bruta ou busca busca completa ou backtracking recursivo são sinônimos.
- Consistem de métodos que vasculham o espaço de busca inteiro (ou então parte dele) para obter a solução desejada.
  - Durante a busca, podemos podar parte do espaço se entendermos que tais partes não tem o que procuramos !

O paradigma Força Bruta

- A afirmação do slide anterior é contestável.
  - busca completa = força bruta = backtrackng recursivo.

- Busca por força bruta computa cada possível solução e seleciona uma que preenche os requisitos

- Backtracking é uma extensão da busca por força bruta em que as restrições do problema são avaliadas passo a passo e uma solução encontrada e outras descartadas.

Exemplo 1

- Sejam N caixas de doces, cada qual com alguma quantidade. Verifique se é possível redistribuir os doces de forma que todas as caixas tenham a mesma quantidade
- Se sim, qual a menor quantidade de doces que se deve redistribuir?

Exemplo 1

- Primeiro, verifique se o problema tem solução
  - $\sum$ qtd(i) / N = q (se a somatória for divisível por N)
- Depois calcule o valor mínimo de doces a deslocar
  - Já pensou na solução?
  - Consegue ver que a solução ótima é força bruta ou a busca completa passando por todas as caixas?
  - Escreva o algoritmo...

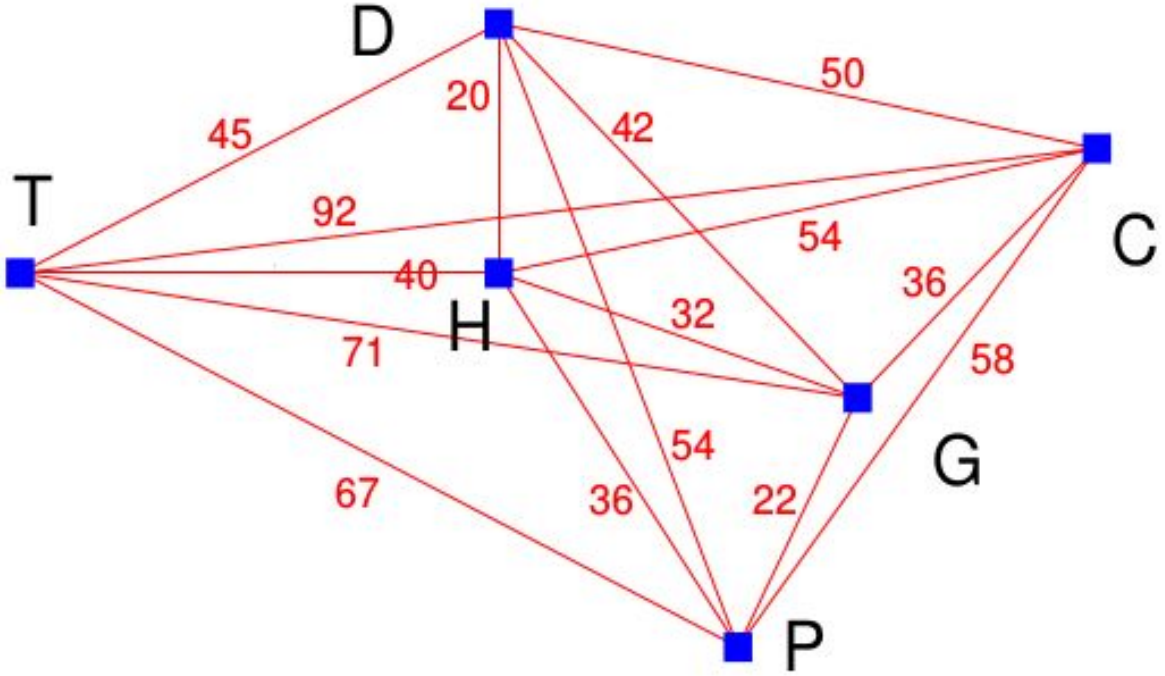
Exemplo 2: TSP

- TSP (Traveling Salesman Problem) ou o problema do caixeiro viajante
  - Sendo n cidades e as distâncias entre todos os pares de cidades, calcule o custo mínimo de um **circuito** que comece em uma cidade ‘s’, passando por todas as demais cidades, finalmente retornando a ‘s’

Exemplo 2: TSP

- O TSP é um problema de grafos e lida com um **grafo completo** e procura encontrar um **circuito Hamitoniano** (aquele que usa todos os vértices uma única vez)
- Portanto, TSP consiste em encontrar um circuito Hamiltoniano de custo mínimo em um grafo completo.

Exemplo 2: TSP



	H	P	G	C	D	T
Home (H)	0	36	32	54	20	40
Pet store (P)	36	0	22	58	54	67
Greenhouse (G)	32	22	0	36	42	71
Cleaners (C)	54	58	36	0	50	92
Drugstore (D)	20	54	42	50	0	45
Target (T)	40	67	71	92	45	0

Exemplo 2: TSP

- Me dê uma estratégia força bruta para calcular o circuito mínimo??????

Exemplo 2: TSP

- Solução
  - Faça uma lista de todos os circuitos possíveis
    - Para N = 6, temos quantos circuitos possíveis?

Exemplo 2: TSP

- Solução
  - Calcule todos os circuitos possíveis
    - Para N = 6, temos quantos circuitos possíveis?
      - 5! = 5x4x3x2x1 = 120

Exemplo 2: TSP

- Solução
  - Calcule todos os circuitos possíveis
    - Para N = 6, temos quantos circuitos possíveis?
      - 5! = 5x4x3x2x1 = 120
  - Calcule o peso de cada um deles
  - Selecione o menor deles

Exemplo 2: TSP

- O que acabamos de fazer foi um algoritmo de força bruta
  - Ele é ótimo ?
  - É eficiente?

Exemplo 2: TSP

- O que acabamos de fazer foi um algoritmo de força bruta
  - Ele é ótimo ? Sim. Ele encontra a melhor solução
  - É eficiente?
    - De jeito nenhum…. Se N <= 12, ele passa num programa de competição. Mais que isso, irá exceder o tempo de execução.
- Claro que é possível melhorar o desempenho
  - Vc não acha que cálculos se repetem neste problema?
  - Como podemos tirar proveito disso?

Exemplo 3: criar palavras

- Gere, e imprima, todas as possíveis "palavras" de MAX letras utilizando uma string.
- Cada posição do vetor irá armazenar uma letra → pal[a,b,c,d,'\0']. (MAX=4)
- Considere todas as letras do alfabeto, de 'a' – 'z'
- Podemos sim fazer um algoritmo força bruta para isso.
- Qual a complexidade?

Exemplo 3: criar palavras

- Gere, e imprima, todas as possíveis "palavras" de MAX letras utilizando uma string.
- Cada posição do vetor irá armazenar uma letra → pal[a,b,c,d,'\0']. (MAX=4)
- Considere todas as letras do alfabeto, de 'a' – 'z'
- Podemos sim fazer um algoritmo força bruta para isso.
- Qual a complexidade?
  - Arranjos com repetições de 26 letras tomadas MAX a MAX -> 26^{MAX}

Exemplo 3: criar palavras

- Vamos pensar na implementação
  - iterativa?
  - recursiva ? (é mais simples de escrever, eu acho)

Exemplo 3: criar palavras

```c
#include<stdio.h>
#define MAX 5

void backtracking(char v[], int k)
{
    char letra;

    if (k == MAX)
        printf("%s\n", v);
    else
        for (letra = 'a'; letra <= 'z'; letra++)
        {
            v[k] = letra;
            backtracking(v, k + 1);
        }
}

int main()
{
    char v[MAX+1];

    v[MAX] = '\0';
    backtracking(v, 0);
    return 0;
}
```

Backtracking

- O algoritmo que acabamos de fazer é um clássico backtracking
- Uma solução recursiva, mas que tb é força bruta, mesmo porque não tem como ser diferente neste caso
- O problema não traz restrições e, portanto, nenhum grande desafio.

Busca Backtracking: ‘formato’

Eis um *template* clássico de backtracking !!!

function BACKTRACKING-SEARCH(restricoes) % returns a solution or failure
    return RECURSIVE-BACKTRACKING(*atribuiçoes, restricoes*)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(*atribuições, restriçoes*) % returns a solution or failure
    if *atribuições* is complete **then return** *atribuições*
        for each *value* **in** ORDER-DOMAIN-VALUES(*var, atribuições, csp*) **do**
        if *value* is consistent with *atribuições* according to *restriçoes* **then**
            add *{var=value}* to *atribuições*
            result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(*atribuições, restriçoes*)
            remove *{var=value}* from *atribuições*
    return *failure*

Exemplo 4: Movimentação Cavalo no tabuleiro

- Encontre um percurso realizado por um cavalo que visite todas as posições, sem passar pela mesma posição 2 vezes
- Um percurso sempre existe, para um tabuleiro de tamanho 4

Exemplo 4: Movimentação Cavalo no tabuleiro

- Com base no template apresentado anteriormente escreva o código:
  - If (assignment is completed) ?
    - ter visitados todas as casas do tabuleiro !!
  - for each value in problem domain
    - São os 8 possíveis movimentos do cavalo !!
  - if (value is **consistent** with **Constraints**)
    - movimento cai dentro do tabuleiro
    - casa ainda não foi visitada
  - Então
    - armazene resultado parcial
    - Recursive call
    - remove resultado parcial

Exemplo 4: Movimentação Cavalo no tabuleiro

```
#include<stdio.h>
#define SIZE 8

bool marked[SIZE][SIZE];

char moves[8][2] = {-1, -2,
                    -2, -1,
                    -2, 1,
                    -1, 2,
                     1, 2,
                     2, 1,
                     2, -1,
                     1, -2 };

bool valid(char v) {
    return (v >= 0) && (v < SIZE);
}
```

```
void backtracking(char lin, char col, char k) {
    char new_lin, new_col, i;

    if (k == SIZE*SIZE-1) {
      printf("There exists a path!\n");
    } else
       for (i = 0; i < 8; i++) {
           new_col = col + moves[i][0];
           new_lin = lin + moves[i][1];
           if (valid(new_lin) && valid(new_col) && !marked[new_lin][new_col]) {
               marked[new_lin][new_col] = true;
               backtracking(new_lin, new_col, k+1);
               marked[new_lin][new_col] = false;
           }
       }
}
```

Nro soluções:
Size = 4
Size = 5
Size = 6
….

```
int main() {
    int i, j;
    char c;

    for (i = 0; i < SIZE; i++)
        for (j = 0; j < SIZE; j++)
            marked[i][j] = false;

    marked[SIZE/2][SIZE/2] = true;
    backtracking(SIZE/2, SIZE/2, 0);
}
```

Backtracking com restrições

1. Há uma série de problemas práticos que impõem restrições (constraints) ou condições inerentes ao problema

   Problema das rainhas no tabuleiro, coloração em mapas, etc

2. Esta classe de problemas é conhecida como CSP (Constraint Satisfaction Problem) ou Problemas com satisfação de Restrições, uma área bastante estudada na Inteligência Artificial (IA)

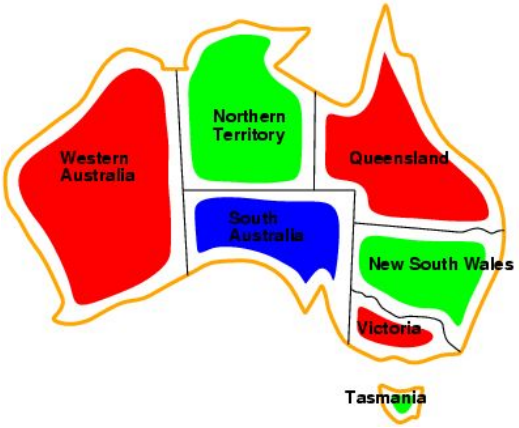
Exemplo: Coloração de Mapas

- O objetivo é colorir um mapa utilizando diferentes cores para regiões adjacentes

Estado inicial

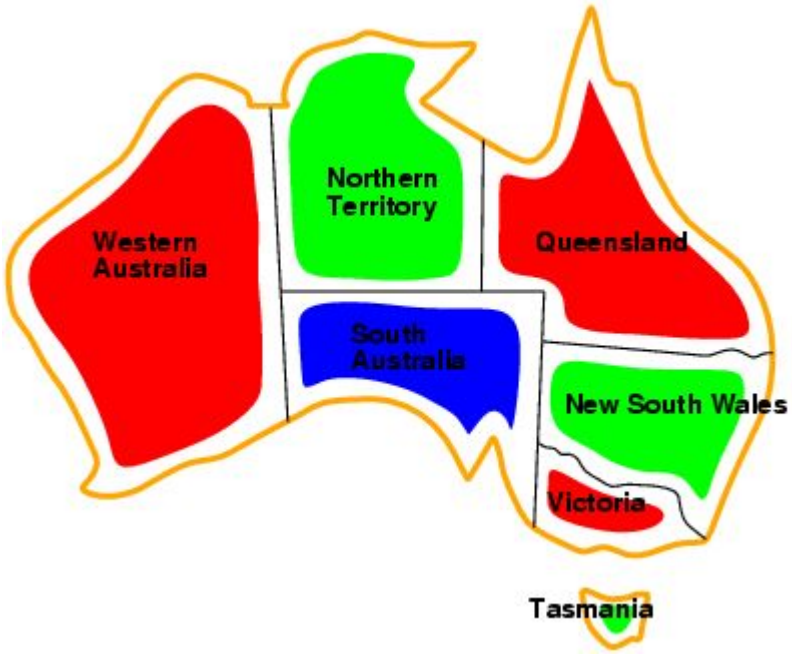
- Podemos modelar esse exemplo como um problema de busca

Estado final



Modelagem: Coloração de Mapas

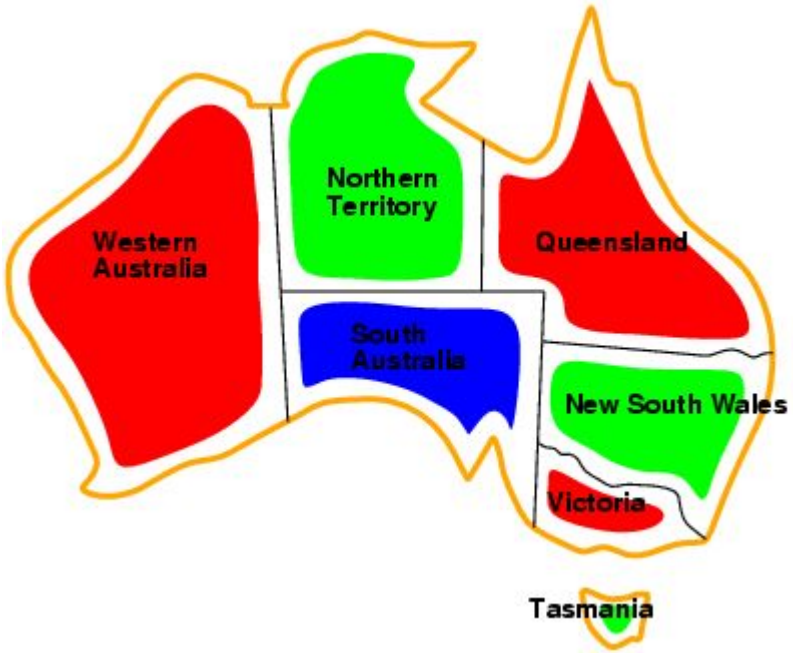
- Essa modelagem consiste de:
  - Variáveis: WA, NT, SA, Q, NSW, V, T
  - Domínio: Vermelho, verde e azul
  - Restrições: regiões adjacentes devem possuir cores diferentes



https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2018/03/quatro-cores-bastam-para-colorir-qualquer-mapa.shtml

Modelagem: Coloração de Mapas

- Objetivo:
  - Atribuir valores a todas as variáveis
  - Cada atribuição deve respeitar as restrições impostas



Problemas Combinatoriais

- Problemas combinatoriais podem ser modelados dessa maneira
  - Envolvem encontrar uma atribuição, ordenação ou agrupamento a um conjunto finito de objetos discretos que satisfaz certas condições
- Diversos problemas em computação são problemas combinatoriais e podem ser modelados da mesma maneira.

Exemplo: Sudoku

- Modelagem:
  - Variáveis: A1...A9, B1...B9, ..., I1...I9
  - Domínio: 1...9
  - Restrições:

Alldiff(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9)

Alldiff (A1,B1,C1,D1,E1,F1,G1,H1,I1)

Alldiff (A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,C2,C3)

….

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			3		2		6		
B	9			3		5			1
C			1	8		6	4		
D			8	1		2	9		
E	7								8
F			6	7		8	2		
G			2	6		9	5		
H	8			2		3			9
I			5		1		3		

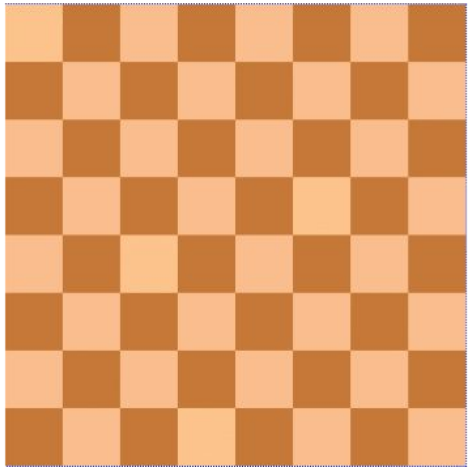
Estado inicial

Estado final

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	8	3	9	2	1	6	5	7
B	9	6	7	3	4	5	8	2	1
C	2	5	1	8	7	6	4	9	3
D	5	4	8	1	3	2	9	7	6
E	7	2	9	5	6	4	1	3	8
F	1	3	6	7	9	8	2	4	5
G	3	7	2	6	8	9	5	1	4
H	8	1	4	2	5	3	7	6	9
I	6	9	5	4	1	7	3	8	2

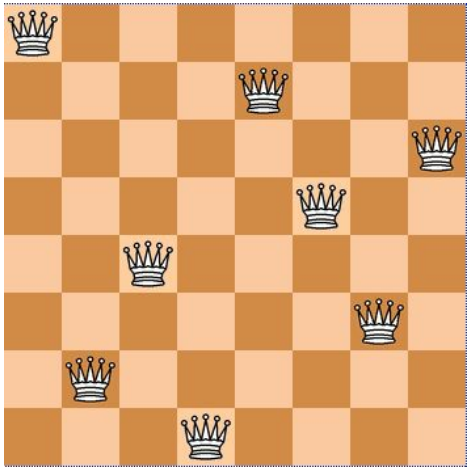
Exemplo: Oito Rainhas

- Modelagem:
  - Variáveis: A1, A2, ... A8, B1, ... B8, ..., H1, ... H8
  - Domínio: 0 e 1
  - Restrições: Não pode ter duas rainhas na mesma linha, coluna ou diagonal



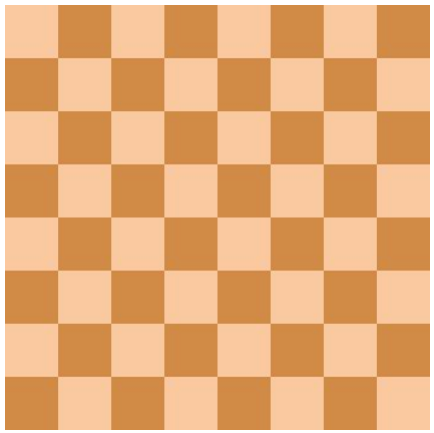
Estado inicial

Estado final



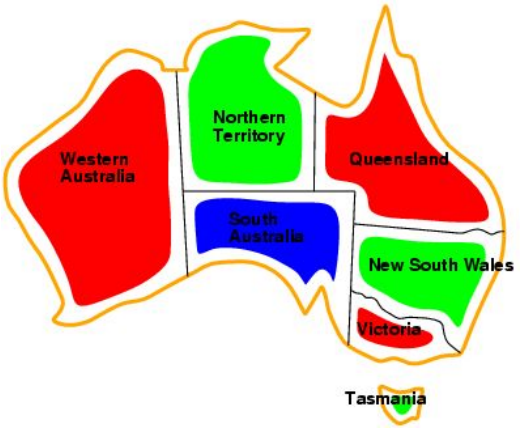
Problema de Satisfação de Restrições (PSR)
Constraint Satisfaction Problem (CSP)

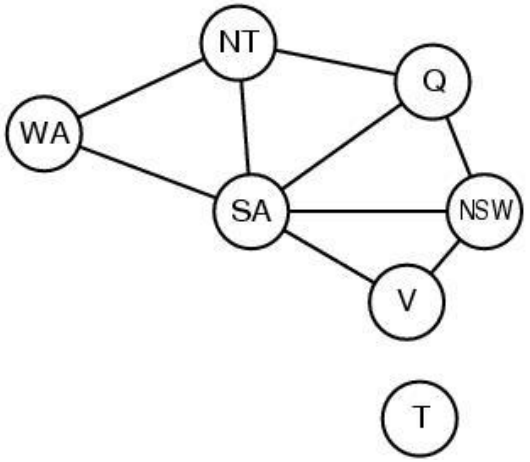
- Pode ser entendido como um problema de busca:
  - Estado inicial: nenhuma variável atribuída
  - Operador: atribuir um valor a uma variável livre, dado que não existe conflito
  - Estado final: atribuição completa e consistente
- *Backtracking*:
  - Busca em profundidade
  - Resolve *n*-rainhas para $n \approx 25$



Como Representar Restrições?

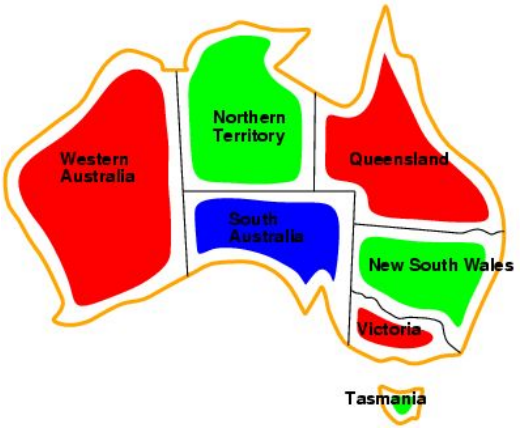
- Restrições podem ser:
  - Unárias: envolvem uma variável. Ex.: SA ≠ verde
  - Binárias: envolvem duas variáveis. Ex.: SA ≠ WA
  - Maior-ordem: envolvem três ou mais variáveis. Ex.: Alldiff(A1...A9)
- Restrições de maior-ordem podem ser quebradas em binárias
- Grafos é uma representação frequente para restrições

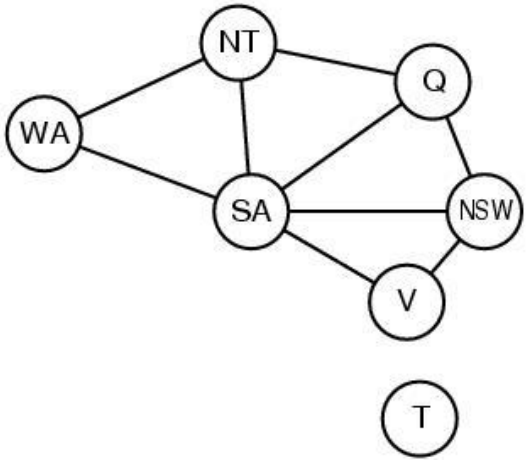




Grafo de Restrições

- Para PSRs binários:
  - Nós são variáveis
  - Arestas são restrições
- Benefício:
  - Padrão de representação
  - Funções genéricas de objetivo e sucessor
  - Pode ser utilizado para simplificar a busca
    - Componentes independentes como Tasmânia





Busca Backtracking

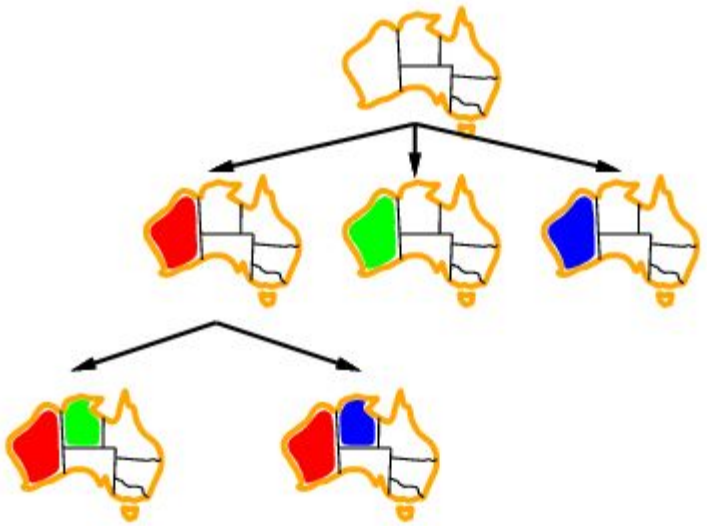
function BACKTRACKING-SEARCH(*csp*) % returns a solution or failure
    return RECURSIVE-BACKTRACKING(*{} , csp*)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment, csp*) % returns a solution or failure
    if *assignment* is complete **then return** *assignment*
    var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[*csp*],*assignment*,*csp*)
    for each *value* **in** ORDER-DOMAIN-VALUES(*var, assignment, csp*) **do**
        if *value* is consistent with *assignment* according to CONSTRAINTS[*csp*] **then**
            add *{var=value}* to assignment
            result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment, csp*)
            if *result* ≠ *failure* **then return** *result*
            remove *{var=value}* from *assignment*
    return *failure*

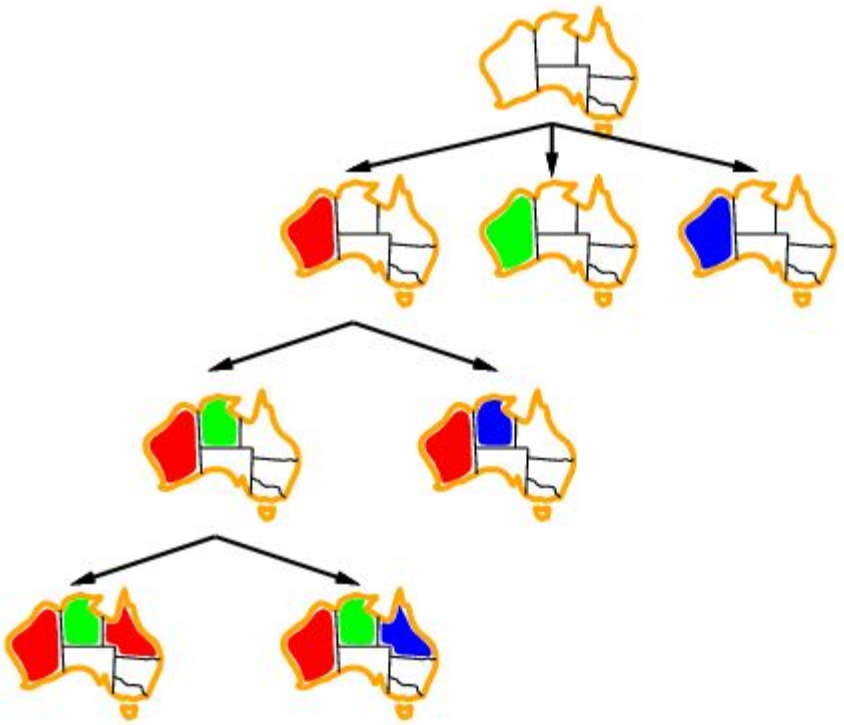
Exemplo Backtracking

Exemplo Backtracking

Exemplo Backtracking

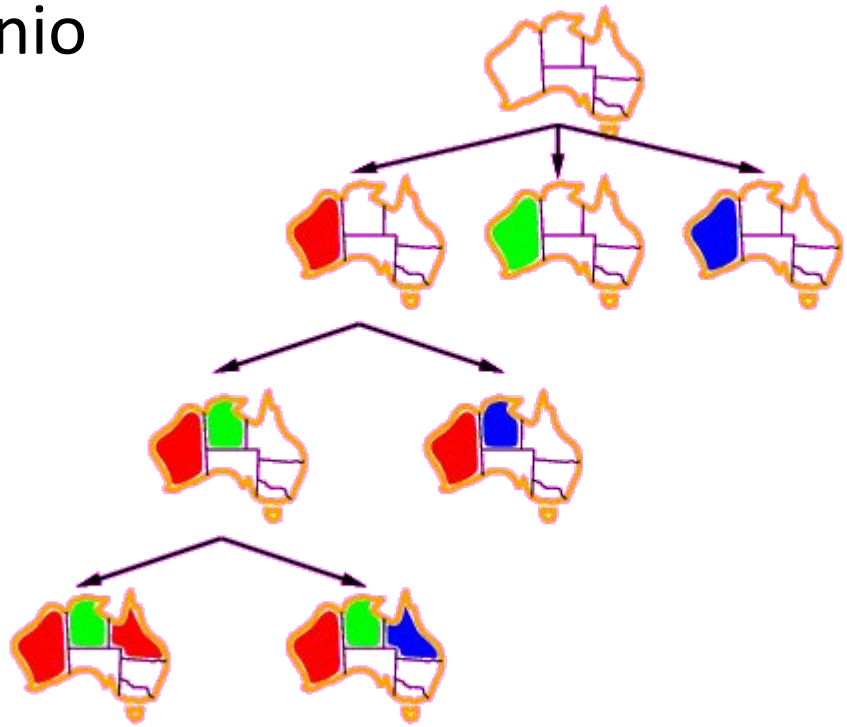


Exemplo Backtracking



Eficiência do Backtracking

- Complexidade de execução do backtracking:
  - n: número de variáveis
  - d: tamanho do domínio
  - Complexidade: $O(d^n)$



Como Melhorar a Eficiência do Backtracking?

- Métodos de propósito geral podem fornecer grandes ganhos de desempenho:
  - Qual variável deve ser a próxima a ser atribuída?
  - Em qual ordem os valores devem ser tentados?
  - Pode-se detectar falhas inevitáveis mais cedo?

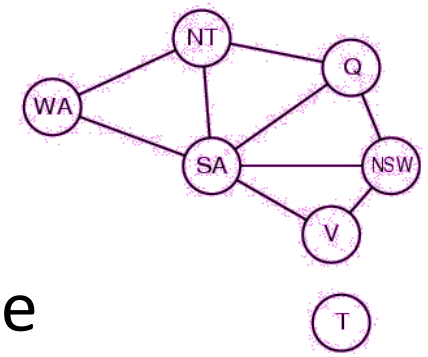
Busca Backtracking

function BACKTRACKING-SEARCH(*csp*) % returns a solution or failure
    return RECURSIVE-BACKTRACKING(*{} , csp*)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment, csp*) % returns a solution or failure
    if *assignment* is complete **then return** *assignment*
    var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[*csp*],*assignment*,*csp*)
    for each *value* **in** ORDER-DOMAIN-VALUES(*var, assignment, csp*) **do**
        if *value* is consistent with *assignment* according to CONSTRAINTS[*csp*] **then**
            add *{var=value}* to assignment
            result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment, csp*)
            if *result* ≠ *failure* **then return** *result*
            remove *{var=value}* from *assignment*
    return *failure*

Valor Restante Mínimo

Mininum Remaining Value (MRV)

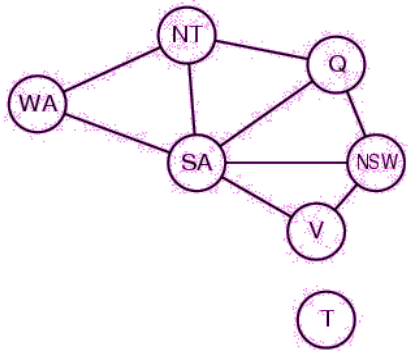


- Aka: Variável mais restrita:
  - Escolha a variável com menor número de movimentos legais

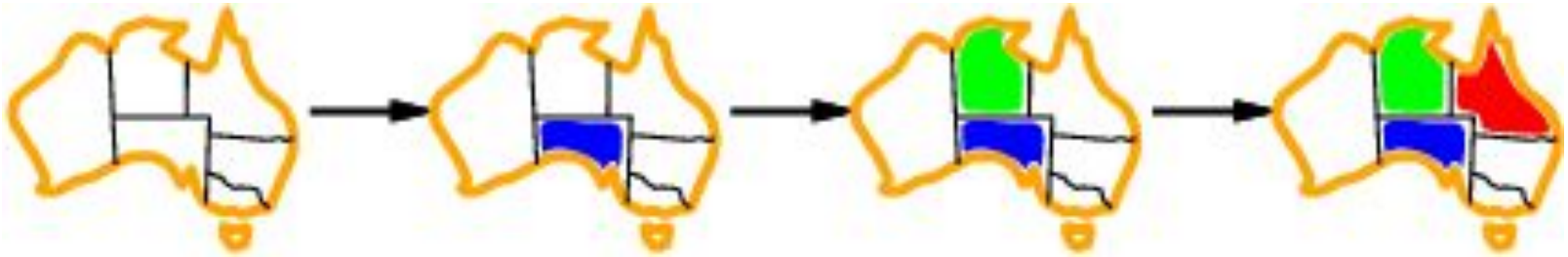
- Escolha a variável com a maior probabilidade de causar uma falha o mais rapidamente possível. Isso provoca podas antecipadas !

Heurística de Grau (vértice)

degree heuristc



- Suponha o grafo inicial, não colorido:
  - Qual a validade da heurística MVR?
    - Nenhuma !!! todas variáveis podem ser coloridas com 3 cores ...



- Heurística grau: selecione a variável que tenha o maior número de restrições a outras variáveis não atribuídas: Vertice de maior grau ! (diminui o fator de ramificação)
- No geral, MVR é melhor do que grau, então utiliza-se grau como desempate para MVR.

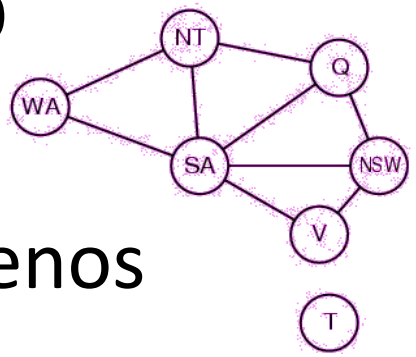
Ordem dos Valores a serem Atribuídos

function BACKTRACKING-SEARCH(*csp*) % returns a solution or failure
    return RECURSIVE-BACKTRACKING(*{} , csp*)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment, csp*) % returns a solution or failure
    if *assignment* is complete **then return** *assignment*
    var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[*csp*],*assignment*,*csp*)
    for each *value* **in ORDER-DOMAIN-VALUES**(*var, assignment, csp*) **do**
        if *value* is consistent with *assignment* according to CONSTRAINTS[*csp*] **then**
            add *{var=value}* to assignment
            result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment, csp*)
            if *result* ≠ *failure* **then return** *result*
            remove *{var=value}* from *assignment*
    return *failure*

Valor Menos Restritivo

least restrictive value



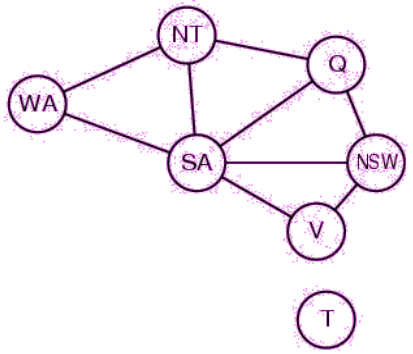
- Dada uma variável, escolha o valor menos restritivo:
  - Aquele que remove o menor número de valores para outras variáveis

Permite um valor para SA

Permite nenhum valor para SA

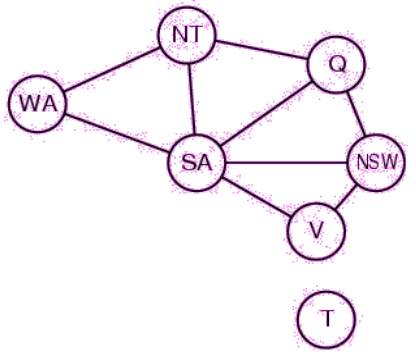
Verificação Adiante

forward checking

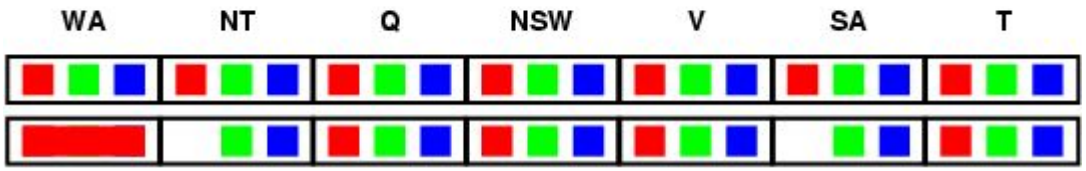


- Manter os valores legais remanescentes para variáveis não atribuídas
- Retroceder a busca quando uma variável não possuir valores legais

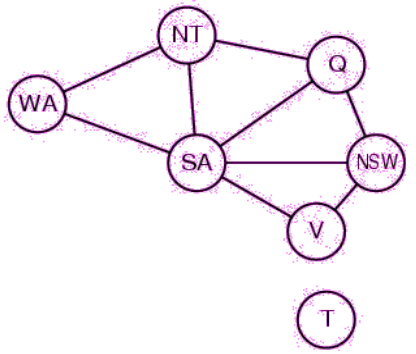
Verificação Adiante



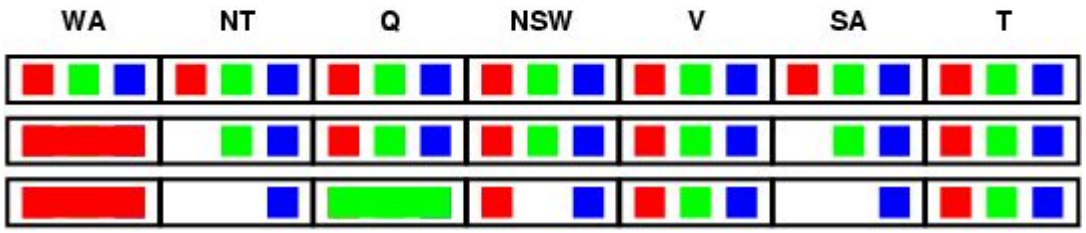
- Manter os valores legais remanescentes para variáveis não atribuídas
- Retroceder a busca quando uma variável não possuir valores legais



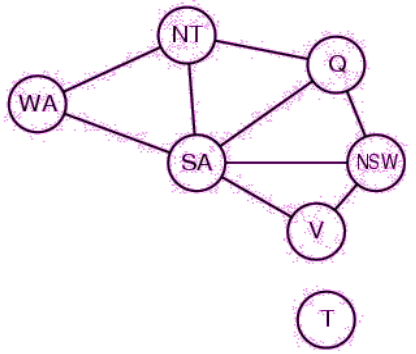
Verificação Adiante



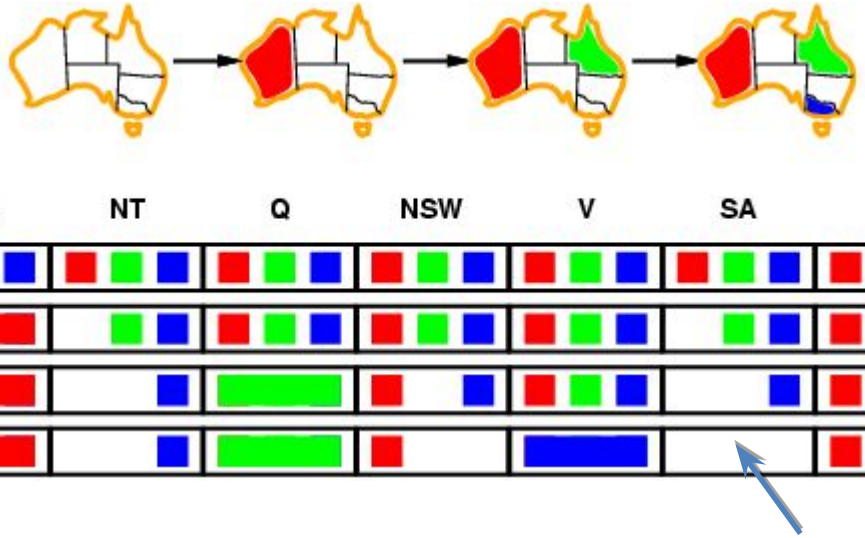
- Manter os valores legais remanescentes para variáveis não atribuídas
- Retroceder a busca quando uma variável não possuir valores legais



Verificação Adiante

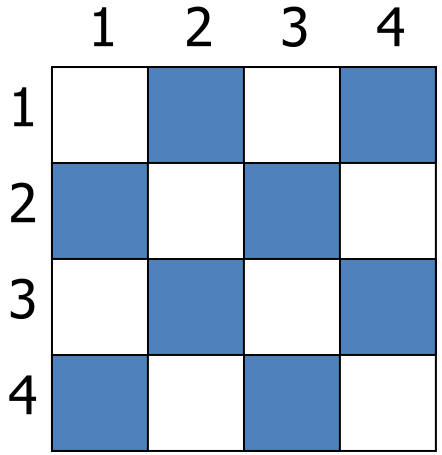


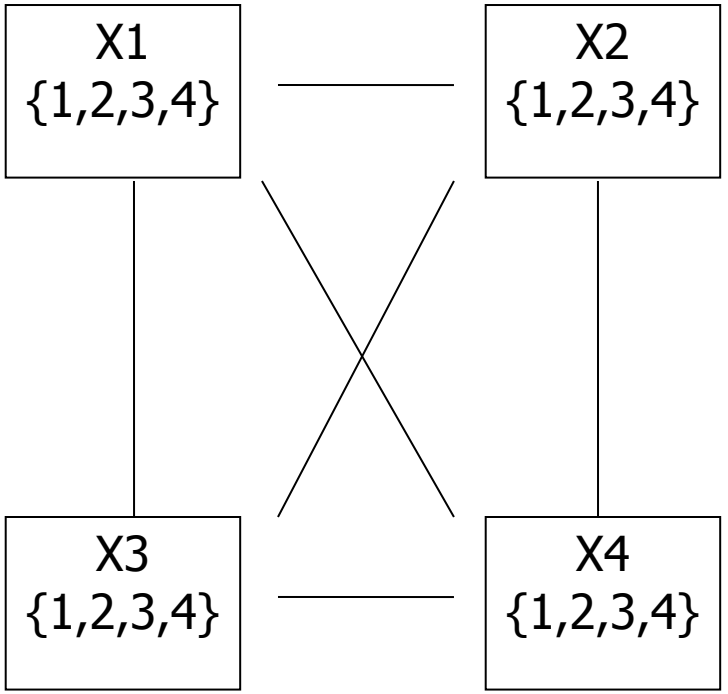
- Manter os valores legais remanescentes para variáveis não atribuídas
- Retroceder a busca quando uma variável não possuir valores legais



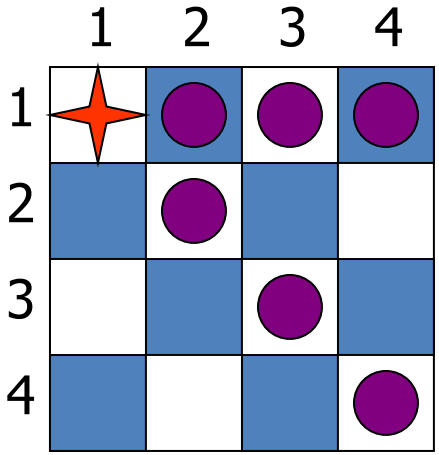
Nenhum valor para SA: backtracking

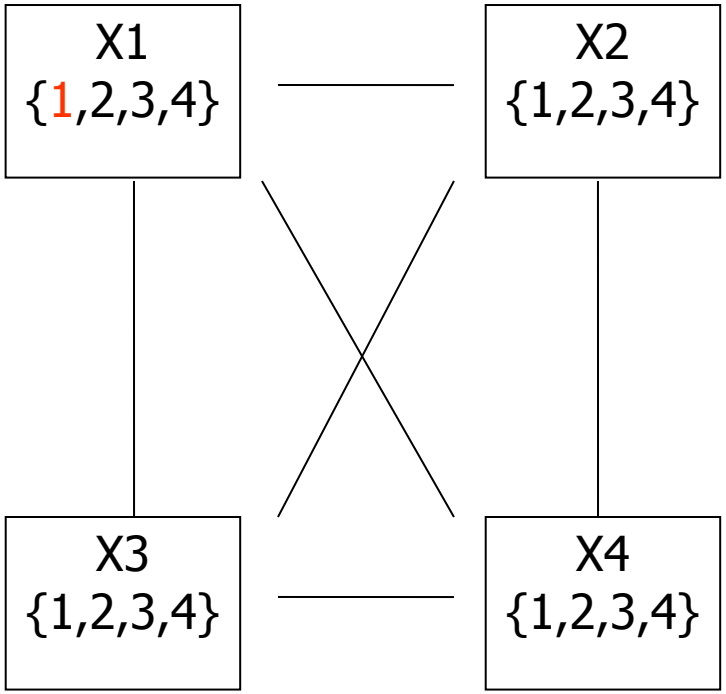
Verificação Adiante: 4-Rainhas



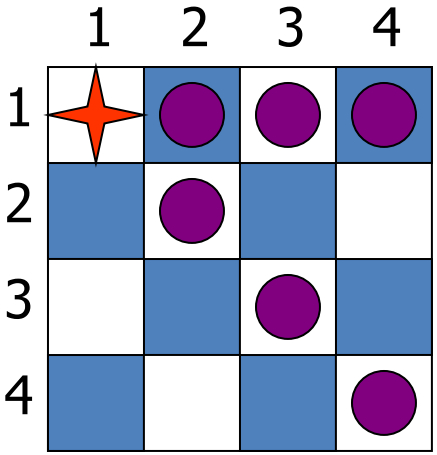


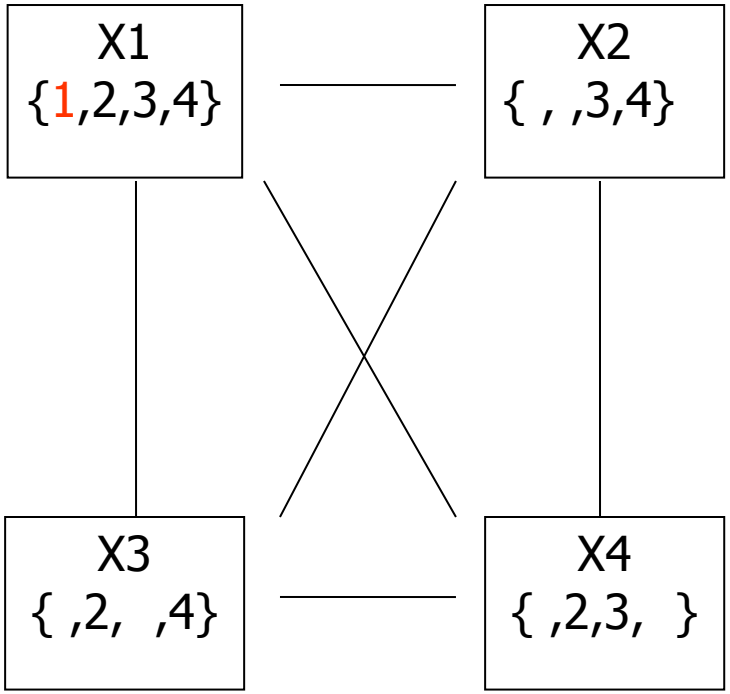
Verificação Adiante: 4-Rainhas



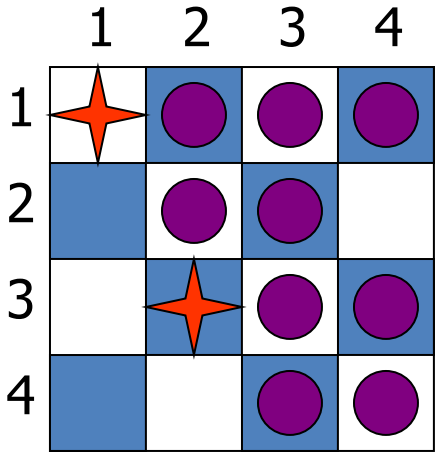


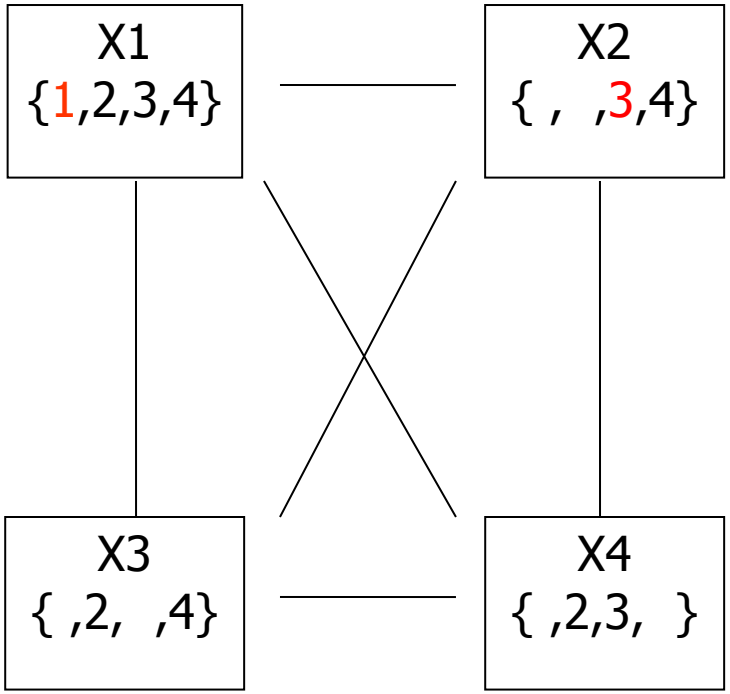
Verificação Adiante: 4-Rainhas



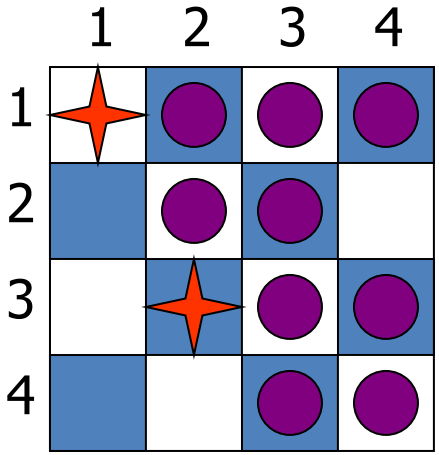


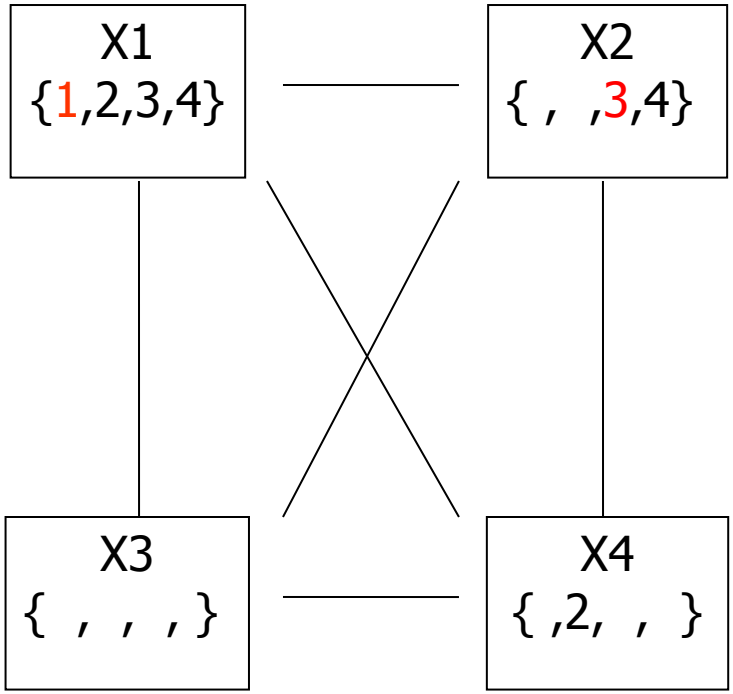
Verificação Adiante: 4-Rainhas



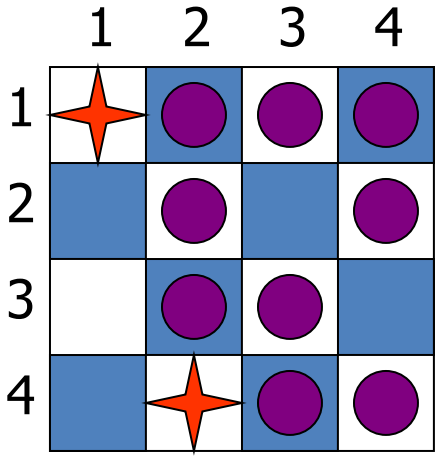


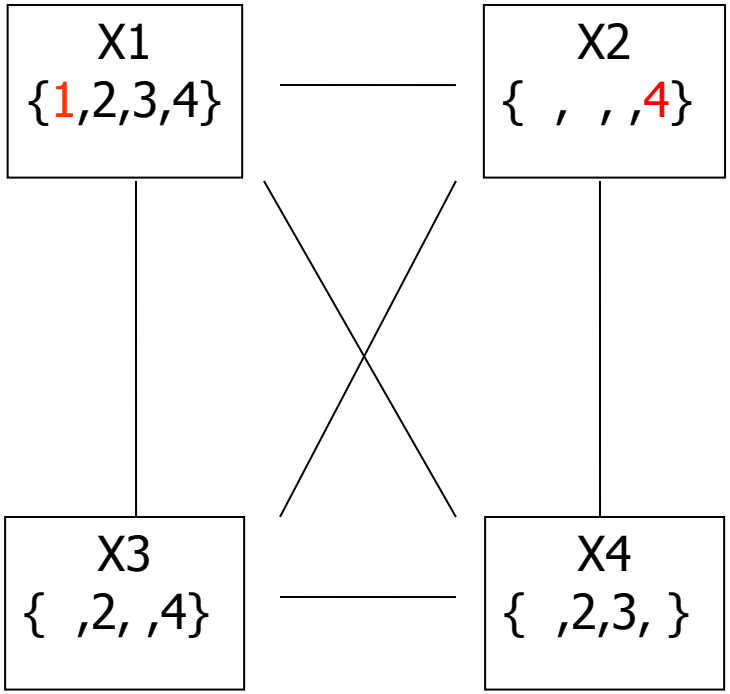
Verificação Adiante: 4-Rainhas



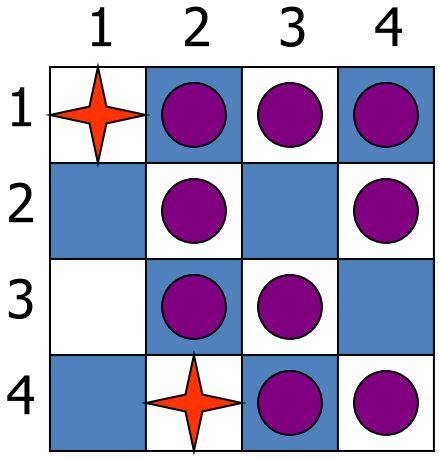


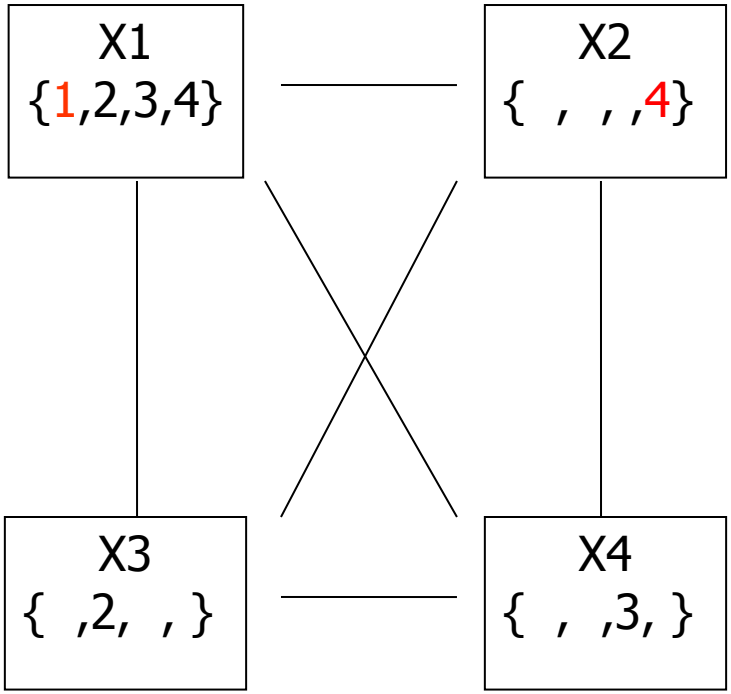
Verificação Adiante: 4-Rainhas



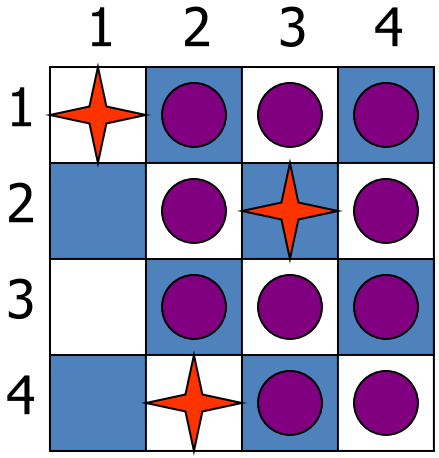


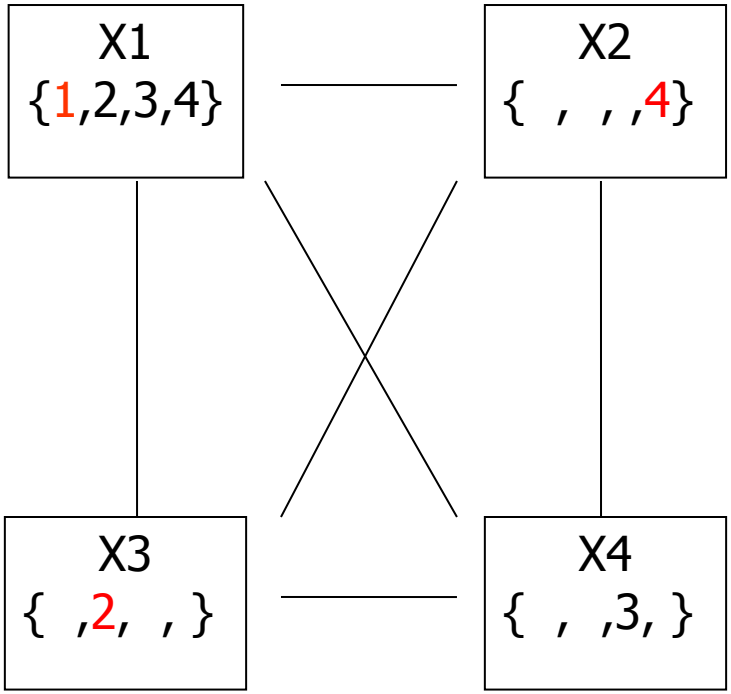
Verificação Adiante: 4-Rainhas



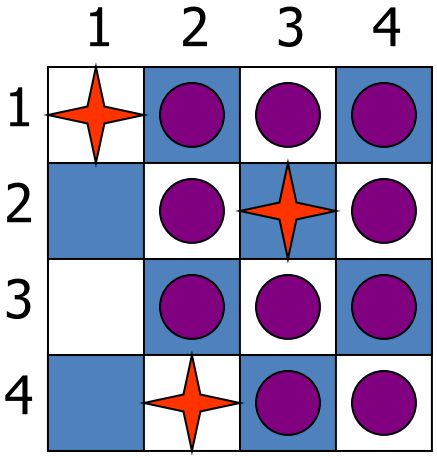


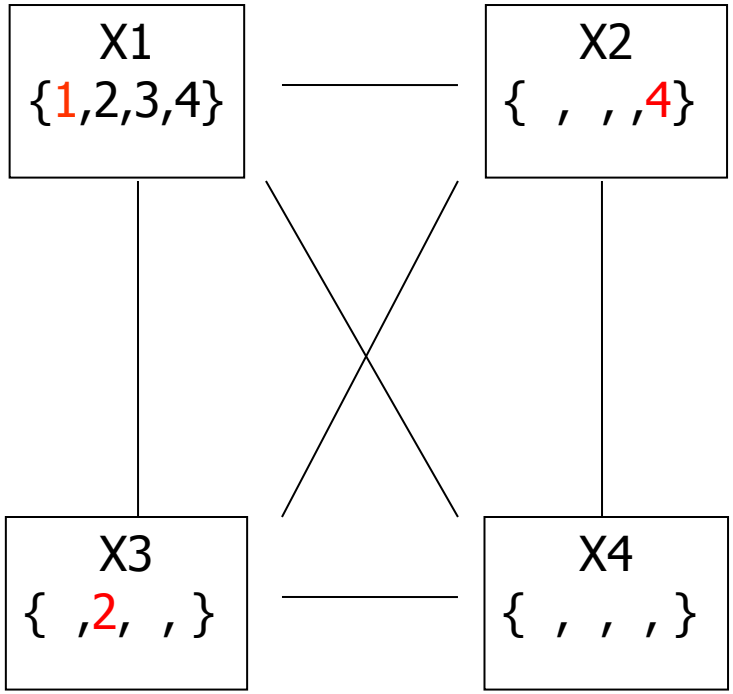
Verificação Adiante: 4-Rainhas



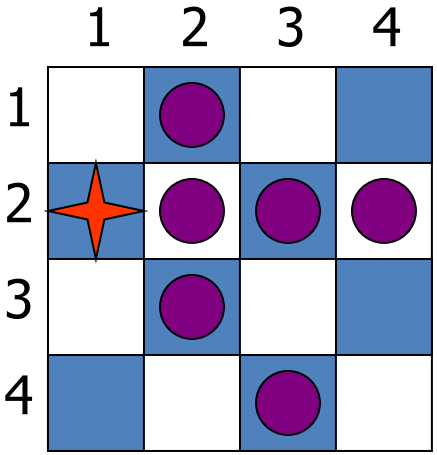


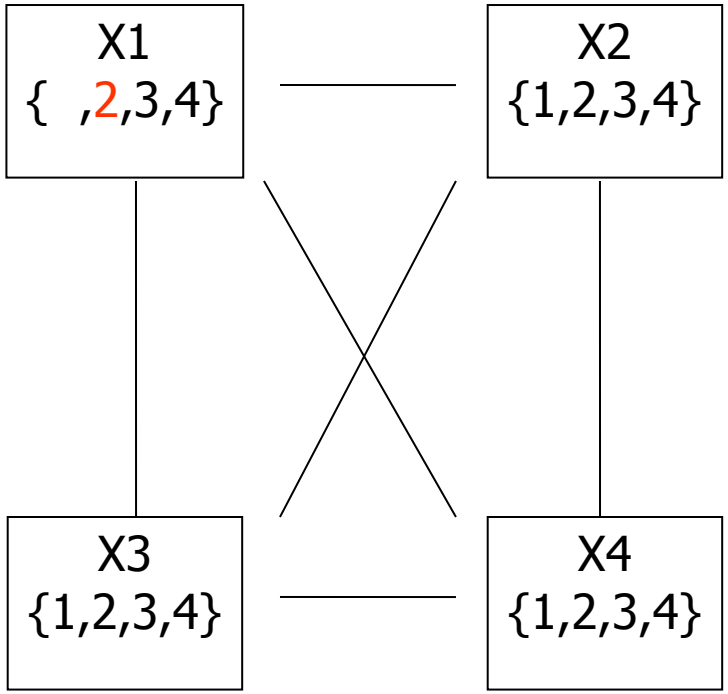
Verificação Adiante: 4-Rainhas



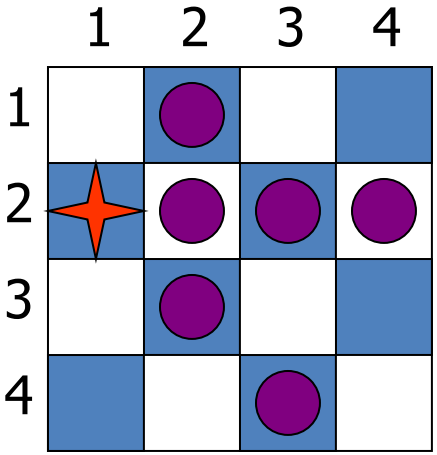


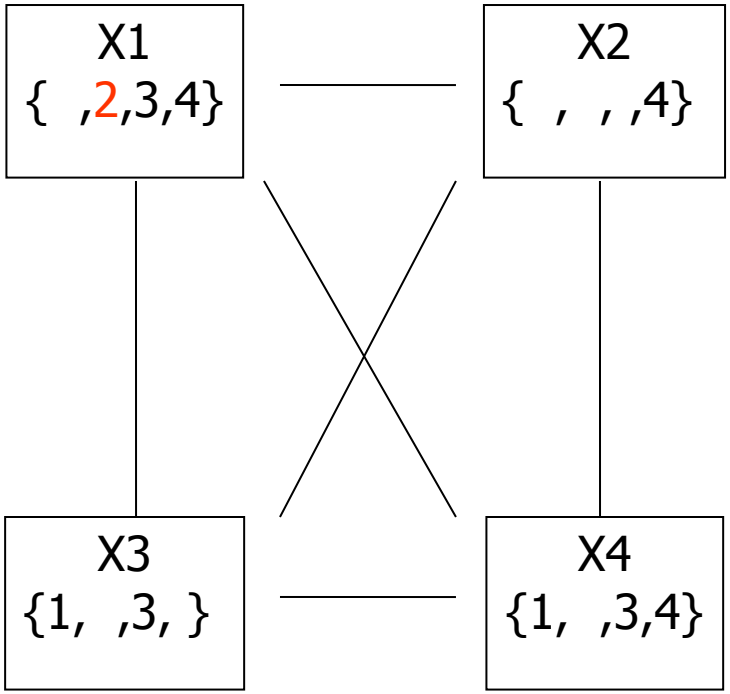
Verificação Adiante: 4-Rainhas



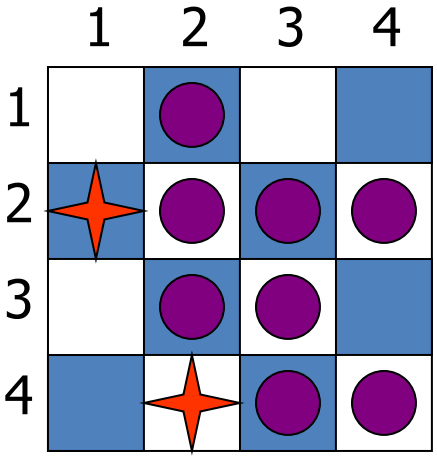


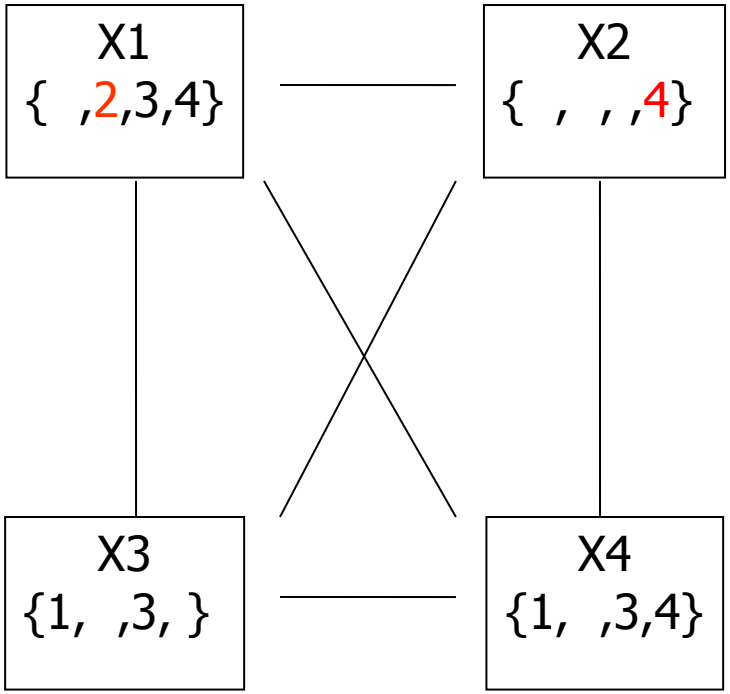
Verificação Adiante: 4-Rainhas



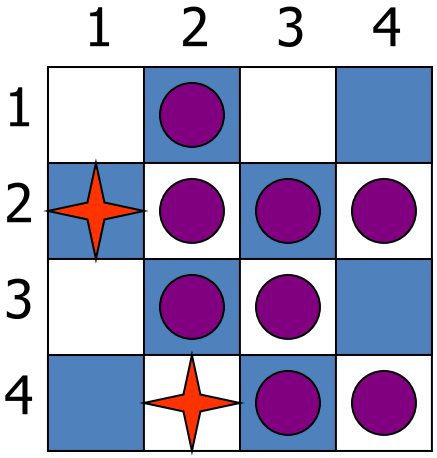


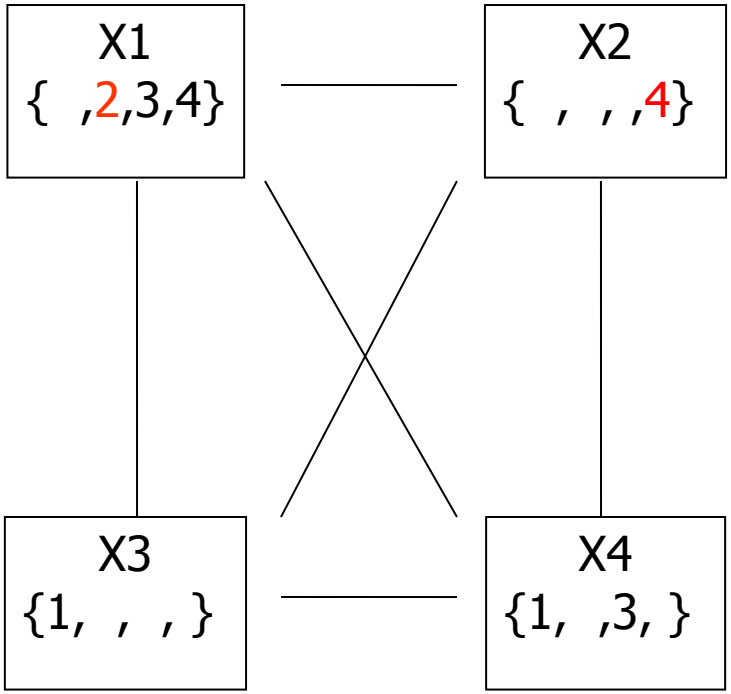
Verificação Adiante: 4-Rainhas



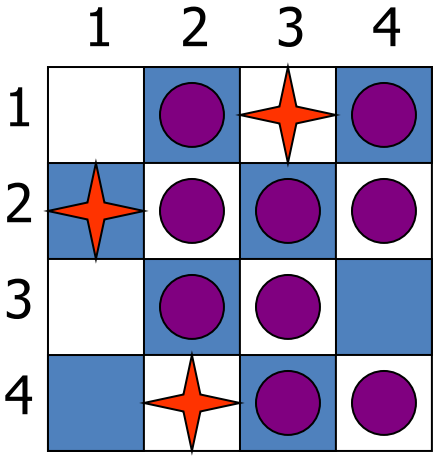


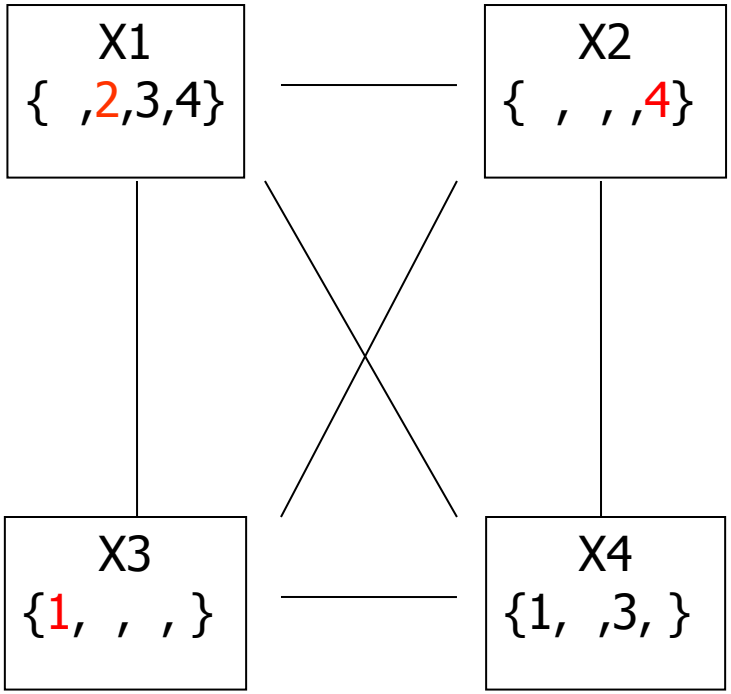
Verificação Adiante: 4-Rainhas



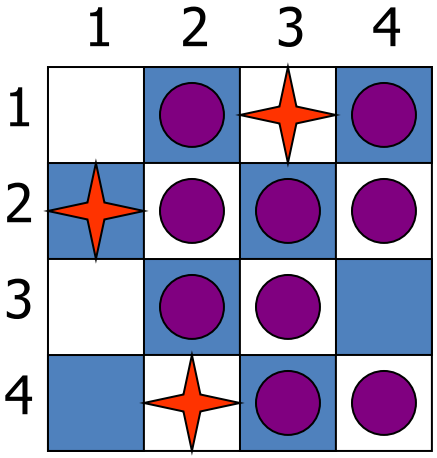


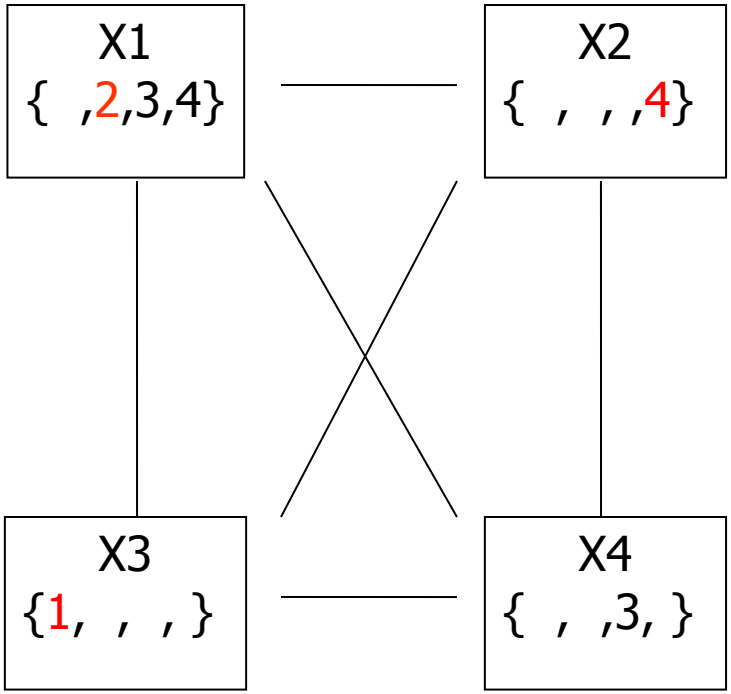
Verificação Adiante: 4-Rainhas





Verificação Adiante: 4-Rainhas





Verificação Adiante: 4-Rainhas