PCC2110

DESENHO PARA GEOLOGIA

VOL. III

EQUIPE DE PROFESSORES DE DESENHO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPTO. DE ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL (PCC)

2005

ÍNDICE:

1. PROJEÇÕES COTADAS

1.1 OBJETIVOS

- Aprender os conceitos básicos das projeções cotadas, uma maneira conveniente de se representar superfícies geométrica e topologicamente complexas;
- Adquirir capacidade de resolver problemas geométricos espaciais usando projeções cotadas.

1.2 INTRODUÇÃO

As projeções cotadas são uma poderosa ferramenta gráfica para resolução dos problemas geométricos espaciais. Ela é particularmente útil na representação de superfícies topográficas[1] e na solução de problemas relativos, que veremos na próxima aula. Encontra inúmeras aplicações no desenho técnico, principalmente na representação de objetos que apresentam ***superfícies topologicamente complexas***. Essa classe de superfícies aparece mais comumente na engenharia civil, de minas, agronomia, engenharia florestal, geologia e, em menor escala, nas engenharias naval e mecânica.

Para representar elementos geométricos tridimensionais num plano bidimensional (uma folha de papel, por exemplo), a geometria cotada utiliza um sistema de representação denominada de projeções cotadas.

Projeções cotadas são um sistema de representação que utiliza o sistema de ***projeção cilíndrica ortogonal*** (direção de projeção sempre perpendicular ao plano de projeção) a fim de obter uma projeção do elemento geométrico no plano horizontal de projeção:

- **A projeção no plano horizontal** fornece ***abcissa x*** **e** ***ordenada y*** do elemento geométrico;
- **A *cota* z** do elemento geométrico é definida através de seu **valor numérico**.

1.3 ELEMENTOS DE REPRESENTAÇÃO DE PROJEÇÕES COTADAS

1.3.1 Escala e unidade

Os desenhos resultantes da projeção no plano horizontal, que especificam as abcissas e as ordenadas, devem ser feitos em uma ***escala de representação*** conveniente. As normas brasileiras recomendam que se usem como escalas, de preferência, as frações de numeradores unitários e denominadores múltiplos de dez dos dígitos 1, 2 e 5. Assim, são recomendadas as escalas de[2] 1:1, 1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:200, 1:500, 1:1000, 1:2000, 1:5000, etc. São aceitas, ainda, as escalas com denominador múltiplo de dez de 2,5. Assim, são aceitas as escalas 1:2.5, 1:25, 1:250, 1:2500, etc. Além disso, em certas

[1] Superfície Topográfica: qualquer superfície que apresente uma única cota para cada par (abscissa, ordenada).
[2] Lê-se “um para um”, “um para dois”, etc.

condições, usam-se escalas gráficas que consistem de um segmento graduado de modo que entre duas divisões o intervalo compreendido representa uma unidade ou um múltiplo de dez desta.

Por outro lado, para se especificar as cotas dos pontos, dadas na forma de valores numéricos anotados ao lado das projeções dos pontos (ver figura 1), é necessário indicar a ***unidade de medida*** utilizada que, no nosso curso, será normalmente o metro.

EXERCÍCIO 1.1: Como as 3 coordenadas (abcissa, afastamento e cota) de um ponto são representadas nas projeções cotadas? Por que precisamos indicar a unidade da cota? Por que precisamos adotar uma escala de representação numa projeção cotada?

1.3.2 Plano horizontal de projeção

Tomaremos sempre o plano horizontal, que chamaremos de p_1, como o plano de projeção e de referência, a partir do qual mediremos as cotas de todos os pontos. Esse plano de projeção divide o espaço em 2 semi-espaços: um de cotas positivas e outro de cotas negativas (figura 1).

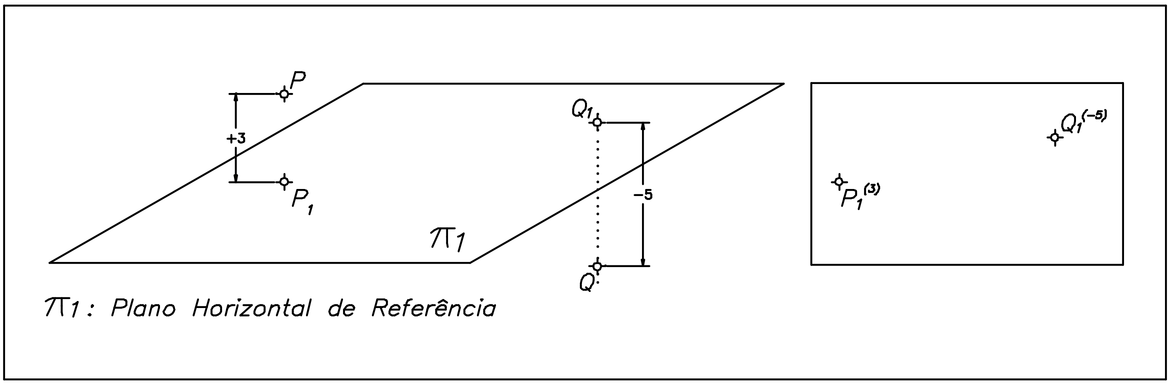


Figura 1 - Plano horizontal de projeção como plano de referência.

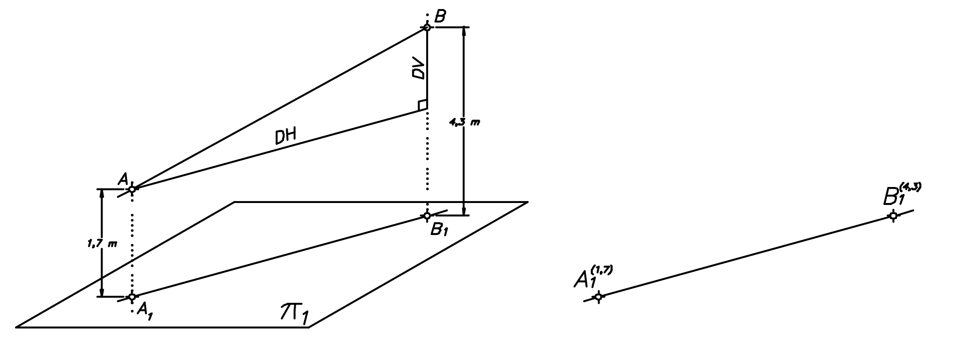
O plano de referência, sempre horizontal, é arbitrário. Muito freqüentemente, principalmente na cartografia, usa-se como plano horizontal de referência o plano do nível do mar. Esse plano tem a vantagem de ser invariável.

Quando a cota (coordenada z) é positiva, diz-se que o ponto está em relevo e quando a cota é negativa diz-se que o ponto está rebaixado. Além disso, chamaremos *altura* à cota positiva e *profundidade* à cota negativa. Quando o plano de projeção é o nível médio dos mares, a cota positiva é chamada *altitude*. Sempre que possível, devem ser evitadas cotas positivas e negativas em um mesmo trabalho. Não havendo sinal considera-se o ponto em relevo, a não ser que seja dado outro esclarecimento nesse sentido ou a própria natureza do trabalho indique tratar-se de um rebaixamento.

Na figura 1, os pontos P_1 e Q_1 representam, respectivamente, as projeções dos pontos P e Q. No lado direito da figura observam-se as projeções com indicação de suas cotas. A folha do papel é denominada de ***folha cotada*** e representa o plano horizontal de projeção.

1.3.3 Posição relativa de dois pontos

Observe a figura 2. Nela estão representados os pontos **A** e **B** através de suas projeções cotadas tendo-se como unidade o metro.



(a) Pontos A e B no espaco (b) Pontos A e B em projecao cotada

Figura 2 - Projeção cotada de 2 pontos.

O ponto **A** se projeta no plano horizontal em $\mathbf{A_1}$ e tem *cota* 1.7 m; da mesma forma, o ponto **B** se projeta em $\mathbf{B_1}$ e tem *cota* 4.3 m. Com isso, definiremos as grandezas:

- **Distância entre 2 pontos**: Essa distância não é medida diretamente no desenho mas determinada algebricamente através de relações geométricas elementares (d_{AB} na fig. 3).

- **Distância horizontal entre 2 pontos**: É o comprimento da projeção do segmento cujos extremos são os pontos, ou seja, é a distância entre as projeções de cada ponto. Numa representação em folha cotada essa distância é medida diretamente sobre as projeções dos pontos <u>tomando-se o cuidado de considerar, entretanto, a escala na qual o desenho está representado</u> (DH na fig. 3).

- **Distância vertical entre 2 pontos**: É o valor absoluto da diferença de cotas entre os pontos. Observe que o valor dessa distância é obtido *algebricamente* e, dessa forma, <u>a escala do desenho não afetará o seu resultado</u> (DV na fig. 3).

Na figura 3, a distância vertical entre A e B é 2.6m (4.3m - 1.7m). Por outro lado, medindo-se no desenho o comprimento do segmento A_1B_1 encontra-se 38 mm; sabendo-se que o desenho está representado numa escala 1:100 (isto é, uma distância de 1 mm no desenho corresponde a 100 mm no objeto real) conclui-se que a distância entre as projeções em π_1 é 3800 mm ou 3,8 m. Essa é, também, a distância horizontal entre os pontos A e B. Aplicando o Teorema de Pitágoras, a distância entre os pontos A e B é:

$$d_{AB} = \sqrt{(DV)^2 + (DH)^2} = \sqrt{2{,}6^2 + 3{,}8^2} \cong 4{,}6 \text{ m}$$

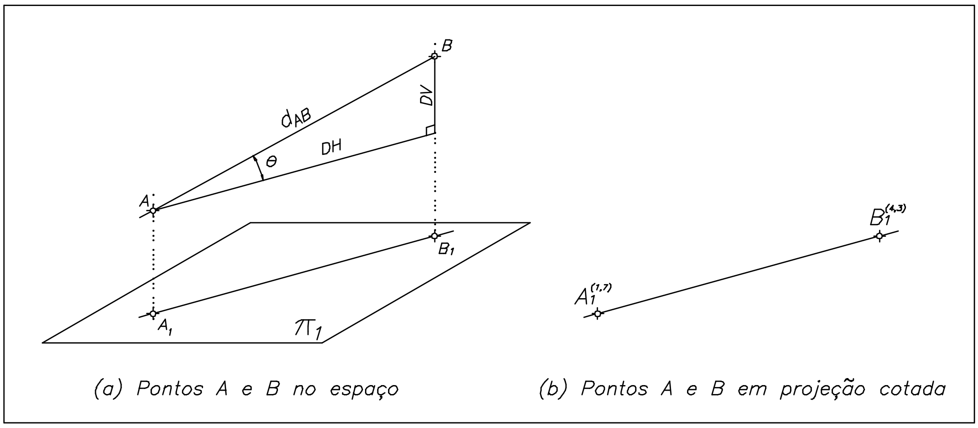


Figura 3 - Distâncias vertical, horizontal e efetiva entre dois pontos
e a inclinação da reta **AB.**

EXERCÍCIO 1.2: São dados os pontos $A_1^{2,3}$ e $B_1^{7,5}$ (ignore C_1, por enquanto).
Determine:

- Distância horizontal entre A e B = _____
- Distância vertical entre A e B = _____
- Distância entre A e B = _____

Unidade: metro escala: 1:100

$A_1^{2,3}$ C_1 $B_1^{7,5}$

+ + +

PERGUNTA A: Ao realizar o exercício 1.2, você utilizou o Teorema de Pitágoras para calcular distância entre os pontos A e B? Existe outra maneira de determinar esta distância sem usar o teorema? Tente elaborar um procedimento para determinar GRAFICAMENTE a distância entre os pontos A e B (pistas na página 6). Aplique o procedimento elaborado e verifique se a distância determinada graficamente é igual à distância calculada algebricamente.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

1.4 ESTUDO DE RETAS

Inicialmente estudaremos o caso de retas definidas por 2 pontos e, posteriormente, estenderemos o estudo para o caso em que uma reta é definida pela interseção de dois planos. Assim, dados 2 pontos **A** e **B** e suas projeções $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{B_1}$, cada ponto da reta **AB** tem por projeção um ponto bem definido em $\mathbf{A_1B_1}$.

1.4.1 Inclinação de retas: declividade

Um parâmetro muito importante para descrever a posição relativa de uma reta **AB**, com relação ao plano horizontal de referência, é a sua inclinação (ângulo *q* da figura 3)***. A*** **inclinação** ***de uma reta é o ângulo que essa reta faz com o plano de projeção, isto é, o ângulo que ela faz com a sua projeção ortogonal nesse plano***.

A inclinação da reta AB, denotada por θ, pode ser calculada através da expressão

q = arctg(DV/DH).

Para o caso da fig. 3, o ângulo de inclinação da reta AB em relação ao plano π_1 é:

q = arctg(DV/DH), onde DV = 2,6 m e DH = 3,8 m.

Então,

q = arctg(2,6/3,8) Þ q = arctg(0,0,684) Þ q = 34,4º.

Da mesma forma, define-se a ***declividade*** (indicada por ***p***) de uma reta como a **relação entre a *distância vertical* e a *distância horizontal*** entre os pontos que a definem. Pode-se alternativamente exprimi-la como porcentagem ou por frações ordinárias. Assim, para o exemplo da figura 3 temos que a declividade da reta **AB** é :

$$p = \frac{DV}{DH} = \frac{2{,}6m}{3{,}8m} = 0{,}684 = 68{,}4\%$$

Observa-se que a ***declividade*** de uma reta coincide, numericamente, com a tangente trigonométrica de seu ***ângulo de inclinação***. É importante notar que, no caso de retas verticais, a sua inclinação é 90^o e a sua declividade é infinita; por outro lado, retas horizontais têm inclinação igual a 0^o e declividade zero.

$$\overset{N}{P} = tanq$$

Perceba que a declividade e a inclinação de uma reta são constantes, independentemente de quais pontos usamos para calculá-las.

Também pode-se determinar a inclinação de uma reta através de método gráfico, mostrado a seguir.

MÉTODO GRÁFICO PARA DETERMINAR INCLINAÇÃO DE UMA RETA

Em uma folha cotada, onde está representada uma reta AB, podemos, por operações gráficas, determinar sua inclinação e sua declividade. A idéia é relativamente simples: basta desenhar o ângulo formado pela reta AB e sua projeção A_1B_1.

Como AB e A_1B_1 estão contidas no plano vertical que passa por A_1B_1 , para desenhar o ângulo no papel, precisamos rotacionar o plano vertical de 90^o. Para isso, podemos escolher A_1B_1 como eixo de rotação.

Na prática, basta:

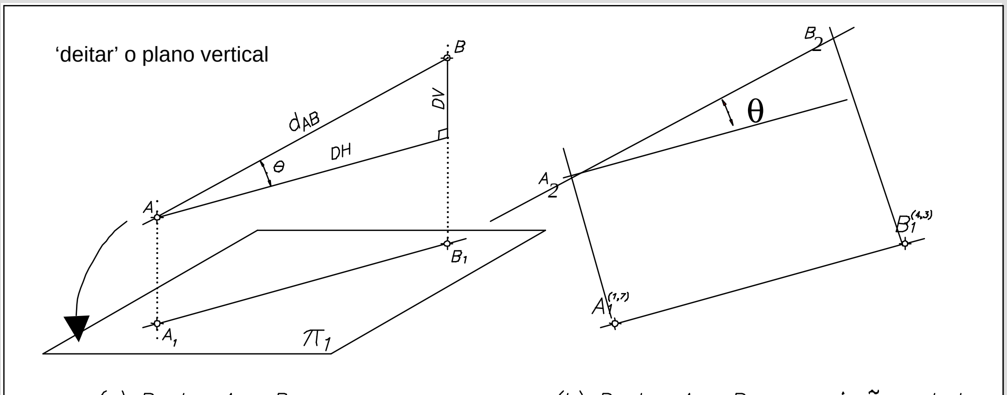
a. Traçar uma reta perpendicular à A_1B_1, passando por A_1.

b. Marcar na reta o ponto A_2 ("projeção de A, num plano vertical") cuja distância a partir de A_1B_1 é igual à cota de A, *reduzida à escala do desenho*.

c. Traçar uma reta perpendicular à A_1B_1 e passando por B_1.

d. Marcar na reta o ponto B_2 cuja distância a partir de A_1B_1 é igual a cota de B, *reduzida à escala do desenho*.

Assim, o ângulo de inclinação da reta AB (ângulo entre A_2B_2 e A_1B_1) pode ser medido diretamente quando as cotas são inicialmente reduzidas à escala do desenho.



(a) Pontos A e B no espaço (b) Pontos A e B em projeção cotada

Figura 4 – Determinar graficamente o ângulo de inclinação da reta.

EXERCÍCIO 1.3: São dados os pontos $A_1^{1,5}$ e $B_1^{4,3}$. Determine a inclinação da reta AB por método gráfico. Calcule sua declividade.
Unid.: metro   escala: 1:100

1.4.2 *Intervalo de uma reta*

Define-se ***intervalo*** de uma reta como a distância horizontal entre dois pontos quaisquer dessa reta que apresentam diferença de cotas igual a 1 unidade (normalmente 1 metro). Numericamente, o intervalo de uma reta é o inverso da sua **declividade** ou ainda, numericamente igual a ***cotg(q)*** sendo *q* o ângulo de inclinação da reta (veja figura 5):

$$\mathrm{i} = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{DV}{DH}} = \frac{DH}{DV} = cotg(q)$$

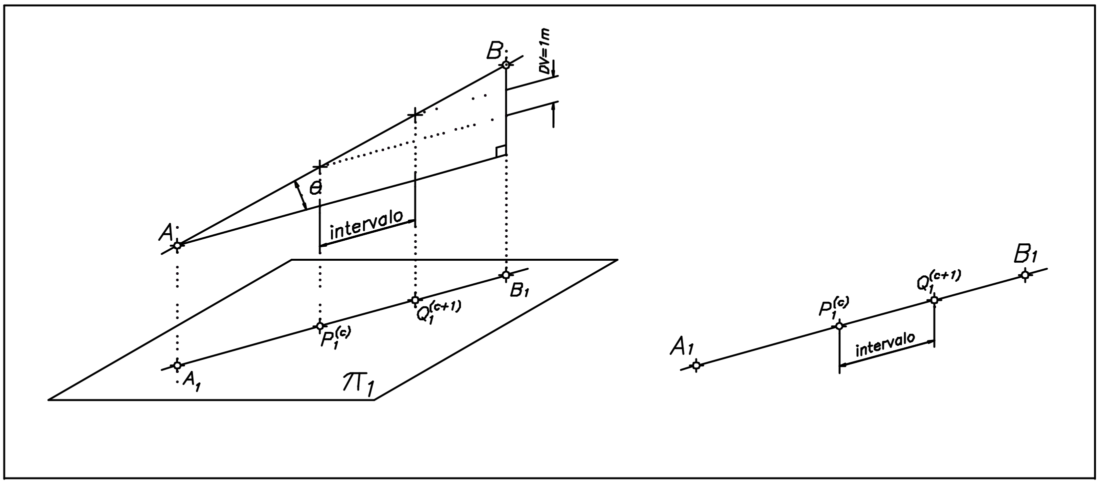


Figura 5 - Intervalo de uma reta.

Novamente, para o nosso exemplo, temos:

$$i = cotg(34{,}4^o) = 1{,}46\ m$$

mostrando que, partindo-se da projeção $\mathbf{A_1}$ e ao deslocarmos **1,46 cm** (lembre-se que o desenho está representado em escala 1:100) sobre $\mathbf{A_1B_1}$, estaremos num ponto **M** da reta **AB** com cota 1 m acima de $\mathbf{A^{1,7}}$ (cota de **M** = 1.7m + 1m = 2.7m).

1.4.3 Coeficiente de redução

O ***coeficiente de redução*** de uma reta é definido como a relação entre a distância horizontal de dois pontos da reta e a distância entre esses pontos; é, portanto, numericamente igual ao cosseno do ângulo de inclinação. Dessa maneira, o coeficiente de redução de uma reta vertical é nulo, pois a sua inclinação é 90º. No caso de uma reta horizontal o ângulo de inclinação é nulo e o coeficiente de redução é 1, ou seja, a reta se projeta em verdadeira grandeza (mantendo sua forma e dimensão) no plano horizontal π_1.

1.4.4 Pertinência ponto-reta

Conhecendo-se as projeções em π_1 e as cotas de 2 pontos de uma reta pode-se determinar o seu intervalo. Com isso, podemos determinar a cota de qualquer ponto da reta. Para exemplificar esse procedimento, consideraremos novamente a reta **AB** mostrada na figura 6. Tomemos sobre essa reta um ponto **M** de projeção $\mathbf{M_1}$. Desejamos determinar a sua cota. Chamando de $\boldsymbol{z_M}$ a cota do ponto **M** podemos escrever:

$$p = \frac{\text{DV}}{\text{DH}} \rightarrow 0{,}684 = \frac{z_M - 1.7m}{A_1M_1}$$

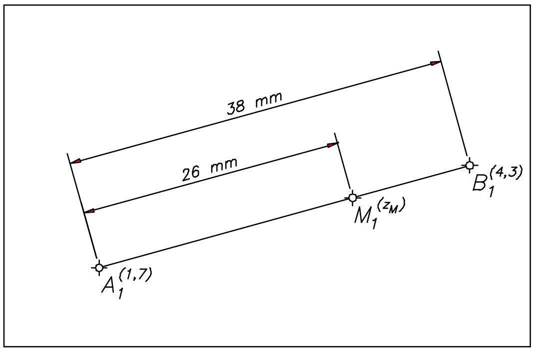


Figura 6 - Determinação da cota do ponto **M** pertencente à reta **AB.**

que é a expressão da declividade calculada com os pontos A e M. Como A_1M_1 pode ser obtido por leitura direta na folha, medindo-se o segmento A_1M_1 e considerando a escala do desenho, obtém-se como resultado A_1M_1 = 2,6 m. Assim, tem-se que:

$$z_M = 2{,}6m * 0{,}684 + 1{,}7m = 3{,}48m,$$ que é a cota do ponto **M** da reta **AB**.

Da mesma forma, poderemos resolver o problema inverso, isto é, determinar a projeção N_1 de um ponto da reta AB que tem uma cota dada, por exemplo 3,0 m (observe a figura 7).

$$\frac{3{,}0m - 1.7m}{A_1N_1} = 0{,}684 \qquad \Rightarrow \qquad A_1N_1 = \frac{3{,}0m - 1{,}7m}{0{,}684} = 1{,}90m$$

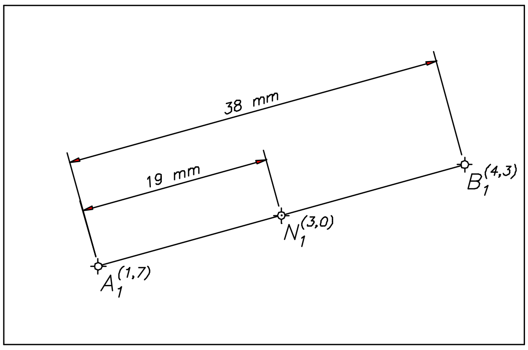


Figura 7 - Determinação de um ponto N da reta AB de cota conhecida.

Como o desenho está representado na escala 1:100, é só marcar 1,90 cm sobre a $\mathbf{A_1B_1}$ a partir de $\mathbf{A_1}$ e obteremos o ponto $\mathbf{N_1}$.

Assim, para que um ponto pertença a uma reta são necessárias as duas seguintes condições:

- A projeção do ponto **pertença** à projeção da reta.
- A cota do ponto seja **igual** à cota do ponto da reta cuja projeção coincida com a projeção do ponto dado.

EXERCÍCIO 1.4: Por que não basta que a projeção de um ponto esteja sobre a projeção de uma reta para pertencer a ela? Determine a cota do ponto C do exercício 1.2, sabendo-se que o ponto C pertence à reta AB.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

1.4.5 Graduação de retas

Repetindo-se a operação anterior poderemos marcar os pontos da reta **AB** cujas cotas são representadas por ***números inteiros***. Assim, poderemos marcar sobre a reta **AB** os pontos de cotas 2, 3, 4, etc. Essa operação é chamada de ***graduação da reta AB*** (figura 8). No nosso exemplo, o ponto N (marcado na reta AB no item anterior) é um ponto de cota inteira (cota 3). Marcando-se os pontos P e Q distantes 1,46 cm (i = 1,46 m reduzido à escala 1:100) de N_1 obteremos a reta AB graduada de metro em metro.

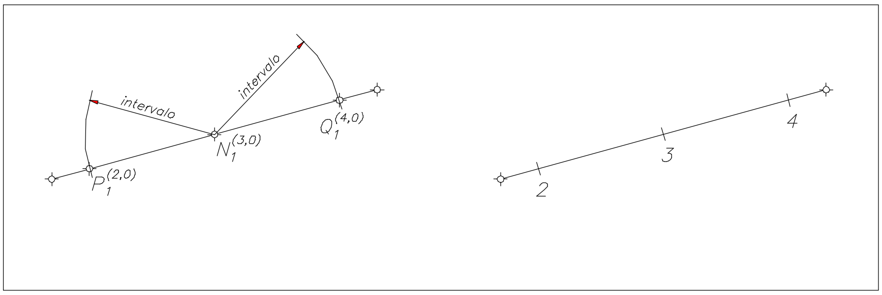


Figura 8 - Reta AB graduada de metro em metro pelo Método Analítico.

Graduação de reta é um passo inicial importante na resolução da maioria dos problemas geométricos espaciais através das projeções cotadas. Graduar uma reta seguindo-se os passos mostrados anteriormente é denominado de graduação de retas pelo método analítico, pois emprega cálculos algébricos para se determinar os pontos de cotas inteiras. Há, entretanto, outros métodos empregados na graduação das retas. São métodos gráficos que utilizaremos no nosso curso por serem simples, rápidos e precisos.

GRADUAÇÃO DE RETAS PELOS MÉTODOS GRÁFICOS (1)

Um dos métodos gráficos se baseia na idéia de utilizar o plano vertical que contém a reta, conforme explicado no procedimento apresentado no “Método Gráfico para Determinar Inclinação de uma Reta” e, a partir daí, traçar planos horizontais auxiliares de cotas inteiras e determinar a sua interseção com a reta considerada. Na figura 9, a linha paralela ao segmento A_1B_1 é o referencial 0 da cota, e os pontos A_2 e B_2 representam os pontos A e B no plano vertical.

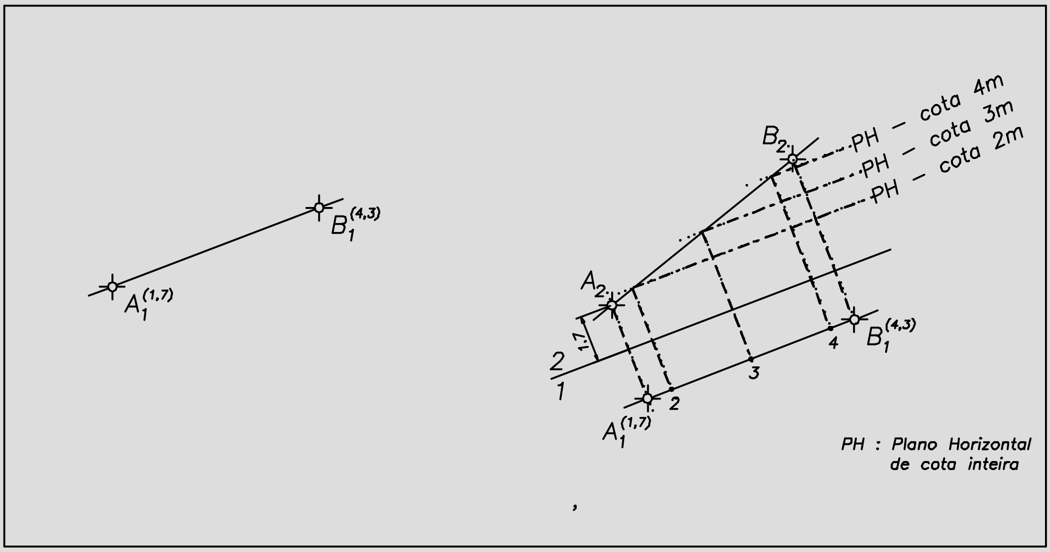


Figura 9 - Reta AB graduada de metro em metro pelo Método Gráfico.

GRADUAÇÃO DE RETAS PELOS MÉTODOS GRÁFICOS (2)

Outro método gráfico largamente utilizado é baseado na divisão de um segmento de retas em partes proporcionais aplicando-se o Teorema de Tales (figura 10). Para isso, usa-se uma escala graduada.

a. Traçar uma reta ***i*** concorrente ao segmento em um de seus pontos cujo valor da cota é conhecido (geralmente uma extremidade do segmento).
b. Posicionar a escala ao longo da reta ***i*** de modo que, no ponto de interseção, o valor da graduação da escala coincida com a valor da cota do ponto (1.7 na fig. 10).
c. Marcar os pontos da reta ***i*** nos quais a graduação da escala apresenta valores inteiros (2, 3, 4, 5... na figura 10).
d. Marcar o ponto da reta ***i*** no qual a graduação da escala correspondente ao valor da cota de um outro ponto, cujo valor da cota é conhecido, do segmento da reta a ser graduada (geralmente uma outra extremidade do segmento).
e. Ligar o ponto da reta ***i*** e o ponto do segmento mencionados no passo anterior traçando uma reta ***s***.
f. Traçar retas paralelas a ***s*** e passando pelos pontos marcados no passo (c).
g. Interseção das retas paralelas a ***s*** com o segmento resulta em pontos do segmento cujos valores são inteiros e indicados na graduação da escala.
h. Anotando os valores nos respectivos pontos de interseção obtém-se o segmento graduado.

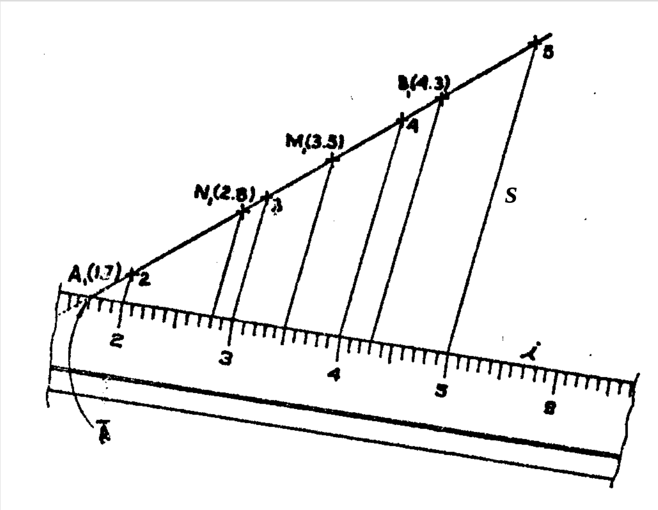


Figura 10 - Reta AB graduada de metro em metro pelo Método Gráfico.

EXERCÍCIO 1.5: São dados os pontos $A_1^{5,2}$ e $B_1^{13,5}$. Gradue a reta AB por método gráfico e determine seu intervalo.

Unidade: metro   escala: 1:50

$B_1^{13,5}$
+

$A_1^{5,2}$
+

EXERCÍCIO 1.6: São dados os pontos $C_1^{2,7}$ e $D_1^{9,6}$. Sabendo-se que a distância horizontal entre eles é 10 metros:

a. Determine a escala da folha cotada: ____________
b. Graduar a reta CD por método gráfico.
c. Determine seu intervalo: i =_______
d. Verifique se o ponto E pertence a reta CD (☐sim ☐não). Justifique.
e. Determine graficamente o ponto $F^{7,3}$ que pertence a reta CD.

Unidade: metro

$C_1^{2,7}$ $E_1^{11,9}$ $D_1^{9,6}$
+   +   +

1.4.6 Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes quando

- Suas projeções no plano horizontal π_1 têm um ponto comum e
- nesse ponto, ambas as retas têm a **mesma cota**.

Quando a cota do ponto comum não é dada, pode ser facilmente determinada, algébrica ou graficamente como referido anteriormente. Feita essa determinação para cada reta e verificando-se que a cota do ponto comum é a mesma para ambas as retas, conclui-se que essas retas são concorrentes naquele ponto. A figura 11 mostra duas retas r e s concorrentes num ponto de cota igual a 3,7 m.

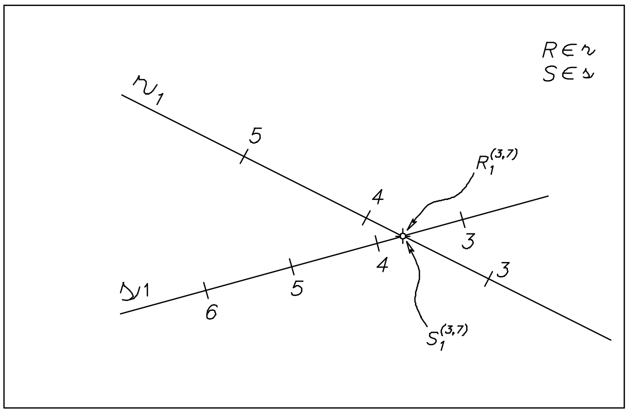


Figura 11 - Projeção cotada de duas retas ***r*** e ***s*** concorrentes.

EXERCÍCIO 1.7: Quais são as condições para que 2 retas sejam concorrentes nas projeções cotadas? Porquê?

____

MÉTODO GRÁFICO DE VERIFICAÇÃO DE CONCORRÊNCIA DE 2 RETAS

Um método gráfico para se investigar a concorrência de duas retas é o seguinte: traçam-se retas que pertençam aos pontos de mesma cota de cada uma das retas dadas. Se as retas traçadas forem **paralelas**, as retas dadas são concorrentes (figura 12). Esse processo é muito útil quando o ponto de concorrência das retas dadas está fora dos limites do papel.

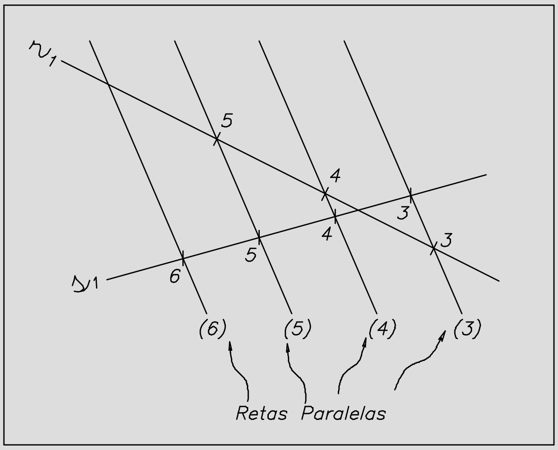


Figura 12 - Método gráfico de verificação de concorrência de duas retas.

1.4.7 Retas paralelas

Duas retas são paralelas quando, e **somente** quando:

- suas **projeções** são paralelas e
- seus **intervalos** são iguais e
- suas **graduações** são concordantes (têm mesmo sentido de crescimento).

Consideremos duas retas, ***r*** e ***s***, paralelas entre si. Como estamos empregando projeção ***cilíndrica***, sabemos que retas paralelas têm projeções paralelas[3]. Por outro lado, retas paralelas têm igual inclinação em relação ao plano horizontal π_1. Dessa forma, elas apresentam a mesma ***declividade*** e, portanto, o mesmo ***intervalo***. Considerando-se pontos de mesma cota nas retas ***r*** e ***s***, as retas definidas por cada dois desses pontos de mesma cota, são horizontais e paralelos, mostrando que apresentam mesmo sentido de graduação (figura 13).

TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DO PARALELISMO

"NA PROJEÇÃO CILÍNDRICA, O PARALELISMO SE CONSERVA".

[3] Teorema da conservação do paralelismo

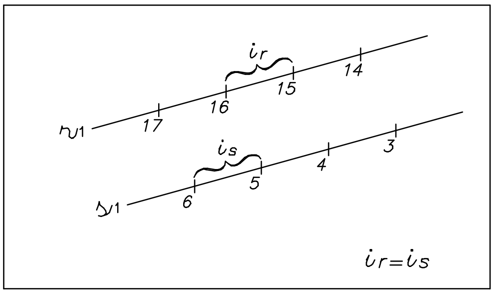


Figura 13 - Representação em projeção cotada de duas retas paralelas.

1.4.8 Retas perpendiculares ou ortogonais

Duas retas com **projeções perpendiculares** somente serão perpendiculares ou ortogonais se <u>pelo menos uma delas</u> for paralela ao plano de projeção[4] (figura 14).

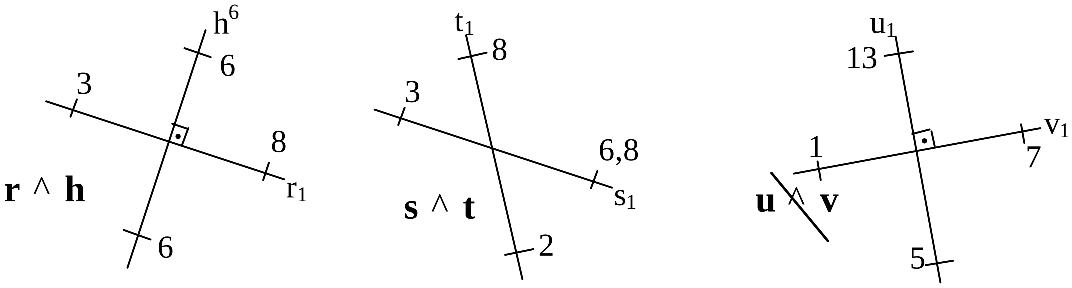


Figura 14 – Perpendicularismo e não perpendicularismo.

Para verificar-se o ortogonalismo de duas retas cujas projeções não são perpendiculares (caso no centro da figura 14) deve-se projetá-las num plano paralelo a uma delas[5], de modo a se verificar a condição do teorema da conservação do perpendicularismo (figura 5):

TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DO PERPENDICULARISMO

"NA PROJEÇÃO CILÍNDRICA, RETAS ORTOGONAIS / PERPENDICULARES SÓ CONSERVAM O PERPENDICULARISMO QUANDO PELO MENOS UMA DELAS FOR PARALELA AO PLANO DE PROJEÇÃO".

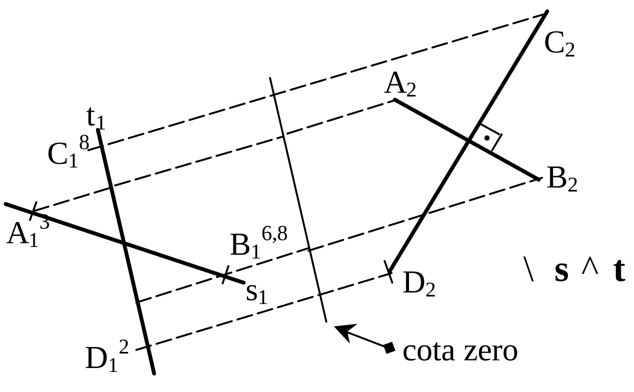


Figura 15 – Verificação da ortogonalidade.

[4] Teorema da conservação do perpendicularismo
[5] Lembra-se da figura 4?

1.5 ESTUDO DE PLANOS

Um plano pode ser determinado por 3 pontos não-colineares ou por uma reta e um ponto não pertencente a ela ou por duas retas paralelas ou por duas retas concorrentes. Analisaremos o caso em que o plano é determinado por 3 pontos, pois todos os outros casos podem ser reduzidos a esse caso geral.

1.5.1 Retas horizontais de um plano

Sejam os pontos A, B e C, representados na folha cotada com suas respectivas cotas como mostrado na figura 16.

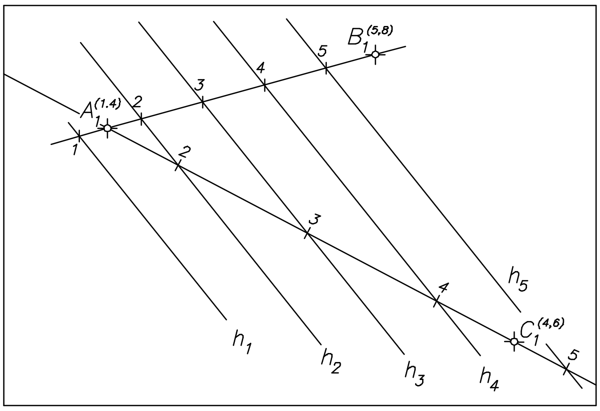


Figura 16 - Representação dos pontos A, B e C em projeção cotada.

Os três pontos determinam um plano α. Vamos graduar (conforme o método gráfico apresentado anteriormente) as retas AB e AC, obtendo os pontos de cotas inteiras de 2 a 5 dessas duas retas. O ponto de cota 5 da reta AB ligado ao ponto de cota 5 da reta AC gera uma reta horizontal h_5 de cota 5 contida no plano α. Da mesma forma, ao ligarmos o ponto de cota 4 da reta AB ao ponto de cota 4 da reta AC obtemos a reta horizontal h_4 do plano α. Repetindo-se esse procedimento, obtemos as demais retas horizontais de cotas inteiras contidas em α (h_1, h_2, h_3, ...). Essas retas horizontais do plano α, assim determinadas, são paralelas e eqüidistantes.

EXERCÍCIO 1.9: Por que é necessário que as graduações tenham o mesmo sentido de crescimento para que duas retas sejam paralelas?

____

____

____

____

____

____

____

____

Essas retas horizontais do plano α são paralelas entre si e paralelas à *interseção do plano a com o plano horizontal p_1* (**traço** de α em π_1). A **reta traço** de α em π_1 é a reta horizontal h_0.

1.5.2 Retas de maior declive de um plano

Consideremos, novamente, um plano determinando de uma das formas mostradas anteriormente. Observamos os seguintes fatos, acompanhando pela figura 17:

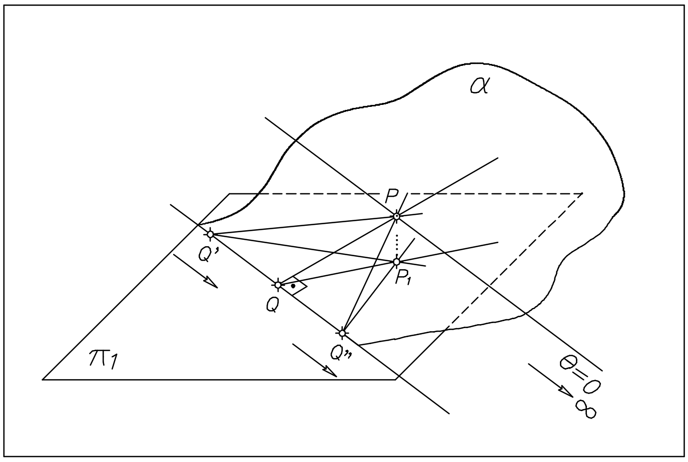


Figura 17 - Inclinação de retas contidas ao plano α mostrando o significado geométrico da reta de maior declive.

(i) escolhemos arbitrariamente um ponto P do plano α que será mantido fixo durante todo o processo. Para facilidade de demonstração tomaremos um ponto P de cota unitária;

(ii) escolhemos agora outro ponto de α e muito longe de P que referiremos como ponto Q. Esse ponto Q pode ser qualquer, mas o tomaremos sobre interseção de α com π_1. Medimos o ângulo de inclinação da reta PQ com o plano horizontal. Esse ângulo é muito pequeno (no limite nulo), pois a distância vertical é constante e a distância horizontal tende a infinito.

(iii) movendo o ponto Q (ainda na reta de interseção de α com π_1) em direção ao ponto P, o ângulo de inclinação θPQ da nova reta PQ aumentará progressivamente, pois a distância horizontal diminui;

(iv) por outro lado, quando o ponto Q, caminhando-se sobre na reta de interseção de α com π_1, se afasta de P o ângulo de inclinação θPQ da reta PQ decresce rapidamente tornando-se, no limite, zero;

(v) a inclinação da reta PQ atingirá seu valor máximo quando a distância horizontal (DH) for mínima. Isso ocorre quando a reta projetada P_1Q_1 for perpendicular a reta de interseção de α com π_1. Como essa reta de interseção é, obviamente[6], uma reta horizontal de α, tem-se que a reta PQ é, também, perpendicular a reta de interseção de α com π_1 (nesse caso, em particular, o perpendicularismo entre as retas se mantém na projeção[7]).

[6] Afinal, qualquer reta contida num plano horizontal (π_1) também é horizontal!
[7] Isso ocorre pois, pelo menos uma das retas, no caso a horizontal, é paralela ao plano de projeção.

Assim, uma reta de maior declive, ou inclinação, de um plano é

- uma reta desse plano, perpendicular à reta de interseção do plano com π_1 (a reta de interseção é denominada de traço do plano) ou
- é perpendicular à qualquer outra de suas retas horizontais.

Vale ressaltar que uma reta de maior declive de um plano define completamente o plano, por isso nas projeções cotadas os planos geralmente são representados pelas suas retas de maior declive. Nos próximos itens definiremos a inclinação e a graduação de planos que estão relacionadas com a sua reta de maior declive.

É interessante observar que essa reta indica a direção de mínima energia desse plano. Uma esfera (que pode rolar livremente num determinado plano) ao ser abandonada descerá plano abaixo segundo sua reta de maior declive. Da mesma forma, a água da chuva, ao cair num telhado plano, o percorrerá numa direção paralela à sua reta de maior declive (linhas hidrodinâmicas).

1.5.3 Inclinação, declividade e intervalo de planos

A **inclinação** de um plano é a mesma **inclinação** da sua *reta de maior declive*. Pode-se afirmar ainda, que a **declividade** de um plano é a **declividade** de *sua reta de maior declive* e o **intervalo** de um plano é o **intervalo** da sua *reta de maior declive* (figura 18).

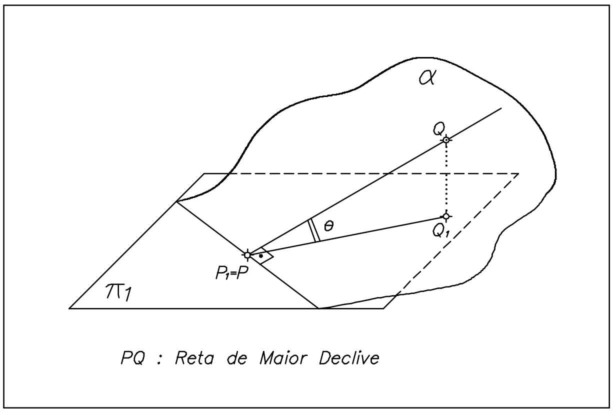


Figura 18 - Inclinação de plano: ângulo de inclinação de sua reta de maior declive.

1.5.4 Graduação de planos

A graduação de um plano pode ser feita ou com o traçado de sua retas horizontais de cotas inteiras (h_1, h_2, h_3, ...) ou, como mencionado anteriormente, traçando-se sua *reta de maior declive* e graduando-a. Uma vez determinada a reta de maior declive de um plano, podemos apagar todos os outros elementos determinadores desse plano, pois só a reta de maior declive do plano é suficiente para determiná-lo univocamente. Dizemos que um plano está representado em projeção cotada quando conhecemos a sua *reta de maior declive* devidamente *graduada*.

A graduação de um plano é o primeiro passo para se determinar a pertinência de pontos e retas a planos, a interseção de retas e planos e a interseção de dois planos. Para se distinguir uma *reta de maior declive* graduada de um plano de uma reta graduada qualquer, usa-se representar as primeiras por dois traços paralelos próximos sobre os quais se assinalam os pontos de cota inteira por traços curtos perpendiculares a ela (veja figura 19).

Dessa forma, pôde-se estabelecer o método gráfico mostrado na figura 12 para determinar se duas retas dadas numa folha cotada são concorrentes ou reversas. Relembrando: se as retas forem concorrentes determinarão um plano e, graduando-as e ligando os pares de pontos de mesma cota deveremos ter retas paralelas e eqüidistantes, pois são as horizontais do plano definido por elas. Caso contrário essas retas serão reversas.

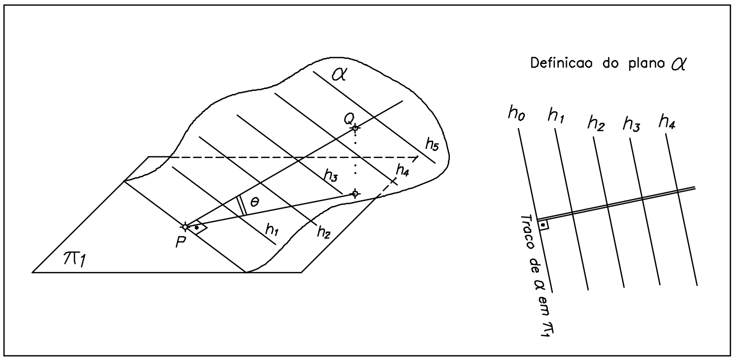


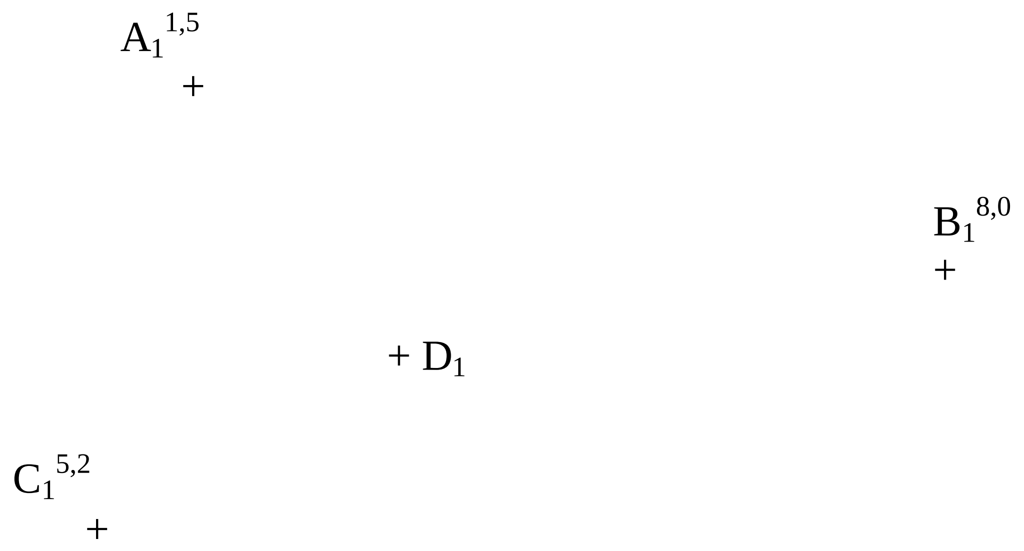
Figura 19 - Definição de planos (traçando as retas horizontais de cotas inteiras) pelas suas retas de maior declive.

EXERCÍCIO 1.10: Se são necessárias 2 retas concorrentes ou 2 retas paralelas e não coincidentes para definir um plano, por que uma única reta de maior declive define univocamente um plano nas projeções cotadas?

EXERCÍCIO 1.11: São dados os pontos $A_1^{1,5}$, $B_1^{8,0}$ e $C_1^{5,2}$, pede-se:

a. graduar as retas AB e AC;
b. traçar as retas horizontais de cota 2, 3, 4 e 5 do plano (A, B, C);
c. determine uma reta de maior declive do plano (A, B, C) traçando uma reta perpendicular às retas horizontais (lembre-se de que a reta de maior declive é representada por dois traços paralelos próximos sobre os quais se assinalam os pontos de cota inteira por traços curtos perpendiculares a ela);
d. determine o intervalo do plano (A, B, C).

Unidade: metro   escala: 1:100



1.5.5 Posições relativas de dois planos

- ***Planos paralelos ao plano de projeção***

Nesse caso, tem-se que o plano considerado é horizontal, ou seja, todos os pontos a ele pertencentes terão a mesma cota. Todas as suas retas são retas de maior declive. A sua representação é feita por um segmento de reta (duplo, para se indicar uma reta de maior declive), colocando-se em seus extremos o valor da cota do plano. A figura 20 mostra um plano horizontal de cota 2. Observe que qualquer figura pertencente a um plano horizontal se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção π_1.

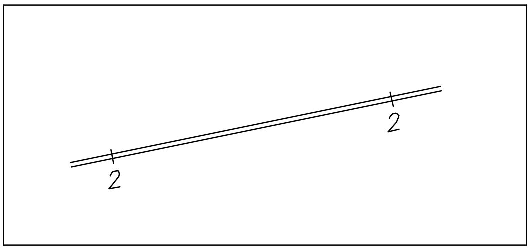


Figura 20 - Indicação da reta de maior declive de um plano horizontal de cota 2.

- ***Planos concorrentes com o plano de projeção***

Tem-se dois casos:

- plano vertical

o ângulo de inclinação desse plano em relação ao plano π_1 é 90^o . Todos os seus pontos têm projeções confundidas com o traço do plano. Todas as suas retas de maior declive são retas verticais. Esse plano é representado por seu traço no plano horizontal π_1 sem graduação, naturalmente, de suas retas.(fig. 21)

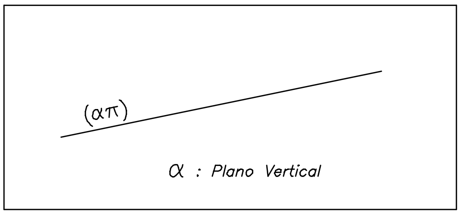


Figura 21 - Indicação de traço e reta de maior declive de planos verticais.

- plano qualquer

a representação é feita pela projeção de uma de suas retas de maior declive.

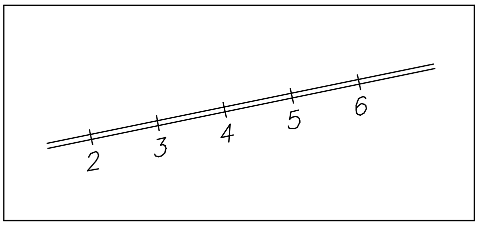


Figura 22 - Representação de um plano qualquer pela sua reta de maior declive.

- ***Planos Paralelos***

A interseção dos planos paralelos com um plano horizontal resulta em 2 retas traço dos planos paralelas. Como as retas de maior declive são perpendiculares aos traços dos planos, podemos estender esse conceito e concluir que planos paralelos têm suas retas de maior declive paralelas, e, portanto, a projeção dessas retas características são ***paralelas***, apresentando os mesmos ***intervalo*** e ***sentido de graduação***. A figura 23 mostra a representação, pelas suas retas de maior declive, de dois planos paralelos entre si.

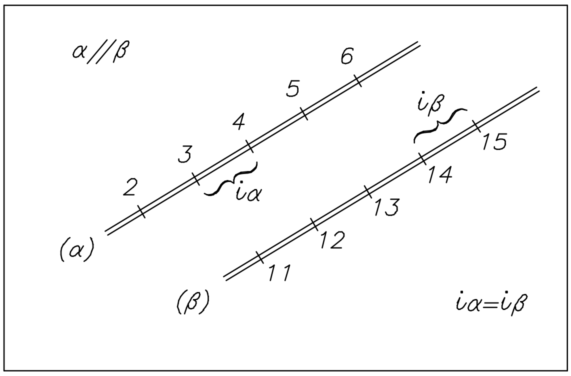


Figura 23 - Representação de dois planos paralelos pelas retas de maior declive.

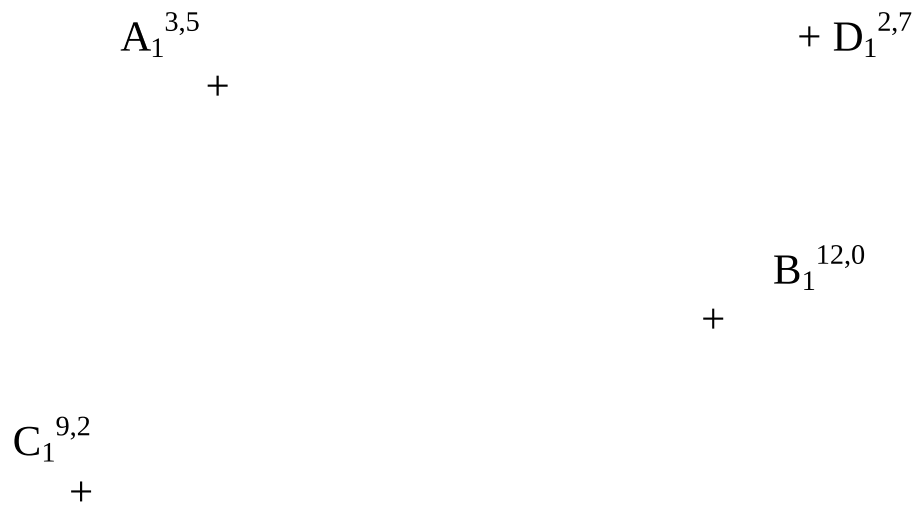
- ***Planos Concorrentes***

Quando dois planos são concorrentes, verifica-se um dos seguintes casos:

1. as suas retas de maior declive são concorrentes;
2. as projeções das suas retas de maior declive são paralelas, mas o **sentido de graduação** não é o mesmo;
3. as retas de maior declive são paralelas, mas seus intervalos não são iguais.

Exercício 1.12: Dados os pontos $A_1^{3,5}$, $B_1^{12,0}$, $C_1^{9,2}$ e $D_1^{2,7}$.Sabe-se que as retas AB e CD são retas de maior declive dos planos α e β, respectivamente. Determine a reta de interseção dos 2 planos (veja método na página seguinte).

Unidade: metro   escala: 1:40



MÉTODO GRÁFICO PARA DETERMINAR A RETA DE INTERSEÇÃO ENTRE DOIS PLANOS CONCORRENTES

Sejam dois planos quaisquer α e β. Seja, ainda, P um ponto de cota z_p pertencente simultaneamente a esses dois planos estando, portanto, na reta interseção de α e β. Para determinar a reta de interseção entre os 2 planos, procede-se do seguinte modo:

a. Determinar as retas de maior declive dos dois planos, graduadas.
b. Desenhar as retas horizontais dos 2 planos (perpendiculares às retas de maior declive).
c. Como as retas horizontais dos planos α e β passando por P serão representadas por $h^{(\alpha)}{}_{zP}$ e $h^{(\beta)}{}_{zP}$ respectivamente, a projeção de P estará na interseção das horizontais $h^{(\alpha)}{}_{zP}$ e $h^{(\beta)}{}_{zP}$;
d. Repetindo-se esse procedimento para outro ponto Q também pertencente simultaneamente aos planos α e β de cota z_Q . Da mesma forma como ocorreu para o ponto P, a projeção do ponto Q estará na interseção das retas horizontais $h^{(\alpha)}{}_{zQ}$ e $h^{(\beta)}{}_{zQ}$.
e. Portanto, a reta de interseção dos planos α e β é o lugar geométrico de todos os pontos interseção das retas horizontais de mesma cota desses planos.

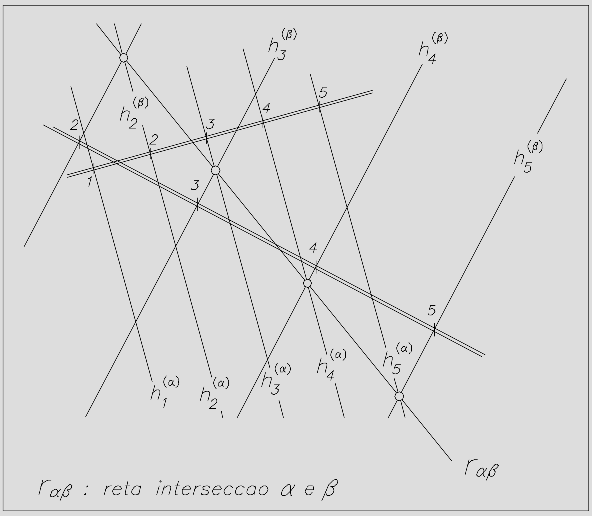


Figura 24 - Determinação da reta interseção $r_{\alpha\beta}$ entre os planos α e β.

1.5.6 Pertinência ponto-plano

Para um ponto pertencer a um plano é necessário que esse ponto pertença a uma reta horizontal[8] do plano. Dessa forma, para se verificar se um ponto pertence a um plano basta traçar a reta horizontal do plano de cota igual a do ponto. Observe a figura 25. Se o ponto P pertencer a horizontal que passa por ele, então o ponto P pertence ao plano; caso contrário, o ponto não pertence ao plano (por esse motivo, o ponto A não pertence ao plano). Um ponto é pertence a um plano vertical se pertencer ao traço desse plano no plano horizontal π_1; um ponto pertence a um plano horizontal quando sua cota é igual à cota desse plano.

[8] Não necessariamente de cota inteira.

Por outro lado, sabendo que um ponto Q pertence a um plano α pode-se determinar a sua cota traçando-se uma horizontal do plano passando por Q e determinando-se o valor de sua cota na reta de maior declive de α.

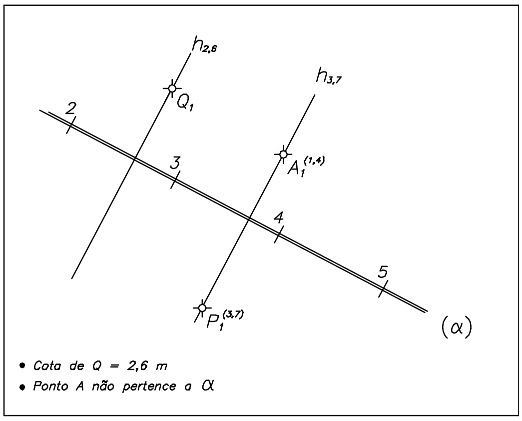


Figura 25 - Pertinência de ponto a plano.

1.5.7 *Pertinência reta-plano*

Para que uma reta pertença a um plano é necessário que ela se apóie em duas retas do plano. De outra forma, para que uma reta pertença a um plano é necessário que as horizontais do plano cruzem esta reta em pontos com cotas coincidentes com as das respectivas horizontais (figura 26).

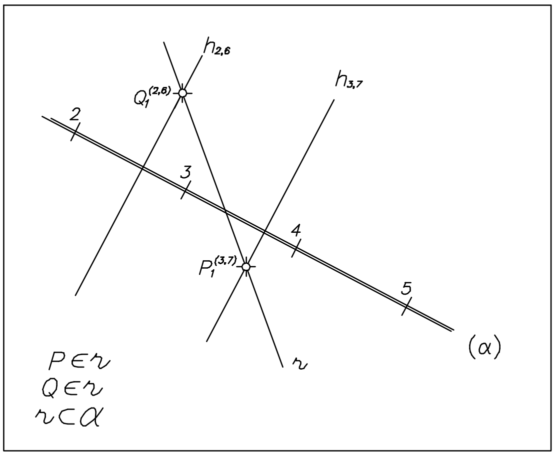


Figura 26 - Pertinência de reta a plano.

EXERCÍCIO 1.13: No exercício 1.11, sabendo-se que o ponto D pertence ao plano (A, B, C), qual é o valor da cota do ponto D? _______

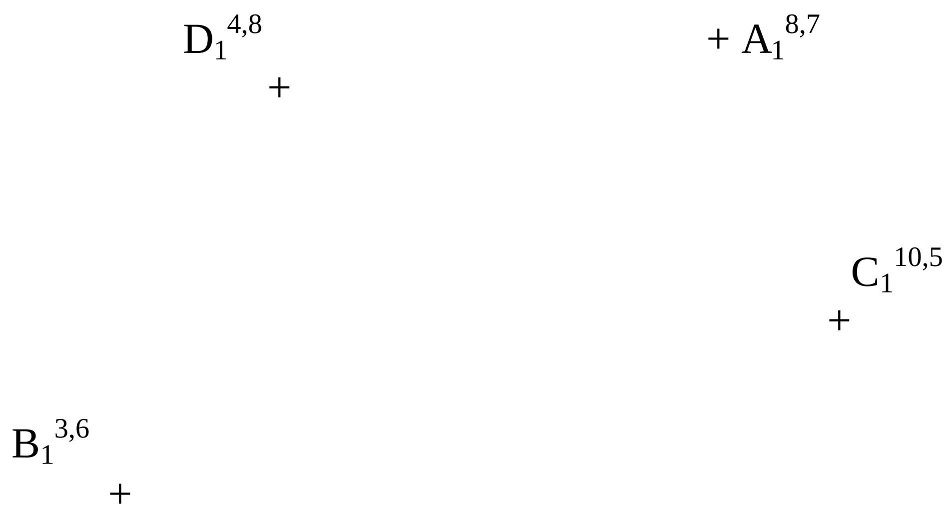
1.5.8 *Interseção reta-plano*

A interseção de uma reta com um plano é um ponto **próprio**, no caso geral, ou **impróprio** (no infinito) quando a reta é paralela ao plano. Observa-se ainda, que esse ponto pertencerá à reta interseção desse plano com qualquer plano que contenha a reta considerada. Poderemos utilizar esse fato para determinar o ponto de interseção de uma reta r com um plano α dado por sua reta de maior declive devidamente graduada:

- escolhemos arbitrariamente um plano ξ que contém a reta r dada: por facilidade escolhemos um plano cuja reta de maior declive é a reta r;
- determinamos a reta $i_{\alpha\xi}$, interseção entre os planos α e ξ, como mostrado anteriormente;
- encontramos o ponto P da reta r que pertence também a reta interseção i_{ax}. *Esse ponto P é a interseção da reta r com o plano a dado.*

EXERCÍCIO 1.14: Dados os pontos $A_1^{8,7}$, $B_1^{3,6}$, $C_1^{10,5}$ e $D_1^{4,8}$. Sabe-se que a reta AB é a reta de maior declive do plano α. Determine o ponto E de interseção da reta CD com o plano α.

Unidade: metro escala: 1:40



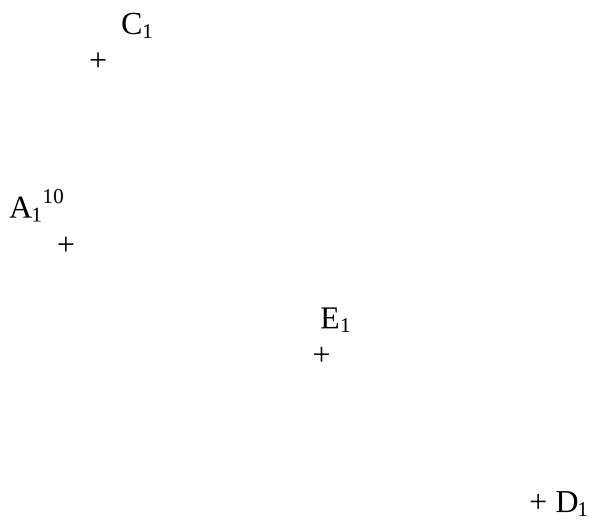
1.6 PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 1.1: Escala: 1:40 Unidade: metro

São dados os pontos A_1^{10} , B_1^{2}, $C_1^{?}$, $D_1^{?}$ e $E_1^{?}$.

Sabendo-se que a reta AB é a reta de maior declive de um plano α, pede-se:

a. Graduar a reta CD pertencente ao plano α e determinar as cotas de C e D.
b. Achar a cota do ponto E, sabendo-se que ele pertence ao plano α.
c. Construir as projeções das retas do plano que passam pelo ponto E e têm o intervalo i=1,4m.



PROBLEMA 1.2: Escala: 1:40 Unidade: metro

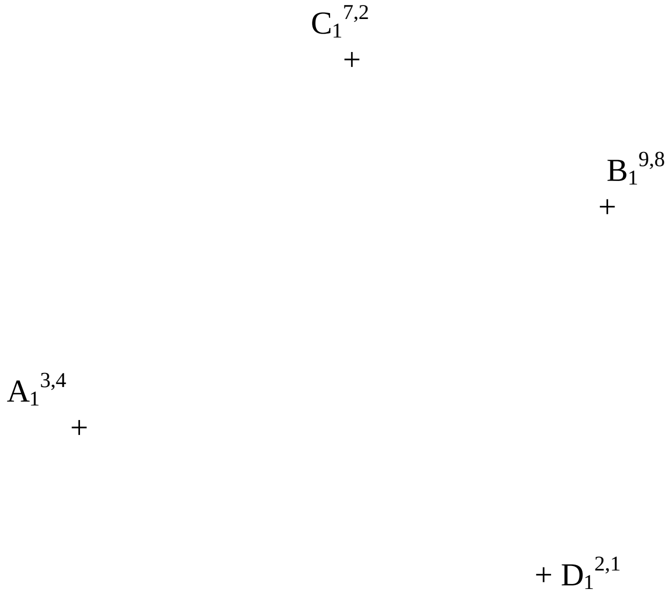
Dados os pontos $A_1^{2,3}$ e $B_1^{6,2}$, pede-se:

Achar as retas de maior declive de planos que contenham a reta AB e tenha intervalo i=0,60 m.

PROBLEMA 1.3: Escala: 1:80 Unidade: metro

São dados os pontos $A_1^{3,4}$, $B_1^{9,8}$, $C_1^{7,2}$ e $D_1^{2,1}$.

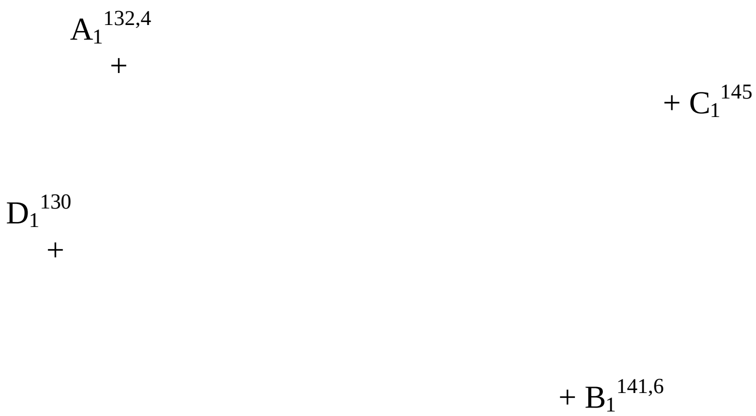
Pede-se achar a interseção dos planos que têm por reta de maior declive respectivamente AB e CD.



PROBLEMA 1.4: Escala: 1:100 Unidade: metro

São dados: $A_1^{132,4}$, $B_1^{141,6}$, C_1^{145} e D_1^{130}.

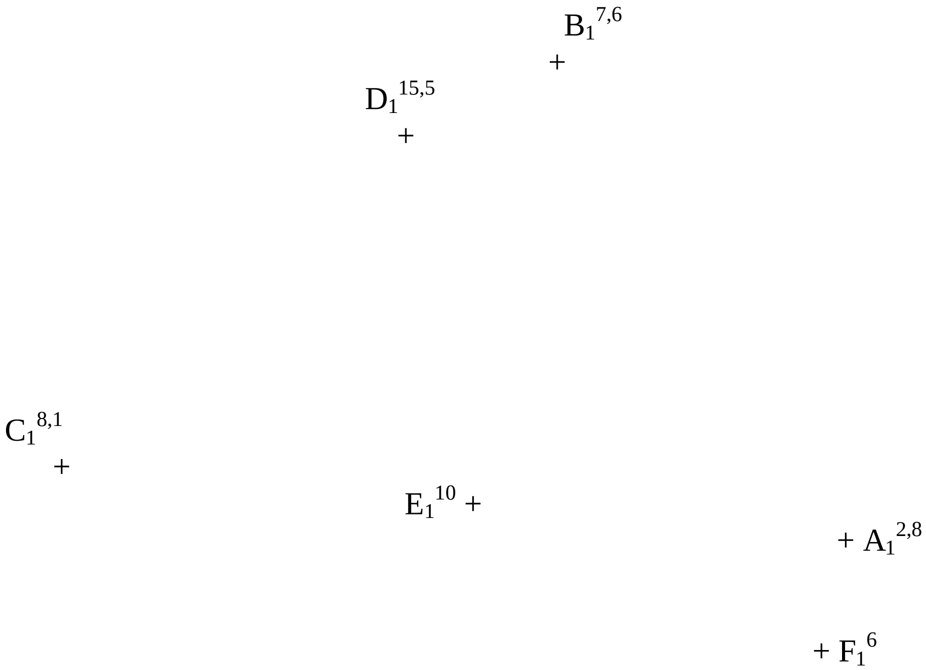
Pede-se determinar um plano paralelo à reta AB e que passe pelos pontos C e D.



PROBLEMA 1.5: Escala: 1:80 Unidade: metro

São dados: $A_1^{2,8}$, $B_1^{7,6}$, $C_1^{8,1}$, $D_1^{15,5}$, E_1^{10} e F_1^{6}.

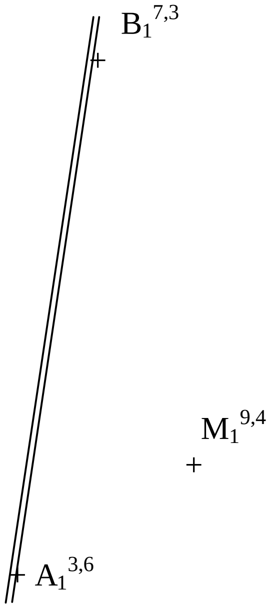
Pede-se construir e graduar uma reta paralela a EF e que se apóie em AB e em CD. Achar as cotas dos pontos de apoio.



PROBLEMA 1.6: Escala: 1:80 Unidade: metro

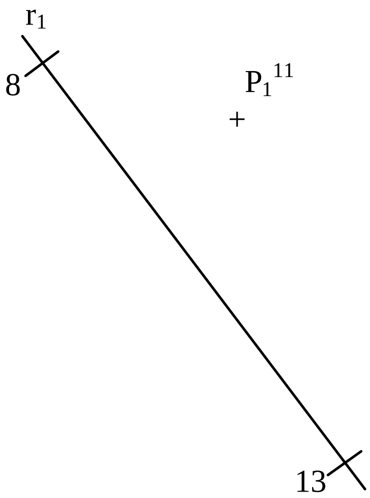
São dados $A_1^{3,6}$, $B_1^{7,3}$ e $M_1^{9,4}$.

Pede-se construir a perpendicular do ponto M ao plano cuja reta de maior declive é AB.



PROBLEMA 1.7: Escala: 1:100 Unidade: metro

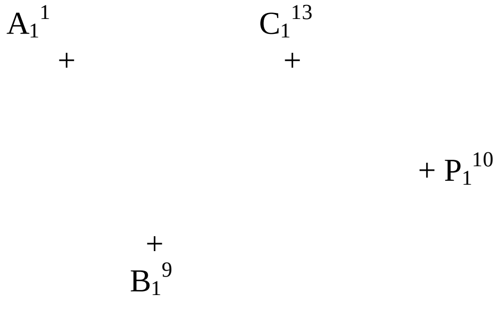
Traçar as projeções de todas as arestas de um cubo, sabendo-se que r é a reta suporte de uma das arestas de uma face e P é um dos vértices desta face.



PROBLEMA 1.8 Escala: 1:100 Unidade: metro

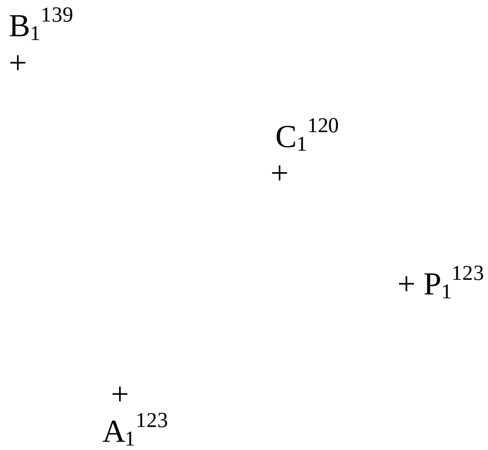
Determinar, graduando, a intersecção i do plano a com o plano b, sabendo que:

- a é definido pelos pontos A, B e C;
- b é perpendicular a a;
- O ponto P^{10} pertence ao plano b;
- b tem declividade $p=2/3$.



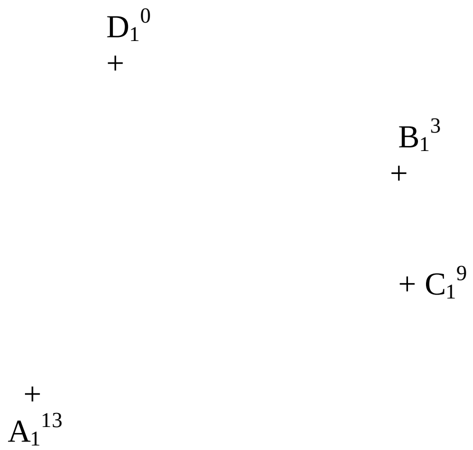
PROBLEMA 1.9 Escala: 1:1000 Unidade: metro

Obter graficamente a distância do ponto **P** ao plano definido pelos pontos **A**, **B** e **C**.



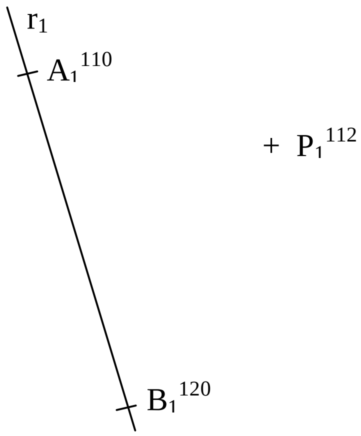
PROBLEMA 1.10 Escala: 1:100 Unidade: metro

Determinar o menor ângulo formado pelas retas **AB** e **CD:**



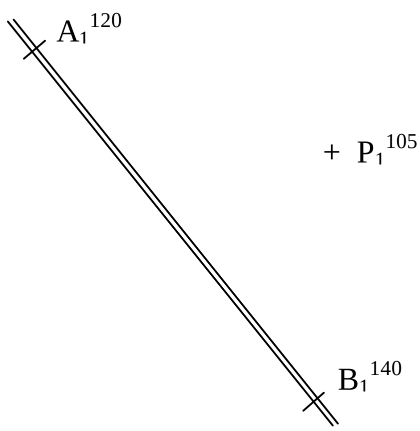
PROBLEMA 1.11 Escala: 1:100 Unidade: metro

Determinar a distância entre o ponto **P** e a reta **r**



PROBLEMA 1.12 Escala: 1:1000 Unidade: metro

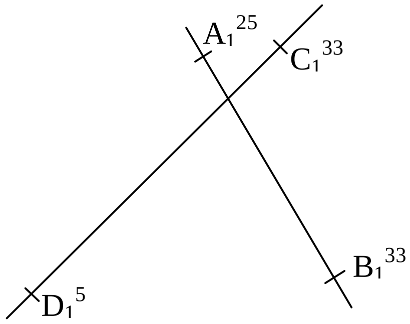
Determinar a distância entre o ponto **P** e o plano α, dado por sua reta de maior declive AB:



PROBLEMA 1.13 Escala: 1:100 Unidade: metro

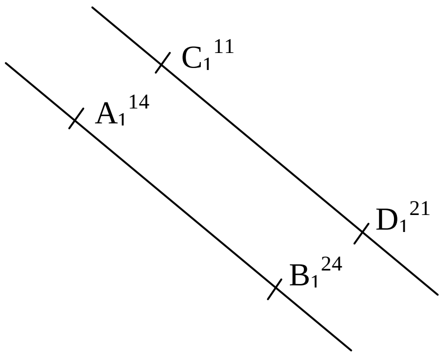
Para as duas retas **AB** e **CD**:

1) Verificar se são concorrentes;
2) Caso sejam concorrentes, determinar o menor ângulo formado por elas.



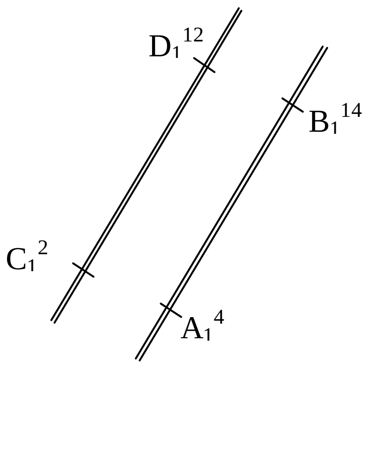
PROBLEMA 1.14 Escala: 1:100 Unidade: metro

Determinar a distância entre as retas **AB** e **CD:**



PROBLEMA 1.15 Escala: 1:100 Unidade: metro

Determinar a distância entre os planos a e b, representados por suas retas de maior declive AB e CD, respectivamente.



2. SUPERFÍCIES TOPOGRÁFICAS

2.1 OBJETIVOS

- Aprender os conceitos básicos sobre as superfícies topográficas;
- Desenvolver algumas aplicações da geometria cotada em problemas típicos.

2.2 INTRODUÇÃO

Vimos anteriormente que os principais elementos geométricos (como ponto, reta ou plano) podem ser representados por suas projeções cotadas num plano horizontal tomado como referência. A projeção horizontal de um ponto é complementada com o valor de sua cota definindo-o, dessa forma, univocamente. A figura 1 mostra a projeção cotada de uma reta AB e a reta de maior declive de um plano α.

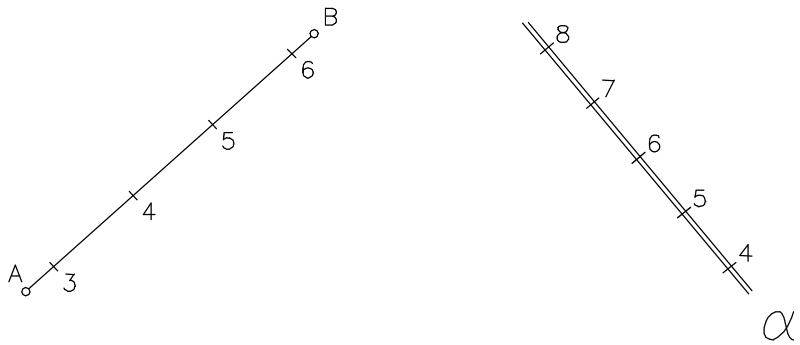


Figura 1 - Representação em projeção cotada de uma reta AB e a reta de maior declive de um plano α.

Entretanto, surge um novo problema no instante em que queremos representar uma curva irregular. Nesse caso, estenderemos para as curvas o conceito de graduação de retas: marcaremos os pontos dessa curva que são interceptados por planos horizontais de cotas inteiras, ou seja, aproximaremos a curva dada por uma seqüência de segmentos de reta e isso será suficiente para as nossas aplicações.

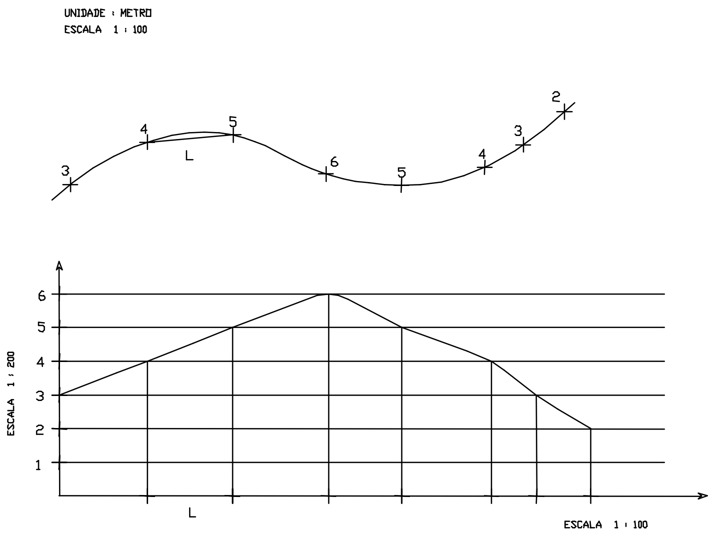


Figura 2 - Curva graduada de metro em metro e o seu perfil.

Observe a figura 2. Nela estão representados um segmento de curva com as marcações de suas cotas inteiras e o seu perfil. O ***perfil da curva*** é um diagrama que representa um sistema de projeção ortogonal, cujos planos verticais têm como traço[9] no plano horizontal os segmentos de reta da curva discretizada. As cotas são lidas diretamente dos pontos da curva. Nesse diagrama as abscissas e as cotas podem estar representadas em escalas diferentes.

2.3 SUPERFÍCIES TOPOGRÁFICAS

Superfície topográfica é uma classe de superfície que não pode ser representada por uma equação, isto é, **sua forma não é geometricamente determinada.**

Dessa forma, uma superfície topográfica não admite exatidão no seu estudo ou na sua representação. ***As soluções dos problemas não são exatas*** e apenas darão orientação básica para a resolução dos mesmos.

2.3.1 Curvas de nível

O princípio básico da representação de superfícies topográficas consiste em se considerar uma série de planos horizontais α_1, α_2, α_3, ...de cotas z_1, z_2, z_3, ... Assim, um plano horizontal α_i seciona a superfície topográfica segundo uma *linha* que é o lugar geométrico dos pontos dessa superfície que tem cotas z_i iguais à desse plano. Todos os pontos dessa linha apresentam a mesma cota, estando, portanto, no mesmo nível horizontal; essas linhas são chamadas, pois, de ***curvas de nível***.

Na figura 3 estão representados os planos horizontais α_i, a superfície topográfica S e o plano de projeção p_1. Observe que esses planos são eqüidistantes entre si e essa diferença de cotas é o ***intervalo*** ou ***eqüidistância*** da folha cotada. Essa ***folha cotada*** é o plano de projeção onde estão projetadas as curvas de nível e feitas as anotações dos valores de suas cotas bem como a unidade e a escala utilizadas. Essa folha cotada também recebe o nome de ***folha*** ou ***carta topográfica***.

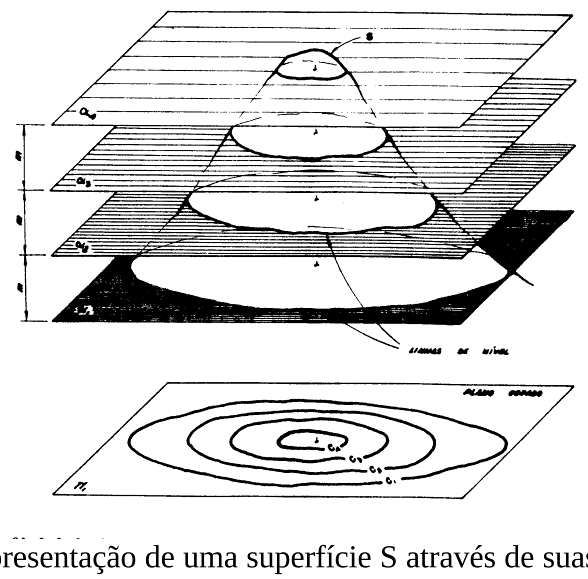


Figura 3 - Representação de uma superfície S através de suas curvas de nível.

[9] Isto é, intersecção.

Fazendo uma analogia com as projeções cotadas, tem-se:

- **Plano => retas horizontais**.
- **Superfícies topográficas => curvas de nível**.

Recomenda-se a utilização de intervalos das folhas cotadas de 1m, 2m, 5m e seus múltiplos de 10. Isso permite que, por inspeção visual da carta topográfica do terreno, possam ser determinados trechos que apresentam declividades maiores que determinados valores limites. Isso é particularmente importante para o planejamento de mecanização agrícola e determinação do aproveitamento de regiões mais íngremes para certos tipos de cultura.

A figura 4 apresenta exemplo de uma superfície topográfica, com suas curvas de nível sobrepostas à fotografia aérea.

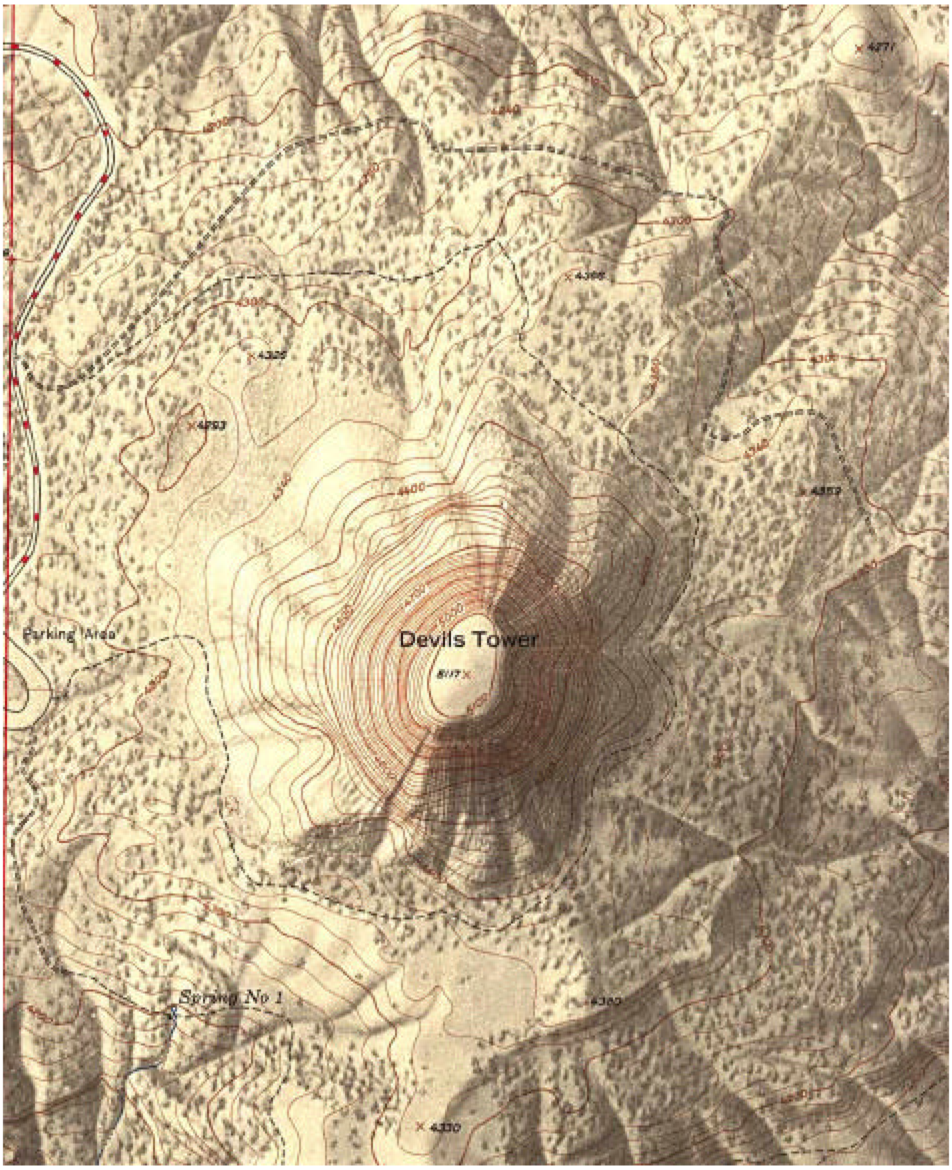


Figura 4 – Fotografia aérea e as curvas de nível

2.3.2 *Pontos pertencentes a uma superfície topográfica*

Em aulas anteriores aprendemos um método de verificar a pertinência de um ponto a uma reta ou a um plano representados em geometria cotada. Agora, podemos estender esse conceito e verificar se um ponto pertence ou não a uma superfície dada por suas curvas de nível. O método é análogo ao aplicado no estudo de pertinência de ponto à reta:

> "um ponto pertence à uma superfície topográfica se pertencer à sua curva de nível de mesma cota"

Observe a figura 5 onde estão representados um terreno por suas curvas de nível de metro em metro, e os pontos A, B e C. Vamos verificar inicialmente se os pontos A e B pertencem à superfície desse terreno.

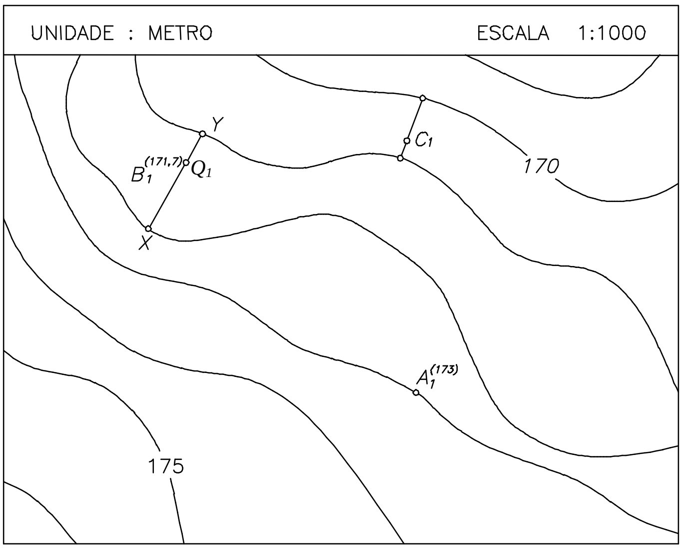


Figura 5 - Folha topográfica mostrando as curvas de nível de um terreno e as projeções cotadas dos pontos A, B e C.

Para tanto, vamos inicialmente determinar as cotas de pontos do terreno (pontos P e Q) que apresentam projeções no plano horizontal coincidentes às projeções dos pontos A e B (A_1 e B_1). Como, por definição, os pontos P e Q pertencem à superfície do terreno, eles pertencem à alguma de suas curvas de nível. Verifiquemos. Tomemos um ponto P do terreno cuja projeção P_1 coincide com A_1 e um ponto Q com Q_1 coincidente com B_1. O ponto P pertence à curva de nível de cota 173,0 metros que é, também, a cota do ponto A. Dessa forma, o ponto A pertence à superfície desse terreno, pois pertence à curva de nível de igual cota.

Analisemos agora o ponto B. A projeção desse ponto coincide com a projeção do ponto Q pertencente ao terreno. Observe que B_1 e Q_1 estão situados entre as curvas de nível 171 e 172 e, dessa forma, a cota do ponto Q está compreendida entre 171 e 172m. Não é possível determinar o valor exato de sua cota, pois essa projeção não pertence ao traço de nenhuma curva de nível (de cota inteira). O valor da cota de Q é determinada por interpolação linear entre as cotas de dois pontos X e Y pertencentes às curvas de nível 171 e 172. Os pontos X e Y são extremos do menor segmento de reta que contém o ponto Q. O valor da cota do ponto Q obtida por interpolação linear não é exata, pois não se tem nenhuma informação do comportamento do terreno na região entre as duas curvas de nível. Se, por acaso, entre essas duas linhas o terreno for convexo, a cota de Q determinada por interpolação é menor que o valor real; por outro lado, se o terreno for côncavo, a cota de Q é maior que o seu valor real.

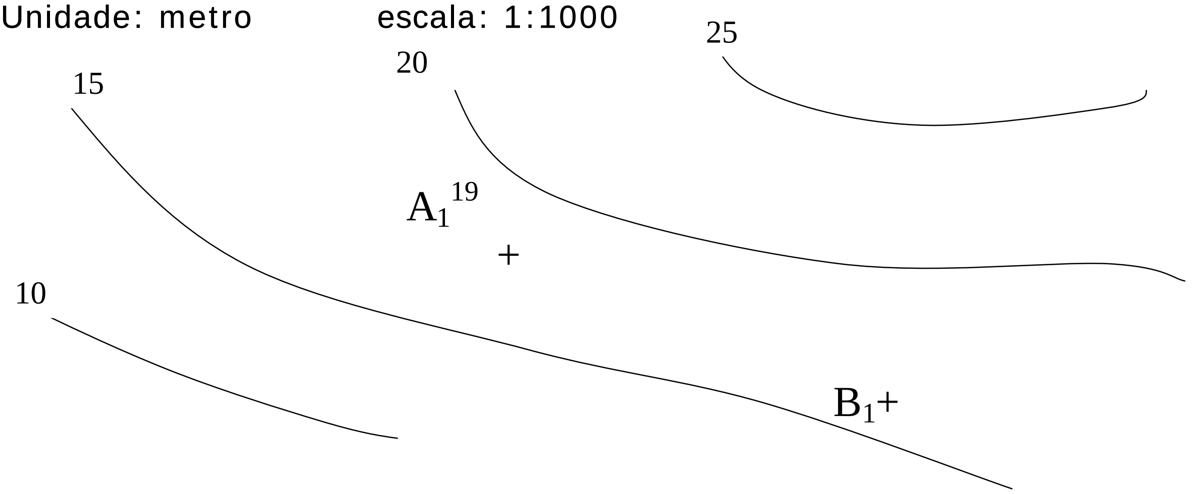
No nosso exemplo, por interpolação tem-se que a curva de nível da superfície que passa pelo ponto Q tem cota 171,3 metros. Como o ponto B tem cota 171,7 m concluímos que esse ponto não pertence à superfície desse terreno, situando-se 0,40 metros acima dela.

Por outro lado, sabendo que o ponto C pertence a esse terreno, podemos determinar a sua cota. Usaremos, para isso, esse mesmo método: “desenhar” a curva de nível desse terreno que contém o ponto C considerado. Visualmente constatamos que a cota do ponto C está compreendida entre 170 e 171. Repetindo-se o mesmo processo de interpolação linear aplicado anteriormente para o ponto Q determinamos que a cota de C é igual a 170,7 m.

EXERCÍCIO 2.1: São dados os pontos A_1^{19} e $B_1^{?}$, e as curvas de nível de uma superfície topográfica.

a. Verifique se o ponto A pertence à superfície.
b. Sabendo-se que o ponto B pertence à superfície, determine a cota do ponto B.

Unidade: metro   escala: 1:1000



2.3.3 *Linhas hidrodinâmicas de um terreno*

Tomemos uma superfície de um terreno dada através de suas curvas de nível como mostrado na figura 6.

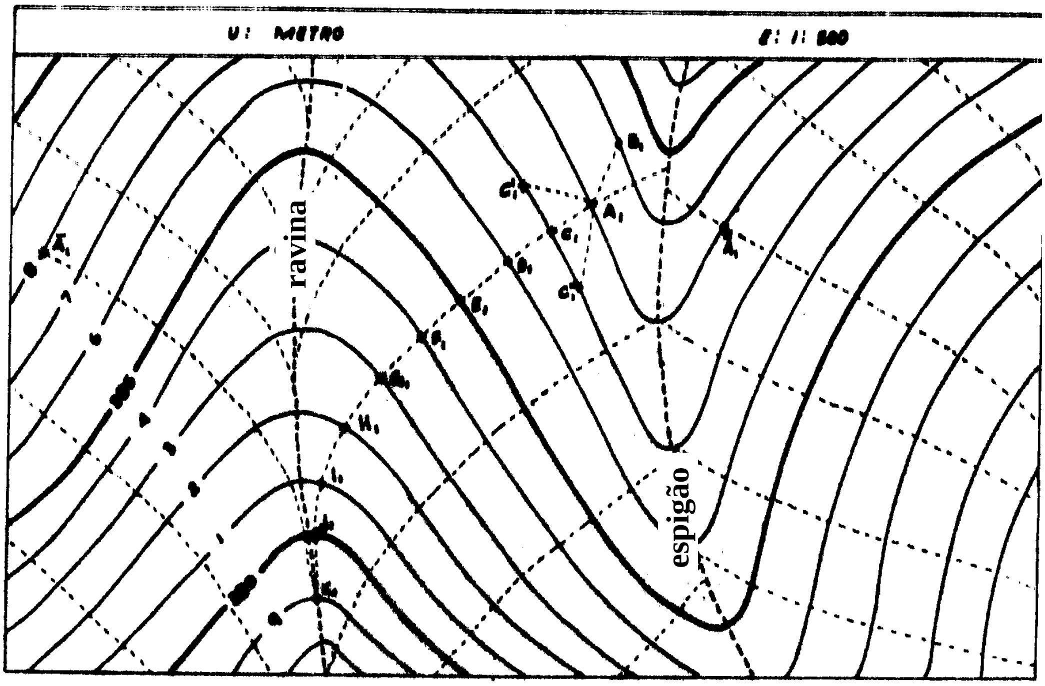


Figura 6 - Superfície topográfica de um terreno mostrando as suas Linhas Hidrodinâmicas e as Linhas de Ravina e de Espigão.

Partindo-se de um ponto A, posicionado em determinada curva de nível, podemos caminhar sobre esse terreno de 3 maneiras distintas:

- caminhar sobre essa curva de nível: estaremos caminhando na superfície do terreno sem, no entanto, alterar o valor de nossa cota (altura);
- caminhar em direção à curva de nível de cota **maior**: nesse caso estaremos caminhando na superfície do terreno e **subindo** em relação ao plano horizontal;
- caminhar em direção à curva de nível de cota **menor**: nesse caso estaremos **descendo** em relação ao plano horizontal.

Agora, consideraremos apenas o caminhamento em direção à curva de nível de cota maior; entretanto, as conclusões obtidas independem do sentido do caminhamento e as conceituações que faremos são genéricas. Partindo-se de um ponto A de cota $\boldsymbol{z_A}$ subiremos na superfície do terreno e atingiremos a curva de nível de cota $\boldsymbol{z_B}$ (por facilidade de demonstração e sem perda de generalidade consideraremos $\boldsymbol{z_B} = \boldsymbol{z_A}+1\text{m}$). A subida em direção à curva de nível de cota $\boldsymbol{z_B}$ pode ser realizada por diversos caminhos apresentando, em conseqüência, diferentes deslocamentos. Nesse caso, a diferença de cotas está definida e é igual a 1 metro tendo-se, portanto, a distância vertical constante (***DV*** = 1m). Dessa maneira, a diferença de percurso será função da distância horizontal entre o ponto de cota $\boldsymbol{z_B}$ e o ponto A. *Certamente haverá um ponto (chamaremos de ponto B) do terreno e de cota z_B que estará à menor distância do ponto A.*

Da mesma forma, partindo-se do ponto B atingiremos o ponto do terreno de cota z_B+1. Seguindo-se pelo *caminho mais curto* alcançamos o ponto C naquela curva de nível de cota z_B+1. Repetindo-se esse procedimento obtemos os pontos D, E, F, ... mostrados na figura 6. A união desses segmentos é o lugar geométrico dos caminhos mais curtos entre pontos situados em curvas de nível consecutivas de uma folha topográfica. Essa linha é o caminhamento de máxima declividade pelo qual se pode percorrer o terreno a partir de um ponto A. Assim, esse será o caminho percorrido pelas águas das chuvas que caem em A. Assim, ela é chamada de ***Linha Hidrodinâmica*** do terreno. É o equivalente ***às retas de maior declive de um plano,*** estudadas anteriormente.

Fazendo analogia com a geometria cotada, tem-se:

- **No plano => retas de maior declive**.
- **Em superfícies topográficas => linhas hidrodinâmicas**.

2.4 PERFIL DE UM TERRENO SEGUNDO UM CAMINHAMENTO

Um caminhamento sobre uma superfície topográfica corresponde a uma curva irregular. O perfil desta curva irregular é representado num diagrama, conforme já mencionamos anteriormente. Traçando uma curva AB que une as projeções A_1 e B_1 de dois pontos sobre um terreno, podemos então obter o perfil do terreno segundo aquele caminhamento, como mostrado na figura 7 . Este caminhamento pode representar, por exemplo, uma estrada unindo os dois pontos.

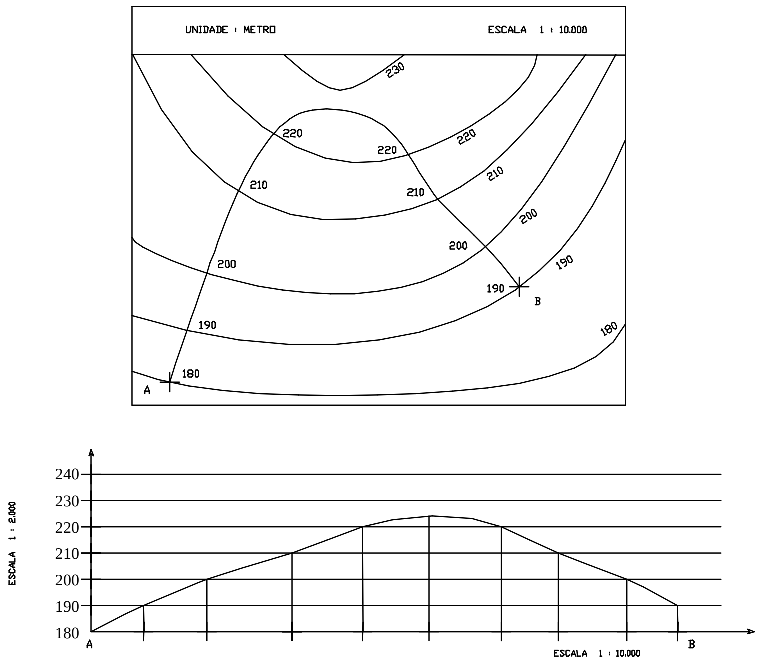


Figura 7 - Perfil de um terreno segundo um caminhamento entre os pontos A e B.

2.4.1 *Caminhamento de declividade constante*

O traçado de um caminhamento com declividade constante sobre um terreno é um problema encontrado com freqüência na construção de estradas. Para resolvê-lo podemos usar a folha cotada do terreno e um compasso com uma abertura igual ao **intervalo** correspondente à **declividade** dada. A figura 8 mostra um caminhamento que une os pontos A e B com declividade constante.

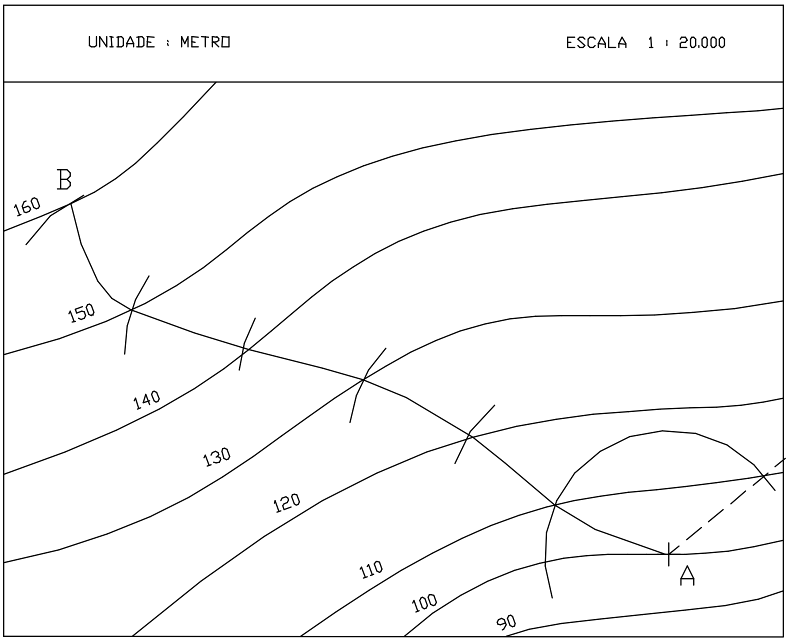
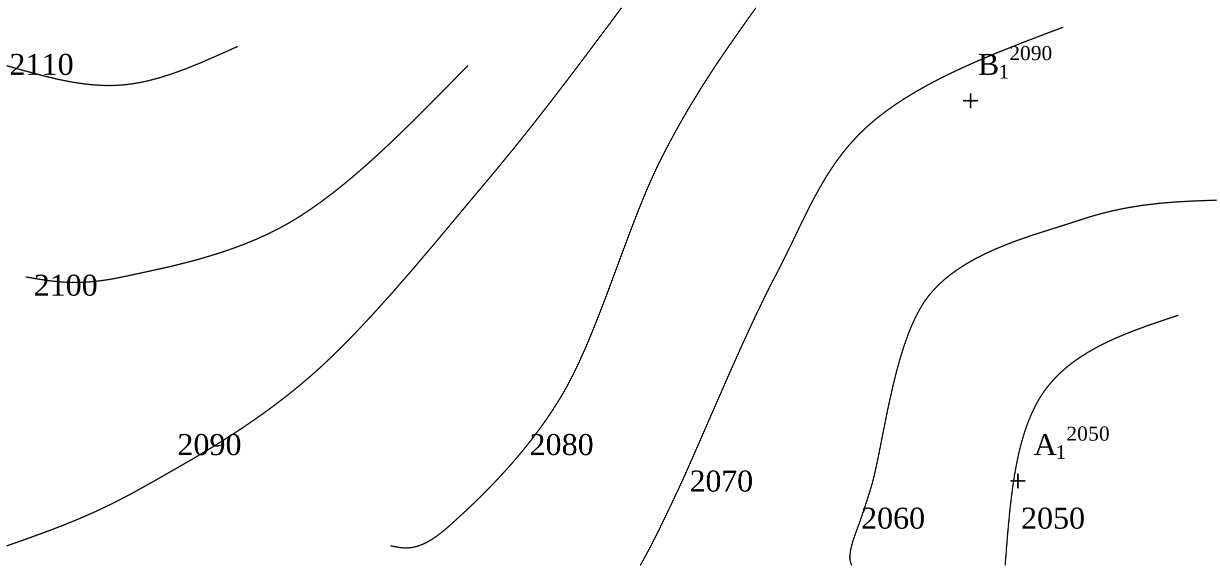


Figura 8 - Caminhamento entre os pontos A e B com declividade constante.

EXERCÍCIO 2.2: Por que as estradas fazem uma série de curvas na forma de S ou U na subida de uma serra? Você se lembra das inclinações máximas indicadas nas placas de sinalização das estradas? Na folha topográfica abaixo, trace uma estrada de declividade constante igual a 10%, saindo do ponto A para chegar na curva de nível de 2100 m.

Unidade: metro escala: 1:2500



R:____

____

____

____

2.5 CORTE PLANO DE TERRENOS

Um outro problema é encontrar a interseção de um plano com uma superfície topográfica representada por suas curvas de nível. Começamos traçando as horizontais do plano com cotas iguais às da superfície e definimos os pontos onde estas horizontais encontram as curvas de nível correspondentes. Ligando estes pontos, obtemos as ***linhas de encontro*** do plano com a superfície, conforme exemplificado na figura 9.

Na analogia com a Geometria Cotada, tem-se:

- Interseção de plano => interseção das retas horizontais.
- Interseção de superfícies topográficas => interseção das curvas de nível.

Quando a superfície topográfica em estudo é um terreno, a região do espaço que fica abaixo do plano e acima do terreno é chamada de ***aterro***, e o plano é dito ser um plano de aterro. O aterro corresponde a uma região que deve ser preenchida para que a superfície do terreno fique plana.

A outra região do espaço que fica acima do plano e abaixo do terreno é chamada de ***corte***, e o plano é um plano de corte. Nesta região deve ser feita uma escavação para se chegar da superfície do terreno até o plano dado. Devemos notar ainda que o limite físico entre as regiões de corte e aterro corresponde justamente às linhas de encontro do plano com o terreno.

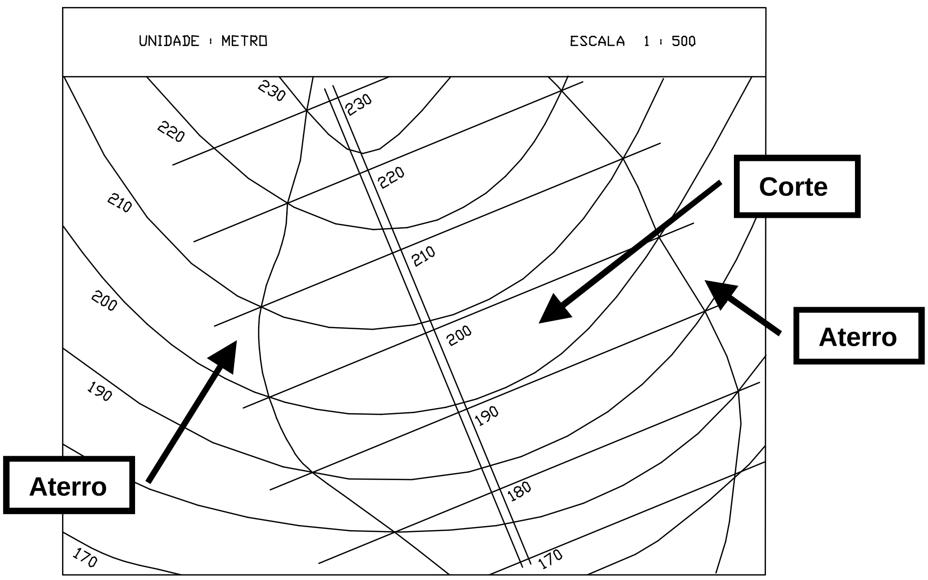


Figura 9 - Interseção de um plano com uma superfície - regiões de aterro e corte.

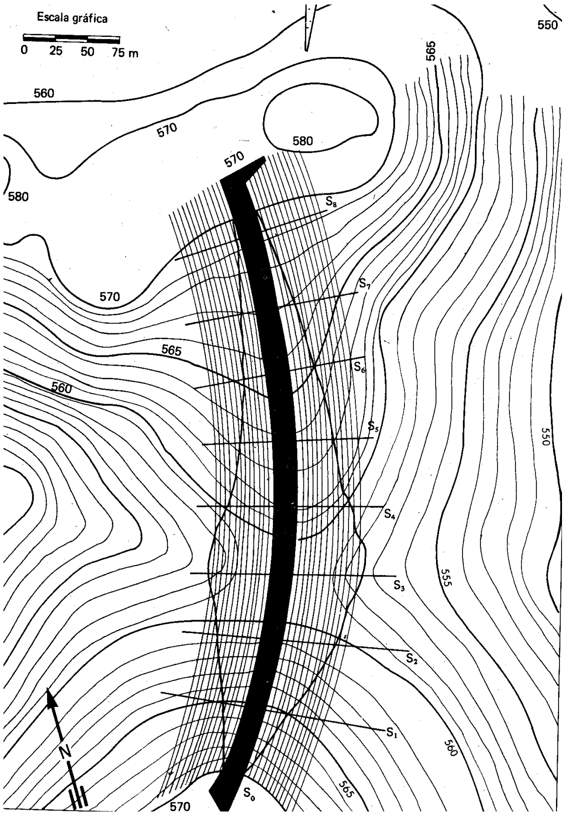
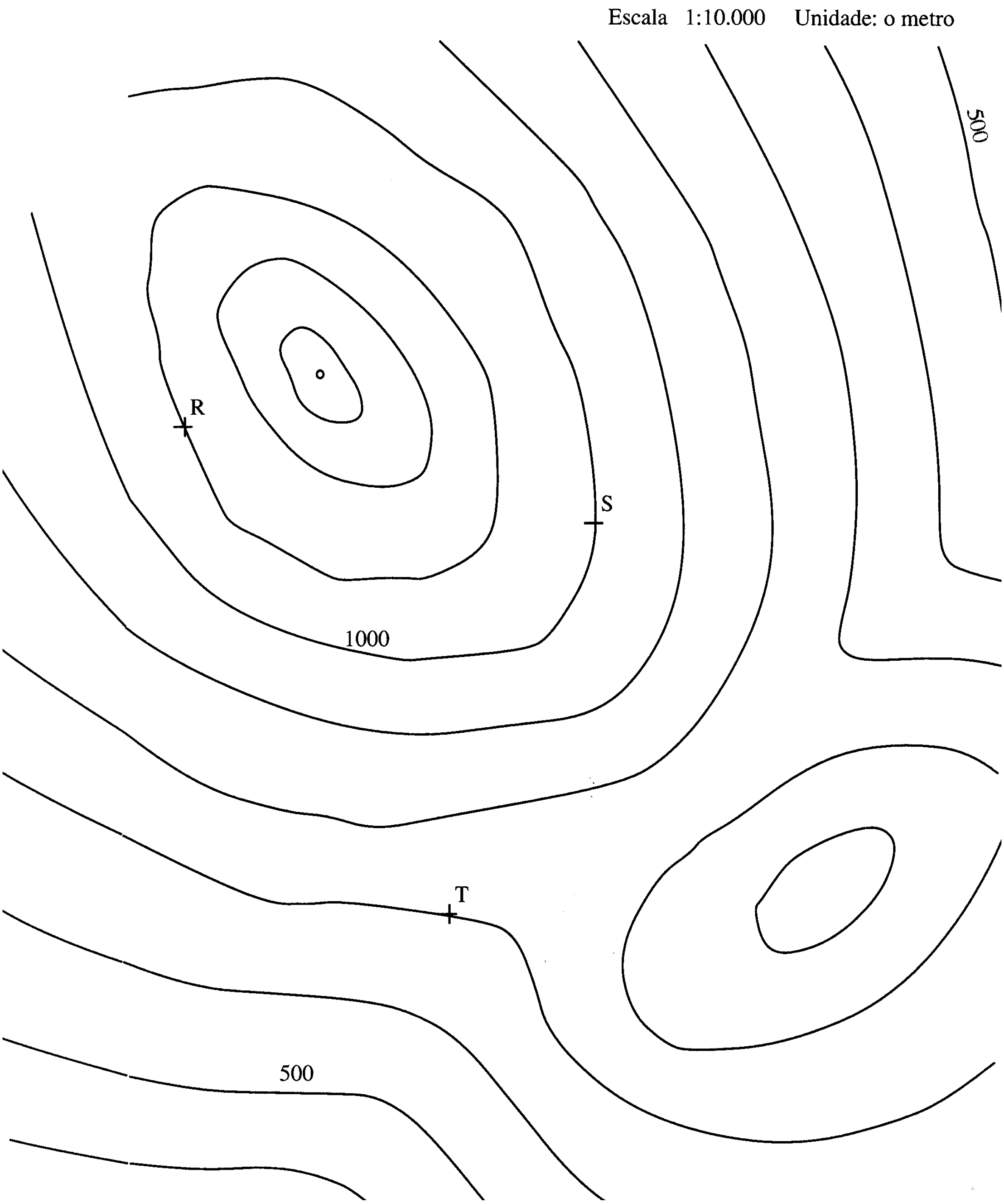


Figura 10 – Linhas de encontro das saias de aterro de uma barragem com a superfície do terreno.

EXERCÍCIO 2.3: No exercício 2.2, sabendo-se que a reta AB é uma reta de maior declive de um plano α, determine a linha de encontro do plano α com o terreno.

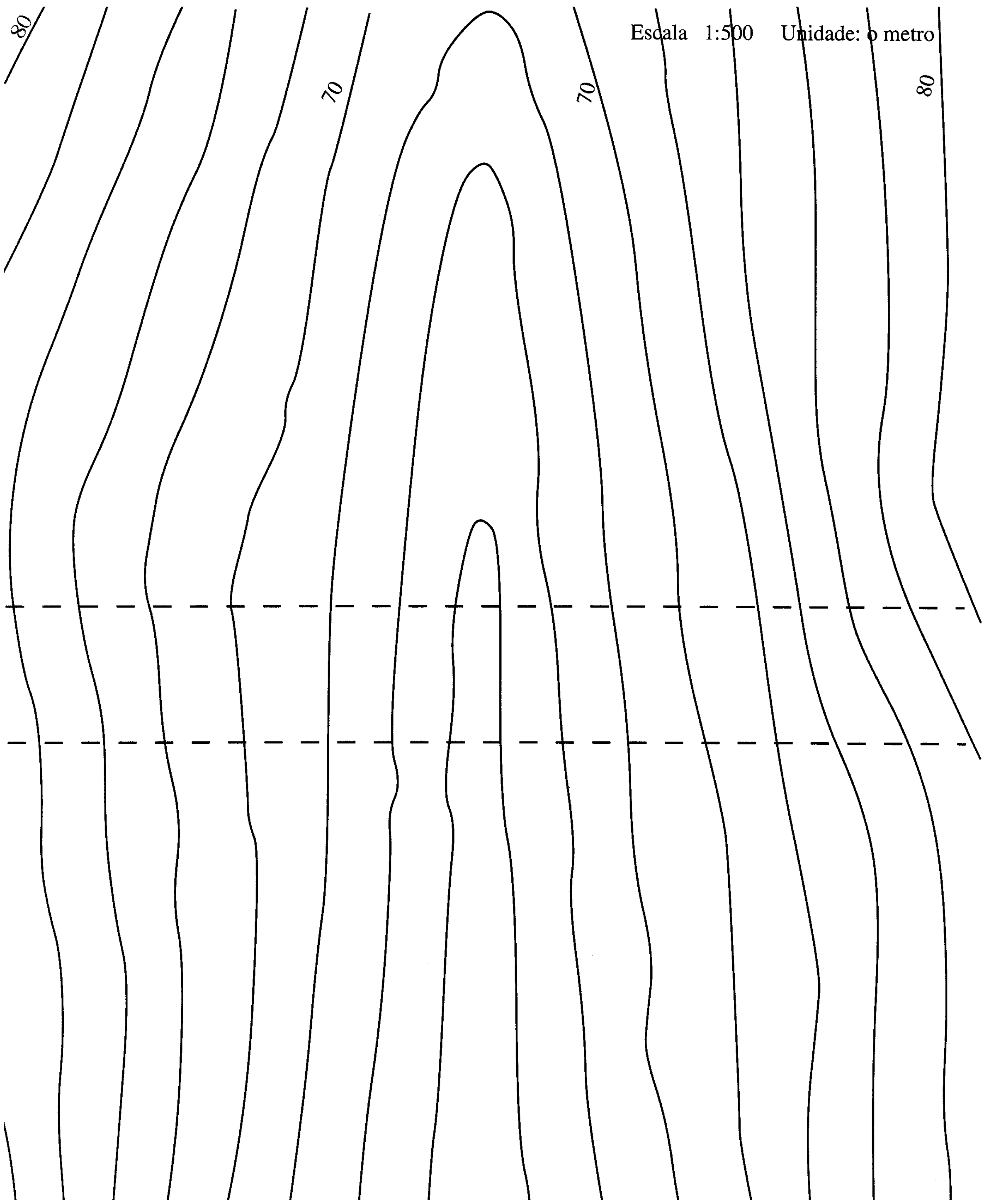
2.6 PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 2.1: Determinar a linha de afloramento da capa de uma jazida mineral, cujo plano é definido pelos pontos R, S e T. No ponto R houve afloramento; no ponto S foi feita uma perfuração vertical e a capa foi encontrada a 180 m de profundidade; idem no ponto T a 200m de profundidade.



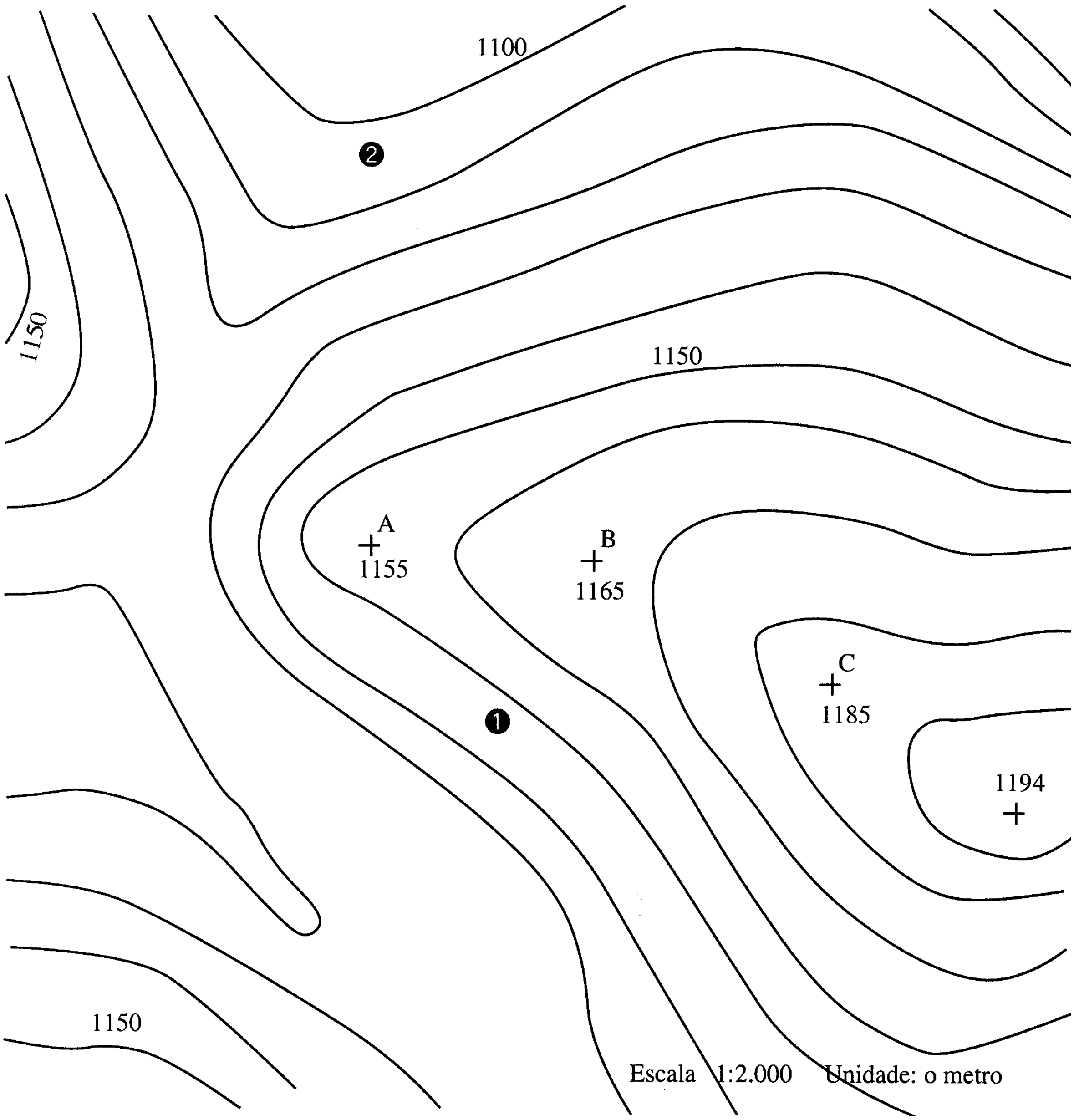
PROBLEMA 2.2: Projetar a barragem de terra com crista horizontal no cota 76 m, largura de 12 m e bordos laterais retos representados em tracejado. Determinar as linhas de encontro das saias de aterro com a superfície topográfica. Indicar a região inundável a montante para o nível de água na cota 74 m.

Dados: $p_{montante}=1/4$, $p_{jusante}=1/3$

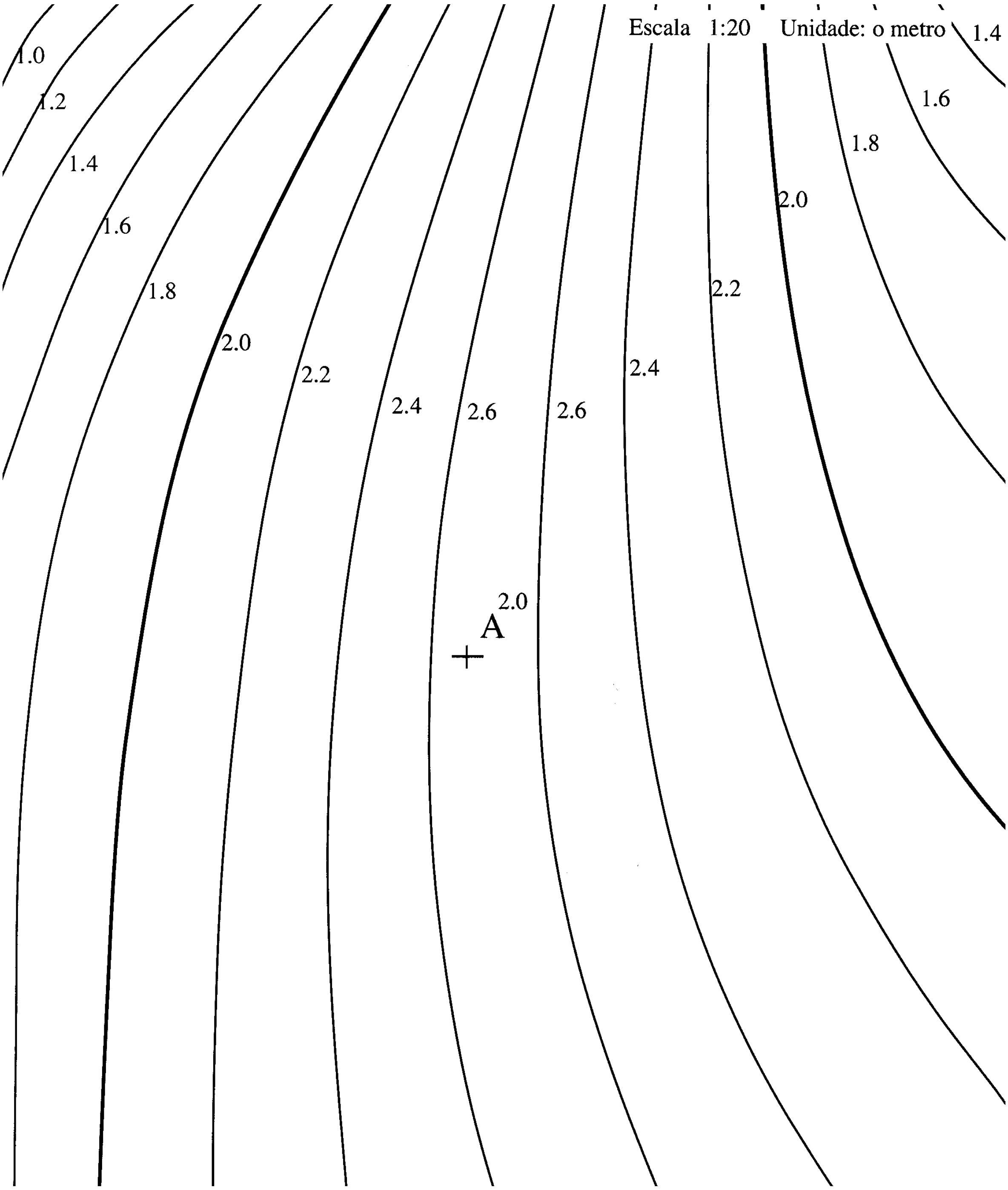


PROBLEMA 2.3: Em uma propriedade rural deseja-se instalar um pára-raio de 25 m de altura de forma a proteger as construções térreas 1 e 2 mostradas na figura. Supondo-se que o pára-raio proteja o volume interno a uma superfície cônica que tem por vértice a ponta do pára-raio e forma um ângulo de 60 graus com a haste vertical que sustenta o pára-raio, pede-se:

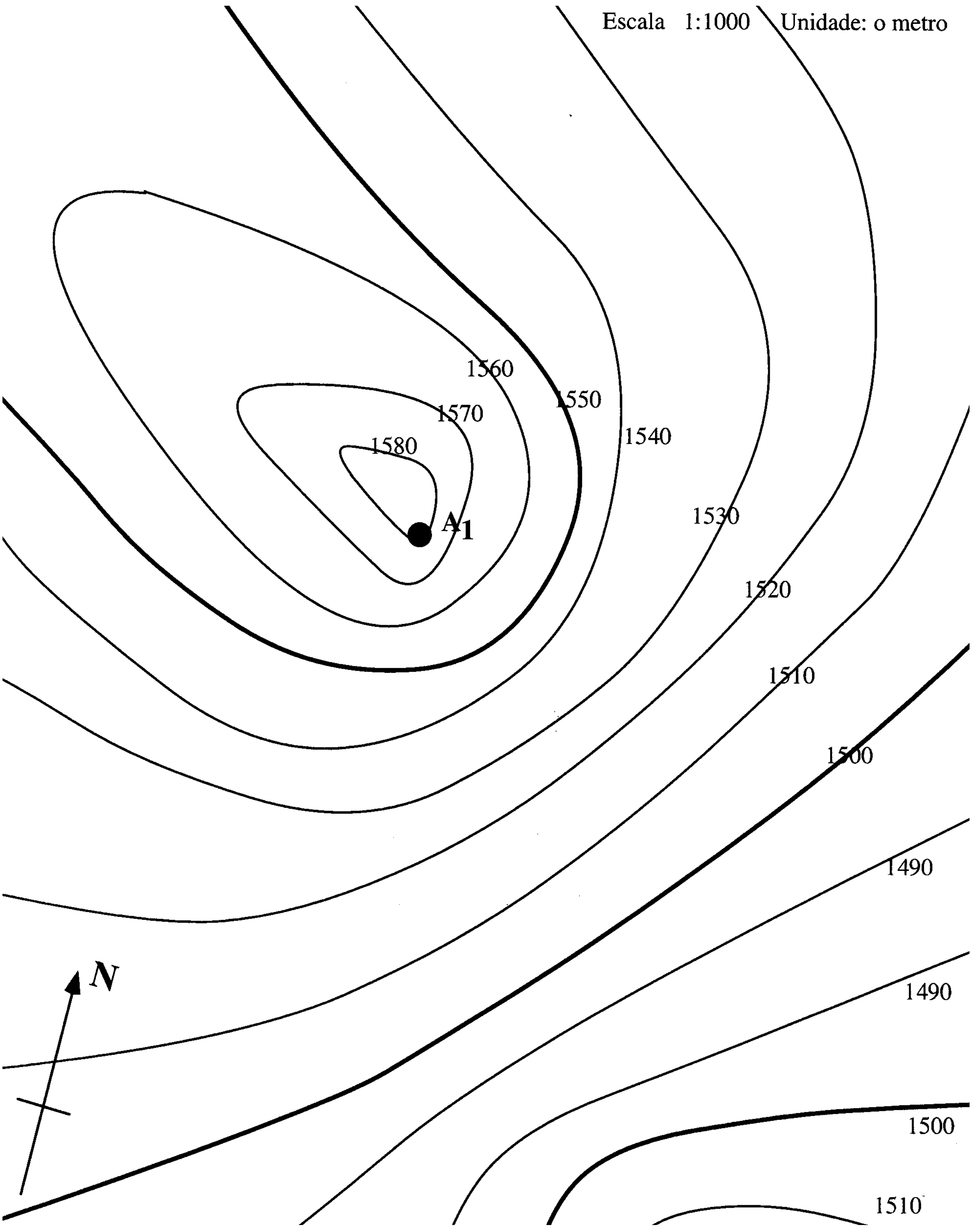
a. Determinar a área do terreno abrigada sob o cone de proteção do pára-raio se ele for colocado no ponto A. Verificar se as construções estão protegidas.
b. Idem para o ponto B.
c. Idem para o ponto C.



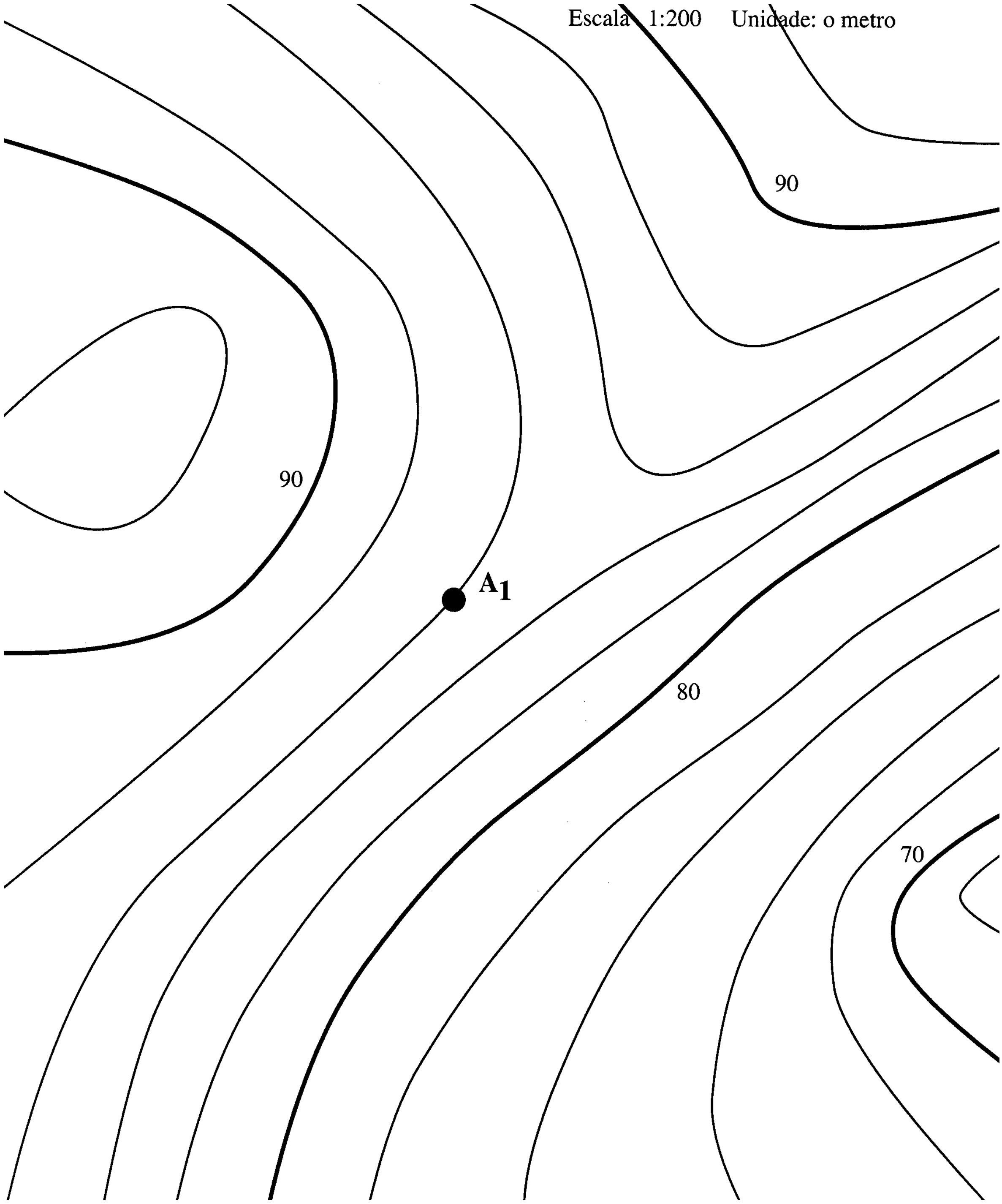
PROBLEMA 2.4: No ponto A do casco de um submarino, deseja-se instalar um sonar. Sabendo-se que o domo do sonar tem formato de uma esfera, cujo centro é o ponto A e raio r=1.25m, determine o cordão de solda entre o casco e a base do domo do sonar.



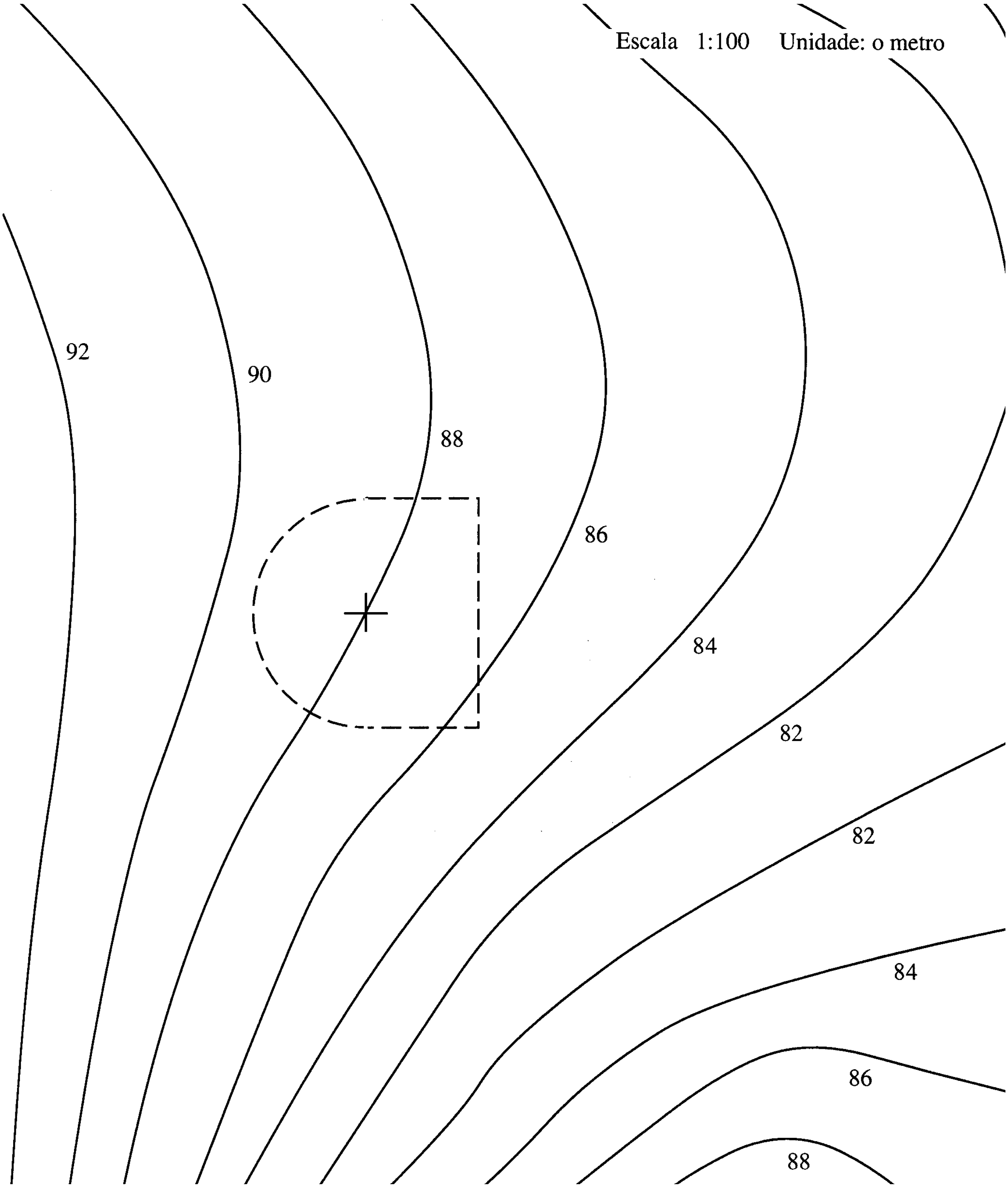
PROBLEMA 2.5: Deseja-se construir uma pirâmide cuja seção horizontal é um quadrado, vértice a 20m do terreno no ponto A e as faces voltadas para as direções norte, sul, leste e oeste. Determinar a interseção das faces laterais da pirâmide com o relevo, sabendo-se que a declividade das faces laterais é p=1.25.



PROBLEMA 2.6: Uma lâmpada de mercúrio é instalada 10 metros acima do chão no ponto A, a beira de uma lagoa, cuja topografia é representada na folha cotada. Sabe-se que a lâmpada ilumina o volume interno a uma superfície cônica que tem por vértice a própria lâmpada e forma um ângulo de 45 graus com a haste vertical. Determine a superfície da água da lagoa, sabendo que o nível da água é 83 m. Determinar a área do terreno e da superfície de água iluminada pela lâmpada.

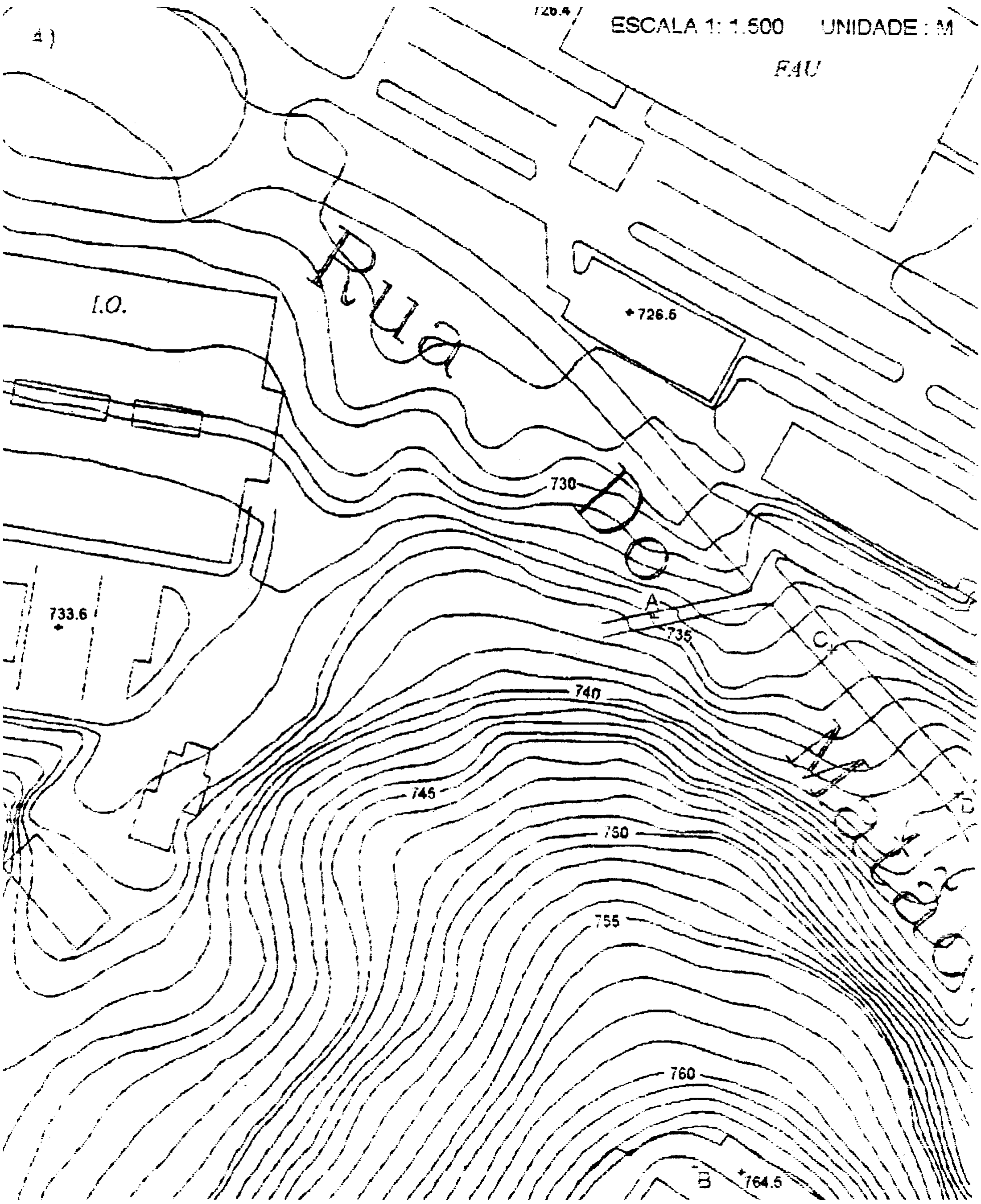


PROBLEMA 2.7: Uma encosta está representada pelas suas curvas de nível. Em tracejado estão representados os limites de um patamar de cota 88m que se pretende construir nessa encosta. Sabe-se que as rampas de corte e de aterro devem ter a declividade igual a 2. Determinar as linhas de encontro desses planos de corte e de aterro com o terreno.



PROBLEMA 2.8: Na folha cotada está representada a topografia de uma região da USP próxima à Rua do Matão. Pede-se:

a. Determinar a declividade e o intervalo da rua do Matão para um caminhamento entre os pontos C e D.
b. Traçar um caminhamento entre os pontos A e B com declividade constante igual 1/7.



PROBLEMA 2.9: Deseja-se estudar as águas das chuvas nas encostas próximas à região ao Pico do Jaraguá. Começamos traçando as linhas de espigão que ligam os picos dos morros em A, B, C e D; estas linhas são os divisores naturais das águas nas encostas. Devemos ainda obter as linhas de ravina para aonde as águas convergem, saindo da garganta em F e atingindo os pontos mais baixos em E e G.