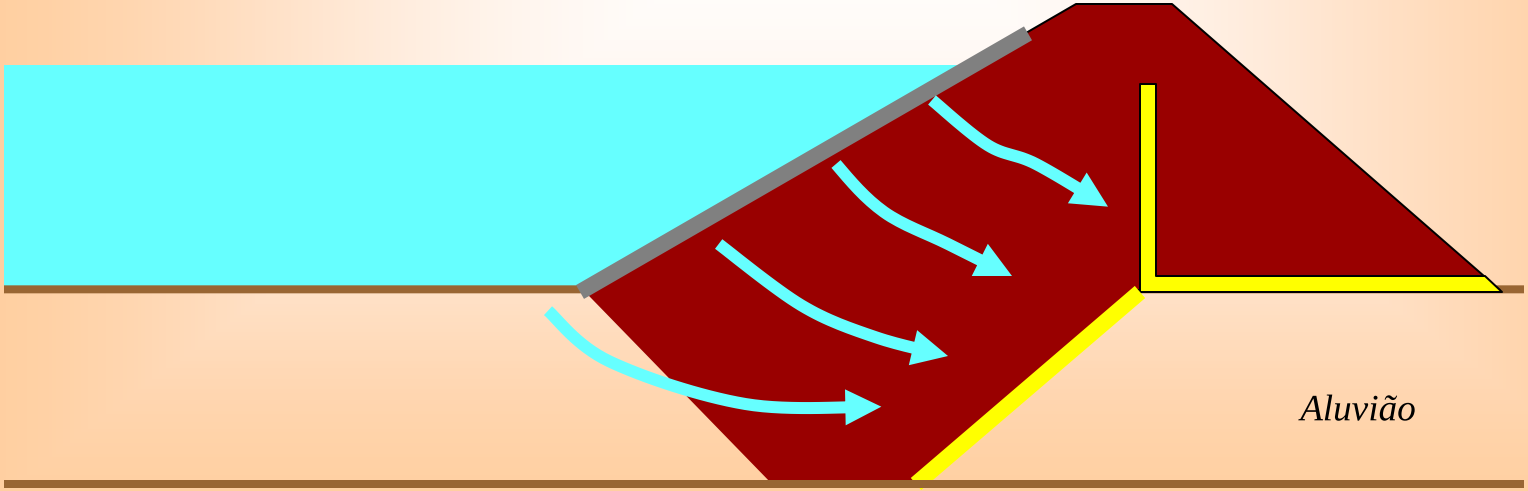
Fluxo em meios porosos

Fernando A. M. Marinho
Waldemar Hachich



Esquemático

Barragem do Funil - RJ

Objetivos dos Estudos de Fluxo

- Estimar a vazão
- Determinar os gradientes
- Determinar a distribuição de pressão neutra
- Entender as variações de tensão efetiva

A equação de balanço de massa pode ser expressa da seguinte forma:

$$\left(\sum E + \sum G\right) - \left(\sum S + \sum P\right) = \sum A$$

Onde:
E = Entrada
G = Geração
S = Saída
P = Perdas
A = Acumulação

Expressão semelhante à do estudo dos permeâmetros, que impunha que a vazão de entrada fosse igual à vazão de saída

Quando o regime é permanente temos que:

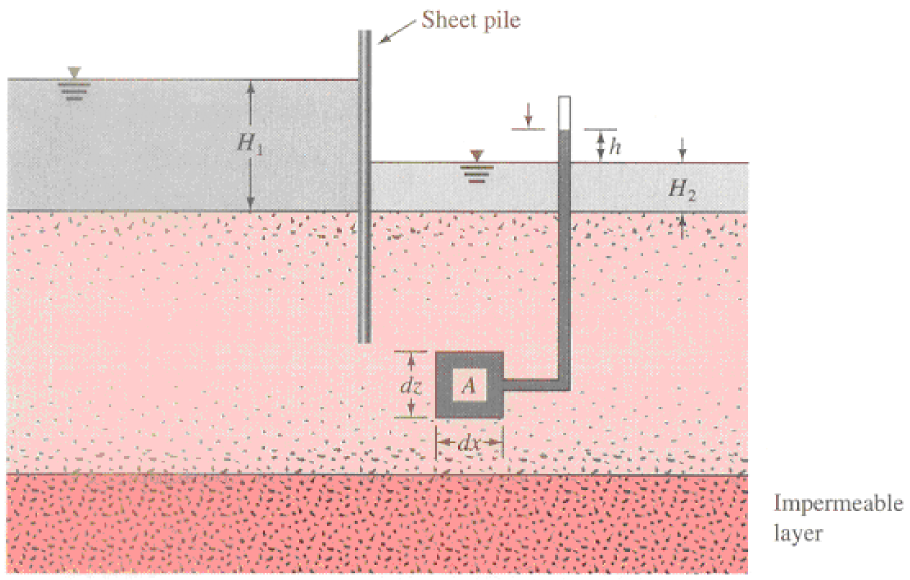
$$\sum A = 0$$

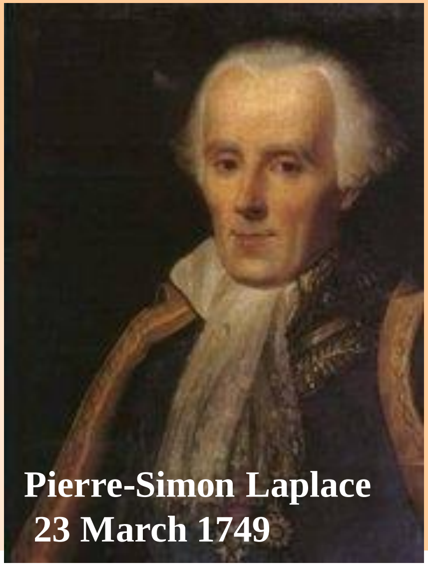
$$\sum G = 0$$

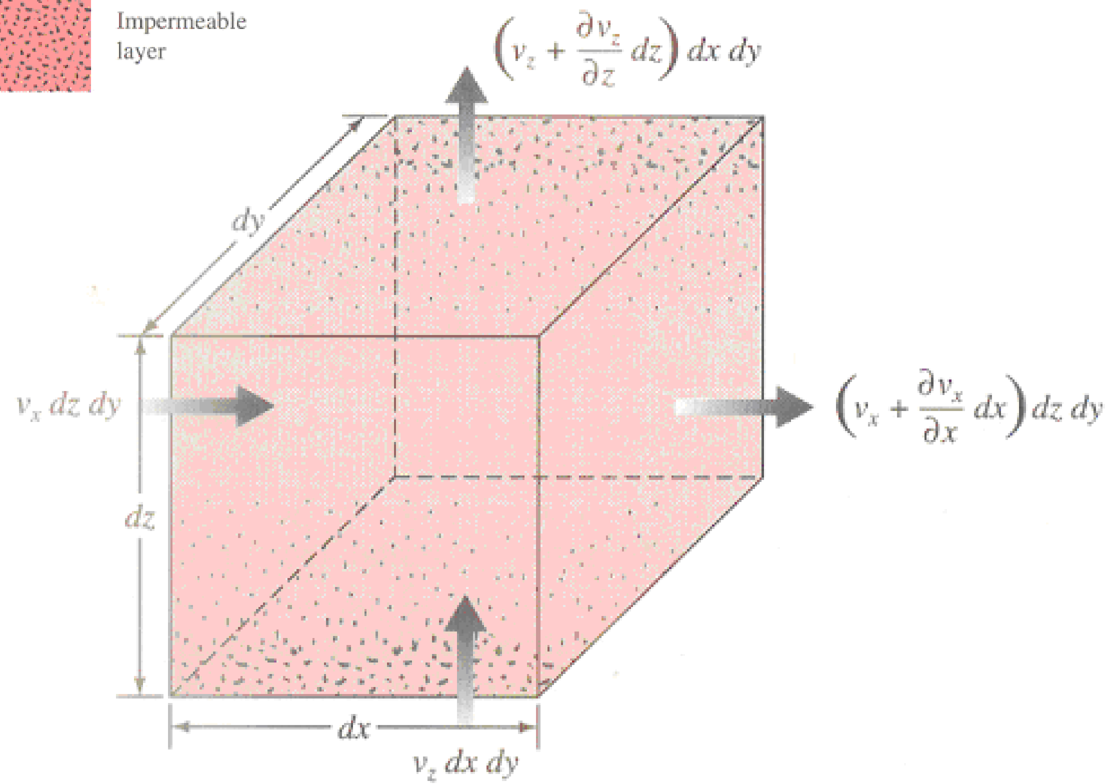
$$\sum P = 0$$

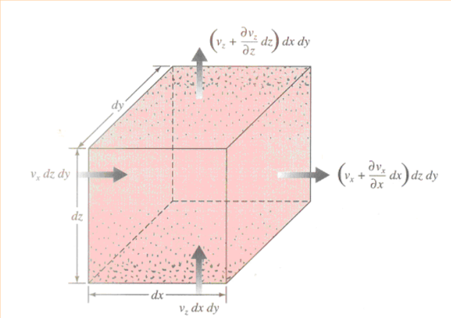
Logo: $$\boxed{\sum E = \sum S}$$

Equação de Laplace









$$\left[\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)dzdy + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dxdy\right] = \left[v_x dzdy + v_z dxdy\right]$$

$$OU$$

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 0$$

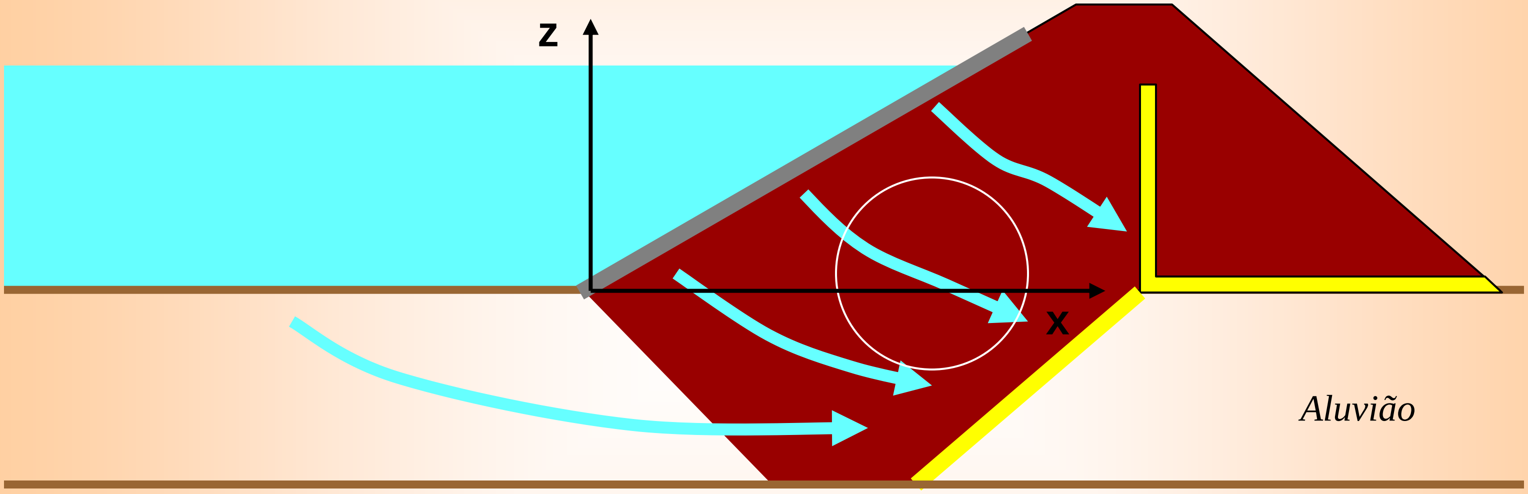
Aplicando a Lei de Darcy temos que:

$$v_x = -k_x i_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

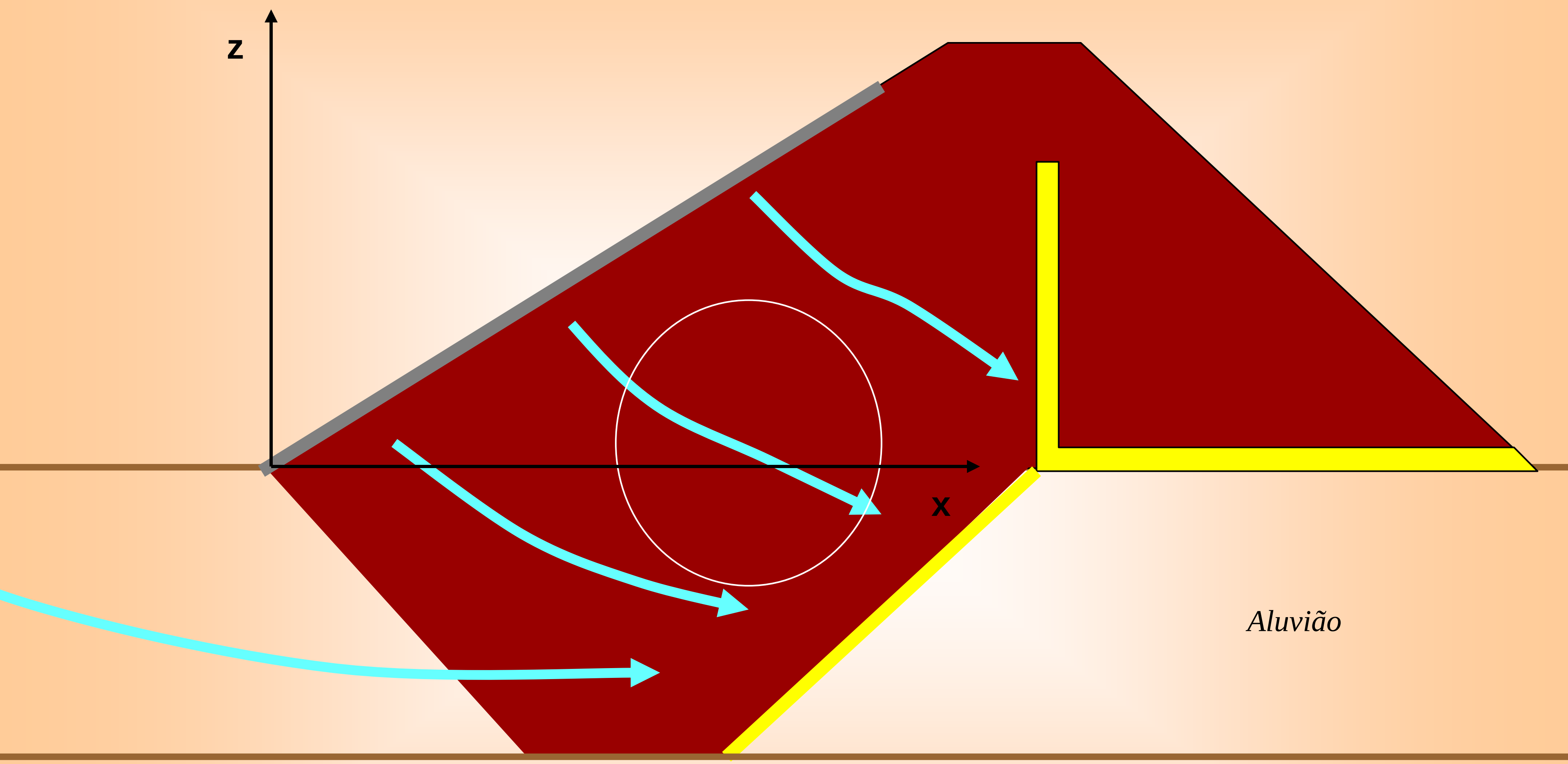
$$v_z = -k_z i_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Se o solo é isotrópico em termos de condutividade hidráulica $k_x = k_z$

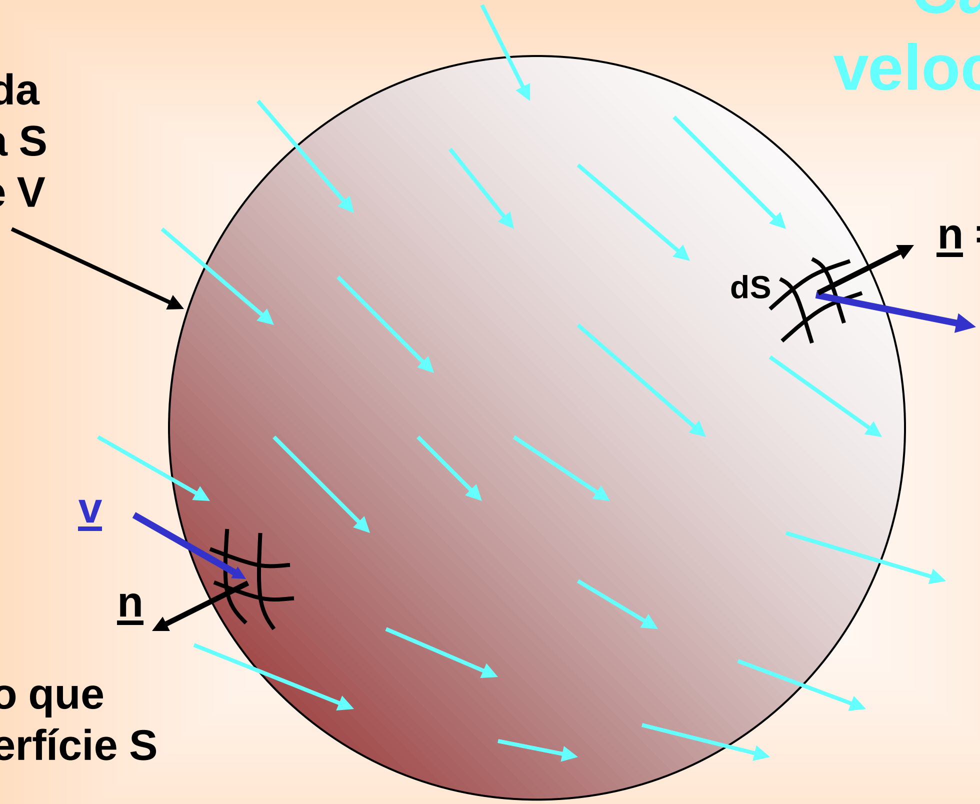


Esquemático


z
x
Aluvião

Campo de velocidades 3D

Superfície fechada 3D qualquer, área S limitando volume V



n = versor normal (|n| = 1)

v = vetor velocidade de percolação

$$\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS =$$

= vazão de fluido que atravessa a superfície S

> 0 ⇒ sai mais do que entra

< 0 ⇒ entra mais do que sai

$\underline{v} \bullet \underline{n} = v_n$ = componente de $\underline{v}$ normal à superfície (produto escalar)

$v_n \,.\, dS$ = vazão de fluido que atravessa a superfície por dS

Conservação de massa $\Rightarrow \sum M_E + \sum M_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = 0$

Teorema do Divergente $$\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = \iiint_V div\, \mathbf{v}\, dV$$

$$div\ \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

Teorema do Divergente $$\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = \iiint_V div\, \mathbf{v}\, dV$$

$$div\ \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

Portanto: $$\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$$

Teorema do Divergente $\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = \iiint_V div\, \mathbf{v}\, dV$

$$div\, \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

Portanto: $\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$

Como V, delimitado por S, foi escolhido arbitrariamente: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

Lei de Darcy: ...

Lei de Darcy: revisão e generalização

Fluxo 1D (como no permeâmetro)

$$Q = k\frac{\Delta h}{L}A$$

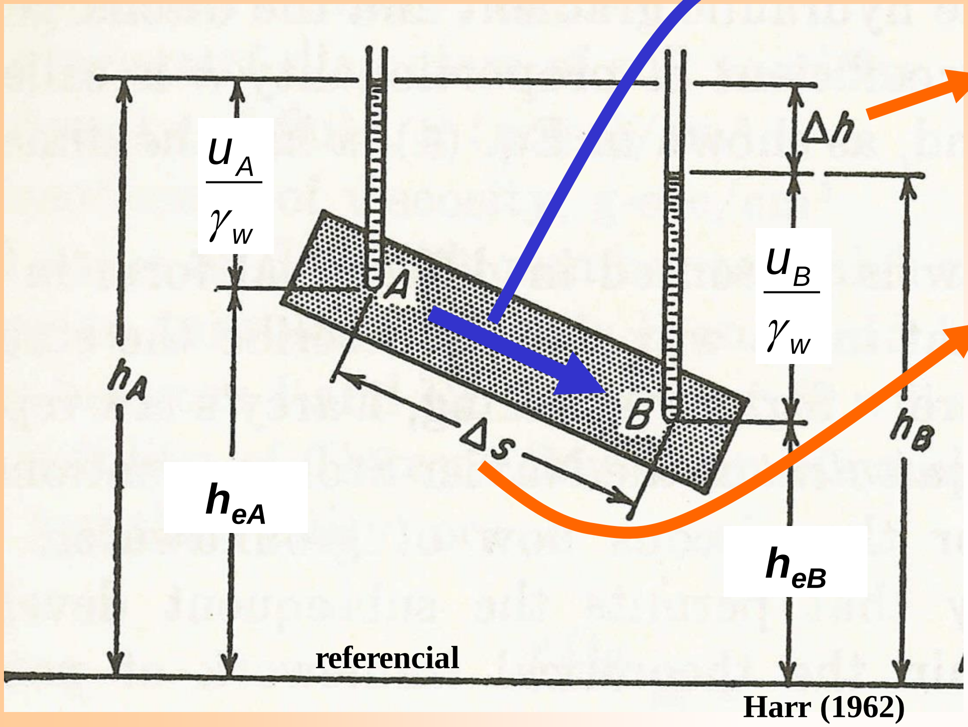
Q - vazão
k – condutividade hidráulica
A - área do permeâmetro

$$\frac{\Delta h}{L} = i \Rightarrow \text{gradiente hidraúlico (médio)}$$

$$v = ki$$

$$\frac{Q}{A} = \text{velocidade de percolação}$$

Se i=1, k é a própria velocidade de percolação da água *v* = velocidade de percolação



Harr (1962)

Δh é a perda de carga total do fluido na distância Δ*s*

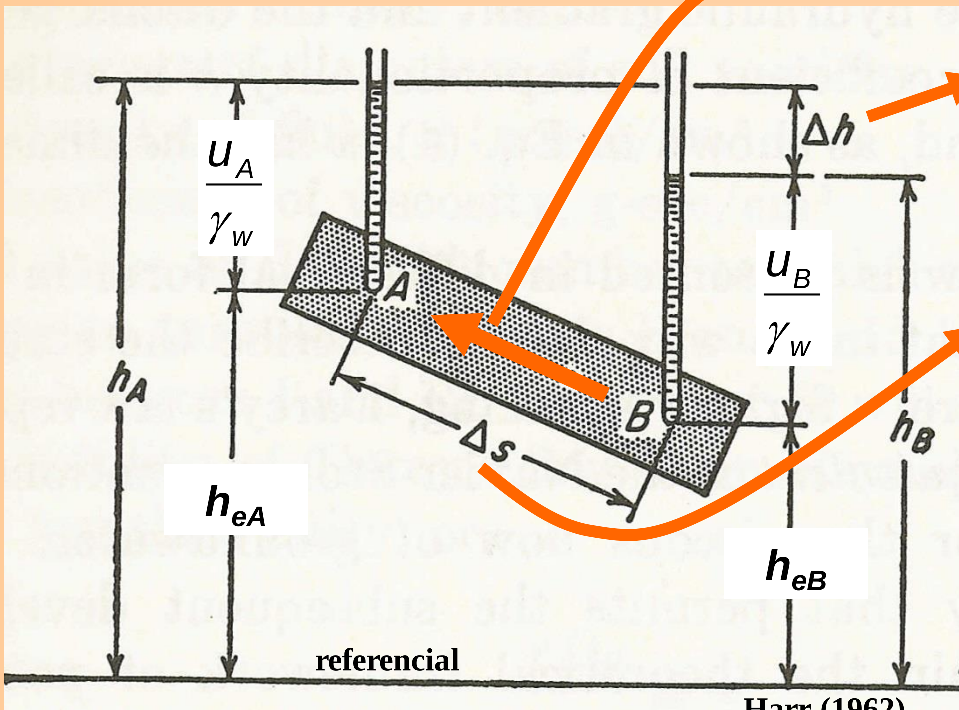
Δs é a distância na qual o fluxo dissipa a carga Δ*h*

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta s}$$

Gradiente hidráulico médio (no trecho Δs do fluxo)

$$i_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{dh}{ds}$$

Gradiente hidráulico pontual (no ponto *s* do fluxo)



Harr (1962)

i = gradiente hidráulico

Δh é a perda de carga total do fluido na distância Δ*s*

Δs é a distância na qual o fluxo dissipa a carga Δ*h*

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta s}$$

Gradiente hidráulico médio (no trecho Δs do fluxo)

$$i_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{dh}{ds}$$

Gradiente hidráulico pontual (no ponto *s* do fluxo)

Gradiente hidráulico é VETOR.

Pensar sempre também na sua direção e no seu sentido.

Operador gradiente (geral)

$$i_x = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$$

$$i_y = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$$

$$i_z = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$$

f – campo escalar, *f*(*x*,*y*,*z*)

3 componentes do VETOR gradiente (**i**=∇**f**)

Aponta, em cada ponto, na direção de maior variação do campo escalar (*f*)

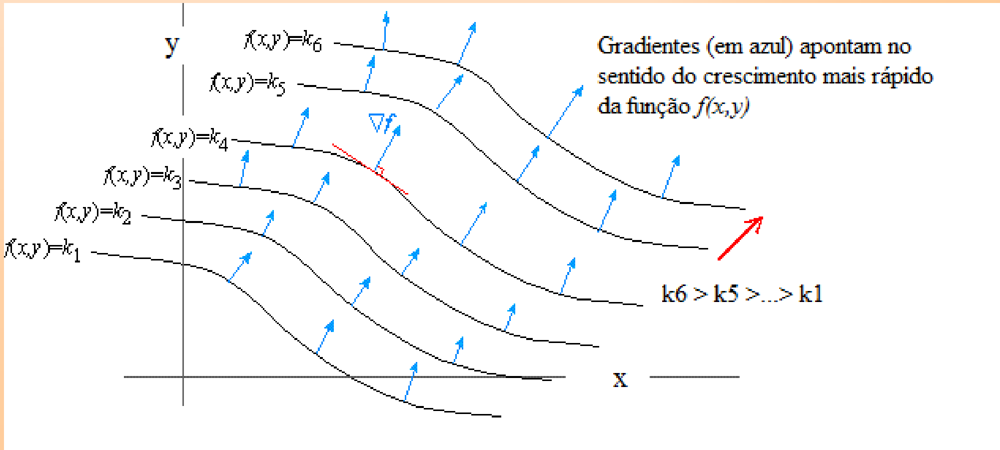
Operador gradiente em 2D (geral)

$$i_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$i_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

f – campo escalar, *f*(*x*,*y*)

2 componentes do VETOR gradiente (**i**=∇**f**)



Operador gradiente (geral)

$$i_x = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

$$i_y = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$$

$$i_z = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

f – campo escalar, *f*(*x*,*y*,*z*)

3 componentes do VETOR gradiente (**i**=∇**f**)

Aponta, em cada ponto, na direção de maior variação do campo escalar (*f*)

Gradiente hidráulico

$$i_x = \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x}$$

$$i_y = \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y}$$

$$i_z = \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z}$$

h – carga hidráulica, campo escalar, $h(x,y,z)$

3 componentes do VETOR gradiente hidráulico (**i**=∇**h**)

Aponta, em cada ponto, na direção de maior variação da carga hidráulica (*h*), portanto ortogonal às linhas de carga hidráulica constante (denominadas **equipotenciais**)

Lei de Darcy generalizada

$$\mathbf{v} = -k\mathbf{i} = -k\nabla h$$

$$v_x = -k\,\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = -k\,\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$v_z = -k\,\frac{\partial h}{\partial z}$$

v – vetor velocidade de percolação

i - vetor gradiente hidráulico (**i**=∇**h**)

Se $k_x = k_y = k_z = k$, solo isotrópico

velocidade na direção do gradiente hidráulico, mas com sentido contrário

Teorema do Divergente $$\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = \iiint_V div\, \mathbf{v}\, dV$$

$$div\ \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

Portanto: $$\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$$

Como V, delimitado por S, foi escolhido arbitrariamente: $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Lei de Darcy: **$\underline{\mathbf{v}}$ = -k $\underline{\nabla}$h**

$$\nabla h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \text{(gradiente hidráulico)}$$

Portanto: $$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \qquad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} \qquad v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$$

Teorema do Divergente $\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = \iiint_V div\, \mathbf{v}\, dV$

$$div\ \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

Portanto: $\oiint_S (\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})\, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$

Como V, delimitado por S, foi escolhido arbitrariamente: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

Lei de Darcy: **$\underline{v}$ = -k $\underline{\nabla}$h**

$$\nabla h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \text{(gradiente hidráulico)}$$

Portanto: $v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \qquad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} \qquad v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$

Substituindo: $-k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = 0$

Como k ≠ 0: $\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Equação de Laplace} \quad \nabla^2 h = 0}$

Teorema do divergente aplicado
à conservação de massa

$$div\ \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Lei de Darcy

$$v_x = -k\frac{\partial h}{\partial x} \qquad v_y = -k\frac{\partial h}{\partial y} \qquad v_z = -k\frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Equação de Laplace} \quad \nabla^2 h = 0}$$

Observação importante

Em meio isotrópico a solução, em termos de cargas hidráulicas, não depende da condutividade hidráulica!

Simplificação para 2D

- O fluxo na direção y, se existir, não influencia o fluxo nas demais direções

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

- Laplace 2D

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Simplificação para 1D

- Os fluxos nas direções y e z, se existirem, não influenciam o fluxo n direção x

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

- Laplace 1D

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0}$$

Fluxo 1D

- Solução exata simples (integração)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial x} = C \quad \Rightarrow \quad h = Cx + D$$

- Condições de contorno para definir C e D

Solução exata do fluxo 1D

- Condições de contorno para h = Cx + D
  - **Em $x = x_M$, $h = h_M$** $\Rightarrow h_M = C\,x_M + D$
  - **Em $x = x_J$, $h = h_J$** $\Rightarrow h_J = C\,x_J + D$

$$C = \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J} = \frac{\Delta h}{-L} = -i \qquad D = h_M + i x_M$$

- Solução

$$h = \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J} x + h_M - \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J} x_M \qquad \boxed{h = h_M + \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J}\left(x - x_M\right)}$$

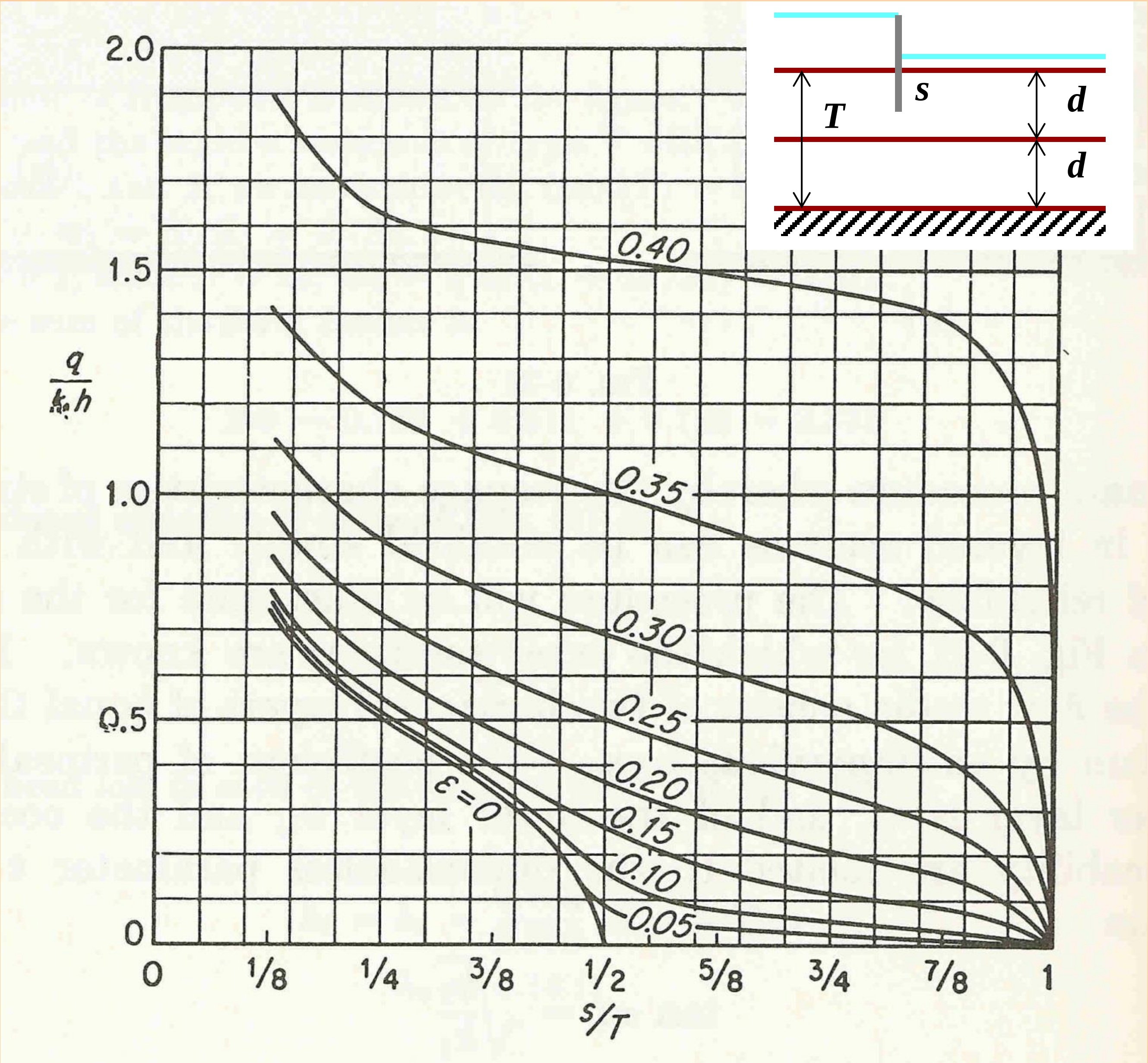
- Ou, conforme utilizado nos permeâmetros

$$h = h_M - i(x - x_M)$$

Métodos para Resolver a Equação de Laplace

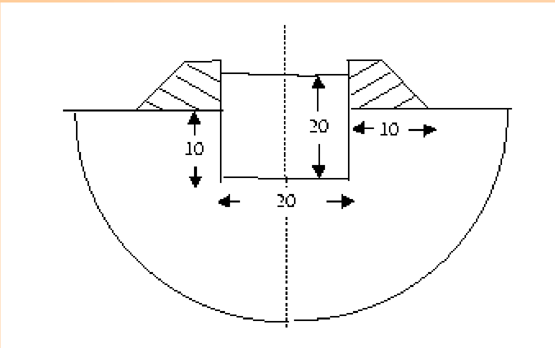
- **Solução exata: h = h(x,y,z)**
  - **integração da equação diferencial: problema matemático (não de Engenharia) com soluções disponíveis apenas para geometrias, distribuições de condutividades hidráulicas e condições de contorno simples**
- **Soluções aproximadas: h obtida em diversos pontos do domínio de fluxo**
  - **soluções analógicas: fenômenos similares em outras disciplinas (eletricidade, transferência de calor, magnetismo) obedecem à mesma equação de Laplace**
  - **soluções numéricas**
    - **diferenças finitas**
    - **elementos finitos**
    - **elementos de contorno**
  - **solução gráfica: rede de fluxo (**atualmente é sobretudo um recurso de interpretação de resultados obtidos numericamente, do que propriamente um processo de solução**)**

Solução matemática exata

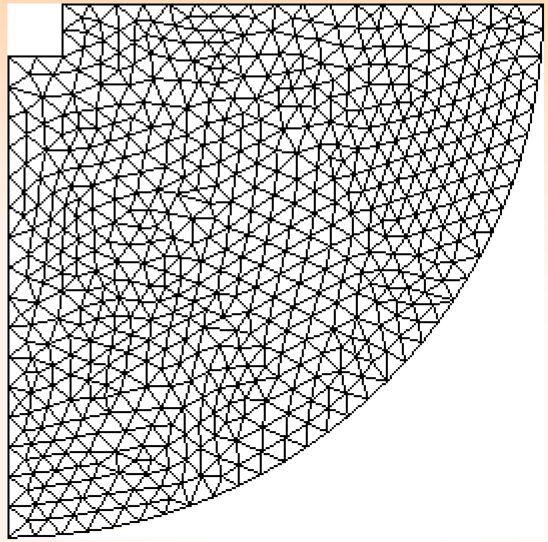


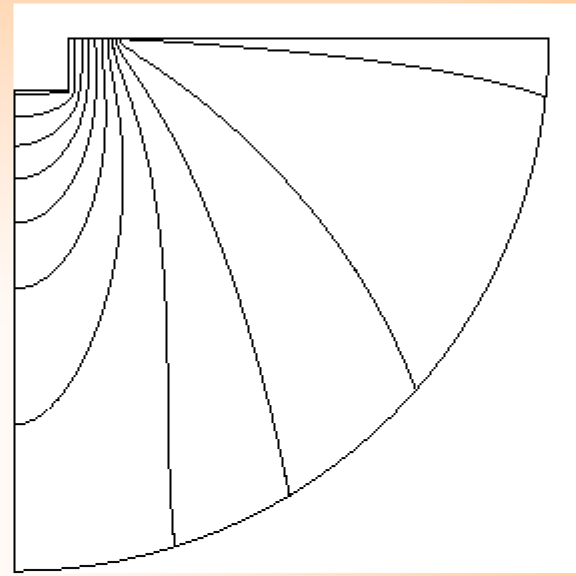
$$\boxed{\tan \pi\varepsilon = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}$$

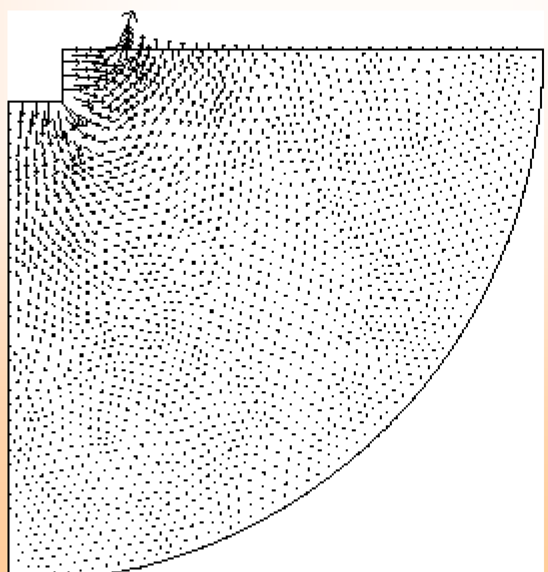
Solução numérica

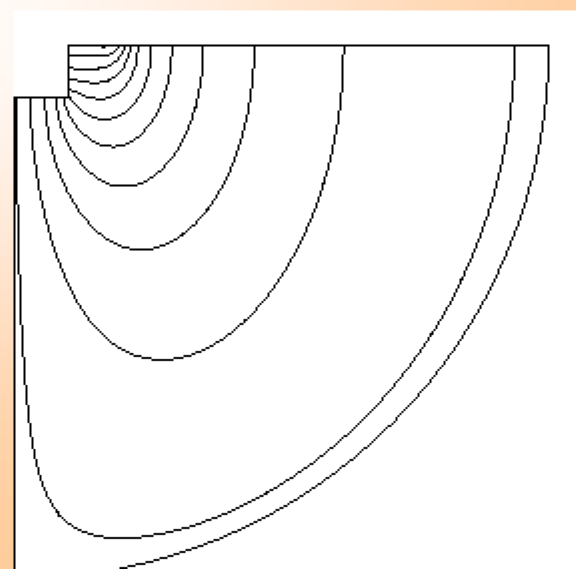


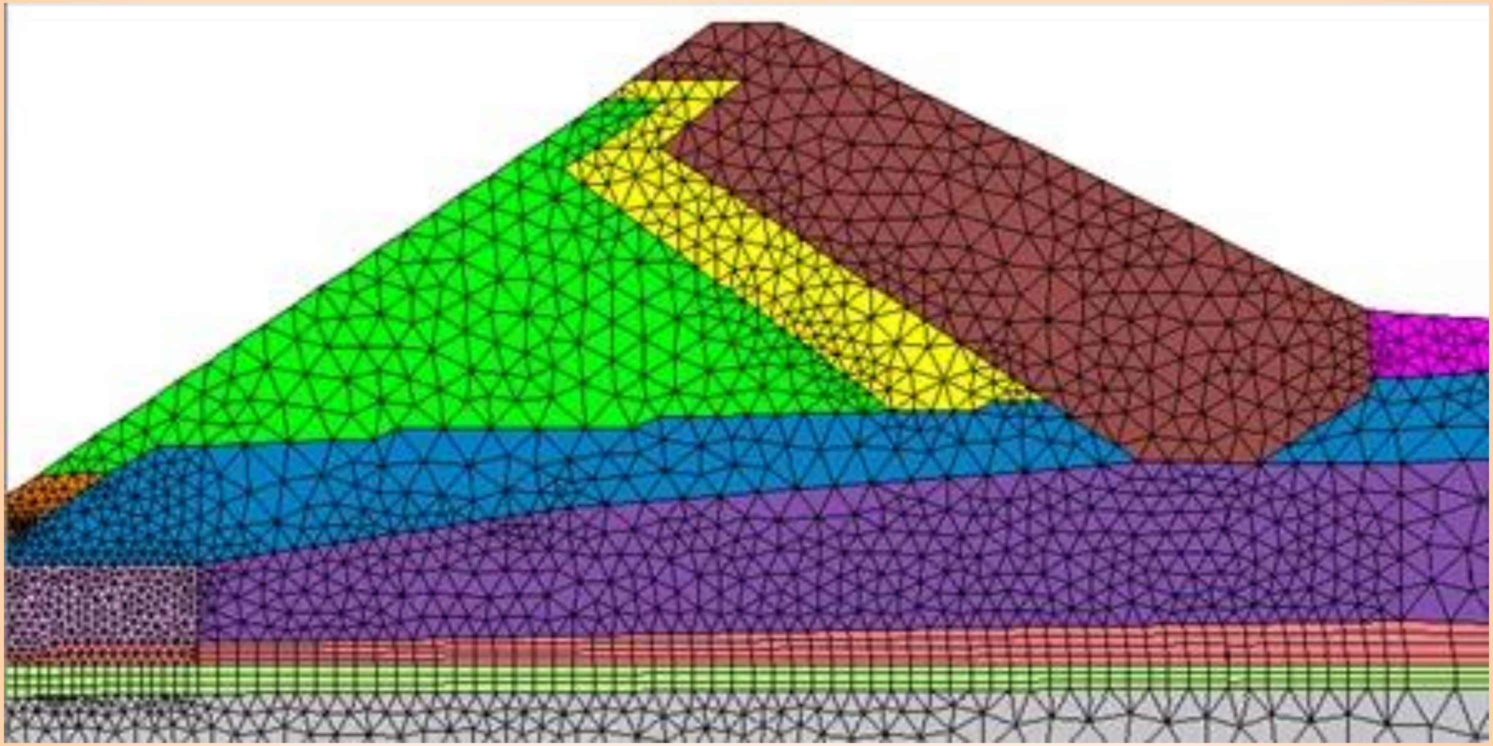
$$k_y = 3k_x$$



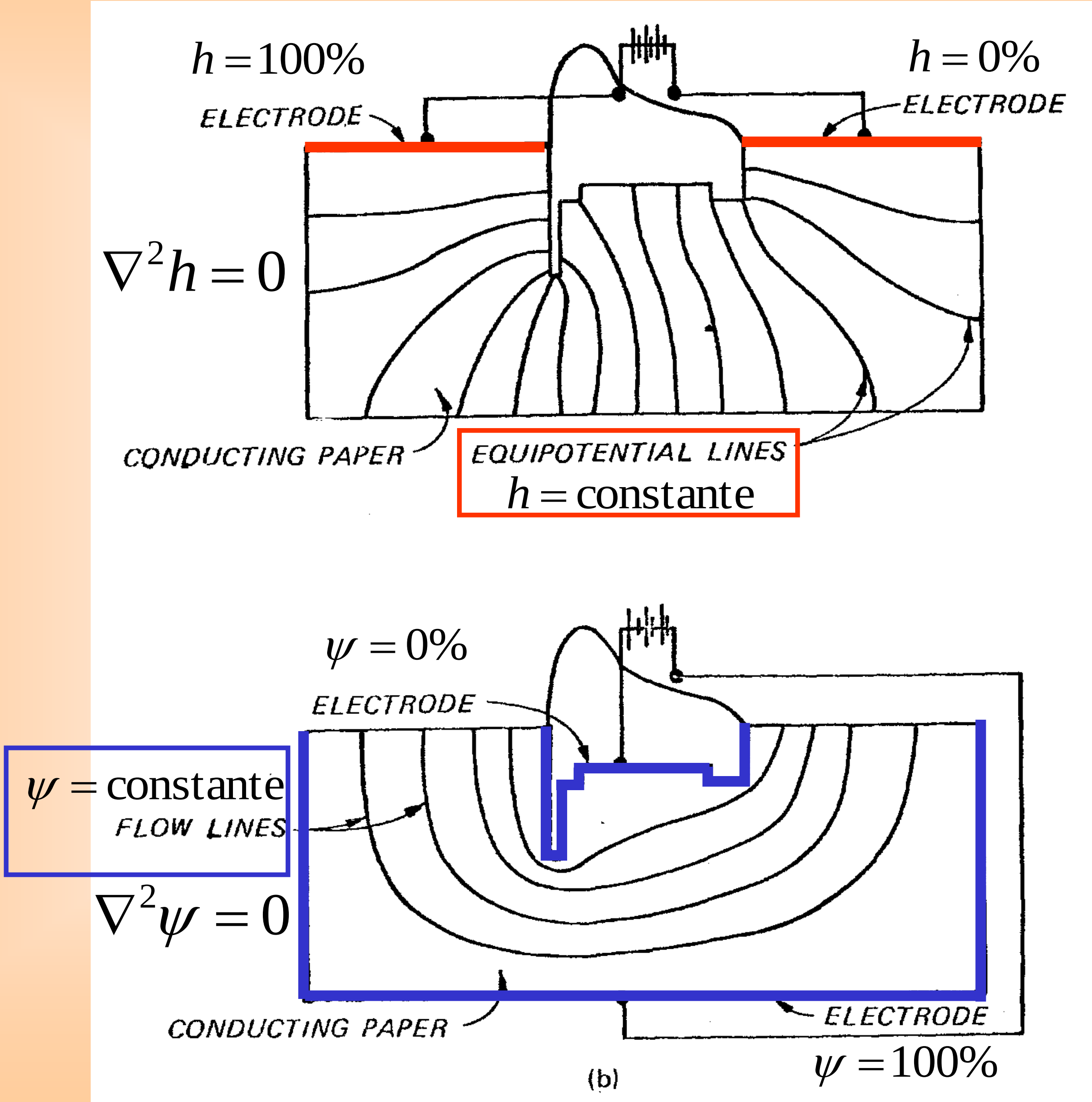




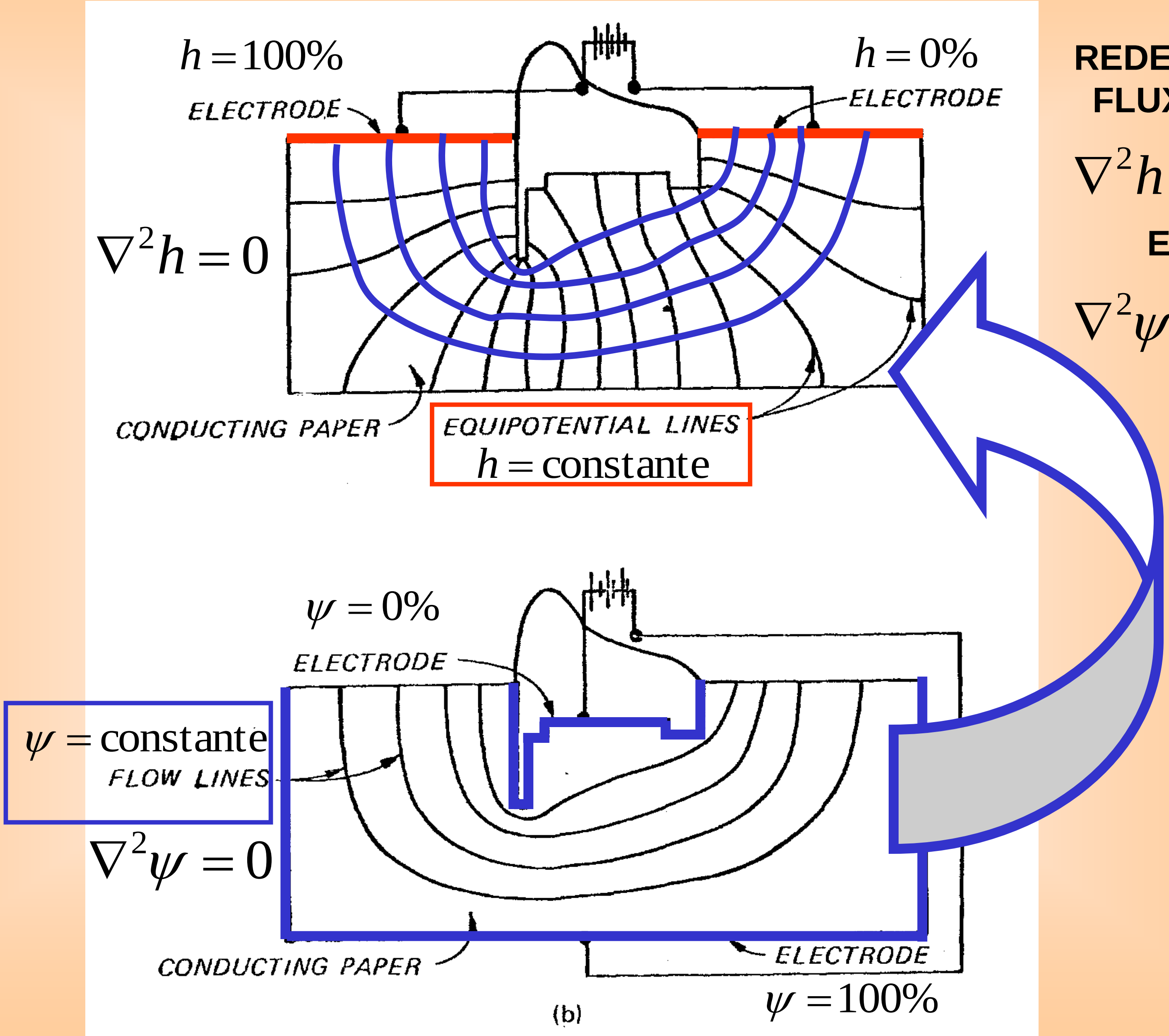




Análogia elétrica



Análogia elétrica



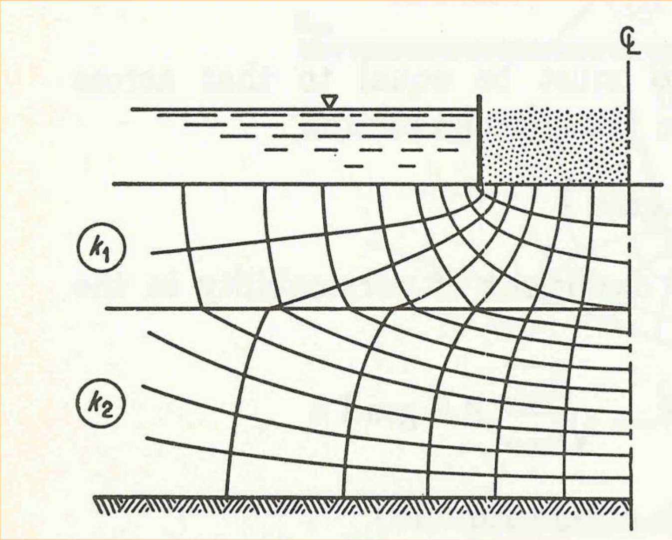
REDE DE FLUXO

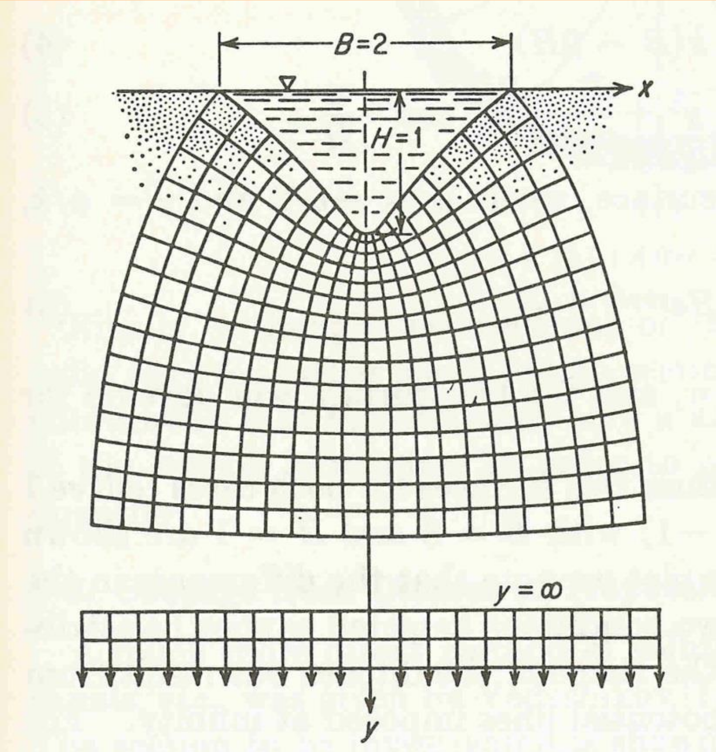
$$\nabla^2 h = 0$$

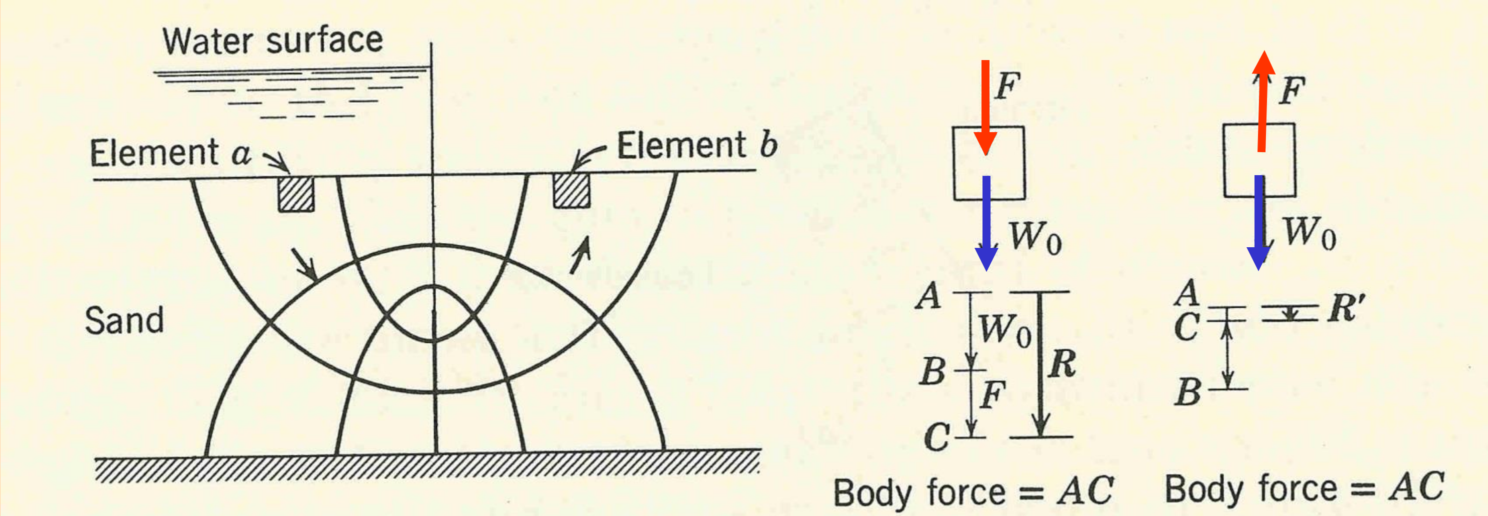
E

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Solução gráfica



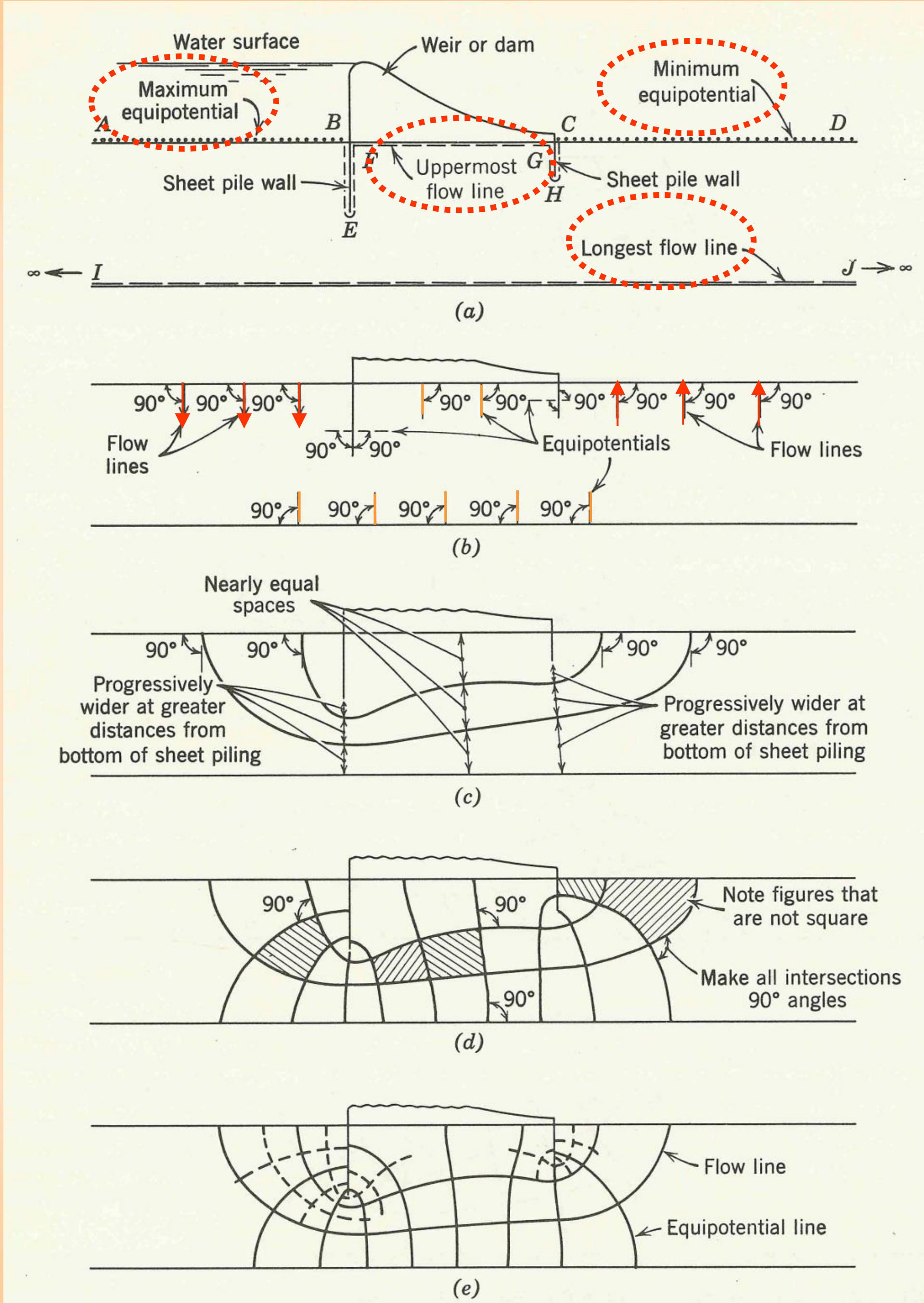




(a) (b) (c)

obrigatórias para qualquer processo de solução

requisitos específicos para o traçado de redes de fluxo



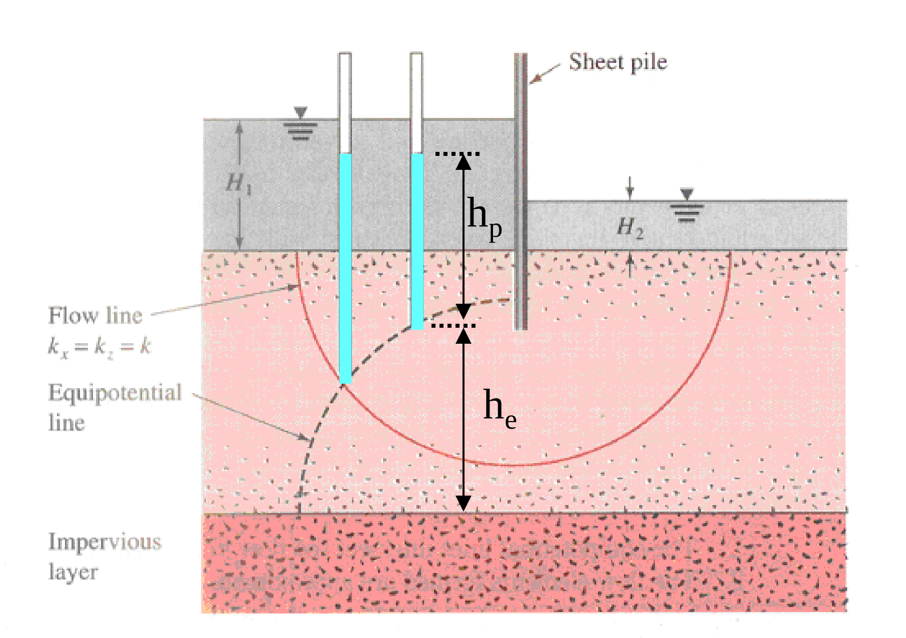
Condições de contorno

início das linhas de fluxo e equipotenciais

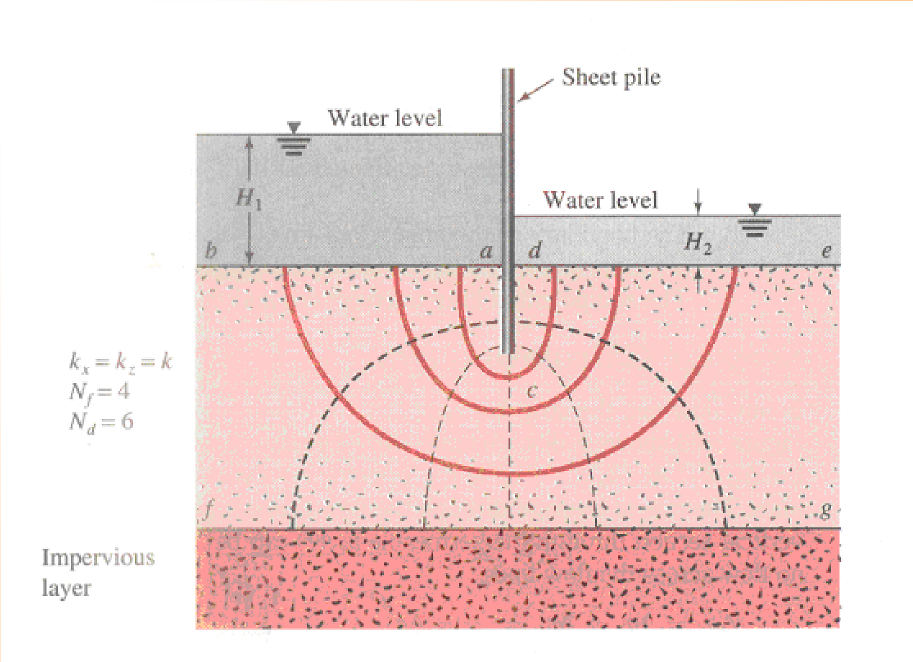
Primeira tentativa de traçado da linhas de fluxo

Tentativa de traçado

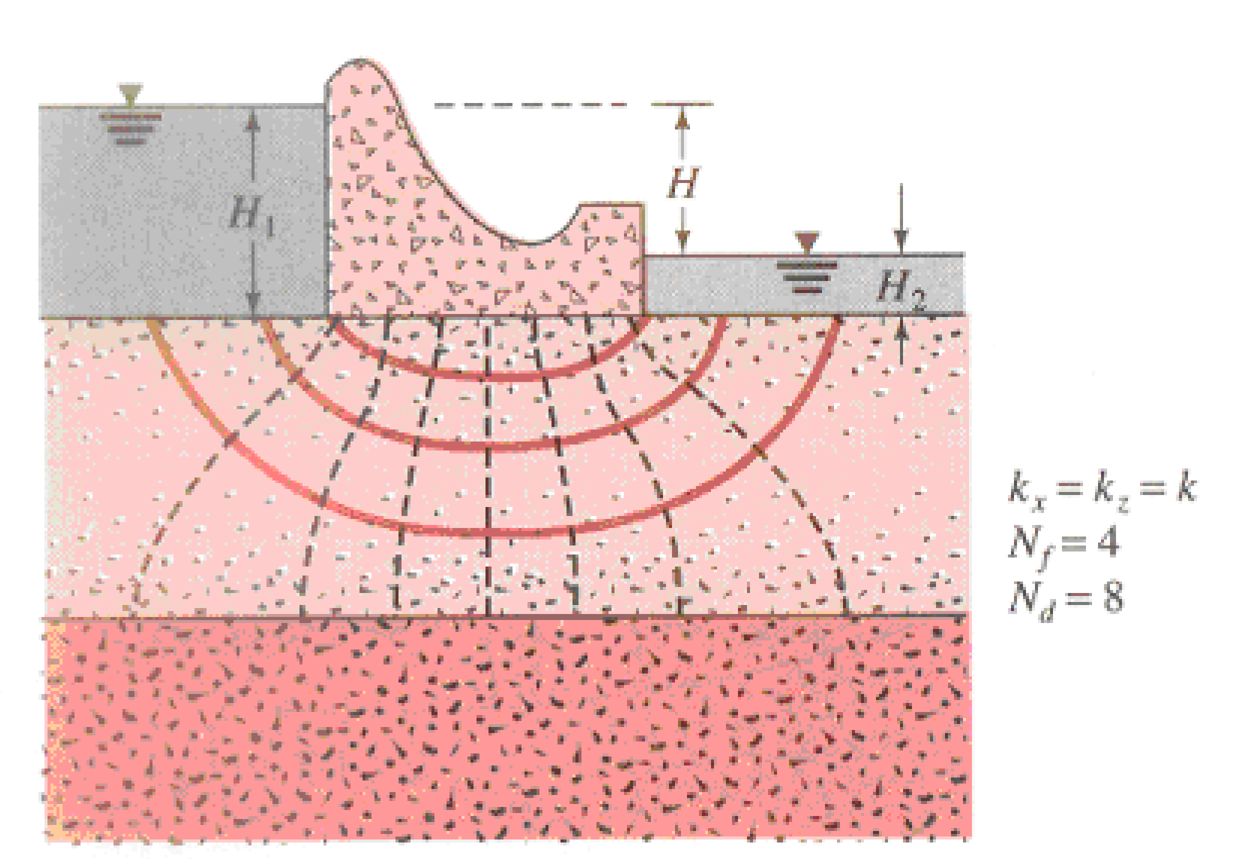
Final



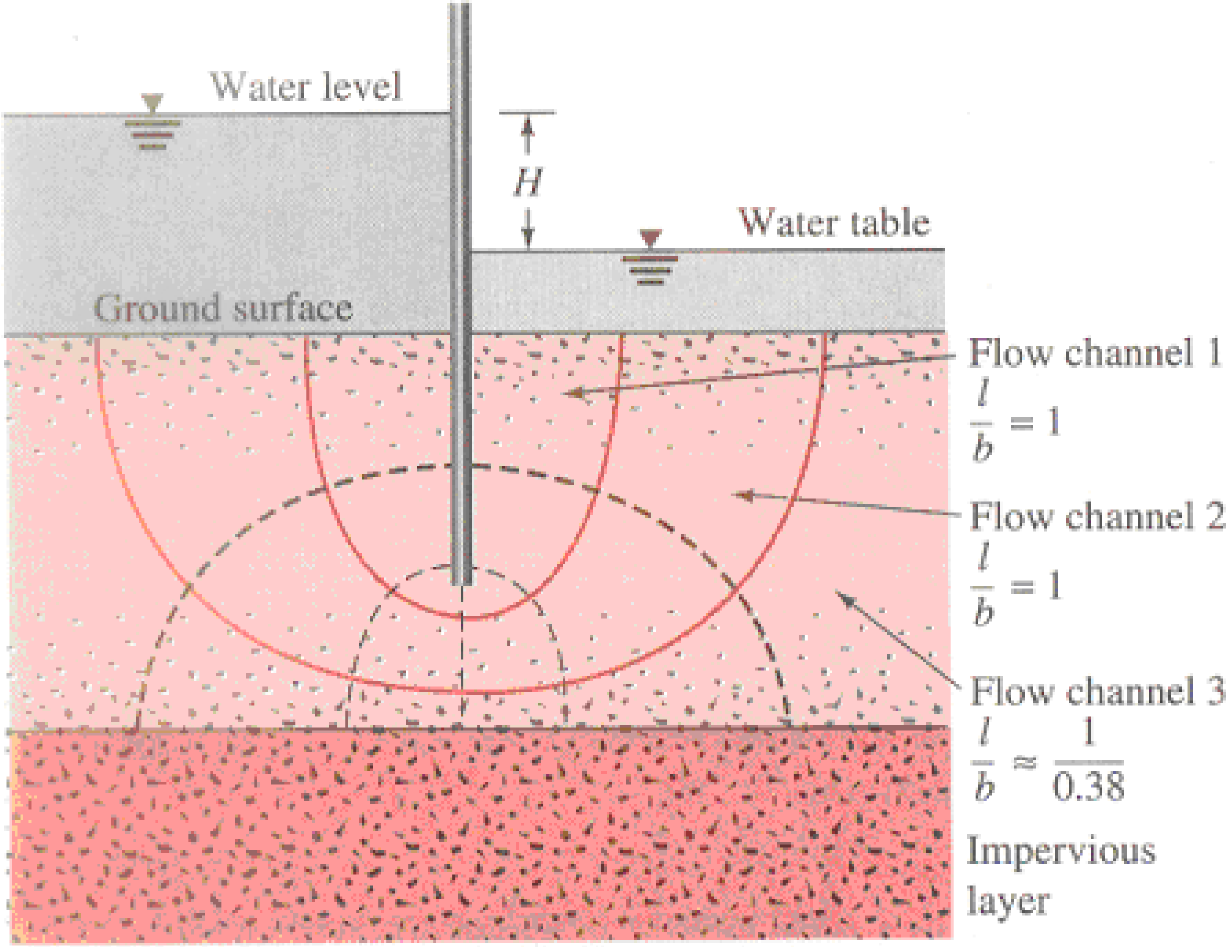
Determinação da pressão neutra em qualquer ponto da região de fluxo, a partir das equipotenciais

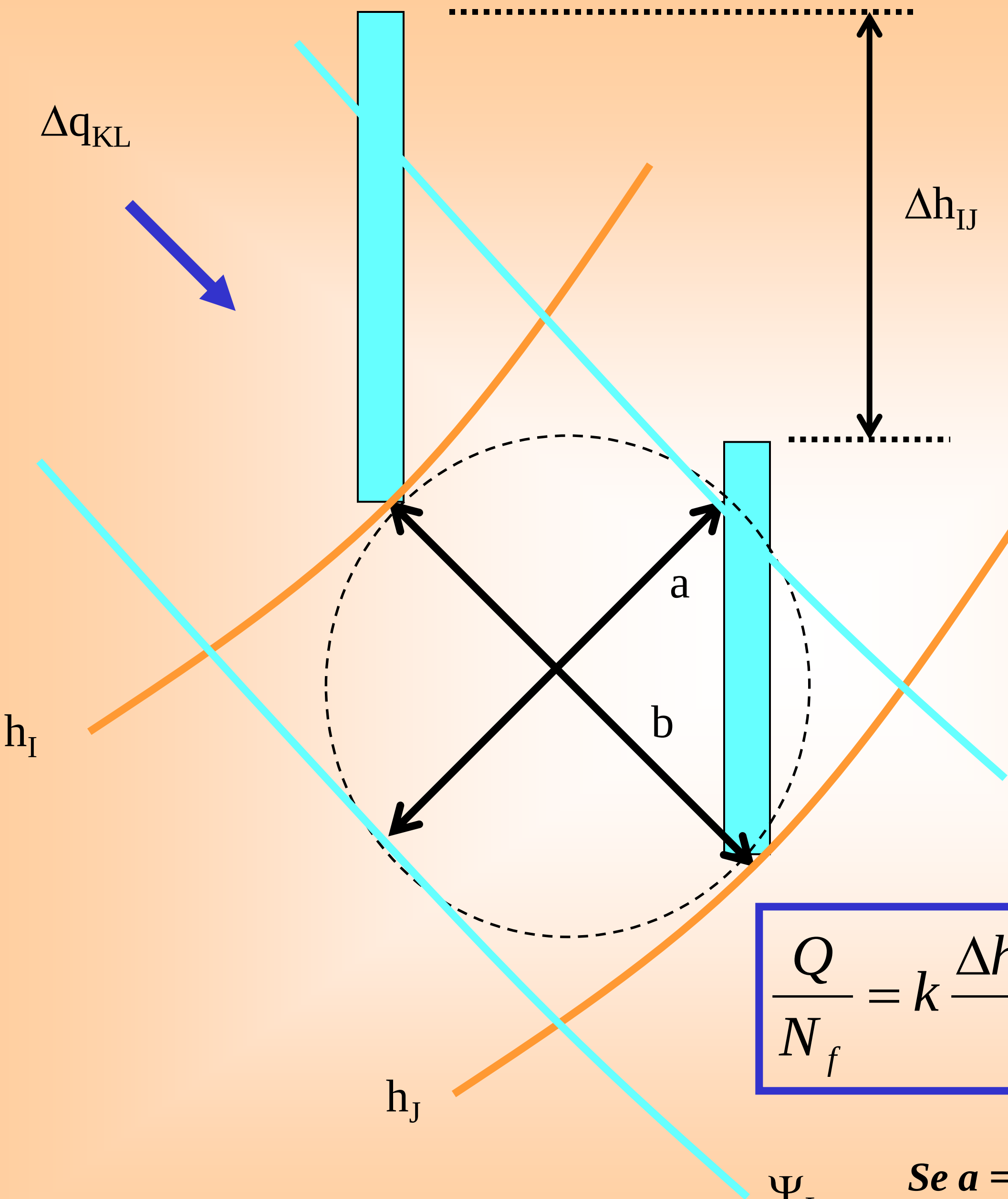


Explorar simetria, sempre que houver (só metade do domínio de fluxo ao lado precisa ser analisado)



H
H1
H2
kx = kz = k
Nf = 4
Nd = 8


Water level
H
Water table
Ground surface
Flow channel 1
$\frac{l}{b} = 1$
Flow channel 2
$\frac{l}{b} = 1$
Flow channel 3
$\frac{l}{b} \approx \frac{1}{0.38}$
Impervious
layer



$$\Psi_K - \Psi_L = \frac{Q}{N_f} = \Delta q_{KL}$$

N_f – Número de canais de fluxo

$$h_I - h_J = \frac{\Delta h}{N_d} = \Delta h_{IJ}$$

N_d – Número de quedas de potencial hidráulico

Lei de Darcy

$$\Delta q_{KL} = k\frac{\Delta h_{IJ}}{b}(a \times 1)$$

i

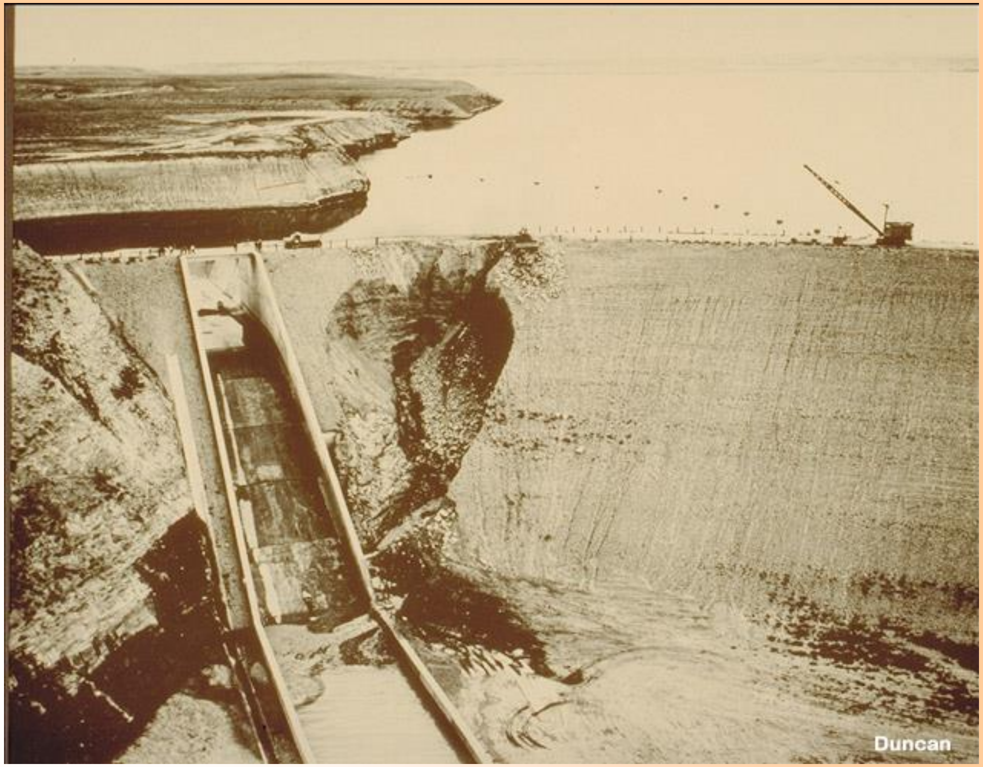
A

$$\boxed{\frac{Q}{N_f} = k\frac{\Delta h / N_d}{b} a \times 1 \Rightarrow Q = k\Delta h \frac{a}{b}\frac{N_f}{N_d}}$$

Se a = b (mais simples para o traçado)

$$\boxed{Q = k\Delta h \frac{N_f}{N_d}}$$

Barragem Baldwin Hills (rompeu em 1963 por "piping")



Barragem Fontenelle, USA (1965)

Filtros-drenos

Objetivos:

- ✓ ***impedir os finos de serem carreados (função filtro)***
- ✓ ***facilitar a drenagem (função dreno)***

Usados em:

- *Barragens*
- *Muros de arrimo*

Materiais de Filtro:

- *Solos granulares*
- *Geotêxteis*

Projeto de filtro-dreno com material granular

Critério de Retenção:

$D_{15,\ \mathrm{filtro}} < 5\ D_{85,\ \mathrm{solo}}$

O material do filtro não pode ser muito grosso (para reter o solo a ser protegido)

Critério de Permeabilidade:

$D_{15,\ \mathrm{filtro}} > 4\ D_{15,\ \mathrm{solo}}$

O material do filtro não pode ser muito fino (para drenar "livremente", isto é, com $u \cong 0$)

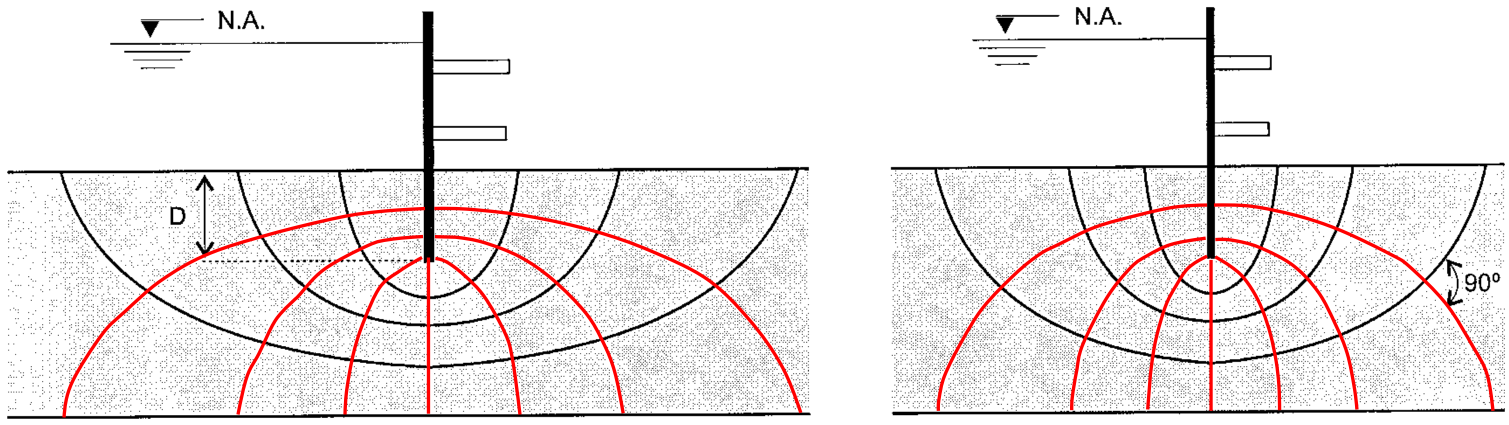
Terzaghi & Peck (1967)

Meio anisotrópico 2D

- Se às direções x e z correspondem as condutividades hidráulicas maior (k_x) e menor (k_z)...
- Darcy $\Rightarrow$ $v_x = -k_x \dfrac{\partial h}{\partial x}$ $\qquad v_z = -k_z \dfrac{\partial h}{\partial z}$
- Laplace 2D $k_x \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$

ou $\dfrac{k_x}{k_z} \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$

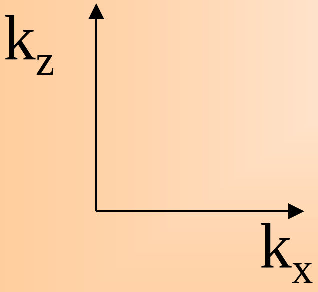
Anisotropia de Permeabilidade



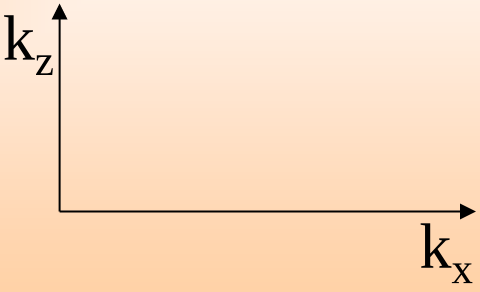
a) Seção verdadeira (escala natural)

b) Seção transformada

Pinto (2000)



isotrópico



anisotrópico

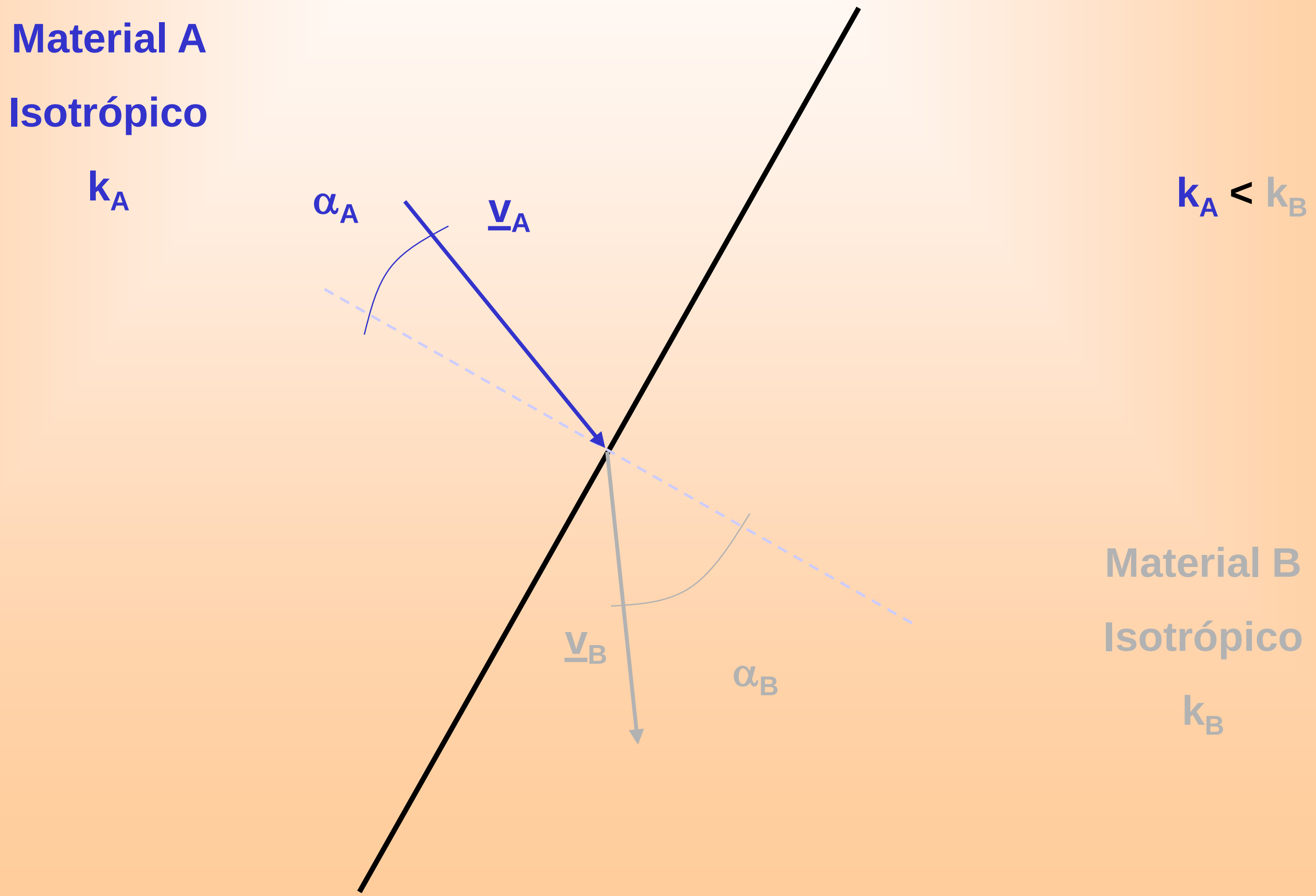
$$\boxed{x_T = x\sqrt{\frac{k_z}{k_x}}}$$

$$\boxed{k_E = \sqrt{k_x k_z}}$$

Observação importante

Em meio anisotrópico a solução, em termos de cargas hidráulicas, depende apenas dos valores relativos das condutividades hidráulicas!

Heterogeneidade descontínua

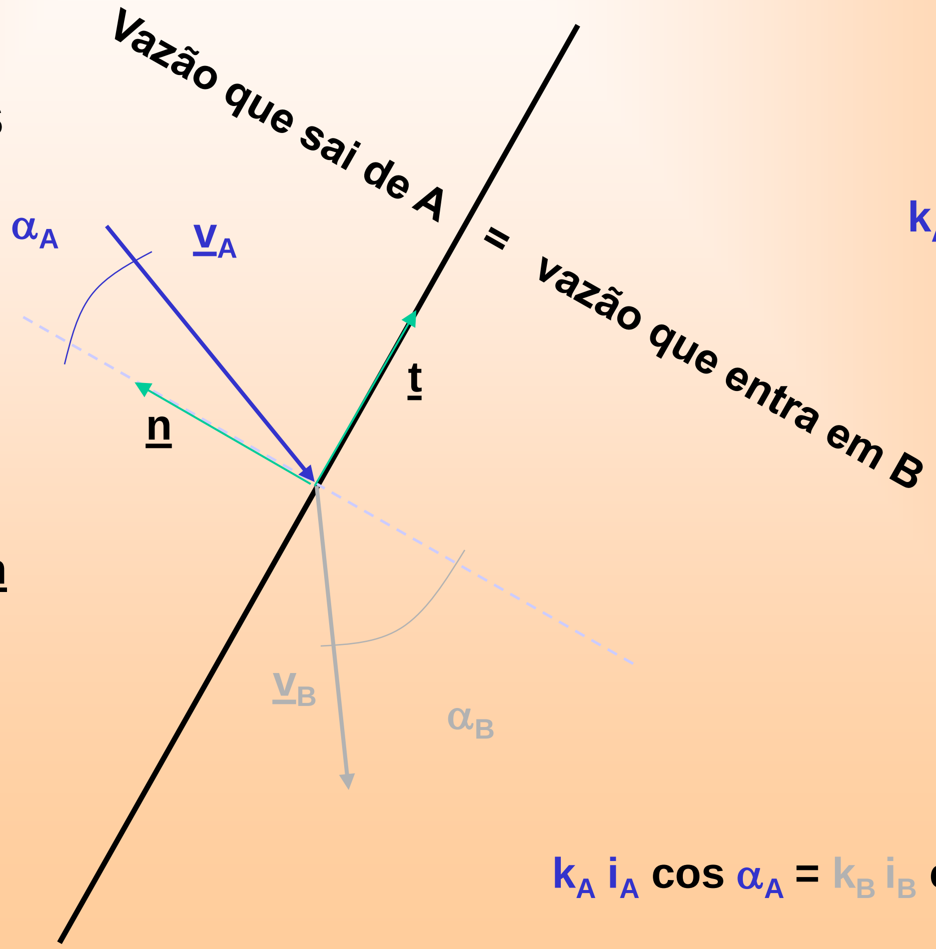


Material A
Isotrópico
k_A
α_A
$\underline{v}_A$
$k_A < k_B$
Material B
Isotrópico
k_B
$\underline{v}_B$
α_B

Conservação de massa

$(\underline{v}_A \bullet \underline{n})\ \Delta S = (\underline{v}_B \bullet \underline{n})\ \Delta S$

$-k_A\, \underline{\nabla} h_A \bullet \underline{n} = -k_B\, \underline{\nabla} h_B \bullet \underline{n}$



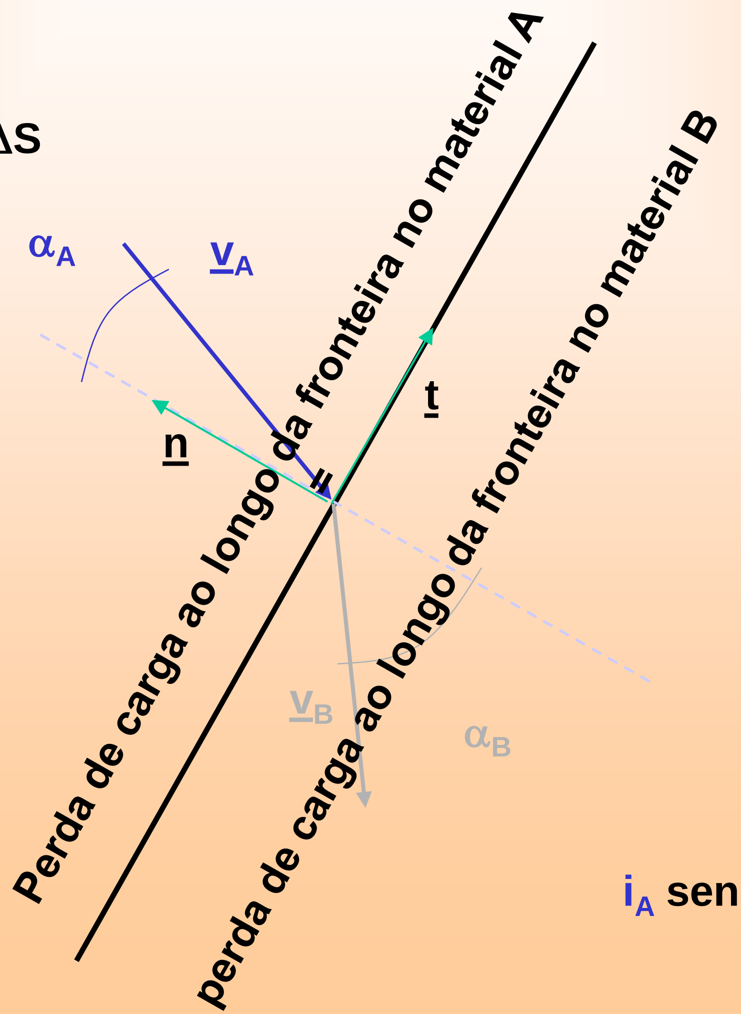
$k_A < k_B$

$k_A\, i_A \cos \alpha_A = k_B\, i_B \cos \alpha_B$

Conservação de energia

$(\underline{\nabla} h_A \bullet \underline{t})\, \Delta S = (\underline{\nabla} h_B \bullet \underline{t})\, \Delta S$

$\underline{\nabla} h_A \bullet \underline{t} = \underline{\nabla} h_B \bullet \underline{t}$

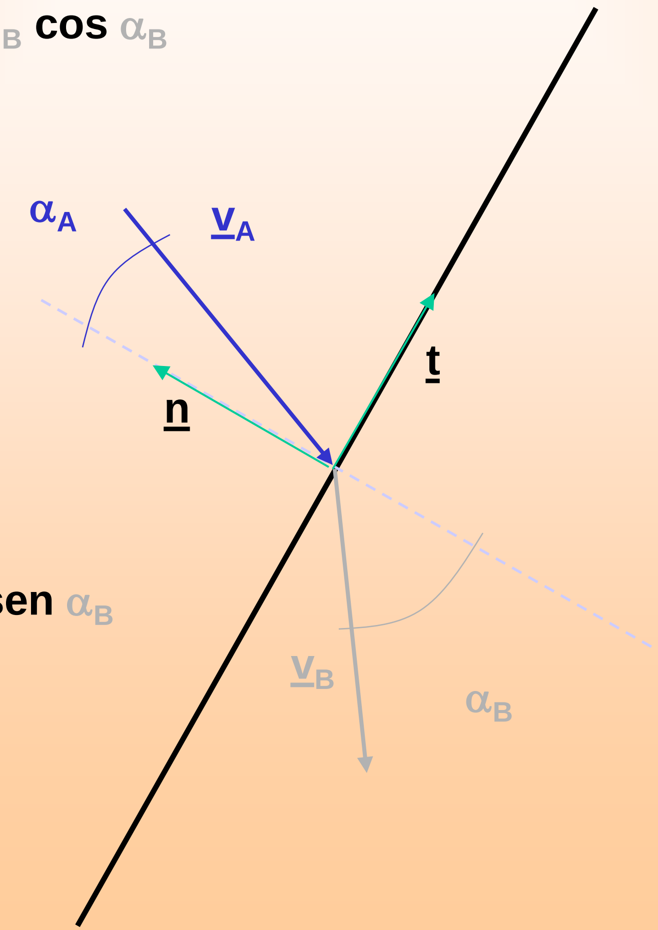


$k_A < k_B$

$i_A \text{ sen } \alpha_A = i_B \text{ sen } \alpha_B$

Substituindo

$k_A\, i_A \cos \alpha_A = k_B\, i_B \cos \alpha_B$



$k_A < k_B$

$i_A \,\text{sen}\, \alpha_A = i_B \,\text{sen}\, \alpha_B$

$$\boxed{\frac{k_A}{\tan \alpha_A} = \frac{k_B}{\tan \alpha_B}}$$