

Topologia Geral versão 2023  
Notas de Aula  
MAT317 (Bacharelado em Matemática) e  
MAT5741 (Mestrado em Matemática)

Artur Hideyuki Tomita  
Departamento de Matemática  
IME-USP

# Sumário

<b>1</b>	<b>Topologia. Abertos. Bases e Sub-bases de Abertos.</b>	<b>2</b>
1.1	‘Está aberta a temporada de topologia’ . . . . .	2
1.1.1	Noção de aberto e topologia . . . . .	2
1.1.2	Definição de Topologia. . . . .	3
1.2	Base de abertos. . . . .	4
1.2.1	Definição de Base de Abertos . . . . .	4
1.2.2	Topologia gerada por Base de Abertos. . . . .	5
1.2.3	Topologia gerada por uma métrica usando bolas abertas como Base de Abertos. . . . .	5
1.3	Sub-bases e topologia gerada por sub-bases. . . . .	5
1.3.1	Definição de Sub-base de Abertos. Definição de ordens lineares. . . . .	6
1.3.2	Topologia gerada por uma Sub-base. Topologia da ordem a partir da Sub-base. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Vizinhanças, bases locais, fechados e fechos</b>	<b>7</b>
2.1	Vizinhanças. . . . .	7
2.1.1	Vizinhanças. . . . .	7
2.1.2	Sistemas fundamentais de vizinhanças. Bases locais. . . . .	7
2.2	Topologias geradas por bases locais. . . . .	8
2.2.1	Topologia gerada por bases locais. . . . .	8
2.2.2	A reta de Sorgenfrey. O plano de Niemycki. . . . .	9
2.3	‘Mas se é fechado, como pode ser aberto?’. . . . .	10
2.3.1	Fechados e fechos. . . . .	10
2.4	‘Não sei se está próximo, mas ainda não encostou’. . . . .	11
2.4.1	Quando um ponto está no fecho. . . . .	11
2.5	Topologias definidas por bases de fechados. . . . .	13
2.5.1	Definição de Base de Fechados. . . . .	13
2.5.2	Topologia gerada por Base de Fechados. . . . .	13
2.5.3	Coming next... . . . .	14
<b>3</b>	<b>Sequências. Densos. Axiomas de enumerabilidade.</b>	<b>15</b>
3.1	Ponto de Acumulação de Conjuntos e Sequências. . . . .	15
3.1.1	Ponto de acumulação de conjunto. Ponto de acumulação de sequência. . . . .	15
3.1.2	‘Seguindo os passos da sequência’: subseqüências. . . . .	16
3.1.3	Convergência de seqüências em pontos com base local enumerável. . . . .	16
3.1.4	Quando seqüências não conseguem descrever a topologia. . . . .	18
3.2	‘I see points of $D$ everywhere. All the time’ - densos. . . . .	18
3.2.1	Definição de denso. . . . .	18
3.2.2	Os três axiomas de enumerabilidade. . . . .	19
3.2.3	Toda base de abertos contém uma base de abertos de tamanho mínimo. . . . .	20
<b>4</b>	<b>Continuidade. Propriedades Topológicas. Homeomorfismos. Topologias mais finas e menos finas.</b>	<b>22</b>
4.1	Continuidade em um ponto. Continuidade. . . . .	22
4.1.1	Continuidade local. De volta a $\epsilon$ e $\delta$ . Equivalências à continuidade local. . . . .	22
4.1.2	Continuidade. Equivalências à continuidade. . . . .	23
4.2	‘É a mesma coisa do ponto de vista topológico’. . . . .	25

4.2.1	Homeomorfismos. . . . .	25
4.2.2	Propriedade topológica. . . . .	26
4.3	‘Minha topologia tem mais abertos do que a sua’. . . . .	26
4.3.1	Topologias mais fina. Topologia menos fina. . . . .	26
4.3.2	Como comparar topologias usando Bases de Abertos. . . . .	27
<b>5</b>	<b>Topologia inicial, Fréchet, separação de pontos</b>	<b>29</b>
5.1	Imitando quem está na sua frente. . . . .	29
5.1.1	Topologia gerada por funções contínuas. Topologia inicial. . . . .	29
5.2	Convergência enumerável . . . . .	31
5.2.1	Espaços de Fréchet. Espaços sequenciais. . . . .	31
5.2.2	Continuidade de funções em espaços sequenciais. . . . .	31
5.2.3	Continuidade local em espaços de Fréchet. . . . .	31
5.2.4	Um exemplo de convergência mais geral: rede. . . . .	32
5.2.5	Coming next... . . . .	33
5.3	Separando pontos: Espaços $T_0$ , $T_1$ e Hausdorff ( $T_2$ ). . . . .	33
5.3.1	Espaços $T_0$ , $T_1$ e $T_2$ . . . . .	33
5.3.2	‘Este aberto é pequeno demais para dois limites’: Espaços Hausdorff. . . . .	36
5.3.3	Comparando duas funções contínuas em espaços Hausdorff. . . . .	36
<b>6</b>	<b>Filtros. Interior. Topologias geradas por Fecho e Interior.</b>	<b>40</b>
6.1	Filtros . . . . .	40
6.1.1	Definição de Filtros. . . . .	40
6.1.2	Ponto de acumulação e convergência de filtros. . . . .	41
6.1.3	Bases de filtros. Extensão de filtro. . . . .	42
6.1.4	Filtros e continuidade. . . . .	42
6.2	‘O aberto dentro de você’. . . . .	43
6.2.1	Definição de Interior. . . . .	43
6.3	Fecho vs Interior. . . . .	43
6.4	Topologias geradas pelos Operadores Fecho e Interior. . . . .	44
<b>7</b>	<b>Redes e Subredes. Redes vs Filtros.</b>	<b>46</b>
7.1	‘Sai $\mathbb{N}$ e entra Conjuntos Dirigidos’: Redes. . . . .	46
7.1.1	Definição de Conjunto Dirigido. . . . .	46
7.1.2	Definição de Rede. Ponto de Acumulação e Convergência. . . . .	46
7.2	O exemplo que deu origem à <del>rede</del> rede. . . . .	47
7.2.1	Formalização do limite da integral de Riemann usando redes. . . . .	47
7.3	‘O ‘Jr’ da rede, pode ficar maior que a rede, mas segue seus passos’. . . . .	47
7.3.1	Subredes. . . . .	47
7.3.2	Rede vs sua Subrede. . . . .	47
7.3.3	Continuidade e Redes. . . . .	48
7.4	Dualidade de Redes e Filtros. . . . .	48
7.4.1	De redes para filtros. . . . .	48
7.4.2	De filtros para redes. . . . .	49
7.4.3	A dualidade de redes e filtros. . . . .	49
<b>8</b>	<b>Subespaços. Subespaços métricos. Subespaços e Ordem Linear.</b>	<b>50</b>
8.1	A topologia nos ‘cacos’ de $X$ . . . . .	50
8.1.1	Topologia de subespaço. . . . .	50
8.1.2	Propriedades hereditárias. . . . .	51
8.2	Subespaços e métrica. . . . .	51
8.2.1	A topologia da métrica do subespaço vs a topologia de subespaço do espaço métrico. . . . .	51
8.2.2	Axiomas da enumerabilidade em subespaços não métricos. . . . .	52
8.3	Imersão e ordem linear. Cortes de Dedekind. . . . .	52

<b>9</b>	<b>Espaços regulares. Produto finito. Pseudométricas contínuas.</b>	<b>55</b>
9.1	Separando pontos e fechados. Regularidade. . . . .	55
9.2	Produto topológico finito. . . . .	58
9.3	Pseudométricas contínuas. . . . .	60
9.3.1	Relacionando funções com pseudométricas, . . . . .	60
<b>10</b>	<b>Topologias geradas por pseudométricas. Grupos topológicos.</b>	<b>62</b>
10.1	Topologia geradas por pseudométricas. . . . .	62
10.1.1	‘Esta pseudométrica rende até $N$ vezes mais.’ . . . . .	62
10.2	Distância de ponto a fechado em espaços pseudométricos. . . . .	63
10.2.1	Distância de um ponto a um subconjunto. . . . .	63
10.2.2	Funções contínuas geradas por pseudométricas contínuas. . . . .	64
10.3	Grupos Topológicos. . . . .	64
10.3.1	Definição de grupo topológico. . . . .	64
10.3.2	Topologia de grupo gerada pelo sistema de vizinhanças do elemento neutro. . . . .	65
<b>11</b>	<b>Produtos. Imersão.</b>	<b>67</b>
11.1	Produtos Infinitos. O Axioma da Escolha. Produto caixa. . . . .	67
11.1.1	‘Que topologia para o produto de espaços topológicos arbitrários combina melhor com o produto finito?’ . . . . .	67
11.2	Produto de Tychonoff. . . . .	68
11.2.1	Definição do produto de Tychonoff. . . . .	68
11.2.2	Convergência em produtos. . . . .	69
11.2.3	Propriedade produtiva. . . . .	70
11.2.4	Produto não enumerável de espaços satisfazendo o terceiro axioma de enumerabilidade. . . . .	71
11.3	‘Aquecimento antes de mergulhar’. . . . .	73
11.4	‘Kit imersão’. . . . .	73
11.4.1	Função diagonal usando uma família de funções. . . . .	73
11.4.2	Famílias que separam pontos. . . . .	73
11.4.3	Famílias que separam pontos de fechados . . . . .	74
11.5	‘Antes de mergulhar num produto, verifique se os equipamentos funcionam’. . . . .	74
11.5.1	Imersão de espaços $T_0$ . . . . .	74
11.5.2	Imersões de 0-dimensionais. . . . .	74
<b>12</b>	<b>Separando fechado de fechados.</b>	<b>76</b>
12.1	Axiomas de separação para fechados e fechados. . . . .	76
12.1.1	Normalidade. $T_4$ . . . . .	76
12.1.2	‘Colcha de retalhos’ ou ‘amarrar sapatos’? . . . . .	76
12.1.3	Regular + algo enumerável = normal. . . . .	78
12.2	‘Conte comigo para encontrar um espaço que não é normal’. . . . .	79
12.2.1	Cardinalidade de conjuntos. . . . .	79
12.2.2	Usando cardinalidade para mostrar que um espaço não é normal. . . . .	80
12.3	‘Tem alguém não-normal aí?’ . . . . .	81
12.3.1	Espaços hereditariamente normais. Espaços $T_5$ . . . . .	81
12.3.2	‘Ser normal não é sempre produtivo’. . . . .	83
<b>13</b>	<b>Básico de Compacidade.</b>	<b>85</b>
13.1	‘Não só de fechado e limitado vive o compacto’. . . . .	85
13.1.1	Bê-á-bá da compacidade. . . . .	85
13.1.2	Compactos com axiomas de separação. . . . .	87
13.1.3	Três provas de que produto finito de compactos é compacto. . . . .	87

<b>14 Compacidade em espaço ordenado. O Lema de Urysohn.</b>	<b>90</b>
14.0.1 Ordem e Compacidade. A compacidade de $[0, 1]$ .	90
14.1 Pré aquecimento ao Lema de Urysohn	92
14.1.1 Uma equivalência de $\mathbb{R}$ como conjunto ordenado.	92
14.2 ‘Uma ponte entre dois fechados’: Lema de Urysohn.	94
14.2.1 Fazendo rodelas para construir uma função contínua.	94
<b>15 Separando ponto e fechado por funções.</b>	<b>96</b>
15.1 Espaços completamente regulares.	96
15.1.1 Definição de Espaços completamente regulares.	96
15.1.2 Algumas condições equivalentes a ser completamente regular.	96
15.1.3 Completamente regular, pseudométricas e topologias iniciais de completamente regulares.	97
15.1.4 Produto enumerável de espaços metrizáveis é metrizável.	98
15.2 O Axioma de Separação $T_{3\frac{1}{2}}$ .	98
15.2.1 Definindo $T_{3\frac{1}{2}}$	98
15.2.2 Por que $T_{3\frac{1}{2}}$ ? E outras observações sobre a definição.	98
15.3 Resumindo as relações $T_i$ , $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$ .	98
15.3.1 Um $T_3$ que não é $T_{3\frac{1}{2}}$ .	99
15.3.2 Um $T_{3\frac{1}{2}}$ e não é $T_4$ .	99
15.3.3 Imersão de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ em produtos de intervalos.	101
15.3.4 Imersões ‘econômicas’. Um teorema de metrização.	102
<b>16 Equivalências e aplicações do Axioma da Escolha. Teorema de Tychonoff.</b>	<b>103</b>
16.1 O Lema de Zorn.	103
16.2 ‘Vai um ultracafezinho aí? Acabou de passar no ...’.	103
16.2.1 Ultrafiltro.	103
16.2.2 Teorema de Tychonoff usando ultrafiltros.	104
16.3 ‘Caiu na ultrarrede é <del>ultrapeixe</del> limite’.	105
16.3.1 Ultrarredes.	105
16.3.2 Teorema de Tychonoff usando ultrarredes.	105
16.4 De volta à normalidade: a normalidade não é hereditária.	105
16.4.1 ‘Just a spoon full of compactness to help the hereditarily normality go down.’	105
16.5 ‘Se está bem ordenado então a ordem tá de boa’.	106
16.5.1 Boa ordem. Ordinais. Cardinais.	106
16.5.2 Compacidade usando escolha explicitamente.	107
<b>17 Pseudométricas completas (+ Totalmente limitado = Compacto).</b>	<b>108</b>
17.1 Espaços completamente metrizáveis.	108
17.1.1 Sequências de Cauchy. Pseudométricas completas.	108
17.2 Produtos e subespaços de completamente metrizáveis.	109
17.2.1 Totalmente limitado. Teorema de Heine-Borel.	110
17.2.2 Continuidade e oscilação em espaços completos.	111
<b>18 Completamento de espaços métricos.</b>	<b>113</b>
18.1 ‘O $\mathbb{Q}$ vamos completar hoje?’.	113
18.1.1 $\mathbb{R}$ como completamento de $\mathbb{Q}$ .	113
18.2 Vamos completar o assunto sobre métricos.	116
18.2.1 Completamento de espaços métricos.	116
<b>19 Compactos métricos. Teorema de Baire. Teorema de Tietze.</b>	<b>119</b>
19.1 ‘As múltiplas personalidades de um compacto métrico’.	119
19.1.1 Propriedades relacionadas a compacidade que se equivalem para espaços métricos.	119
19.2 Teorema de Baire para espaços métricos completos.	120
19.3 ‘A escada está quebrada ou consertada?’	121
19.3.1 Teorema de Tietze.	121

<b>20 Propriedades relacionadas a compacidade.</b>	<b>126</b>
20.1 Uma sequência de propriedades relacionadas à compacidade. . . . .	126
20.1.1 Sequencialmente compacto. . . . .	126
20.1.2 Enumeravelmente compacto. . . . .	127
20.1.3 Teorema de Baire para enumeravelmente compactos regulares. . . . .	128
20.1.4 Pseudocompacto. . . . .	129
<b>21 Compactificações de espaços <math>T_{3\frac{1}{2}}</math>. Compacidade local.</b>	<b>131</b>
21.1 Compactificações. . . . .	131
21.2 Localmente compacto. . . . .	133
21.2.1 Definição. Subespaços e produtos de localmente compactos. . . . .	133
21.2.2 Compactificação por um ponto. . . . .	134
<b>22 Famílias localmente finitas. Paracompacidade.</b>	<b>136</b>
22.1 ‘Sem aglomeração’. . . . .	136
22.1.1 Famílias localmente finitas. . . . .	136
22.1.2 Pseudocompacidade e famílias localmente finitas. . . . .	137
22.2 Paracompacidade. . . . .	137
22.3 A propriedade de Lindelöf. . . . .	138
22.3.1 Definição e propriedades básicas. . . . .	138
22.3.2 Lindelöf e paracompacidade. . . . .	139
<b>23 Teorema de Stone. Partição da unidade.</b>	<b>141</b>
23.1 Todo espaço pseudométrico é paracompacto. . . . .	141
23.1.1 Discussão preliminar sobre o Teorema de Stone . . . . .	141
23.1.2 A prova do Teorema de Stone. . . . .	142
23.2 Partiu Unidade. . . . .	143
23.2.1 A partição da unidade e paracompacidade. . . . .	143
<b>24 Usando a cofinalidade de um cardinal. <math>\beta\omega</math>.</b>	<b>147</b>
24.1 Um pouco de cofinalidade. . . . .	147
24.1.1 Definição de cofinalidade e algumas propriedades. . . . .	147
24.2 Exemplos usando cardinais regulares não enumeráveis. . . . .	147
24.2.1 $[0, \omega_1[$ tem apenas uma compactificação apenas. . . . .	148
24.2.2 Uma tábua com a quina quebrada (Tychonoff Plank) . . . . .	148
24.3 Propriedades de $\beta\omega$ . . . . .	149
24.3.1 O tamanho de $\beta\omega$ . . . . .	149
24.3.2 Base de $\beta\omega$ . $\beta\omega$ não possui sequências não triviais convergentes. . . . .	149
24.3.3 O tamanho do fecho de um subconjunto de $\beta\omega$ . . . . .	150
<b>25 Aplicação de <math>\beta\omega</math>. <math>p</math>-limites.</b>	<b>152</b>
25.1 Um espaço enumeravelmente compacto cujo quadrado não é pseudocompacto. . . . .	152
25.1.1 O Teorema de König. Enumerando sequências em $2^\omega$ . . . . .	152
25.1.2 Compacidade enumerável e pseudocompacidade não são propriedades produtivas. . . . .	152
25.2 $p$ -limites. . . . .	153
25.2.1 Definição e propriedades básicas. . . . .	153
25.2.2 O produto de um compacto e um enumeravelmente compacto. . . . .	155
25.3 Caracterização de $\beta\omega$ usando ultrafiltros. . . . .	155
<b>26 Caracterização de propriedades usando a compactificação de Stone-Čech.</b>	<b>156</b>
26.1 Pseudocompacidade e compactificações. . . . .	156
26.1.1 $G_\delta$ -denso. . . . .	156
26.2 Paracompacidade e compactificações. . . . .	157
26.2.1 O Teorema de Tamano. . . . .	157
26.3 Čech-completos e compactificações. . . . .	158

<b>27</b>	<b>Conexidade. Conexidade local.</b>	<b>161</b>
27.1	Conexidade . . . . .	161
27.1.1	Definição . . . . .	161
27.1.2	Ordens lineares. . . . .	161
27.1.3	Imagem e produtos de conexos. . . . .	162
27.1.4	Um espaço conexo enumerável. . . . .	163
27.2	Conexidade local. . . . .	164
<b>28</b>	<b>Conexos por caminhos. Contínua.</b>	<b>166</b>
28.1	‘No meio do conexo havia um caminho’. . . . .	166
28.1.1	Conexos por caminhos. . . . .	166
28.1.2	A reta longa. . . . .	167
28.2	Localmente conexos por caminhos. . . . .	168
28.3	Contínua. . . . .	169
<b>29</b>	<b>Soma topológica. <math>k</math>-espaços. Quociente. Colagem.</b>	<b>170</b>
29.1	Topologias finais. . . . .	170
29.2	Soma topológica. . . . .	170
29.3	Vagamente lembra soma topológica. . . . .	171
29.3.1	Soma direta de grupos topológicos. . . . .	171
29.3.2	$k$ -espaços. . . . .	171
29.4	Quociente. . . . .	172
29.4.1	Quociente, partições e relações de equivalência. . . . .	172
29.5	‘Vai que cola’. . . . .	173
29.5.1	Ideia de colagem. . . . .	173
29.5.2	Colando um espaço $T_3$ em que existem pontos que não são separados por funções reais contínuas. . . . .	173
<b>30</b>	<b>Dois exemplos de espaços topológicos.</b>	<b>175</b>
30.1	Passando cola em mais cópias do mesmo espaço. . . . .	175
30.1.1	Existe um espaço $T_3$ em que toda função contínua real é constante. . . . .	175
30.1.2	Um exemplo sem colagem de um $T_3$ com pontos que não podem ser separados por funções contínuas reais. . . . .	177
30.2	A não normalidade de um produto não enumerável de $\mathbb{N}$ 's. . . . .	178
<b>31</b>	<b>Limites inversos.</b>	<b>180</b>
31.1	‘De volta para o Limite’. . . . .	180
31.1.1	Sistema inverso e Limite Inverso. . . . .	180
31.1.2	Cofinal em conjunto dirigido e Base de abertos. . . . .	181
31.2	Funções entre limites inversos. . . . .	182
31.3	Existe apenas um espaço métrico compacto zero-dimensional sem pontos isolados a menos de homeomorfismo. . . . .	183
31.4	Todo espaço métrico compacto é imagem contínua de $2^\omega$ . . . . .	184
<b>32</b>	<b>O conjunto de Cantor. O espaço dos irracionais.</b>	<b>187</b>
32.1	O conjunto de Cantor. . . . .	187
32.1.1	Uma discussão informal sobre o conjunto de Cantor. . . . .	187
32.1.2	O conjunto de Cantor e variações. . . . .	188
32.2	‘What the devil is a staircase?’ . . . . .	188
32.2.1	A escadaria de Cantor. . . . .	188
32.3	O espaço dos Irracionais. . . . .	189
32.3.1	O que faz o $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ser o espaço dos irracionais? . . . . .	189
32.3.2	Enumeração que cresce em árvore. . . . .	189

<b>33 Funções cardinais.</b>	<b>193</b>
33.1 ‘Para o $\omega_1$ e além’.	193
33.1.1 Algumas funções cardinais.	193
33.1.2 Algumas desigualdades envolvendo funções cardinais.	194
33.2 Cardinalidade de compactos em relação ao tamanho das base locais.	195
33.2.1 A técnica de Pol-Šapirovsii.	195
33.2.2 ‘É elementaridade meu Caro...’	196
<b>34 Jogos topológicos para espaços de Baire.</b>	<b>198</b>
34.1 Espaços de Baire e cia.	198
34.1.1 Espaços hereditariamente Baire.	198
34.2 Baire e jogos.	198
34.3 Produto de Baire com métrico hereditariamente Baire.	199
<b>35 Alguns tipos de construção.</b>	<b>203</b>
35.1 ‘Exponenciação’.	203
35.1.1 A topologia de Vietoris.	203
<b>36 Algumas referências aleatórias de topologia geral e conjuntista feita no Brasil.</b>	<b>206</b>



# Sobre estas notas e o que veremos neste curso

Estas notas são uma modificação das notas de aulas preparadas para o curso de Topologia Geral do IME-USP durante a pandemia em 2021.

O objetivo destas notas é tentar escrever como se estivéssemos numa aula presencial então algum blá blá desnecessário e repetitivo pode (e vai) acontecer se comparado a um livro. Em algum momento escrever as notas durante a pandemia se tornou um processo desgastante, e alguns títulos de seção foram escolhidos para alívio cômico de quem escreveu, mas talvez não faça sentido para quem for ler...

Como o objetivo é uma nota online, eu não vou otimizar para economizar folhas de papel.

Cada capítulo se refere a uma aula não presencial.

*Comentários mais desnecessários vão estar em itálico.*

O nosso objetivo é trabalhar com diversos conceitos topológicos, apresentar técnicas e exemplos que consideramos interessantes. O material é mais extenso do que qualquer curso de topologia que eu tenha dado antes então eu convido os interessados a ler tudo mesmo que isto não seja visto em aula.

Iremos introduzir alguns conceitos quando isto se tornar necessário, mesmo que comumente isto fosse aparecer num apêndice ou num capítulo introdutório. A ideia é que estas notas possam ser lidas como uma aula em ordem linear.

Para facilitar a busca, criamos algumas seções em cada aula com o nome do conceito que será estudado. Ao invés de tentar esgotar o assunto quando ele for introduzido, iremos tentar ir introduzindo os conceitos quando se parecer um bom momento e voltar quando se parecer necessário. Por exemplo, a parte de métricos aparece logo no início para darmos um exemplo de topologia gerada por bases de abertos, mas depois só voltamos a falar de métrica depois de algumas aulas. Também iremos ‘separar’ os axiomas de separação e apresentá-los aos poucos, enunciando-os quando alguma demonstração comece a ‘pedir’ o axioma de separação. Por exemplo, iremos adiar a definição de normalidade até que tenhamos preparado o caminho para definir imersão e então provar o Lema de Urysohn quando formos provar o primeiro teorema básico de metrização. Iremos provar que produtos enumeráveis de espaços completamente metrizáveis é completamente metrizável em outro momento também. Quando formos falar sobre compacidade, iremos primeiro nos ater ao produto finito e apenas em outro capítulo falar sobre o Teorema de Tychonoff (o produto arbitrário de compactos é compacto). Apenas quando tivermos mais ferramentas para aplicações iremos falar da compactificação de Stone Čech e iremos usá-lo para mostrar alguns subespaços que servem de exemplos.

Iremos eventualmente falar sobre boa ordem, ordinais e o Axioma da Escolha e apresentar alguns exemplos utilizando explicitamente as equivalências do Axioma da Escolha, mas iremos apenas apresentar o mínimo para que isto possa ser feito. Pretendemos apresentar algumas construções que não fazem parte de um primeiro curso, mas darão um pouco mais da ideia da variedade de exemplos existentes.

Estamos incluindo diversos resultados que não são cobertos num primeiro curso (nem num segundo curso), mas espero que dêem uma ideia das técnicas que aparecem. Em particular incluímos alguns resultados sobre espaços de Baire usando jogos topológicos e outro usando conjuntos estacionários e c.u.b.’s.

# Capítulo 1

## Topologia. Abertos. Bases e Sub-bases de Abertos.

Usaremos os abertos do  $\mathbb{R}^n$  para pensarmos sobre a noção intuitiva de vizinhança para então definir topologia. A partir da definição do que são os abertos da topologia, definiremos formalmente vizinhanças, sistemas fundamentais de vizinhança e bases de abertos. Veremos também que é mais natural definir uma topologia usando bases de abertos e sistemas fundamentais de vizinhanças abertas.

### 1.1 ‘Está aberta a temporada de topologia’.

#### 1.1.1 Aberto e Noção intuitiva de Aberto. Definição de Topologia.

Vemos o termo aberto inicialmente em intervalo aberto no Cálculo Diferencial e Integral I. Já no Cálculo Diferencial e Integral II, passamos a ouvir falar em bolas abertas e conjunto aberto. A noção de bola aberta no  $\mathbb{R}^n$  (as bolas abertas de  $\mathbb{R}$  são intervalos abertos) está relacionada à distância Euclidiana. Um conjunto é vizinhança de um ponto se existe uma bola aberta centrada nesse ponto que está contido no conjunto. Um conjunto é aberto se ela é uma reunião de bolas abertas. Equivalentemente, um conjunto é aberto se e somente se é vizinhança de todos os seus pontos.

A noção mais geral de distância é a noção de espaço métrico. A partir disso definiremos bolas abertas e então vizinhanças e abertos como descrito acima. Uma outra forma de tentar generalizar a topologia do  $\mathbb{R}^n$  foi usando seqüências convergentes sugerida por Fréchet, mas a noção de espaço métrico se tornou mais popular.

*Neste ponto haveria quem prefira definir espaços métricos e divagar sobre topologias de espaços métricos, porém, por que deveríamos tentar associar uma métrica a uma topologia quando o ‘porto seguro de usar uma métrica’ para definir topologia estaria em pensar que ainda estamos trabalhando com  $\mathbb{R}^n$ ?*

*Vamos dedicar algum tempo falando de pseudométricas, que apesar de parecer apenas uma ‘régua’ que mede pior as coisas, elas acabam aparecendo em situações que não podem ser descritas por uma métrica. Isso não será feito junto com as métricas apenas por que métricas parecem ser mais naturais a partir de  $\mathbb{R}^n$  do que uma situação onde dois pontos distintos podem ter distância 0.*

Apesar de métrica ser uma noção mais geral, ela ainda não descreve todos os espaços que aparecem naturalmente. Por exemplo, o espaço das funções contínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  com a topologia da convergência pontual é um exemplo de um espaço que não é descrito por uma métrica.

Para intuir sobre a definição de topologia vamos pensar em  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^2$  se quiser pensar em desenhos num plano).

**Definição 1.1.** Dado um ponto  $x \in \mathbb{R}$  e  $A \subseteq \mathbb{R}$  com  $x \in A$ , dizemos que  $A$  é uma vizinhança de  $x$  na topologia usual de  $\mathbb{R}$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $]x - \delta, x + \delta[ \subseteq A$ , ou seja se  $A$  contém todos os pontos suficientemente ‘próximos’ de  $x$ .

Um conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}$  é aberto na topologia usual de  $\mathbb{R}$  se para todo  $x \in U$  existe um  $\delta_{x,U} > 0$  tal que  $]x - \delta_{x,U}, x + \delta_{x,U}[ \subseteq U$ . Normalmente só utilizamos  $\delta$  para não sobrecarregar a notação, mas deve se ter em mente que o  $\delta$  depende do  $x$  e do  $U$ .

O conjunto de todos os abertos definidos como acima é chamado de topologia usual da reta  $\mathbb{R}$ .

O conceito de vizinhança é o conceito central da ideia 'geométrica' de uma topologia. A vizinhança, mesmo sem usar o conceito de distância, dá uma noção de pontos em seu entorno. A vizinhança é a relação do ponto com seu entorno, mas não podemos definir simplesmente para cada ponto quem são suas vizinhanças sem se preocupar com quem são as vizinhanças dos outros pontos. É necessário que exista uma inter-relação entre as vizinhanças de cada ponto. Esse problema não aparece claramente em  $\mathbb{R}$  devido a simetria da distância e da desigualdade triangular em  $\mathbb{R}$ .

Com isto, apesar de ser mais natural pensar nas vizinhanças de cada ponto, a definição mais simples é definir o que se espera dos conjuntos abertos e definir as noções a partir daí. A noção intuitiva do que esperamos que abertos satisfaçam vem da topologia usual de  $\mathbb{R}$ :

- a) noção intuitiva do que vizinhanças devem satisfazer e
- b) a ideia de que um conjunto é aberto se e somente se é (\*) vizinhança de todos os seus pontos.

*É natural esperar que todo ponto tenha alguma vizinhança. Assim,  $X$  deve ser vizinhança de todos os seus pontos. Com isto, é natural que  $X$  seja um aberto. O vazio também satisfaz (\*) por vacuidade, com isto é natural que seja um aberto. Se um conjunto é vizinhança de um ponto, é de se esperar que um conjunto maior ainda o seja. É natural esperar que a intersecção de duas vizinhanças seja uma vizinhança.*

### 1.1.2 Definição de Topologia.

*O ponto principal da topologia não é 'julgar' quem deveria ser aberto. É verificar que uma família de conjuntos (uma topologia) satisfaz as propriedades desejadas para serem uma família de abertos. Ou seja, não importa se há motivação geométrica para os abertos, basta que elas satisfaçam as propriedades para serem os abertos de uma topologia.*

Antes de prosseguirmos com a definição de topologia, iremos relembrar a notação de união e intersecção de uma família de conjuntos (uma família de conjuntos  $\mathcal{A}$  é também um conjunto, mas a ênfase está nos elementos de  $\mathcal{A}$ ).

Dada uma família de conjuntos  $\mathcal{A}$ , dizemos que  $\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A\}$  é a reunião de  $\mathcal{A}$ . Ou seja  $x \in \bigcup \mathcal{A}$  se e somente se existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $x \in A$ . Quando  $\mathcal{A}$  é uma família finita enumerada  $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ , podemos escrever a reunião como  $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$  ou  $\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ .

Dada uma família de conjuntos  $\mathcal{A}$ , dizemos que  $\bigcap \mathcal{A} := \{x : \forall A \in \mathcal{A} \text{ temos } x \in A\}$  é a intersecção de  $\mathcal{A}$ . Ou seja,  $x \in \bigcap \mathcal{A}$  se e somente se  $x \in A$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Quando  $\mathcal{A}$  é uma família finita enumerada  $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ , podemos escrever a intersecção como  $A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}$  ou  $\bigcap_{k=0}^{n-1} A_k$ .

**Definição 1.2.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\tau$  um subconjunto de  $\mathcal{P}(X)$ . Dizemos que  $\tau$  é uma topologia sobre  $X$  se satisfaz as seguintes condições:

- i)  $\emptyset, X \in \tau$ .
- ii) se  $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \tau$  então  $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$ .
- iii) se  $U, V \in \tau$  então  $U \cap V \in \tau$ .

*Note que para ser uma topologia basta verificarmos que elas satisfazem as três condições acima. Por ser uma noção muito geral, concluir resultados gerais sobre todos os espaços topológicos têm alcance limitado. Os resultados mais interessantes valem para classes de espaços topológicos com propriedades adicionais. Antes, é preciso estudar ferramentas para construir topologias, já que usar a definição não é a melhor forma de verificar propriedades do espaço.*

Usando indução finita, temos que a condição iii) é equivalente a

se  $U_0, \dots, U_n \in \tau$  então  $U_0 \cap \dots \cap U_n \in \tau$ . Ou seja, a intersecção finita de abertos é um conjunto aberto.

**Exercício 1.3.** Note que a topologia usual da reta é uma topologia.

**Definição 1.4.** Dada uma topologia  $\tau$  sobre  $X$ , dizemos que  $\langle X, \tau \rangle$  é um espaço topológico com a topologia  $\tau$  (é comum dizer que  $X$  é espaço topológico quando não há risco de confusão sobre a topologia  $\tau$  utilizada).

Dada uma topologia  $\tau$ , se  $U \in \tau$ , dizemos que  $U$  é  $\tau$ -aberto ou aberto, se no contexto estiver claro que estamos falando da topologia  $\tau$ .

Usando dessas notações temos que um conjunto  $\tau$  é uma topologia se  $\emptyset$  e  $X$  são abertos, a união arbitrária de abertos é aberta e a intersecção finita de abertos é um aberto.

**Exemplo 1.5.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$  e  $\tau_2 = \mathcal{P}(X)$ . A primeira é chamada as vezes de topologia caótica ou antidiscreta. A segunda é chamada de topologia discreta.

Fica a cargo do leitor notar que ambas são topologias.

**Exemplo 1.6.** Seja  $Y$  um conjunto infinito,  $x_0 \notin Y$  e  $X = Y \cup \{x_0\}$ . Seja  $\tau_3 = \mathcal{P}(Y) \cup \{X\}$ ,  $\tau_4 = \mathcal{P}(Y) \cup \{X \setminus F : F \subseteq Y, \text{ subconjunto finito}\}$ .

Fica a cargo do leitor verificar que  $\tau_3$  é uma topologia. Vamos verificar que  $\tau_4$  é uma topologia. Temos  $\emptyset \in \mathcal{P}(Y)$  e  $X = X \setminus \emptyset$ , logo  $\emptyset$  e  $X$  são  $\tau_4$ -abertos.

Seja  $\mathcal{U}$  uma subfamília de  $\tau_4$  não vazio. Vamos mostrar que a união dessa família pertence a  $\tau_4$ . Se  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y)$  então  $\bigcup \mathcal{U} \subseteq Y$  e pertence a  $\mathcal{P}(Y) \subseteq \tau_4$ . Se  $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{P}(Y)$ , então existe  $F \subseteq Y$  finito tal que  $X \setminus F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ . Assim,  $Y \setminus F \subseteq Y \cap \bigcup \mathcal{U}$ . Logo,  $E := Y \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq F$  é finito. Portanto  $\bigcup \mathcal{U} = X \setminus E$  pertence a  $\tau_4$ .

Finalmente considere dois elementos de  $\tau_4$ . Se são da forma  $X \setminus F_1$  e  $X \setminus F_2$  com  $F_1$  e  $F_2$  subconjuntos finitos de  $Y$  temos que  $(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$ , onde  $F_1 \cup F_2 \subseteq Y$  é finito. Assim, a intersecção de ambas é um elemento de  $\tau_4$ . O outro caso é quando pelo menos um deles é subconjunto de  $Y$ . Assim, a intersecção também é subconjunto de  $Y$  e portanto pertence a  $\tau_4$ . Essa topologia é a compactificação por um ponto do conjunto discreto  $Y$ . Veremos eventualmente que esta topologia é compacta.

Note que ambas as topologias acima não são nem caóticas e nem discretas.

## 1.2 Base de abertos.

Para estudar a topologia podemos pensar em usar um conjunto significativo que recupere a topologia, chamada de base de abertos (ou base quando está claro que estamos falando de abertos). Para o estudo da topologia em diversas ocasiões basta usar uma base ou uma base com propriedades especiais.

### 1.2.1 Definição de Base de Abertos

**Definição 1.7.** Dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma base para uma topologia  $\tau$  (ou que  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos quando não há confusão sobre qual a topologia  $\tau$  ou simplesmente uma base quando está claro que estamos falando de abertos), se  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  e para todo  $x \in X$  e  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$  existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subseteq U$ .

*Para evitar algumas trivialidades é comum assumir que todos os abertos da base são não-vazios.*

Fica a cargo do leitor verificar que  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  é uma base se e somente se para cada  $U \in \tau$  existe  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $\bigcup \mathcal{B}' = U$ . *Nota: a união da família vazia é o conjunto vazio.*

Fixado uma topologia, podemos buscar bases para elas que nos tragam alguma informação sobre a topologia. Por exemplo, para fazer a contagem do número de abertos na reta real, usamos o fato que os intervalos de extremidades racionais formam um base de  $\mathbb{R}$ .

Porém ao invés de produzir uma topologia e buscar uma base interessante para ela, podemos começar com o conjunto que queremos que seja base para definir a topologia. Isto será chamado de topologia gerada pela base. *Isto por exemplo é feito em  $\mathbb{R}^n$ , quando dizemos que um conjunto é aberto se e somente se é reunião de bolas abertas. Aqui é importante notar que a desigualdade triangular é usada para chegar a propriedade de base, mas não é necessária para termos uma base. Talvez começar com espaços métricos e as bolas para gerar topologias acabe criando essa expectativa da necessidade de métrica para termos topologias.* A próxima definição é exatamente o que precisamos para gerar topologias a partir de uma base:

**Definição 1.8.** Dado um conjunto não vazio  $X$ , dizemos que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  é uma base para uma topologia se

- B1) para cada  $x \in X$ , existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V$  (em outras palavras,  $\mathcal{B}$  é não vazio e  $\bigcup \mathcal{B} = X$ ).
- B2) para cada  $U, V \in \mathcal{B}$  e para cada  $x \in U \cap V$ , existe  $W \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in W \subseteq U \cap V$ .

**Lema 1.9.** Se  $\mathcal{B}$  é uma base para o espaço topológico  $X$  então  $\mathcal{B}$  satisfaz as propriedades B1) e B2).

*Demonstração.* Tome  $x \in X$ . Como  $X$  é um aberto, existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subseteq X$ . Assim, B1) está satisfeita.

Se  $U, V \in \mathcal{B}$  e  $x \in U \cap V$  então  $U \cap V \in \tau$ , logo existe  $W \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in W \subseteq U \cap V$ . □

Note que uma família de  $\tau$ -abertos satisfazendo B1) e B2) não precisa ser uma base da topologia  $\tau$  dada.

Por exemplo, tome  $\mathcal{B} = \{]x, +\infty[ : x \in \mathbb{R}\}$ . Essa família satisfaz B1) e B2) mas não é uma base para a topologia usual da reta.

Com isto, é preciso tomar um pouco de cuidado. O conjunto  $\mathcal{B}$  satisfazendo B1) e B2) é base da topologia gerada pela base  $\mathcal{B}$  (a topologia vai ser definida a seguir).

### 1.2.2 Topologia gerada por Base de Abertos.

**Definição 1.10.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{B}$  uma base para uma topologia. Diremos que  $\tau_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ . Dizemos que  $\tau_{\mathcal{B}}$  é a topologia gerada pela base  $\mathcal{B}$ .

O teorema abaixo justifica os nomes dados acima.

**Teorema 1.11.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{B}$  uma base para uma topologia. Seja  $\tau = \tau_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ . Então  $\tau$  é uma topologia sobre  $X$  e  $\mathcal{B}$  é uma base para a topologia  $\tau$ .

*Demonstração.* Primeiro iremos verificar que  $\tau$  é uma topologia. Já vimos anteriormente o argumento de que  $\emptyset$  e  $X$  são  $\tau$ -abertos, para isto basta usar a família vazia e toda a base. Tome  $\mathcal{U} \subseteq \tau$ . Pela definição de  $\tau$ , existe, para cada  $U \in \mathcal{U}$  uma família  $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $U = \bigcup \mathcal{B}_U$ . Então temos que  $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup (\bigcup \{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{U}\})$  e  $\bigcup \{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{B}$ . Assim,  $\bigcup \mathcal{U}$  é  $\tau$ -aberto.

Falta apenas verificar que a intersecção de dois elementos de  $\tau$  está em  $\tau$ . Sejam  $U$  e  $V$  dois elementos de  $\tau$ . Se a intersecção de ambas for vazia, então terminamos pois  $\emptyset \in \tau$ . Vamos supor que  $U \cap V$  é não vazio. Pela definição de  $\tau$ , existem  $\mathcal{B}_U$  e  $\mathcal{B}_V$  subconjuntos de  $\mathcal{B}$  tais que  $U = \bigcup \mathcal{B}_U$  e  $V = \bigcup \mathcal{B}_V$ . Fixe  $x \in U \cap V$ . Então existe  $U_x \in \mathcal{B}_U$  tal que  $x \in U_x$  e  $V_x \in \mathcal{B}_V$  tal que  $x \in V_x$ . Pela B2), como  $x \in U_x \cap V_x$  com  $U_x, V_x \in \mathcal{B}$ , existe  $W_x \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in W_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U \cap V$ . Assim,  $U \cap V = \bigcup \{W_x : x \in U \cap V\} \in \tau$ .

Pela definição de  $\tau$ , segue que  $\mathcal{B}$  é uma base para  $\tau$ . □

**Exemplo 1.12.** Os quadrados abertos em  $\mathbb{R}^2$  são uma base para a topologia de  $\mathbb{R}^2$ . Note que a intersecção de dois quadrados nem sempre é um quadrado, mas todo ponto da intersecção está contida num quadrado. Como alguns já podem ter visto, a topologia gerada coincide com a topologia usual de  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.2.3 Topologia gerada por uma métrica usando bolas abertas como Base de Abertos.

**Definição 1.13.** Dizemos que  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica se as seguintes propriedades estão satisfeitas:

- M0)  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in X$
- M1)  $d(x, y) = 0$  se e somente se  $x = y$ .
- M2)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$ .
- M3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $x, y, z \in X$ .

A bola aberta  $B_d(x, \epsilon)$  é o conjunto  $\{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ .

**Exemplo 1.14.** O conjunto das bolas abertas de  $X$  gera uma base para uma topologia (fica a cargo do leitor verificar). Dizemos que esta é a topologia gerada pela métrica  $d$ .

## 1.3 Sub-bases e topologia gerada por sub-bases.

Veremos no decorrer do curso que é útil pensarmos em pedaços ‘graúdos’ para gerar uma base.

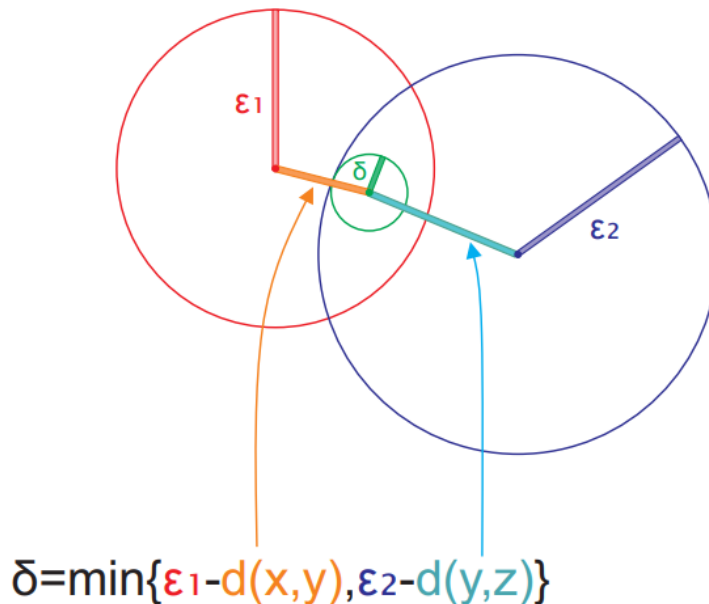


Figura 1.1: Desigualde triangular

### 1.3.1 Definição de Sub-base de Abertos. Definição de ordens lineares.

**Definição 1.15.** Uma família de conjuntos abertos  $\mathcal{S}$  num espaço topológico  $X$  é uma subbase para  $X$  se  $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \text{ subconjunto finito não vazio de } \mathcal{S}\}$  forma uma base de abertos de  $X$ .

**Exemplo 1.16.** A família de intervalos  $\{]x, +\infty[ : x \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, x[ : x \in \mathbb{R}\}$  é uma subbase para a topologia usual de  $\mathbb{R}$ . De fato, basta notar que  $]x, y[ = ]x, +\infty[ \cap ]-\infty, y[$ .

Note que tal sub-base para uma topologia como acima pode ser definida para qualquer espaço linearmente ordenado. Um espaço é linearmente ordenado se ele está munido de uma ordem linear.

**Definição 1.17.** Dizemos que  $<$  é uma ordem linear sobre  $X$  se

- $x \not< x$  para todo  $x \in X$ .
- Se  $x < y$  e  $y < z$  então  $x < z$ , para todo  $x, y$  e  $z$  em  $X$ .
- para todo  $x, y \in X$  temos que  $x < y$ ,  $x = y$  ou  $y < x$ .

### 1.3.2 Topologia gerada por uma Sub-base. Topologia da ordem a partir da Sub-base.

**Lema 1.18.** Seja  $\mathcal{S}$  uma família de subconjuntos de  $X$  tal que  $\bigcup \mathcal{S} = X$ . Então  $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \text{ subconjunto finito não vazio de } \mathcal{S}\}$  é uma base para uma topologia  $\tau$ . Além disso,  $\mathcal{S}$  é uma sub-base para  $\tau$ .

*Demonstração.* Primeiro iremos verificar que  $\mathcal{B}$  satisfaz as propriedades para ser a base de abertos de uma topologia. Como  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ , segue que  $\bigcup \mathcal{B} = X$  e B1) está satisfeita.

Se  $U, V \in \mathcal{B}$ , existem  $\mathcal{S}_U$  e  $\mathcal{S}_V$  subconjuntos não vazios de  $\mathcal{S}$  tal que  $U = \bigcap \mathcal{S}_U$  e  $V = \bigcap \mathcal{S}_V$ . Então  $U \cap V = \bigcap (\mathcal{S}_U \cup \mathcal{S}_V)$ , logo  $\mathcal{B}$  satisfaz B2).

Então  $\mathcal{B}$  é base da topologia  $\tau$  gerada pela base  $\mathcal{B}$ . Pela definição de  $\mathcal{B}$  a partir de  $\mathcal{S}$ , segue que  $\mathcal{S}$  é sub-base de  $\tau$ .  $\square$

**Definição 1.19.** Dada uma  $\mathcal{S}$  nas condições acima, chamamos a topologia  $\tau$  de topologia gerada pela sub-base  $\mathcal{S}$ .

**Exemplo 1.20.** A topologia gerada pela sub-base  $\{\{y \in X : y < x\} : x \in X\} \cup \{\{y \in X : x < y\} : x \in X\}$  é a topologia da ordem.

## Capítulo 2

# Vizinhanças. Topologias geradas por bases locais e bases de fechados. Fechos.

### 2.1 Vizinhanças.

Agora que temos a definição de topologia podemos formalizar a definição de vizinhança.

#### 2.1.1 Vizinhanças.

**Definição 2.1.** Dizemos que  $A$  é uma vizinhança ( $\tau$ -vizinhança se for necessário explicitar a topologia) de  $x$  se existe um aberto  $V$  na topologia  $\tau$  tal que  $x \in V \subseteq A$ . Se  $A$  é um aberto, dizemos que  $A$  é uma vizinhança aberta.

Eventualmente iremos usar termos como vizinhança compacta, vizinhança conexa, vizinhança conexa por caminhos que muitas vezes não são vizinhanças abertas. *Em alguns textos, vizinhança significa vizinhança aberta, então verifique a definição utilizada.*

As vizinhanças estão relacionadas ao estudo das propriedades locais do espaço topológico. Para utilizar as vizinhanças não precisamos usar todas elas. Basta tomar um conjunto significativo. Veremos exemplos disso quando formos estudar algumas propriedades locais.

**Definição 2.2.** Dado  $x \in X$ , onde  $X$  é um espaço topológico, dizemos que  $\mathcal{V}_x$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$  se todos os elementos de  $\mathcal{V}_x$  são vizinhanças de  $x$  e para cada vizinhança  $U$  de  $x$ , existe uma vizinhança  $V \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V \subseteq U$ .

Na definição acima não estamos considerando que as vizinhanças são abertas. Quando quisermos que sejam abertas iremos dizer que temos um sistema fundamental de vizinhanças abertas. *Em alguns textos o sistema fundamental de vizinhanças já consiste de vizinhanças abertas, assim é necessário verificar qual a definição utilizada no texto.*

#### 2.1.2 Sistemas fundamentais de vizinhanças. Bases locais.

**Definição 2.3.** Um sistema fundamental de vizinhanças abertas de  $x$  também será chamado de base local de  $x$ .

**Exemplo 2.4.** No caso do  $\mathbb{R}^n$ , temos que as bolas abertas de raio  $\frac{1}{n}$  com  $n$  inteiro positivo formam uma base local para o ponto. *Este fato é usado para descrever algumas propriedades usando convergência de seqüências, como os pontos no fecho de um conjunto e da continuidade de uma função.*

Podemos pensar que  $\mathcal{V}_x$  descreve a topologia do ponto  $x$ . Para ter um noção da topologia precisamos considerar um sistema fundamental de vizinhanças para cada ponto de  $X$ .

**Definição 2.5.** Dizemos que  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $X$  se  $\mathcal{V}_x$  é um sistema de vizinhanças de  $x$  para cada  $x \in X$ .

Um sistema fundamental de vizinhanças abertas de  $X$  também será chamado de sistema de bases locais de  $X$ .

**Exercício 2.6.** Mostre que se  $\mathcal{B}$  é uma base de  $X$  então  $\mathcal{V}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$  é uma base local para  $x$ .

Mostre que se  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  é um sistema de bases locais de  $X$  então  $\bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$  é uma base de  $X$ .

## 2.2 Topologias geradas por bases locais.

### 2.2.1 Topologia gerada por bases locais.

Da mesma forma do que base, iremos escrever as propriedades que uma família deve possuir para se tornar um sistema fundamental de vizinhanças abertas. *Existem textos que discutem definir a topologia a partir de um sistema fundamental de vizinhanças arbitrário, mas isso não pareceu muito prático para chegar à topologia.* Note que para usarmos um candidato a sistema de vizinhanças que gere uma topologia, deve existir uma relação entre as vizinhanças de pontos distintos.

**Definição 2.7.** Dizemos que  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças abertas (ou bases locais) para uma topologia se

BL1)  $\emptyset \neq \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$  e  $x \in U$ , para todo  $x \in X$  e para todo  $U \in \mathcal{V}_x$ .

BL2) se  $x \in X$  e  $U, V \in \mathcal{V}_x$  então existe  $W \in \mathcal{V}_x$  tal que  $W \subseteq U \cap V$ .

BL3) se  $x \in X$ ,  $U \in \mathcal{V}_x$  e  $y \in U$  então existe  $W \in \mathcal{V}_y$  tal que  $W \subseteq U$ .

*Note que a condição 3 acima para o sistema fundamental de bolas abertas centradas no ponto em  $\mathbb{R}^n$  estão satisfeitas usando a desigualdade triangular.*

Se tomarmos um subconjunto de uma topologia com as propriedades BL1) – BL3), não é suficientes para ser um sistema fundamental de vizinhanças abertas dessa topologia. Mas ela é um sistema fundamental de vizinhanças abertas da topologia que ela gera.

**Teorema 2.8.** Dado um sistema fundamental de vizinhanças abertas  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  para uma topologia, temos que  $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$  é uma base para uma topologia de  $X$  e  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para  $\tau_{\mathcal{B}}$ .

*Demonstração.* Para verificar B1), segue da definição de  $\mathcal{B}$  e de BL1) que  $x \in \bigcup \mathcal{V}_x \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ . Para verificar B2), tome dois elementos  $U, V \in \mathcal{B}$ . Tome  $z \in U \cap V$ . Pela definição de  $\mathcal{B}$ , existe  $x \in X$  tal que  $U \in \mathcal{V}_x$ . Pela BL3), existe  $W \in \mathcal{V}_z$  tal que  $W \subseteq U$ . De modo análogo, existe  $O \in \mathcal{V}_z$  tal que  $O \subseteq V$ . Como  $W, O \in \mathcal{V}_z$ , segue de BL2) que existe  $T \in \mathcal{V}_z$  tal que  $T \subseteq W \cap O \subseteq U \cap V$ . Assim,  $T$  testemunha B2) para  $z$ ,  $U$  e  $V$ . Logo  $\mathcal{B}$  é uma base para uma topologia  $\tau_{\mathcal{B}}$ .

Fixe  $x \in X$ . Vamos verificar que  $\mathcal{V}_x$  é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para  $x$ . Como  $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$ , segue que os elementos de  $\mathcal{V}_x$  são  $\tau_{\mathcal{B}}$ -abertos. Então resta mostrar que é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ . Tome  $U \in \tau_{\mathcal{B}}$  tal que  $x \in U$ . Como  $\mathcal{B}$  é base de  $\tau_{\mathcal{B}}$ , existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subseteq U$ . Pela definição de  $\mathcal{B}$ , existe  $y \in X$  tal que  $V \in \mathcal{V}_y$ . Como  $x \in V$ , segue de BL3) que existe  $W \in \mathcal{V}_x$  tal que  $W \subseteq V \subseteq U$ . Assim, temos que  $W \subseteq U$  com  $W \in \mathcal{V}_x$ . Logo  $\mathcal{V}_x$  é um sistema de vizinhanças de  $x$ .  $\square$

*Dada uma família satisfazendo BL1) e BL2), podemos definir uma topologia usando a sub-base  $\mathcal{S} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$ . Sem BL3), não podemos afirmar que  $\mathcal{V}_x$  é uma base local em  $x$  da topologia gerada pela sub-base  $\mathcal{S}$ .*

**Exemplo 2.9.** A topologia de qualquer espaço métrico pode ser definida pelo sistema de vizinhanças  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ , onde  $\mathcal{V}_x = \{B(x, \epsilon) : \epsilon > 0\}$  são as bolas abertas centradas em  $x$ . A princípio, poderíamos ter uma outra topologia se usássemos  $\mathcal{V}_x = \{B(x, \epsilon) : \epsilon = \frac{1}{2^n} \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ , mas a topologia será a mesma.

*Iremos futuramente verificar condições para que sistemas fundamentais de vizinhanças sobre o mesmo conjunto gerem a mesma topologia.*



### 2.2.2 A reta de Sorgenfrey. O plano de Niemytski.

**Exemplo 2.10. A reta de Sorgenfrey.** (ver Figura 2.1) Seja  $X$  o conjunto dos números reais. Considere a topologia  $\tau$  gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças abertas  $\mathcal{V}_x = \{[x, x + \epsilon[ : \epsilon > 0\}$ , para cada  $x \in X$ .

*Demonstração.* Temos que verificar que as condições para ser sistema fundamental de vizinhanças abertas para uma topologia estão satisfeitas.

Claramente,  $\mathcal{V}_x$  é não vazio e  $x \in [x, x + \epsilon[$  para todo  $\epsilon > 0$ , logo *BL1*) está satisfeita.

Dois elementos de  $\mathcal{V}_x$  são da forma  $[x, x + \epsilon[$  e  $[x, x + \delta[$  para  $\epsilon$  e  $\delta$  reais positivos. Assim, a intersecção de ambas é  $[x, x + \min\{\epsilon, \delta\}[ \in \mathcal{V}_x$  e *BL2*) está satisfeita.

Fixe  $x \in X$  e  $\epsilon > 0$ . Tome  $y \in [x, x + \epsilon[$ . Como  $y < x + \epsilon$ , podemos fixar  $\delta > 0$  tal que  $y + \delta < x + \epsilon$ . Assim,  $[y, y + \delta[ \in \mathcal{V}_y$  e  $[y, y + \delta[ \subseteq [x, x + \epsilon[$ . Assim, *BL3*) está satisfeita.  $\square$

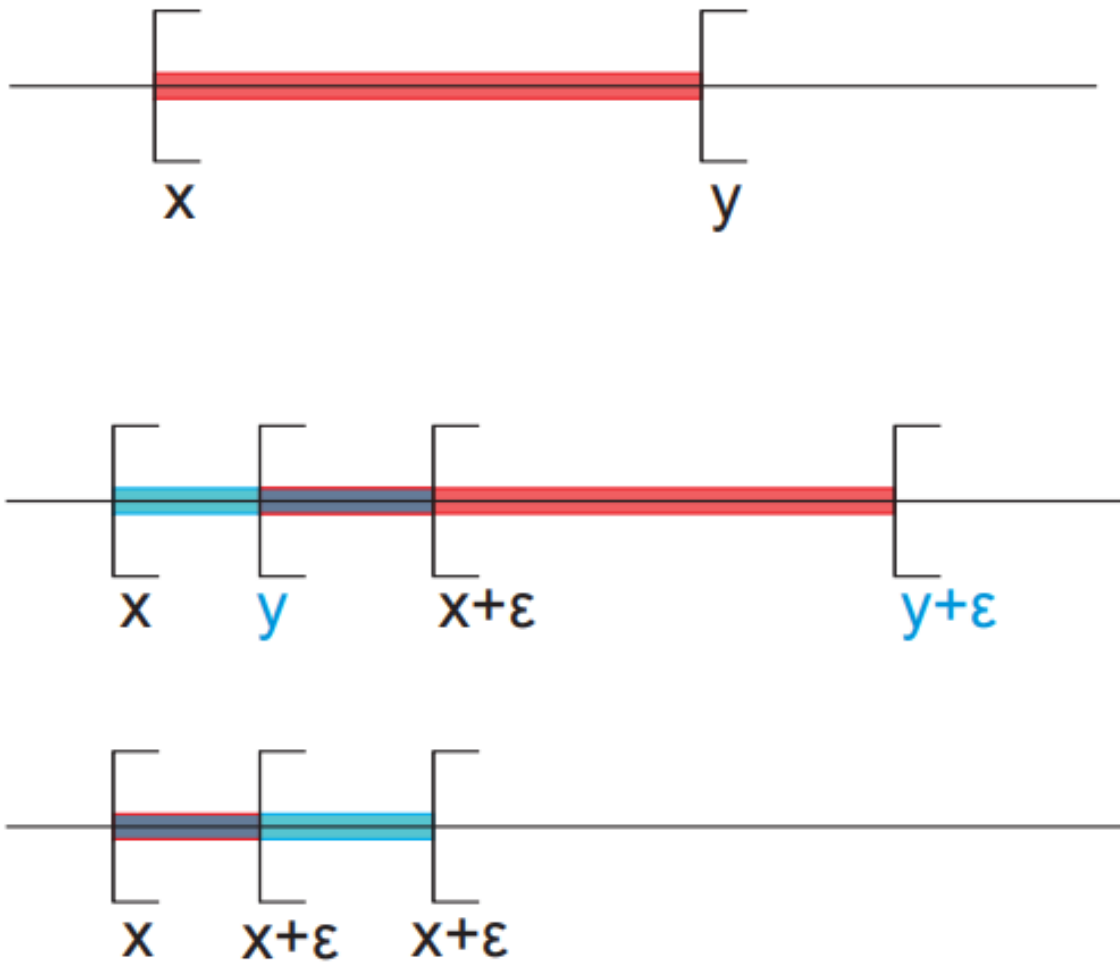


Figura 2.1: A reta de Sorgenfrey.

Vamos ver outro exemplo de topologia gerada por sistema fundamental de vizinhanças.

**Exemplo 2.11. O plano de Niemytski.** (ver figura 2.2) Seja  $X$  o conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ . Vamos denotar por  $B((x, y), \epsilon)$  as bolas abertas na topologia Euclidiana.

Para  $a = (x, y)$  com  $y > 0$  seja  $\mathcal{V}_a = \{B((x, y), \epsilon) : 0 < \epsilon < y\}$  e para  $a = (x, 0)$  seja  $\mathcal{V}_a = \{B((x, \epsilon), \epsilon) \cup \{(x, 0)\} : \epsilon > 0\}$ .

Claramente *BL1*) está satisfeita.

Se  $(x, y)$  com  $y > 0$  então as vizinhanças são bolas centradas no mesmo ponto e por isso satisfazem *BL2*). Para  $(x, 0)$  as bolas  $B((x, \epsilon), \epsilon)$  é tangente ao eixo das abscissas no ponto  $(x, 0)$ . Vamos verificar que se  $\delta < \epsilon$  então  $B((x, \delta), \delta) \subseteq B((x, \epsilon), \epsilon)$ . Se  $(r, s) \in B((x, \delta), \delta)$  então  $d((r, s), (x, \epsilon)) \leq d((r, s), (x, \delta)) + d((x, \delta), (x, \epsilon)) < \delta + (\epsilon - \delta) = \epsilon$ . Assim *BL2*) também está satisfeitas para estes pontos. Assim, *BL2*) está satisfeita.

Seja  $a = (x, y)$  com  $y > 0$ . a vizinhança em  $\mathcal{V}_a$  é uma bola  $U$  centrada em  $a$  com a segunda coordenada positiva. Todo ponto  $b \in U$  nesta bola possui também uma bola aberta centrada em  $b$  contida em  $U$  (pois estamos trabalhando neste caso com bolas na topologia Euclidiana de  $\mathbb{R}^2$ ). Assim *BL3*) está satisfeita neste caso. Seja  $a = (x, 0)$ . Se  $b = a$  então a própria vizinhança satisfaz a condição *BL3*) para este ponto. Se  $b \neq a$  então  $b$  está numa bola aberta Euclidiana  $V$  com todos os pontos acima da abscissa, e a segunda coordenada de  $b$  é positiva. Assim, as vizinhanças de  $b$  são bolas Euclidianas e existe uma delas dentro de  $V$ . Assim *BL3*) também está satisfeita.

Temos uma topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças abertas.

*Sim, estas topologias tem nome por que elas servem a um propósito maior do que serem exemplos de topologias geradas por um sistema fundamental de vizinhanças. Elas irão aparecer mais pra frente como contra-exemplos.*

## 2.3 ‘Mas se é fechado, como pode ser aberto?’.

Uma noção intuitiva de que um ponto está próximo de um conjunto, mesmo sem a noção de distância, é dada pelo fecho de um conjunto. Para isto iremos primeiro definir conjuntos fechados.

### 2.3.1 Fechados e fechos.

**Definição 2.12.** Dada uma topologia  $\tau$  sobre um conjunto  $X$ , dizemos que  $F$  é um conjunto fechado ( $\tau$ -fechado se a topologia não estiver clara) se  $X \setminus F \in \tau$ .

A definição acima diz que um conjunto é fechado se e somente se o seu complementar é aberto.

A primeira coisa que podemos notar é que  $\emptyset$  e  $X$  são conjuntos fechados. *Assim, a noção de aberto e fechado difere da ideia de porta ou janela aberta/fechada. Ou seja, como em muitos outros casos, o uso da palavra cotidiana não serve para intuir seu uso na matemática.*

Em inglês, um conjunto aberto e fechado é chamado de clopen. Esse termo geralmente aparece quando existe uma quantidade significativa deles (quando existe uma base de clopens, que são os espaços zero-dimensionais) ou quando há apenas os inevitáveis  $\emptyset$  e  $X$  (quando o espaço é chamado de conexo).

*O termo 0-dimensional se refere a dimensão 0. Existem alguns tipos de dimensão definidos para espaços topológicos e em cada um delas se espera que o  $\mathbb{R}^n$  tenha dimensão  $n$ .*

**Exemplo 2.13.** Num espaço caótico ou no espaço discreto, todos os abertos são clopens. Na reta real, não há clopens não triviais, ou seja,  $\mathbb{R}$  é conexo (isto será visto eventualmente neste curso).

**Definição 2.14.** Dado um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  com uma topologia  $\tau$ , o fecho de  $A$  é o menor fechado que contém  $A$ . Denotaremos o fecho de  $A$  por  $\bar{A}$  ou  $cl(A)$  ( ou  $\bar{A}^\tau$ ,  $\bar{A}^X$ ,  $cl_\tau(A)$  ou  $cl_X(A)$  quando for necessário especificar melhor).

Para que está definição faça sentido é necessário provar que existe o menor fechado. Isto é feito usando a relação de inclusão.

Vamos primeiro lembrar a relação de De Morgan:  $X \setminus (\bigcup \mathcal{A}) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$  e  $X \setminus (\bigcap \mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$ . A prova do Lema abaixo segue da definição de topologia e o uso do complementar.

**Lema 2.15.** O conjunto  $\mathcal{F}$  de todos os fechados do espaço  $X$  com a topologia  $\tau$  satisfaz:

F1)  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{F}$ .

F2) Se  $\emptyset \neq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  então  $\bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}$ .

F3) Se  $F, G \in \mathcal{F}$  então  $F \cup G \in \mathcal{F}$ .

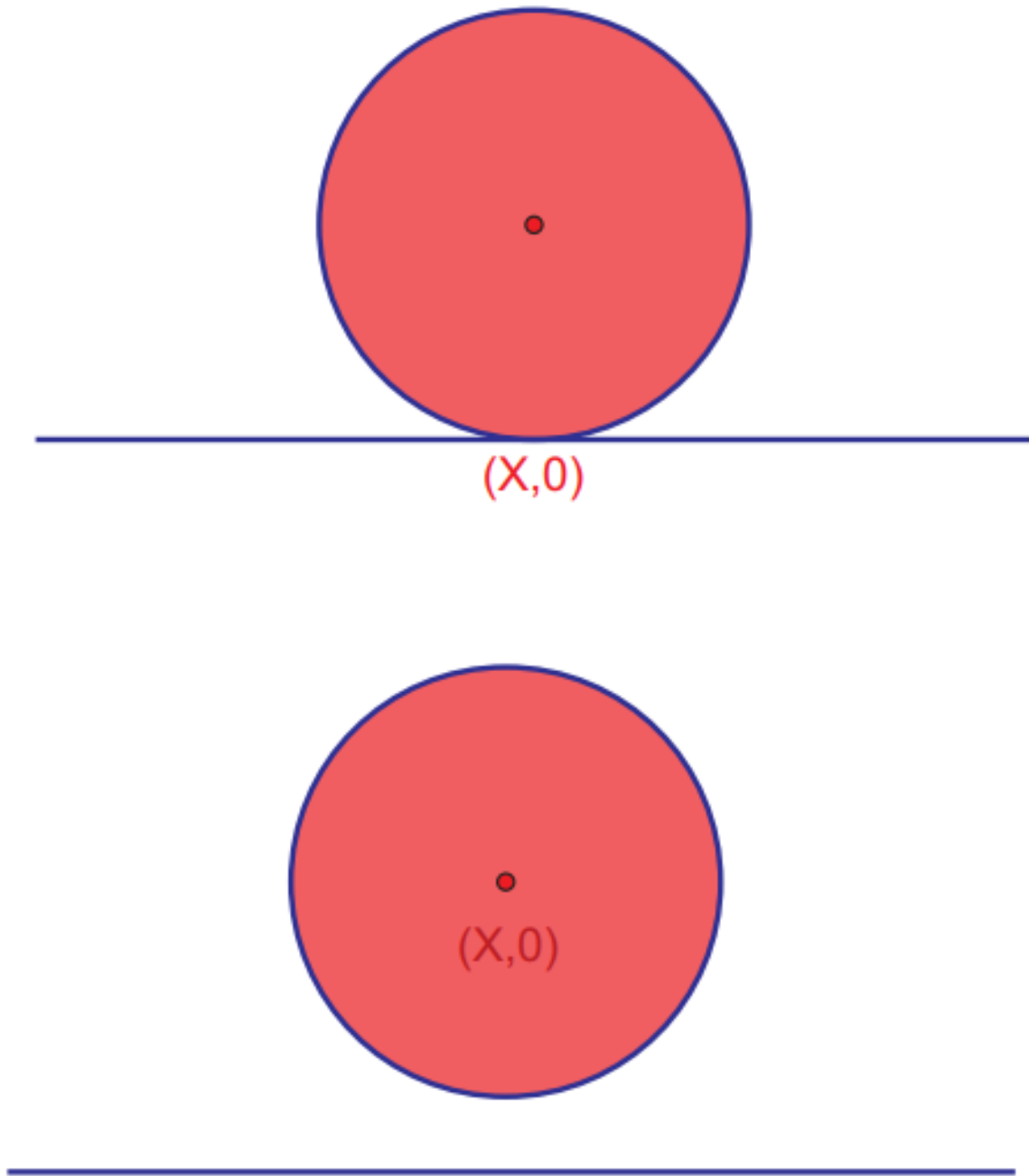


Figura 2.2: O plano de Niemitzky.

## 2.4 'Não sei se está próximo, mas ainda não encostou'.

### 2.4.1 Quando um ponto está no fecho.

**Proposição 2.16.** Dado um espaço topológico  $X$ , o fecho de um subconjunto de  $X$  está bem definido.

*Demonstração.* Seja  $A$  um subconjunto de  $X$ . Se  $A$  for vazio, então  $A$  é fechado e é o menor fechado que contém  $A$ .

Se  $A$  é não vazio, tome  $\mathcal{A} = \{F : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}$ . Como  $X$  é fechado, segue que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Assim,  $B = \bigcap \mathcal{A}$  é um fechado que contém  $A$ . Para ver que  $B$  é o menor fechado, se  $F$  é um fechado contendo  $A$  então  $F \in \mathcal{A}$ , logo  $B = \bigcap \mathcal{A} \subseteq F$ .  $\square$

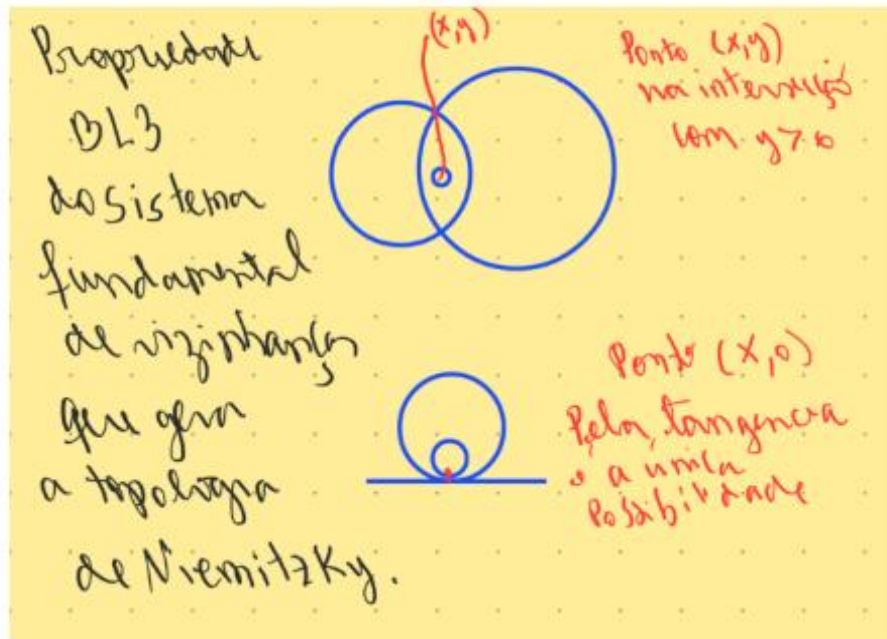


Figura 2.3: O plano de Niemitzky - a propriedade BL3.

Verificar se um ponto  $x$  pertence ao fecho de um conjunto é uma propriedade local.

**Lema 2.17.** Dado um ponto  $x \in X$ ,  $A \subseteq X$  e  $\mathcal{V}_x$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ , são equivalentes.

- a)  $x \in \bar{A}$ .
- b) para toda vizinhança aberta  $U$  de  $x$  temos  $U \cap A \neq \emptyset$ .
- c)  $U \cap A \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{V}_x$ .

*Demonstração.* Basta mostrarmos que a)  $\rightarrow$  b), b)  $\rightarrow$  c) e c)  $\rightarrow$  a). Suponhamos que b) não esteja satisfeita. Então existe uma vizinhança aberta de  $x$  tal que  $U \cap A = \emptyset$ . Então  $F = X \setminus U$  é um fechado que contém  $A$ . Logo, pela definição do fecho de  $A$ , segue que  $\bar{A} \subseteq F$ . Portanto,  $\bar{A} \cap U = \emptyset$ . Como  $x \in U$ , segue então que  $x \notin \bar{A}$ .

Suponha que b) vale. Dada uma vizinhança  $U \in \mathcal{V}_x$ , temos que existe um aberto  $V$  tal que  $x \in V \subseteq U$ . Como  $V$  é vizinhança aberta de  $x$ , segue da hipótese que  $A \cap V \neq \emptyset$ . Como  $A \cap V \subseteq A \cap U$ , temos que  $A \cap U$  é não vazio e vale a condição c).

Suponhamos que a) não está satisfeita. Então  $x \in X \setminus \bar{A}$ . Como  $X \setminus \bar{A}$  é um aberto, segue que existe  $V \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V \subseteq X \setminus \bar{A}$ . Assim,  $V \cap \bar{A} = \emptyset$ . Como  $A \subseteq \bar{A}$ , segue que  $V \cap A = \emptyset$ . Assim c) não está satisfeita e c)  $\rightarrow$  a) segue da contrapositiva.  $\square$

Podemos ‘fixar’ os que serão os fechados ou o operador fecho para definir uma topologia como foi feita para bases ou um sistema fundamental de vizinhanças abertas. Deixaremos a cargo do leitor notar que se começarmos com uma família que satisfaz F1) – F3) então os complementares irão gerar uma topologia e essa família será a família dos fechados dessa topologia. O caso do fecho será deixado para quando definirmos o operador interior.

## 2.5 Topologias definidas por bases de fechados.

Pode se definir uma base de fechados para obter todos os fechados.

### 2.5.1 Definição de Base de Fechados.

**Definição 2.18.** Seja  $\mathcal{C}$  uma família de fechados num espaço topológico  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma base de fechados se para todo  $F \subseteq X$  fechado de  $X$ , existe  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tal que  $F = \bigcap \mathcal{C}'$ . (Para que isto bata com a ideia da união vazia, iremos assumir que a intersecção da família vazia é  $X$ ).

O próximo lema relaciona uma base de fechados a uma base de abertos.

**Lema 2.19.**  $\mathcal{C}$  é base de fechados se e somente se  $\mathcal{B} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$  é uma base de abertos.

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Seja  $U$  um aberto da topologia. Podemos supor que  $U$  não é vazia, pois neste caso tomamos a família vazia que é um subconjunto de  $\mathcal{B}$ . Então  $X \setminus U$  é fechado distinto de  $X$  e existe  $\mathcal{C}'$  não vazio tal que  $X \setminus U = \bigcap \mathcal{C}'$ . Por De Morgan, temos que  $U = \bigcup \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}'\}$ .

( $\leftarrow$ ) Seja  $F$  um fechado de  $X$ . Se  $F = X$  segue da intersecção da família vazia. Suponhamos que  $F \neq X$ . Então  $X \setminus F$  é um aberto não vazio. Portanto, como  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos, segue que existe  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $X \setminus F = \bigcup \mathcal{B}'$ . Pela definição de  $\mathcal{B}$ , existe  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{B}' = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}'\}$ . Logo por De Morgan, temos que  $F = \bigcap \{X \setminus (X \setminus C) : C \in \mathcal{C}'\} = \bigcap \mathcal{C}'$ .  $\square$

**Definição 2.20.** Dizemos que uma família  $\mathcal{C}$  é uma base de fechados para uma topologia se

- BF1) para todo  $x \in X$  existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $x \notin C$ .
- BF2) se  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  e  $x \notin C_1 \cup C_2$  então existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $C_1 \cup C_2 \subseteq C$  e  $x \notin C$ .

### 2.5.2 Topologia gerada por Base de Fechados.

**Lema 2.21.** Se  $\mathcal{C}$  é uma família que satisfaz BF1) e BF2) então existe uma topologia em que  $\mathcal{C}$  é uma base de fechados para esta topologia.

*Demonstração.* Considere a família  $\mathcal{B} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ . Fica a cargo do leitor notar que  $\mathcal{B}$  satisfaz B1) e B2). Considere a topologia  $\tau$  gerada pela base de abertos  $\mathcal{B}$ . Então  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos para  $\tau$  e temos então que  $\mathcal{C}$  será uma base de fechados para  $\tau$ .  $\square$

**Exemplo 2.22.** Seja  $X$  um conjunto não enumerável e seja  $\mathcal{C}$  a família de todos os subconjuntos enumeráveis (finitos ou não) de  $X$ . Então  $\mathcal{C}$  é base de fechados para uma topologia. Esta topologia é chamada de co-enumerável.

*Demonstração.* Para cada  $x \in X$  temos que  $\emptyset \in \mathcal{C}$  e  $x \notin \emptyset$ . Assim  $BF1$ ) está satisfeita. Para verificar  $BF2$ ), basta notar que a união de dois elementos de  $\mathcal{C}$  é um elemento de  $\mathcal{C}$  (união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável).  $\square$

### 2.5.3 Coming next...

Iremos definir pontos de acumulação de um conjunto e comentar um pouco sobre convergência de seqüências. Mostrando que esta noção é insuficiente para espaços topológicos arbitrários. Iremos definir continuidade local e continuidade, usando as noções topológicas vista até agora para verificar a continuidade de uma função. Iremos definir homeomorfismos. Basicamente, espaços homeomorfos são iguais do ponto de vista da topologia de seus espaços. Finalmente iremos comentar sobre propriedades topológicas que são a propriedades a serem estudadas em topologia.

## Capítulo 3

# Sequências. Densos. Axiomas de enumerabilidade.

### 3.1 Ponto de Acumulação de Conjuntos e Sequências.

Para  $\mathbb{R}^n$  e para espaços métricos em geral, as sequências aparecem frequentemente. Vamos dar aqui a definição que usa vizinhanças que equivale à definição usando  $\epsilon$ 's devido ao sistema fundamental usando bolas abertas.

#### 3.1.1 Ponto de acumulação de conjunto. Ponto de acumulação de sequência.

**Definição 3.1.** Um ponto  $x \in X$  é um ponto de acumulação de um subconjunto  $A \neq \emptyset$  de um espaço topológico  $X$  se  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$  (ou seja, toda vizinhança de  $x$  contém um ponto de  $A$  distinto de  $x$ .)

**Proposição 3.2.** Se  $x$  é um ponto de acumulação de  $B$  e  $B \subseteq A$  então  $x$  é ponto de acumulação de  $A$ .

Uma sequência em  $X$  é uma função do conjunto dos naturais em  $X$ , mas comumente escrevemos  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ . A imagem da sequência será denotada por  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Fazendo uma analogia com pisadas, a imagem seriam as pegadas e a sequência seria marcar cada passo dado com um número... tipo quando o Snoopy ensina o Charlie Brown dançar.

**Definição 3.3.** Dizemos que  $x$  é um ponto de acumulação da sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  se para toda vizinhança  $U$  de  $x$  e todo  $N \in \mathbb{N}$ , existe  $m \geq N$  tal que  $x_m \in U$ .

Neste caso, dizemos que a sequência se acumula em  $x$ .

Note que se  $x$  é um ponto de  $X$  e  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é a sequência constante  $x$ , então  $x$  é um ponto de acumulação da sequência, mas  $x$  não é ponto de acumulação da imagem  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$ .

Fazendo analogia da pisada na neve, um ponto  $x$  é de acumulação da sequência se toda vez que você fixa uma vizinhança  $U$  de  $x$  e está nevando constantemente, de tempos em tempos vai ter uma pegada nova em cima de  $U$ .

**Lema 3.4.** Seja  $x$  um ponto de  $X$ ,  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  uma sequência em  $X$  e  $\mathcal{V}_x$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ . Temos que  $x$  é ponto de acumulação da sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  se e somente se para todo  $U \in \mathcal{V}_x$ , o conjunto  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$  é infinito (note que ser subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$  equivale a ser um conjunto ilimitado em  $\mathbb{N}$ ).

**Definição 3.5.** Dizemos que  $x$  é um limite da sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  se para toda vizinhança  $U$  de  $x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_m \in U$  para todo  $m \geq N$ .

Neste caso dizemos que a sequência converge para  $x$ .

Continuando com a analogia da pisada enquanto está nevando, uma sequência converge se para cada vizinhança  $U$  de  $x$ , a partir de algum momento, todas as pegadas visíveis vão estar dentro de  $U$ . Ou seja, a partir de algum momento, a sequência só anda em cima de  $U$ .

Como abaixo de qualquer natural existe apenas um número finito de naturais, a definição anterior é equivalente a

**Lema 3.6.** Seja  $x$  um ponto de  $X$ ,  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  uma sequência em  $X$  e  $\mathcal{V}_x$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ . Temos que  $x$  é um limite da sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  se e somente se para todo  $U \in \mathcal{V}_x$ , o conjunto  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$  é cofinito (ou seja seu complementar em relação a  $\mathbb{N}$  é finito).

### 3.1.2 ‘Seguindo os passos da sequência’: subseqüências.

Podemos imaginar que na sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ , cada  $x_n$  é onde o  $n$ -ésimo pisão em  $X$  foi dado. Às vezes, a sequência está indo para alguma direção em particular (quando têm limite) ou não. Pensando que uma sequência é pular de um ponto a outro de  $X$ , a subseqüência seria seguir a ordem dos pulos da sequência, mas dando pulos maiores no meio do caminho e não pisar em todos os lugares por onde a sequência pisou.

Voltando ao exemplo das pegadas numeradas. Se removermos alguns passos no meio do caminho teríamos um subconjunto de números e poderíamos continuar pisando seguindo a ordem ou reenumerar os passos que sobraram.

Denotaremos uma subseqüência de  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  como a restrição da função conjunto  $A$  e a denotaremos por  $(x_n : n \in A)$  (que seria usarmos as pegadas numerados que sobraram). Podemos eventualmente usar a enumeração crescente de  $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$  e escrever a subseqüência como  $(x_{n_k} : k \in \mathbb{N})$  (que seria reetiquetar as pegadas numeradas).

**Definição 3.7.** Dada uma sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  dizemos que  $(y_k : k \in \mathbb{N})$  é uma subseqüência se existe uma função estritamente crescente  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $x_{\phi(k)} = y_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Podemos escrever a subseqüência como  $(x_{n_k} : k \in \mathbb{N})$ , onde  $n_k = \phi(k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  ou  $(x_n : n \in A)$  onde  $A = \phi[\mathbb{N}]$  é um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ .

*Para passar de  $A$  para  $n_k$ , basta considerar  $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$  com  $n_k = \phi(k)$  crescente. Para passar de  $n_k$  ou  $\phi$  para  $A$  basta tomar  $\text{Im } \phi = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = n_k\}$ .*

**Proposição 3.8.** Se  $(x_n : n \in A)$  acumula em  $x$  então  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  acumula em  $x$ .

Se  $x$  é limite de  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  então  $x$  é limite de  $(x_n : n \in A)$ .

**Teorema 3.9.** Seja  $x \in X$  e seja  $A$  um subconjunto de  $X$ . Então

A) Se  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência em  $A \setminus \{x\}$  que converge para  $x$  então  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência que acumula em  $x$ .

B) Se  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência em  $A \setminus \{x\}$  que acumula em  $x$  então  $x$  é um ponto de acumulação de  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Nem sempre ser ponto de acumulação de uma sequência implica que o ponto será limite de alguma subseqüência.

A propriedade abaixo vale em particular para  $\mathbb{R}^n$  e espaços métricos em geral.

### 3.1.3 Convergência de seqüências em pontos com base local enumerável.

**Teorema 3.10.** Seja  $x \in X$  um ponto para o qual existe um sistema fundamental de vizinhanças  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  (alguns autores dizem em inglês que  $X$  é ‘first countable’ em  $x$ ). Seja  $A$  um subconjunto de  $X$ . Então são equivalentes:

- $x$  é ponto de acumulação de  $A$ .
- existe  $B \subseteq A$  enumerável tal que  $x$  é ponto de acumulação de  $B$ .
- existe uma seqüência em  $A \setminus \{x\}$  que se acumula em  $x$ .
- existe uma seqüência em  $A \setminus \{x\}$  que converge para  $x$ .

*Demonstração.* Para qualquer espaço topológico, temos que  $d)$  implica  $c)$ ,  $c)$  implica  $b)$  e  $b)$  implica  $a)$ . Assim, restaria mostrar que  $a)$  implica  $d)$ . Por motivos didáticos vamos mostrar que  $a)$  implica  $b)$ ,  $a)$  implica  $c)$  e  $a)$  implica  $d)$ .

$a) \rightarrow b)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos que  $V_n \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ . Fixe  $x_n \in V_n \cap (A \setminus \{x\})$ . Então  $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  se acumula em  $x$  (note que  $x \notin B$ ). De fato,  $U$  é uma vizinhança de  $x$  então existe  $k$  tal que  $V_k \subseteq U$ . Assim,  $x_k \in V_k \cap (B \setminus \{x\}) \subseteq U \cap (B \setminus \{x\})$ . Assim,  $U \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ .

Agora, para mostrar que  $a)$  implica  $c)$  ou  $d)$  a seqüência pode falhar (fica a cargo do leitor pensar num exemplo).



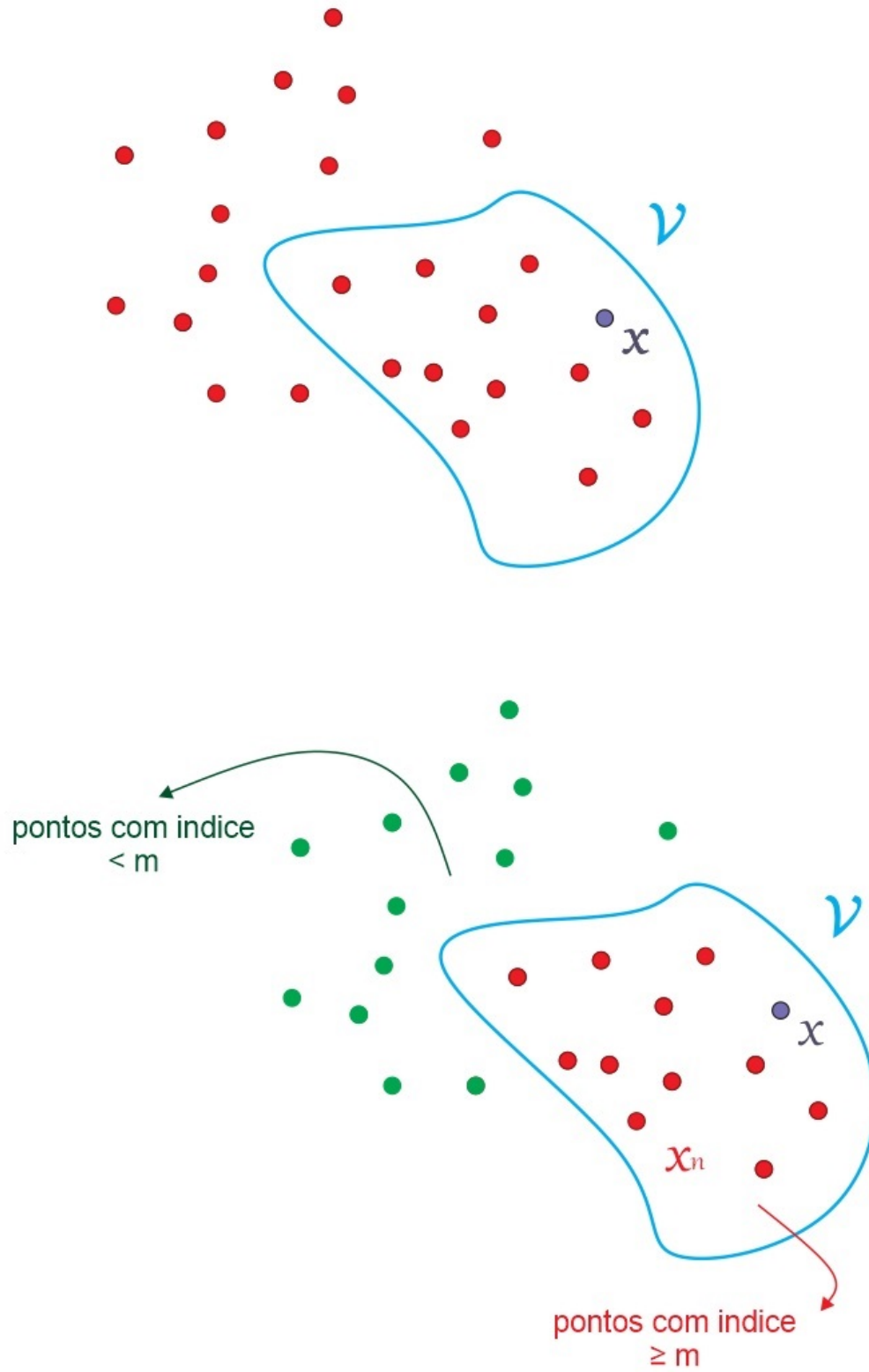


Figura 3.1: Pontos de acumulação e limites de sequências.

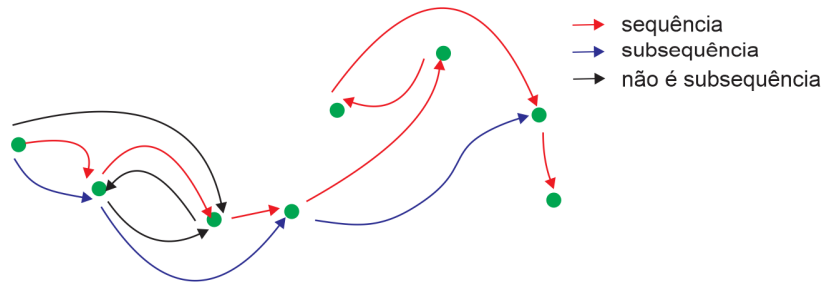


Figura 3.2: Sequências convergentes em pontos com base local enumerável.

Primeiramente, a interseção finita de vizinhanças é uma vizinhança. Assim, vamos tomar  $W_n = \bigcap \{V_m : m \leq n\}$ . Temos que  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  é uma sequência  $\subseteq$ -decrecente de vizinhanças de  $x$ . Além disso,  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças, pelo fato de  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  ser um sistema fundamental de vizinhanças.

*a)  $\rightarrow$  c).* Tome uma sequência  $(x_k : k \in \mathbb{N})$  tal que  $x_k \in W_k \cap A$ . Fixado  $U$  vizinhança de  $x$ , existe  $m$  tal que  $W_m \subseteq U$ . Seja  $N$  um natural arbitrário e tome  $k \geq \max\{N, m\}$ . Então  $x_k \in W_k \subseteq W_m \subseteq U$ . Logo a sequência acumula em  $x$ .

*a)  $\rightarrow$  d).* Usando a mesma sequência, no argumento acima, temos que  $x_k \in U$  para todo  $n \geq m$ . Logo  $\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin U\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$  ( $\{n \in \mathbb{N} : n < m\} = m$ , se usarmos a notação de ordinais) e portanto a sequência converge.  $\square$

**Exercício 3.11.** Mostre que se  $X$  satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade em  $x \in X$  então toda sequência que acumula em  $x$  possui uma subsequência que converge para  $x$ . (Para espaços arbitrários isto não é verdade).

### 3.1.4 Quando sequências não conseguem descrever a topologia.

Abaixo temos um exemplo em que sequências não são sempre suficientes para recuperar a topologia.

**Exemplo 3.12.** Seja  $X$  o conjunto dos reais com a topologia co-enumerável. Seja  $A$  o conjunto dos reais positivos. Todo fechado distinto de  $X$  é enumerável. Assim, o menor fechado que contém  $A$  é o  $X$ . Tome  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  uma sequência de  $A$ . Como  $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  é enumerável, é um conjunto fechado. Segue que  $X \setminus B$  é vizinhança de qualquer real não positivo  $y$ . Usando este aberto, concluímos que a sequência não acumula em  $y$ . Portanto nenhuma sequência em  $A$  converge para  $y$ .

Com isto, para trabalhar com convergência que descreva a topologia, é necessário definir um conceito mais geral do que sequências. Isto será feito de duas maneiras que são ‘duais’: filtros e redes.

## 3.2 ‘I see points of $D$ everywhere. All the time’ - densos.

### 3.2.1 Definição de denso.

**Definição 3.13.** Dizemos que um ponto é isolado se  $\{x\}$  é um conjunto aberto.

Dizemos que  $D \subseteq X$  é um conjunto denso se  $\overline{D} = X$ .

Um conjunto denso se ‘aproxima de qualquer ponto de  $X$ ’. Fica a cargo do leitor notar que os pontos isolados são elementos de qualquer conjunto denso.

**Exemplo 3.14.** Tanto  $\mathbb{Q}$  quanto  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  são densos em  $\mathbb{R}$  na topologia usual.

Vimos anteriormente como fazemos para saber se um ponto pertence ao fecho. Agora veremos algo similar para saber quando  $D$  é denso.

**Lema 3.15.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base de um espaço topológico  $X$  com  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ . Um conjunto  $D \subseteq X$  é denso se e somente se  $D \cap U \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{B}$ .



Figura 3.3: Sequências são insuficientes para descrever esta topologia.

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Se  $D$  é denso, então tome  $U \in \mathcal{B}$ . Fixe  $x \in U$ . Como  $x \in X = \overline{D}$  e  $U$  é vizinhança de  $x$ , segue que  $U \cap D \neq \emptyset$ .

( $\leftarrow$ ) Seja  $x \in X$  e  $V$  uma vizinhança de  $x$ . Como  $\mathcal{B}$  é uma base, segue que existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U \subseteq V$ . Por hipótese,  $U \cap D \neq \emptyset$ . Logo,  $V \cap D \neq \emptyset$  para toda vizinhança  $V$  de  $x$ . Com isto, temos que  $x \in \overline{D}$ . Como  $x$  era um ponto arbitrário de  $x$ , temos que  $X = \overline{D}$  e  $D$  é denso em  $X$ .  $\square$

Para recuperarmos o fecho de um aberto, basta tomarmos o fecho de algum subconjunto de um denso:

**Proposição 3.16.** Se  $D$  é denso em  $X$  e  $U$  é aberto em  $X$  então  $\overline{D \cap U} = \overline{U}$ .

*Demonstração.* Como  $U \cap D \subseteq U$ , segue que  $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$ . Seja  $x \in \overline{U}$ . Então temos que para todo  $V$  vizinhança aberta de  $x$  vale  $U \cap V \neq \emptyset$ . Como  $U \cap V$  é aberto e  $D$  é denso, temos que  $U \cap V \cap D \neq \emptyset$ . Assim,  $(U \cap D) \cap V \neq \emptyset$  para toda a vizinhança aberta  $V$  de  $x$ . Logo,  $x \in \overline{U \cap D}$ .  $\square$

### 3.2.2 Os três axiomas de enumerabilidade.

**Definição 3.17.** Dizemos que  $X$  satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade se todo ponto de  $x \in X$  possui um sistema fundamental de vizinhanças  $\mathcal{V}_x$  em  $x$  onde  $\mathcal{V}_x$  é enumerável.

Dizemos que  $X$  satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade se existe uma base de abertos  $\mathcal{B}$ , onde  $\mathcal{B}$  é enumerável.

Dizemos que  $X$  satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade se existe um conjunto denso  $D$  de  $X$  tal que  $D$  é enumerável. Nesse caso, também dizemos que  $X$  é separável

**Teorema 3.18.** Se  $X$  satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então  $X$  satisfaz o primeiro e o terceiro axioma de enumerabilidade.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{B}$  uma base. Então  $\mathcal{V}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$  é um sistema de vizinhanças de  $X$ . Para cada  $U \in \mathcal{B}$  (podemos assumir que  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ ) fixe  $x_U \in U$ . Então  $D = \{x_U : U \in \mathcal{B}\}$  é denso em  $X$ .

Se  $\mathcal{B}$  é enumerável então  $\mathcal{V}_x$  e  $D$  descritos acima também são enumeráveis.  $\square$

**Exemplo 3.19.** 1) Seja  $X$  um espaço discreto não enumerável. Então  $X$  satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, mas  $X$  não satisfaz nem o segundo nem o terceiro axioma de enumerabilidade.

2) Seja  $X$  não enumerável com a topologia co-finita. Então  $X$  satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade, mas não satisfaz o primeiro e o segundo axioma de enumerabilidade.

3) A reta de Sorgenfrey satisfaz o primeiro e o terceiro axioma da enumerabilidade, mas não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

*Demonstração.* 1) O conjunto  $\{\{x\}\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças. O único conjunto denso de  $X$  é o próprio  $X$ , assim  $X$  não satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade. Como  $X$  não satisfaz o terceiro axioma, também não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

2) Todo conjunto infinito de  $X$  intersecta qualquer aberto não vazio. Assim um conjunto infinito enumerável de  $X$  é denso. Portanto  $X$  satisfaz o terceiro axioma da enumerabilidade.

Fixe  $x \in X$ . uma família enumerável  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  de vizinhanças abertas de  $x$ , temos que existe  $F_n$  finito tal que  $V_n = X \setminus F_n$ . O conjunto  $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  é enumerável. Assim, existe  $y \neq x$  tal que  $y \in X \setminus F$ . Assim,  $X \setminus \{y\}$  é uma vizinhança de  $x$ . Como  $y \in V_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , segue que  $V_n \not\subseteq X \setminus \{y\}$ . Assim  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  não é um sistema de vizinhanças de  $x$ . Assim,  $X$  não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e consequentemente, também não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

3) Claramente  $\{[x, x + \frac{1}{2^n}[: n \in \mathbb{N}\}$  é uma base local para  $x$  na reta de Sorgenfrey, assim o espaço satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Claramente  $\mathbb{Q}$  é denso na reta de Sorgenfrey, assim também satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Suponha que  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos da reta de Sorgenfrey. Então para cada  $x \in X$  existe  $V_x \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V_x \subseteq [x, x + 1[$ . Temos que se  $x < y$  então  $x \notin [y, y + 1[$  e portanto  $x \notin V_y$ . Como  $x \in V_x$ , segue que  $V_x \neq V_y$ . Assim existe uma função injetora de  $X$  em  $\mathcal{B}$ . Como  $X$  é não enumerável, segue que  $\mathcal{B}$  é não enumerável. Logo  $X$  não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.  $\square$

### 3.2.3 Toda base de abertos contém uma base de abertos de tamanho mínimo.

Vamos agora ver que se o espaço não possui uma base finita, então toda base de abertos possui uma base contida nela com tamanho infinito mínimo.

**Teorema 3.20.** Sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{V}$  duas bases de abertos. Então existe um subconjunto de  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$  indexado por um subconjunto de  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$  que forma uma base. Em particular, se  $\mathcal{B}$  é enumerável então existe uma base enumerável contida em  $\mathcal{V}$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{D} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : (\exists W \in \mathcal{V}) U \subseteq W \subseteq V\}$ . Para cada  $(U, V) \in \mathcal{D}$ , fixe  $W_{(U, V)} \in \mathcal{V}$  (aqui é feito uso do Axioma da Escolha). Vamos provar que  $\{W_{(U, V)} : (U, V) \in \mathcal{D}\}$  é uma base. De fato, tome  $O$  um aberto não vazio e seja  $x \in O$ . Então existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subseteq O$ . Como  $\mathcal{V}$  também é base, existe  $W \in \mathcal{V}$  tal que  $x \in W \subseteq V$ . Usando novamente que  $\mathcal{B}$  é base temos  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U \subseteq W$ .

Assim,  $(U, V) \in \mathcal{D}$  e  $x \in U \subseteq W_{(U, V)} \subseteq V \subseteq O$ . Em particular,  $x \in W_{(U, V)} \subseteq O$ .  $\square$

**Exercício 3.21.** Note se  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$  são sistemas fundamentais de vizinhanças de  $x$  então existe uma subfamília de  $\mathcal{V}_2$  indexada por  $\mathcal{V}_1$  que é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ . Em particular, se  $X$  tem uma base local enumerável em  $x$  então todo sistema de vizinhanças de  $x$  contém uma subfamília que é um sistema enumerável de vizinhanças.

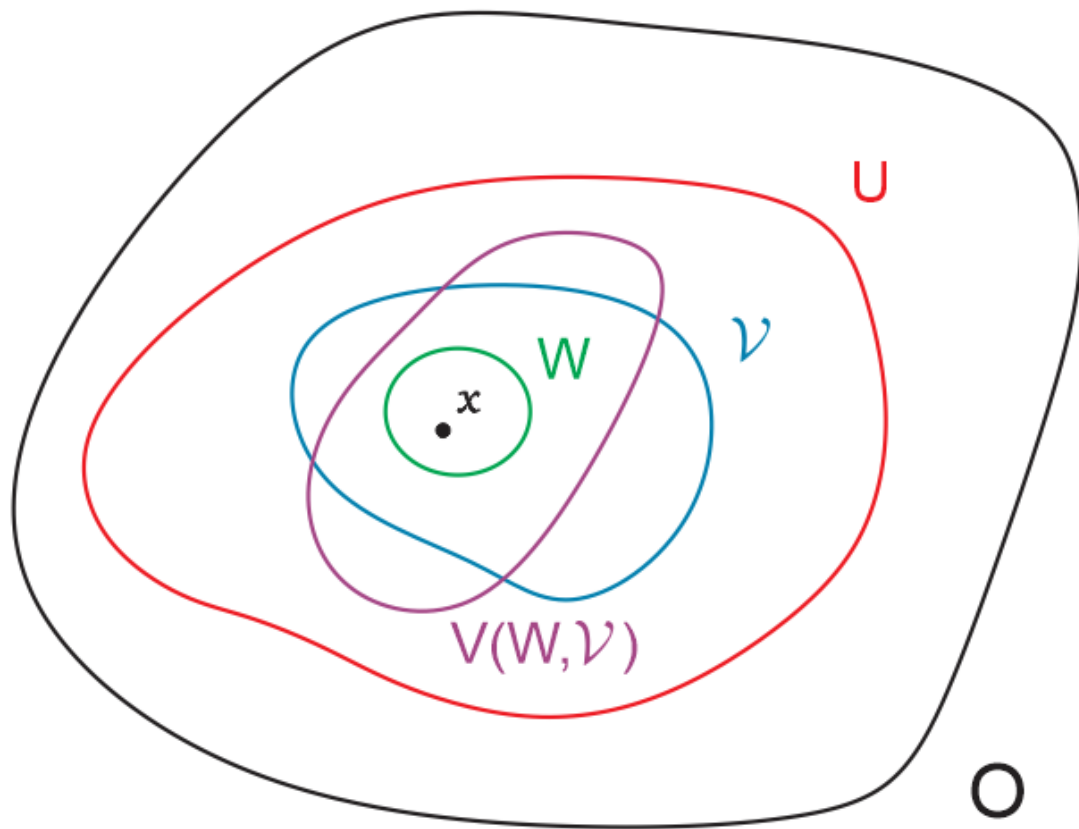


Figura 3.4: Usando pares de elementos de uma base para enumerar bases.

## Capítulo 4

# Continuidade. Propriedades Topológicas. Homeomorfismos. Topologias mais finas e menos finas.

### 4.1 Continuidade em um ponto. Continuidade.

#### 4.1.1 Continuidade local. De volta a $\epsilon$ e $\delta$ . Equivalências à continuidade local.

Funções contínuas relacionam diferentes espaços topológicos. Podemos pensar a continuidade de  $f$  como uma propriedade global ou como uma propriedade para cada ponto. No  $\mathbb{R}^n$  isto é feito usando  $\epsilon$  and  $\delta$ , mas como comentado anteriormente isso se refere ao sistema fundamental de vizinhanças usando bolas abertas centradas nos pontos  $x$  e  $f(x)$ .

**Definição 4.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Dizemos que  $f$  é contínua em  $x$  se para todo  $W$  aberto que contém  $f(x)$  então existe  $V$  aberto contendo  $x$  tal que  $f[V] \subseteq W$  (aqui  $f[V]$  é a imagem de  $V$  pela função  $f$ ).

A definição usando  $\epsilon$  e  $\delta$  é a equivalência  $c$ ).

**Lema 4.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Seja  $\mathcal{V}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$  e  $\mathcal{W}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $f(x)$ . São equivalentes:

- $f$  é contínua em  $x$ .
- se  $W$  é uma vizinhança de  $f(x)$  então  $f^{-1}[W]$  é uma vizinhança de  $x$ .
- se  $W \in \mathcal{W}$  então existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $f[V] \subseteq W$ .
- se  $W \in \mathcal{W}$  então existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $V \subseteq f^{-1}[W]$ .
- se  $x \in \overline{A}$  então  $f(x) \in \overline{f[A]}$ .

*Demonstração.* ( $a$ )  $\rightarrow$   $b$ ). Tome  $W$  uma vizinhança de  $f(x)$ , então existe um aberto  $V$  tal que  $f(x) \in V \subseteq W$ . Por hipótese  $f$  é contínua em  $x$ , assim existe  $U$  aberto contendo  $x$  tal que  $f[U] \subseteq V$ . Logo,  $x \in U \subseteq f^{-1}[f(U)] \subseteq f^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[W]$ . Assim,  $f^{-1}[W]$  é uma vizinhança de  $x$ .

( $b$ )  $\rightarrow$   $c$ ). Tome  $W \in \mathcal{W}$  então por hipótese temos que  $f^{-1}[W]$  é uma vizinhança  $x$ . Então existe  $U$  aberto em  $x$  tal que  $x \in U \subseteq f^{-1}[W]$ . Como  $\mathcal{V}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$  então existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $x \in V \subseteq U \subseteq f^{-1}[W]$ . Assim  $f[V] \subseteq f[f^{-1}[W]] \subseteq W$ .

( $c$ )  $\leftrightarrow$   $d$ ). Temos que  $f[V] \subseteq W$  se e somente se  $V \subseteq f^{-1}[W]$ .

( $c$ )  $\rightarrow$   $a$ ). Tome  $W$  um aberto que contém  $f(x)$ . Então existe  $O \in \mathcal{W}$  tal que  $O \subseteq W$ . Por hipótese, existe  $U \in \mathcal{V}$  tal que  $f[U] \subseteq O$ . Tome  $V$  um aberto contendo  $x$  tal que  $V \subseteq U$ . Então  $f[V] \subseteq f[U] \subseteq O \subseteq W$ . Logo  $x \in V$  e  $f[V] \subseteq W$ .

(( $a$ )  $\rightarrow$   $e$ ). Vamos assumir  $a$ ) e seja  $A$  tal que  $x \in \overline{A}$ . Suponhamos que  $f(x) \notin \overline{f[A]}$ . Então  $Y \setminus \overline{f[A]}$  é um aberto contendo  $f(x)$ . Pela continuidade, temos que existe  $V$  um aberto  $V$  de  $x$  tal que  $f[V] \subseteq Y \setminus \overline{f[A]}$ . Logo,  $V \subseteq f^{-1}[Y \setminus \overline{f[A]}] = X \setminus f^{-1}[\overline{f[A]}] \subseteq X \setminus f^{-1}[f[A]] \subseteq X \setminus A$ . Logo,  $V \cap A = \emptyset$  e  $x \notin \overline{A}$ , uma contradição. Assim,  $f(x) \in \overline{f[A]}$ .

( $e \rightarrow a$ ). Suponhamos que  $f$  não é contínua em  $x$ . Então existe  $W$  aberto de  $Y$  contendo  $f(x)$  tal que para cada  $V$  aberto de  $X$  contendo  $x$  temos que  $f[V] \not\subseteq W$ .

Para cada  $V$  como acima, fixe um ponto  $x_V$  tal que  $f(x_V) \notin W$ .

Seja  $A = \{t \in X : \exists V \text{ aberto contendo } x \text{ tal que } t = x_V\}$ . Claramente,  $A \cap V \neq \emptyset$  para cada  $V$  aberto contendo  $x$ . Assim,  $x \in \overline{A}$ . Por outro lado,  $f[A] \cap W = \emptyset$  (logo  $f[A] \subseteq Y \setminus W$ ). Portanto temos que  $\overline{f[A]} \cap W = \emptyset$ , pois  $W$  é aberto em  $Y$ . Como  $f(x) \in W$ , segue que  $f(x) \notin \overline{f[A]}$ .  $\square$

Veremos depois que existem outras equivalências de continuidade em um ponto. Agora iremos passar a falar sobre continuidade global. Aqui aparece um bom motivo para termos introduzido sub-bases.

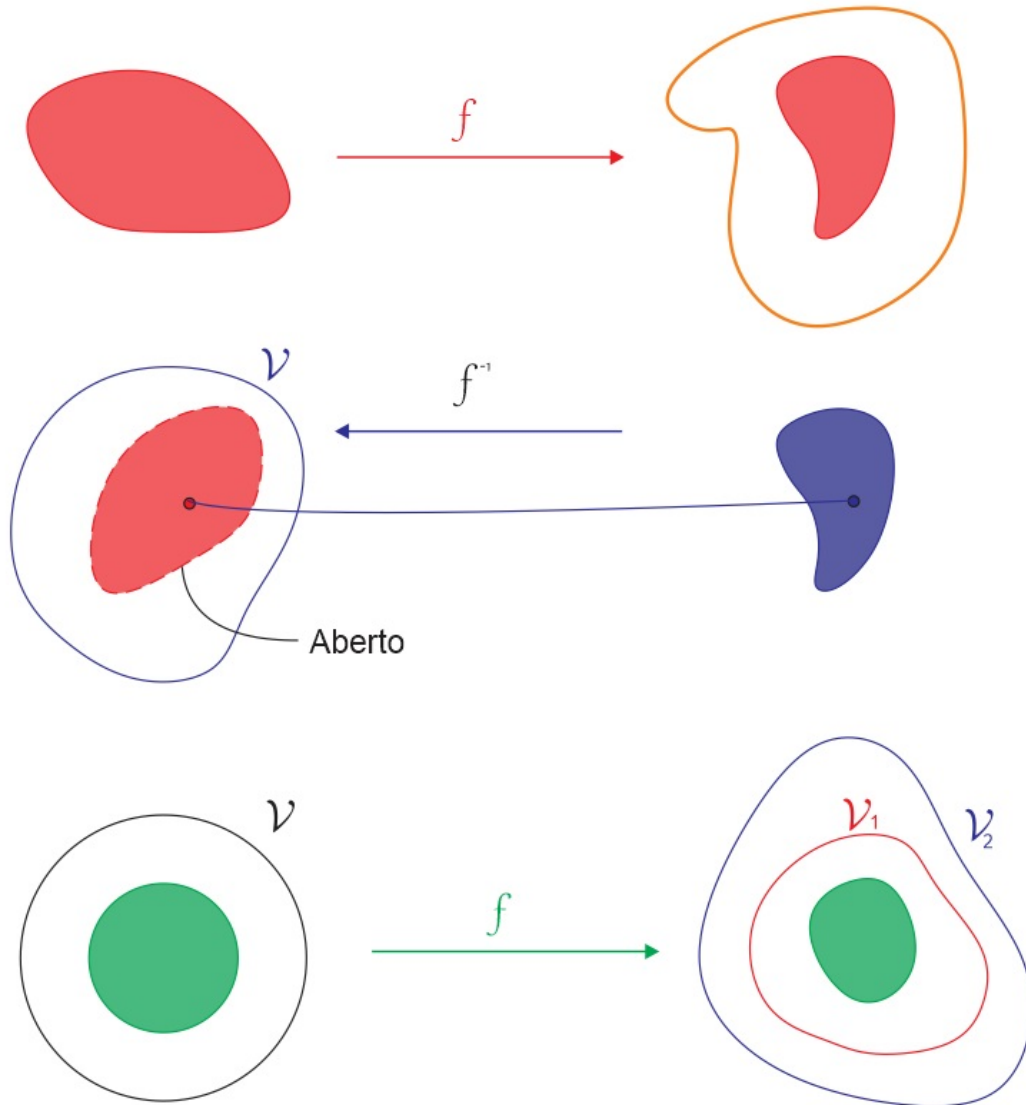


Figura 4.1: Equivalência de continuidade local.

### 4.1.2 Continuidade. Equivalências à continuidade.

**Definição 4.3.** Dizemos que  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se  $f$  é contínua em  $x$  para todo  $x \in X$ .

**Lema 4.4.** São equivalentes:

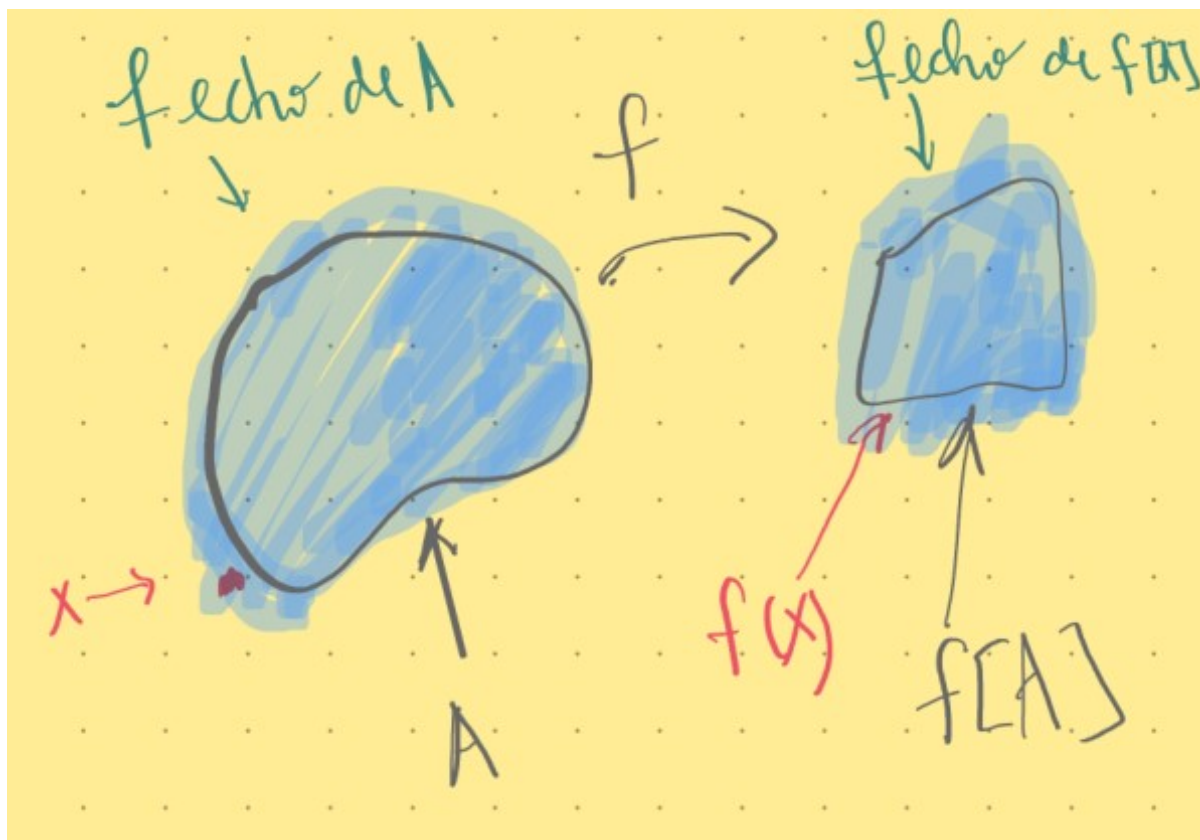


Figura 4.2: Equivalência de continuidade local.

- $f$  é contínua.
- $f^{-1}[W]$  é aberto, para todo  $W$  aberto de  $Y$ .
- se  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos de  $Y$  então  $f^{-1}[W]$  é aberto, para todo  $W \in \mathcal{B}$ .
- $f^{-1}[F]$  é um fechado de  $X$ , para todo  $F$  fechado em  $Y$ .
- $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .
- $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .
- se  $\mathcal{S}$  é uma sub-base de abertos de  $Y$  então  $f^{-1}[W]$  é aberto, para todo  $W \in \mathcal{S}$ .

*Demonstração.* (a)  $\rightarrow$  b)).

Seja  $W$  um aberto de  $Y$ . Como a imagem inversa do vazio é o vazio que é um aberto, podemos supor que  $W$  é não-vazio. Então  $W$  é vizinhança de  $f(x)$  para todo  $x$  tal que  $f(x) \in W$ . Assim,  $f^{-1}[W]$  é vizinhança de  $x$  para todo  $x \in f^{-1}[W]$ . Portanto  $f^{-1}[W]$  é um aberto.

(b)  $\rightarrow$  c)). Segue do fato que todo elemento de  $\mathcal{B}$  é um aberto.

(c)  $\rightarrow$  b)). Dado um aberto  $W$  de  $Y$  existe  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $W = \bigcup \mathcal{B}'$ . Aplicando a imagem inversa, temos que  $f^{-1}[W] = \bigcup \{f^{-1}[O] : O \in \mathcal{B}'\}$  que é um aberto, pois por hipótese  $f^{-1}[O]$  é aberto (note que  $O \in \mathcal{B}$ ).

(b)  $\leftrightarrow$  d)). Segue de  $X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A]$  e que um conjunto é aberto se e somente se é complementar de um fechado.

(a)  $\leftrightarrow$  e)). Temos que para cada  $A$ , para cada  $x \in X$   $x \in \overline{A}$  implica  $f(x) \in \overline{f[A]}$  se e somente se  $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ .

Se vale e), fixado  $x$  e variando  $A$  tal que  $x \in \overline{A}$ , pela equivalência de continuidade de  $f$  em  $x$ , temos que  $f$  é contínua em  $x$ . Variando  $x$ , vemos que  $f$  é contínua em  $X$ .

Fixado  $A$  e tomando  $x$  tal que  $x \in \overline{A}$ , como  $f$  é contínua em  $x$ , segue das equivalências de continuidade em  $x$  que  $f(x) \in \overline{f[A]}$ . Assim, vale e) para  $A$ . Como  $A$  é arbitrário, vale e).

(e)  $\leftrightarrow$  f)) segue da relação  $f[B] \subseteq C$  se e somente se  $B \subseteq f^{-1}[C]$ .

(b)  $\leftrightarrow$  g)) a direção não trivial segue de  $f^{-1}[\bigcap \mathcal{C}] = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} f^{-1}[C]$ , para qualquer família de subconjuntos  $\mathcal{C}$  de  $Y$ .



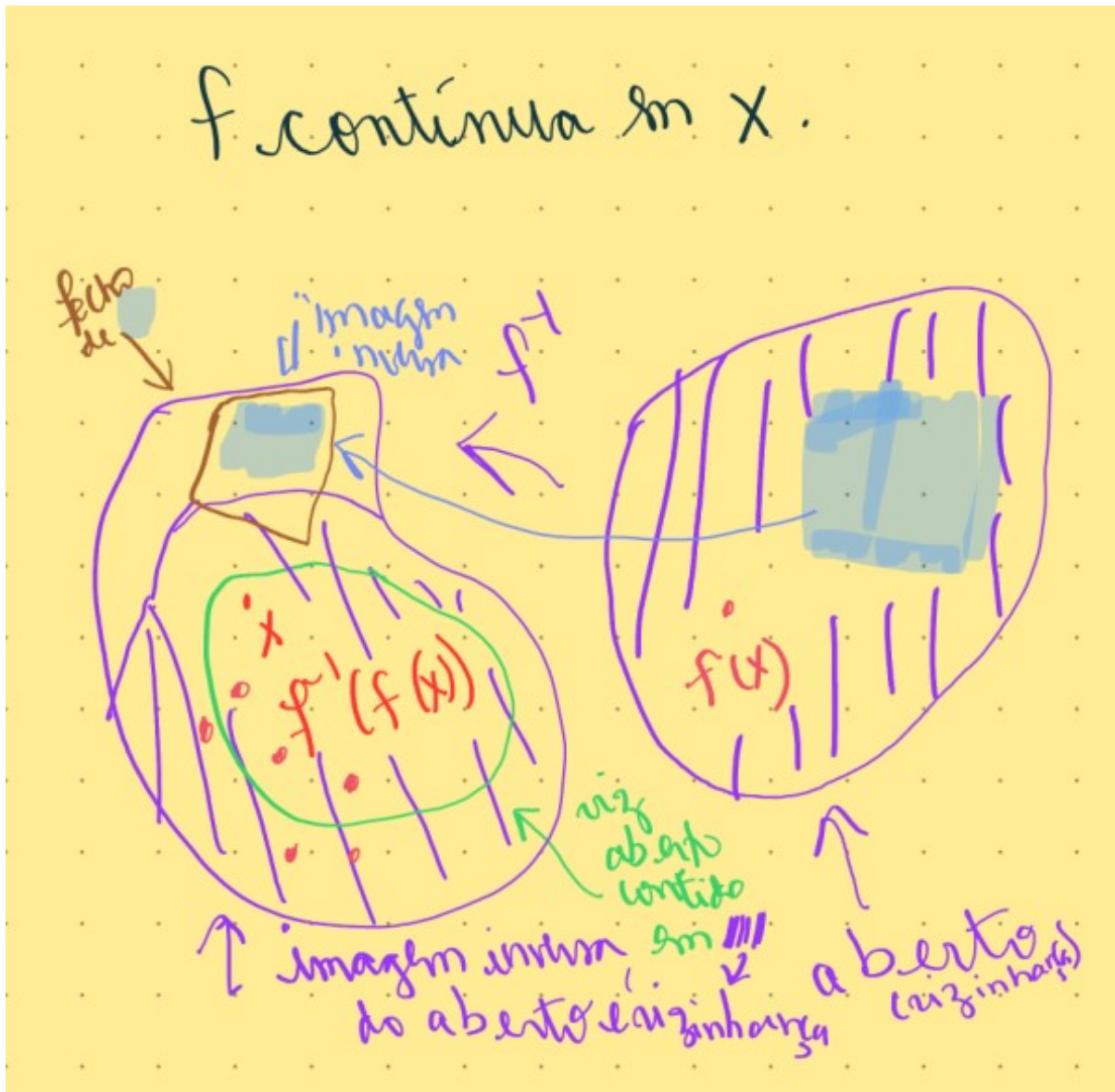


Figura 4.3: Suponha que  $f$  é contínua em  $x$  e assumo que  $f(x) \notin \overline{f[A]}$ .

(d)  $\rightarrow$  f)) Temos que  $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$  e  $f[A] \subseteq \overline{f[A]}$ , logo  $A \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$ . Por hipótese,  $f^{-1}[\overline{f[A]}}$  é fechado. Portanto,  $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}}$ .  $\square$

## 4.2 'É a mesma coisa do ponto de vista topológico'.

### 4.2.1 Homeomorfismos.

Como em outras estruturas matemáticas, estamos interessados nas propriedades do objeto e não no conjunto utilizado em si.

**Definição 4.5.** Dizemos que  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo se e somente se  $f$  é uma bijeção e  $f$  e  $f^{-1}$  são funções contínuas. Nesse caso, dizemos que  $X$  e  $Y$  são homeomorfos.

Note que para espaços vetoriais uma bijeção linear já implica que a função inversa é linear, mas no caso de continuidade, isto não é verdade.

**Exemplo 4.6.** Seja  $X$  o conjunto dos reais com a topologia discreta. Seja  $id$  a função identidade. Então  $id : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, mas  $id : \mathbb{R} \rightarrow X$  não é contínua.

*Demonstração.* Para ver que a primeira identidade é contínua basta notar que na topologia em  $X$  todo subconjunto é aberto. Para ver que a segunda identidade não é contínua em nenhum ponto  $x \in \mathbb{R}$ , basta notar que  $\{x\}$  é aberto em  $X$ , mas  $\{x\}$  não é aberta em  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Exemplo 4.7.** O  $\mathbb{R}$  e o intervalo  $] - 1, 1[$ , ambos com a topologia usual da ordem são homeomorfas usando  $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ .

Seja  $g(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $x > -1$ . Para  $x \geq 0$  temos que  $f(x) = g(x)$  e  $g'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ . Assim  $g'(x) = f'(x)$  para  $x > 0$  e o cálculo à direita da derivada de  $f$  no ponto zero concide com o cálculo da derivada de  $g$  no ponto 0.

Seja  $h(x) = \frac{x}{1-x}$  para  $x < 1$ . Para  $x \leq 0$  temos que  $f(x) = h(x)$  e  $h'(x) = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$ . Assim  $h'(x) = f'(x)$  para  $x < 0$  e o cálculo à direita da derivada de  $f$  no ponto zero concide com o cálculo da derivada de  $h$  no ponto 0.

Assim  $f'(x) = h'(x)$  para  $x \leq 0$  e  $f'(x) = g'(x)$  para  $x \geq 0$ . Portanto  $f$  é uma função contínua e crescente em  $\mathbb{R}$ , portanto a função é injetora. Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Assim,  $f$  é uma função bijetora. Pelo teorema da função inversa, a função inversa é contínua em cada ponto, logo  $f^{-1}$  é contínua.

## 4.2.2 Propriedade topológica.

**Definição 4.8.** Dizemos que  $\mathcal{P}$  é uma propriedade topológica se dados  $X$  e  $Y$  homeomorfos então  $X$  possui a propriedade  $\mathcal{P}$  se e somente se  $Y$  possui  $\mathcal{P}$ .

Assim, do ponto de vista das propriedades topológicas, dois espaços homeomorfos são a mesma coisa.

**Exemplo 4.9.** Cada um dos três axiomas de enumerabilidade são propriedades topológicas. Ser discreto é uma propriedade topológica. Não ter pontos isolados é uma propriedade topológica.

Ser metrizable (possuir uma métrica tal que a topologia seja gerada pela métrica) é uma propriedade topológica. Basta pegar o homeomorfismo e definir a métrica usando o homeomorfismo  $f : X \rightarrow Z$ , com  $d_Z(f(x), f(y)) := d_X(x, y)$ .

Ser um espaço ordenado também é uma propriedade topológica, também passando a ordem linear usando o homeomorfismo.

## 4.3 ‘Minha topologia tem mais abertos do que a sua’.

### 4.3.1 Topologias mais fina. Topologia menos fina.

Dadas duas topologias sobre o mesmo conjunto, podemos comparar as topologias por inclusão.

**Definição 4.10.** Sejam  $\tau_1$  e  $\tau_2$  duas topologias sobre um conjunto  $X$  não vazio.

Dizemos que  $\tau_1$  é mais fina (‘finer’ em inglês) do que  $\tau_2$  se  $\tau_1 \supseteq \tau_2$ . Neste caso, também dizemos que  $\tau_2$  é uma topologia menos fina (ou mais grossa - ‘coarser’ em inglês) do que  $\tau_1$ .

A topologia discreta no conjunto dos reais é mais fina que a topologia Euclidiana, ou a topologia Euclidiana é menos fina que a topologia discreta.

Podemos considerar também ao invés de duas topologias, uma família  $T$  de topologias em  $X$ .

**Definição 4.11.** Seja  $T$  uma família não vazia de topologias em  $X$ .

Dizemos que uma topologia  $\tau$  sobre  $X$  é mais fina que as topologias em  $T$  se  $\tau$  é mais fina que  $\tau'$  para toda  $\tau' \in T$ .

Dizemos uma topologia  $\tau$  sobre  $X$  é menos fina que as topologias em  $T$  se  $\tau$  é menos fina que  $\tau'$  para toda  $\tau' \in T$ .

**Exemplo 4.12.** A topologia discreta em  $X$  é a topologia mais fina entre as topologias em  $X$ .

A topologia caótica é a topologia menos fina dentre as topologias em  $X$ .

Podemos tentar encontrar topologia que ficam ‘mais próximas’ das topologias de uma família:

**Definição 4.13.** Seja  $T$  uma família não vazia de topologias em  $X$ .

Dizemos que uma topologia  $\tau$  sobre  $X$  é a topologia mais fina gerada por  $T$  se  $\tau$  é mais fina que  $T$  e se  $\tau^*$  é mais fina do que  $T$  então  $\tau^*$  é mais fina que  $\tau$ . Ou seja,  $\tau$  é a topologia menos fina dentre as topologias mais finas do que  $T$ .

Dizemos que uma topologia  $\tau$  sobre  $X$  é a topologia menos fina gerada por  $T$  se  $\tau$  é menos fina que  $T$  e se  $\tau^*$  é menos fina do que  $T$  então  $\tau^*$  é menos fina que  $\tau$ . Ou seja,  $\tau$  é a topologia mais fina dentre as topologias menos finas do que  $T$ .

Vamos verificar que a definição acima está bem definida.

**Lema 4.14.** Seja  $T$  uma família não vazia de topologias em  $X$ . Então a topologia gerada pela subbase  $\bigcup T$  é a topologia mais fina gerada por  $T$  e  $\bigcap T$  é a topologia menos fina gerada por  $T$ . *Note que, em geral, a união de topologias não é uma topologia.*

*Demonstração.* No primeiro caso,  $\mathcal{S} = \bigcup T$  é sub-base para uma topologia, pois,  $\bigcup \mathcal{S} = X$ . Considere a topologia  $\tau$  gerada pela subbase  $\mathcal{S}$ . Como  $\mathcal{S}$  contém cada topologia em  $T$ , temos que a topologia  $\tau$  é mais fina que  $T$ . Seja  $\tau^*$  uma topologia mais fina que  $T$ . Então temos que  $\tau^* \supseteq \bigcup T = \mathcal{S}$ . Como  $\tau^*$  é uma topologia, temos que  $\tau^* \supseteq \tau$ .

No segundo caso, vamos mostrar que  $\bigcap T$  é uma topologia. Como  $\emptyset$  e  $X$  estão em todas as topologias em  $T$  segue que  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\bigcap T$ . Se  $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \bigcap T$  então  $\mathcal{U} \subseteq \tau'$  para todo  $\tau' \in T$ . Assim,  $\bigcup \mathcal{U} \in \tau'$  para cada  $\tau' \in T$ . Com isto,  $\bigcup \mathcal{U} \in \bigcap T$ . Finalmente, se  $U, V \in \bigcap T$  então  $U, V \in \tau'$  para cada  $\tau' \in T$ . Então temos que  $U \cap V \in \tau'$  para cada  $\tau' \in T$ . Logo,  $U \cap V \in \bigcap T$ . Com isto,  $\bigcap T$  é uma topologia. Como  $\bigcap T$  é um subconjunto de cada topologia em  $T$ , segue que  $\bigcap T$  é menos fina do que  $T$ . Se  $\tau^*$  é uma topologia menos fina do que  $T$  então  $\tau^* \subseteq \bigcap T$ , logo  $\tau^*$  é menos fina do que  $\bigcap T$ .  $\square$

Assim, se  $f : X \rightarrow Y$  é uma bijeção contínua, podemos pensar que a topologia de  $Y$  pode ser passada para o conjunto  $X$  e teremos uma topologia menos fina do que a topologia em  $X$ .

### 4.3.2 Como comparar topologias usando Bases de Abertos.

Vamos agora usar bases para comparar quando duas topologias são homeomorfas por uma bijeção.

**Lema 4.15.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção entre dois espaços topológicos. Seja  $\mathcal{B}_X$  uma base de abertos de  $X$  e  $\mathcal{B}_Y$  uma base de abertos de  $Y$ . Então  $f$  é um homeomorfismo se e somente se

- 1) para cada  $x \in X$  e  $U \in \mathcal{B}_X$  tal que  $x \in U$ , existe  $V \in \mathcal{B}_Y$  tal que  $f(x) \in V \subseteq f[U]$  e
- 2) para cada  $y \in Y$  e  $O \in \mathcal{B}_Y$  tal que  $y \in O$ , existe  $W \in \mathcal{B}_X$  tal que  $f^{-1}(y) \in W \subseteq f^{-1}[O]$ .

*Demonstração.* Note que, como  $f$  é bijetora, a condição 1) equivale a  $f^{-1}$  contínua e a condição 2) equivale a  $f$  contínua.  $\square$

Quando  $f$  é a identidade, teremos:

**Corolário 4.16.** Seja  $\mathcal{B}_1$  uma base de abertos para uma topologia  $\tau_1$  em  $X$  e  $\mathcal{B}_2$  uma base de abertos para uma topologia  $\tau_2$  de  $X$ . Então  $\tau_1 = \tau_2$  se e somente se

- 1) para cada  $x \in X$  e  $U \in \mathcal{B}_1$  tal que  $x \in U$ , existe  $V \in \mathcal{B}_2$  tal que  $x \in V \subseteq U$  e
- 2) para cada  $y \in X$  e  $O \in \mathcal{B}_2$  tal que  $y \in O$ , existe  $W \in \mathcal{B}_1$  tal que  $y \in W \subseteq O$ .

Fica a cargo do leitor um resultado similar para sistemas fundamentais de vizinhanças

**Lema 4.17.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção entre dois espaços topológicos. Seja  $\mathcal{V}_X$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $X$  e  $\mathcal{V}_Y$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $Y$ . Então  $f$  é um homeomorfismo se e somente se

- 1) para cada  $x \in X$  e  $U \in \mathcal{V}_{X,x}$ , existe  $V \in \mathcal{V}_{Y,f(x)}$  tal que  $V \subseteq f[U]$  e
- 2) para cada  $y \in Y$  e  $O \in \mathcal{V}_{Y,y}$  existe  $W \in \mathcal{V}_{X,f^{-1}(y)}$  tal que  $W \subseteq f^{-1}[O]$ .

Quando  $f$  é a identidade, teremos:

**Corolário 4.18.** Seja  $\mathcal{V}_1$  um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia  $\tau_1$  em  $X$  e  $\mathcal{V}_2$  um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia  $\tau_2$  de  $X$ . Então  $\tau_1 = \tau_2$  se e somente se

- 1) para cada  $x \in X$  e  $U \in \mathcal{V}_{1,x}$ , existe  $V \in \mathcal{V}_{2,x}$  tal que  $V \subseteq U$  e
- 2) para cada  $y \in X$  e  $O \in \mathcal{V}_{2,y}$  existe  $W \in \mathcal{V}_{1,y}$  tal que  $W \subseteq O$ .

**Exercício 4.19.** Seja  $X$  um espaço métrico e para cada  $x \in X$  fixe  $\mathcal{V}_x$  uma sequência de bolas abertas centradas em  $x$  tal que seus raios convergem a 0. Então a topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças é a topologia gerada pela métrica.

**Exemplo 4.20.** As topologias geradas em  $\mathbb{R}^2$  pelas distâncias de  $X_1 = (x_1, y_1)$  a  $X_2 = (x_2, y_2)$  dadas por  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ,  $\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$  e  $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$  são as mesmas. As bolas da primeira são redondas, a da segunda são quadradas e da terceira são losangos centradas em um ponto  $x$  e cada uma dessas bolas contém bolas menores centradas em  $x$  dos três tipos (fica a cargo do leitor encontrar tais bolas encaixadas uma nas outras). Assim as topologias geradas pelas três são as mesmas.

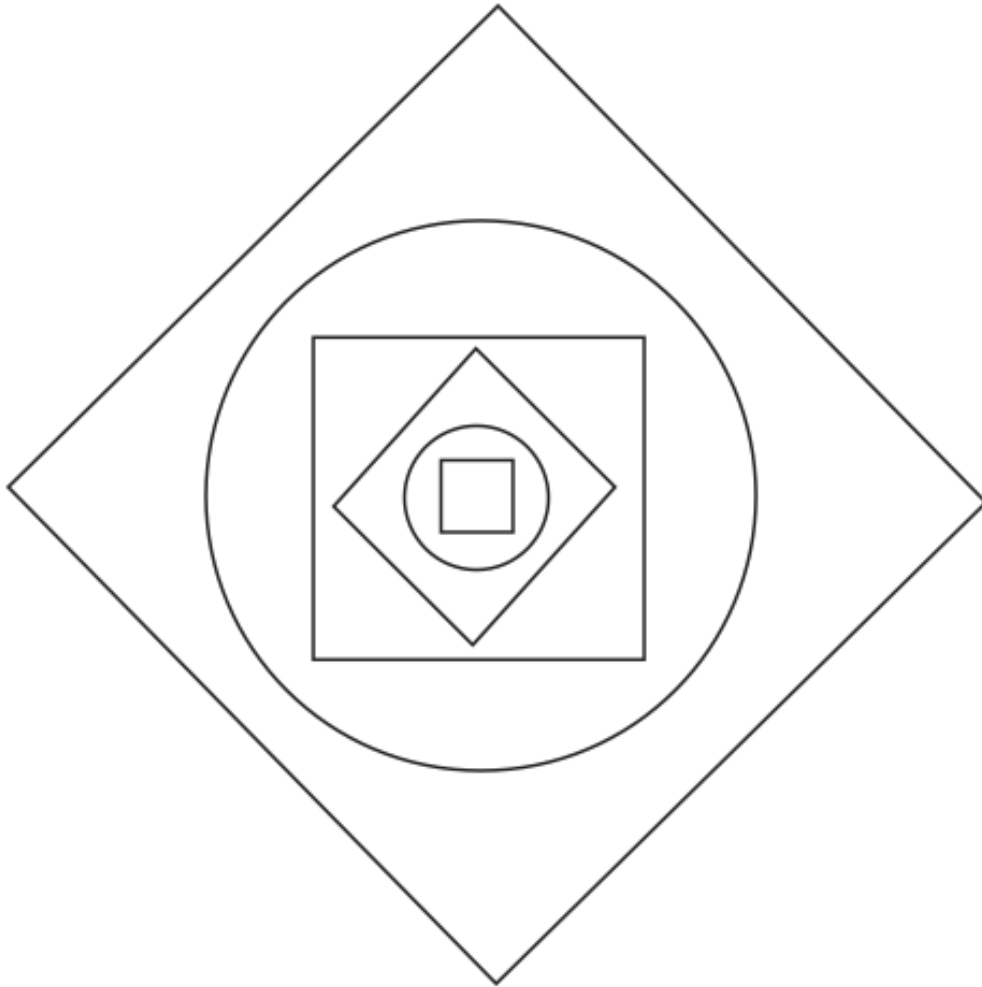


Figura 4.4: As bolas em três métricas que geram a mesma topologia em  $\mathbb{R}^2$ .

## Capítulo 5

# Topologia inicial. Convergência enumerável. Separação de pontos.

### 5.1 Imitando quem está na sua frente.

#### 5.1.1 Topologia gerada por funções contínuas. Topologia inicial.

Dada  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua, podemos considerar a topologia menos fina sobre  $X$  para a qual  $f$  seja contínua. Podemos começar com a topologia discreta em  $X$ , pois nela  $f$  é sempre contínua e tomar a topologia menos fina que torne  $f$  contínua.

Esta topologia pode ser a mesma que a topologia de  $X$  ou pode ser menos fina. Note que se  $f$  é uma bijeção então  $f$  será um homeomorfismo. Assim, a ideia é colocar uma topologia em  $X$  que se assemelhe mais à topologia de  $Y$  via o uso de  $f$ .

Podemos fazer o mesmo para uma família de funções.

**Definição 5.1.** Seja  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  uma família de funções  $f : X \rightarrow Y_f$ , onde  $\tau_f$  é a topologia de  $Y_f$ . A topologia gerada por  $\mathcal{F}$  é a topologia menos fina que torna todas as funções em  $\mathcal{F}$  contínuas.

Dada uma família  $f$  de funções como acima, dizemos que temos a topologia inicial de  $\mathcal{F}$  (ou seja, colocamos topologias no contradomínio para gerar uma topologia no domínio).

Veremos a seguir a topologia acima está bem definida.

**Teorema 5.2.** A topologia gerada por  $\mathcal{F}$  é a topologia gerada pela sub-base  $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\}$ . Se  $\mathcal{S}_f$  é uma sub-base de  $\tau_f$  então  $\mathcal{S} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{S}_f\}$  é uma sub-base que gera a topologia gerada por  $\mathcal{F}$ .

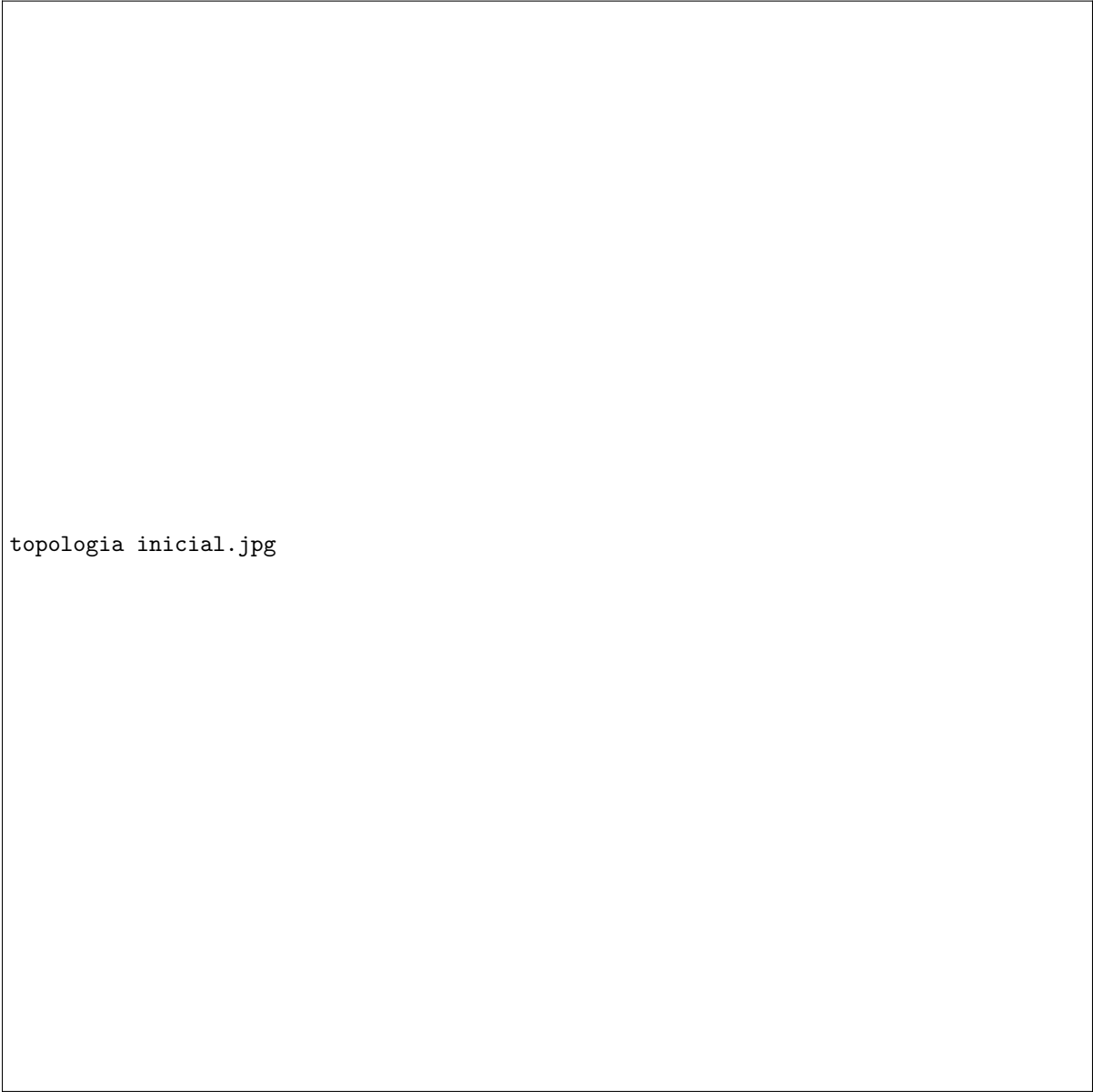
*Demonstração.* Seja  $\tau$  a topologia gerada pela sub-base  $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\}$ . Fixada  $g \in \mathcal{F}$  temos que  $g^{-1}[U] \in \tau$  para cada  $U \in \tau_g$ . Assim,  $g$  é contínua. Reciprocamente, seja  $\tau^*$  um topologia que torna  $f$  contínua para cada  $f \in \mathcal{F}$ . Então para cada  $U \in \tau_f$  temos que  $f^{-1}[U] \in \tau^*$ . Assim,  $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\} \subseteq \tau^*$ . Portanto,  $\tau \subseteq \tau^*$ . Portanto  $\tau$  é a topologia menos fina que torna todas as funções de  $\mathcal{F}$  contínuas. (*Note que isso não significa que apenas as funções em  $\mathcal{F}$  são contínuas*).

Vamos mostrar agora que  $\mathcal{S}$  é uma sub-base. Seja  $\tau'$  a topologia gerada pela sub-base  $\mathcal{S}$ . Como  $\mathcal{S}$  está contida na sub-base utilizada para gerar  $\tau$ , segue que  $\tau' \subseteq \tau$ . Para cada  $g \in \mathcal{F}$ , temos que  $g^{-1}[U] \in \mathcal{S} \subseteq \tau'$  para cada  $U \in \mathcal{S}_g$ . Como  $\mathcal{S}_g$  é uma sub-base de  $\tau_g$ , segue que  $g$  é contínua em  $\tau'$ . Logo  $\tau \subseteq \tau'$ . Assim temos que  $\tau = \tau'$ .  $\square$

Na prova acima, tomamos para cada  $f \in \mathcal{F}$  a topologia menos fina que torna  $f$  contínua e então a topologia menos fina que é mais fina do que cada uma dessas topologias.

Poderíamos considerar a família de todas as topologias que tornam as funções em  $\mathcal{F}$  contínuas (essa família de topologias é não vazia por conter a topologia discreta) e tomar a topologia menos fina gerada por essa família de topologias, mas isto seria daria menos informação sobre como podemos trabalhar com a topologia gerada por  $\mathcal{F}$ .

A topologia inicial gerada por funções facilita identificar a continuidade de uma função  $g : Z \rightarrow X$ .



topologia inicial.jpg

Figura 5.1: Abertos na topologia inicial.

**Teorema 5.3.** Seja  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  uma família de funções  $f : X \rightarrow Y_f$ , onde  $\tau_f$  é a topologia de  $Y_f$ . E seja  $X$  munida com a topologia inicial de  $\mathcal{F}$ .

Então  $g : Z \rightarrow X$  é contínua se e somente se  $f \circ g : Z \rightarrow Y_f$  é contínua para cada  $f \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ). Dado um aberto  $U$  em  $Y_f$ , temos que  $(f \circ g)^{-1}[U] = g^{-1}[f^{-1}[U]]$ . Como  $f$  é contínua segue que  $f^{-1}[U]$  é aberto em  $X$ . Como  $g$  é contínua, segue que  $g^{-1}[f^{-1}[U]]$  é aberto em  $Z$ .

( $\leftarrow$ ). Seja  $z \in Z$  e  $W$  um aberto de  $X$  contendo  $g(z)$ . Pela definição da topologia em  $X$ , existe  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  e  $U_i$  aberto em  $Y_{f_i}$  para  $1 \leq i \leq n$  tal que  $g(z) \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i] \subseteq W$ . Logo,  $f_i \circ g(z) \in U_i$  para  $1 \leq i \leq n$ . Como  $f_i \circ g$  é contínua, existe  $V_i \subseteq Z$  aberto contendo  $z$  tal que  $f_i \circ g[V_i] \subseteq U_i$  para  $1 \leq i \leq n$ . Então  $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$  é um aberto contendo  $z$  e  $V \subseteq V_i \subseteq (f_i \circ g)^{-1}[U_i] = g^{-1}[f_i^{-1}[U_i]]$  para  $1 \leq i \leq n$ . Portanto  $V \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} g^{-1}[f_i^{-1}[U_i]] = g^{-1}[\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i]] \subseteq g^{-1}[W]$ . Portanto  $g$  é contínua em  $z$ . Como  $z$  é arbitrário, segue que  $g$  é contínua em  $Z$ .  $\square$

Veremos exemplos disto daqui a algumas aulas. Em Análise Funcional, dado um espaço normado, a topologia inicial dos funcionais lineares contínuos é a topologia fraca.

## 5.2 Onde a convergência enumerável ainda dá conta do recado. Ou não.

### 5.2.1 Espaços de Fréchet. Espaços sequenciais.

Uma forma de generalizar a ideia da topologia para espaços mais gerais foi trabalhar com as sequências convergentes.

**Definição 5.4.** Dizemos que  $X$  é um espaço de Fréchet se para todo  $A \subseteq X$  e todo  $x \in \overline{A}$ , existe uma sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $A$  tal que a sequência converge para  $x$ .

Nos espaços de Fréchet, todos os pontos do fecho de  $A$  podem ser atingido a partir de uma sequência de  $A$

Uma segunda noção mais fraca é a noção de sequencial.

**Definição 5.5.** Um espaço  $X$  é sequencial se para todo conjunto  $A$  tal que  $A$  não é fechado, existe  $x \in \overline{A} \setminus A$  e  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $A$  tal que a sequência converge para  $x$ .

Note que no caso de sequencial, existe algum  $x$  e alguma sequência convergente a  $x$  que testemunha que um conjunto não é fechado. No caso de um espaço Fréchet, todo ponto  $x$  no fecho de  $A$  que não está em  $A$  possui uma sequência testemunhando isto.

### 5.2.2 Continuidade de funções em espaços sequenciais.

**Teorema 5.6.** Seja  $f : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  é um espaço sequencial. Então

$f$  é contínua em  $X$  se e somente se para todo  $x \in X$  e para toda sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $X$  convergente para  $x$  temos que  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $f(x)$ .

*Demonstração.* A ida vale para qualquer espaço topológico  $X$ , a sequencialidade é usada apenas na volta.

( $\rightarrow$ ). Tome  $x \in X$  e  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $X$  convergente para  $x$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $f(x)$ . Como  $f$  é contínua, segue que  $f^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $x$ . Pela convergência de  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  para  $x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in f^{-1}(V)$  para todo  $n \geq N$ . Assim,  $f(x_n) \in V$  para todo  $n \geq N$ . Portanto  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $f(x)$ .

( $\leftarrow$ ). Vamos supor por contradição que  $f$  não é contínua. Então por uma das equivalências de continuidade, existe um fechado  $F$  de  $Y$  tal que  $f^{-1}(F)$  não é fechado em  $X$ . Como  $X$  é sequencial, existe  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $f^{-1}(F)$  que converge para um ponto  $x \notin f^{-1}(F)$ . Por hipótese, temos que  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de  $F$  que converge para  $f(x)$ . Como  $F$  é um fechado, segue que  $f(x) \in F$ . Assim,  $x \in f^{-1}(F)$ , uma contradição.  $\square$

### 5.2.3 Continuidade local em espaços de Fréchet.

A propriedade de Fréchet pode ser usada para continuidade local:

**Teorema 5.7.** Seja  $f : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  é um espaço de Fréchet. Seja  $x \in X$ . Então

$f$  é contínua em  $x$  se e somente se para todo para toda sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $X$  convergente para  $x$  temos que  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $f(x)$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ). A prova vale para qualquer espaço topológico  $X$  e foi feita na ida do caso sequencial.

( $\leftarrow$ ). Seja  $A \subseteq X$  tal que  $x \in \overline{A}$ . Por uma das equivalências de continuidade local, basta mostrar que  $f(x) \in \overline{f[A]}$ . Como  $X$  é Fréchet, segue que existe uma sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $A$  convergente para  $x$ . Por hipótese,  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  em  $f[A]$  converge para  $f(x)$ . Assim,  $f(x) \in \overline{f[A]}$ . Como  $A$  é arbitrário, segue que  $f$  é contínua em  $x$ .  $\square$

Como discutido anteriormente, sequências convergentes são insuficientes para convergência de espaços topológicos. Assim, a ideia é trocar  $\mathbb{N}$  por um conjunto de índices mais geral. Aqui vamos apenas citar um exemplo usando o sistema fundamental de vizinhanças de um ponto como um conjunto de índices. O conjunto de índices deve ter alguma ordem. E nesta ordem, todos os índices devem 'ir' para uma mesma 'direção e sentido' (por exemplo, se indexarmos por  $\mathbb{Z}$  teríamos dois sentidos distintos e isso não daria um bom conjunto de índices para convergência.)



Figura 5.2: Espaços de Fréchet e espaços sequenciais.

#### 5.2.4 Um exemplo de convergência mais geral: rede.

**Exemplo 5.8.** Seja  $x$  um ponto de acumulação de um conjunto  $A$  e seja  $\mathcal{V}_x$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ . Vamos considerar em  $\mathcal{V}_x$  a order parcial do  $\subseteq$ . Por ser um sistema fundamental de vizinhanças, note que dado dois elementos quaisquer de  $\mathcal{V}_x$  existe um outro elemento que está abaixo de ambos (a direção e sentido seria ‘encolher cada vez mais em torno do ponto  $x$ ’)

Para cada  $W \in \mathcal{V}_x$ , tome  $x_W \in W$ . Vamos dizer que  $(x_W : W \in \mathcal{V}_x)$  converge se para cada  $U$  vizinhança de  $x$ , existe  $W^* \in \mathcal{V}_x$  tal que  $W \subseteq W^*$  então  $x_W \in U$ . Note que com essa indexação temos convergência: para cada  $U$  vizinhança de  $x$ , existe  $W^*$  tal que  $W^* \subseteq U$ . Então se  $W \subseteq W^*$  com  $W \in \mathcal{V}_x$ , temos  $x_W \in W \subseteq W^* \subseteq U$ .

*Note a similaridade desse tipo de escolha com o de seqüências quando temos um sistema enumerável de vizinhanças.*



### 5.2.5 Coming next...

Como vimos anteriormente, existem espaços topológicos em que as seqüências convergentes podem ter mais de um ponto de acumulação, algo que não ocorre em  $\mathbb{R}^n$ . Para que possamos tratar de espaços mais interessantes de forma geral, iremos introduzir os axioma de separação que exigem a existência de mais abertos. Porém ao colocar mais abertos, colocamos mais fechados e a relação entre pontos e fechados pode ser ‘estragada’ assim é necessário ter axiomas entre pontos e fechados. Os axioma de separação mais fortes garantem a relação entre pontos e fechados e de fechados com existência de um número maior de funções contínuas. Os axiomas de separação são propriedades topológicas. Iremos ir adotando os axiomas aos poucos com alguma motivação de uso ao invés de listar todos de uma vez. A seguir, introduzimos os axiomas que separam pontos.

Vimos anteriormente que seqüências convergentes podem ter mais de um limite. Vamos agora começar a adicionar condições sobre a topologia para que os limites de seqüências convergentes sejam únicos. Vimos também que seqüências são insuficientes para recuperar o fecho de um conjunto.

## 5.3 Separando pontos: Espaços $T_0$ , $T_1$ e Hausdorff ( $T_2$ ).

Se não conseguíssemos enxergar os pontos, mas apenas saber se eles estão ou não dentro dos abertos, teríamos que todos os pontos na topologia caótica não podem ser distinguidos. Alguns autores usam o termo  $U$  separa  $x$  de  $y$  se  $x \in U$  e  $y \notin U$ . No caso de  $T_0$  existe algum aberto que separa  $x$  de  $y$  ou separa  $y$  de  $x$ . No caso de um espaço  $T_1$  cada ponto é separado do outro por um aberto (veja Figura 5.3).

### 5.3.1 Espaços $T_0$ , $T_1$ e $T_2$ .

**Definição 5.9.** Veja Figura 5.3 Seja  $X$  um espaço topológico.

Dizemos que  $X$  é  $T_0$  se para todo par  $x, y \in X$  de pontos distintos existe um aberto  $U$  tal que  $(x \in U$  e  $y \notin U)$  ou  $(x \notin U$  e  $y \in U)$ .

Dizemos que  $X$  é  $T_1$  se para todo par  $x, y \in X$  de pontos distintos existe um aberto  $U$  tal que  $x \in U$  e  $y \notin U$ . (Note que invertendo a ordem temos um aberto  $V$  tal que  $y \in V$  e  $x \notin V$ ).

Note que se fixarmos uma base de abertos, as testemunham para  $T_0$  ou  $T_1$  podem ser tomadas nessa base.

**Lema 5.10.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{B}$  uma base de abertos.

$X$  é  $T_0$  se e somente se para todo par  $x, y \in X$  de pontos distintos existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $(x \in U$  e  $y \notin U)$  ou  $(x \notin U$  e  $y \in U)$ .

$X$  é  $T_1$  se para todo par  $x, y \in X$  de pontos distintos existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U$  e  $y \notin U$ .

**Exemplo 5.11.** O espaço caótico com dois ou mais pontos não é  $T_0$ .

O espaço gerado pela base  $\{]x, +\infty[: x \text{ é número real } \}$  é um espaço  $T_0$  que não é  $T_1$ .

**Proposição 5.12.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base de abertos e  $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ . Então  $X$  é  $T_0$  se e somente se  $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$  para todo par  $x, y \in X$  de pontos distintos.

*Demonstração.* Se  $x \neq y$  então podemos supor que existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U$  e  $y \notin U$  (trocando a ordem entre  $x$  e  $y$  caso contrário). Então  $U \in \mathcal{B}_x$  mas  $U \notin \mathcal{B}_y$ . Assim,  $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ .

Se  $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$  então existe  $U \in (\mathcal{B}_x \setminus \mathcal{B}_y) \cup (\mathcal{B}_y \setminus \mathcal{B}_x)$ . Vamos supor que  $U \in \mathcal{B}_y \setminus \mathcal{B}_x$ . Então  $y \in U$  e  $x \notin U$ . Caso  $U \in \mathcal{B}_x \setminus \mathcal{B}_y$  temos que  $x \in U$  e  $y \notin U$ . Portanto  $X$  é  $T_0$ .  $\square$

**Corolário 5.13.** Se  $X$  é um espaço  $T_0$  e  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos então existe uma função injetora de  $X$  em  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ .

*Demonstração.* Basta considerar a função  $X \ni x \mapsto \mathcal{B}_x \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ .  $\square$

Note que em particular, o tamanho de um espaço  $X$  que é  $T_0$  é limitado pelo tamanho das partes da sua topologia.

**Exemplo 5.14.** O espaço caótico pode ser arbitrariamente grande e o conjunto das partes da sua topologia tem quatro elementos.

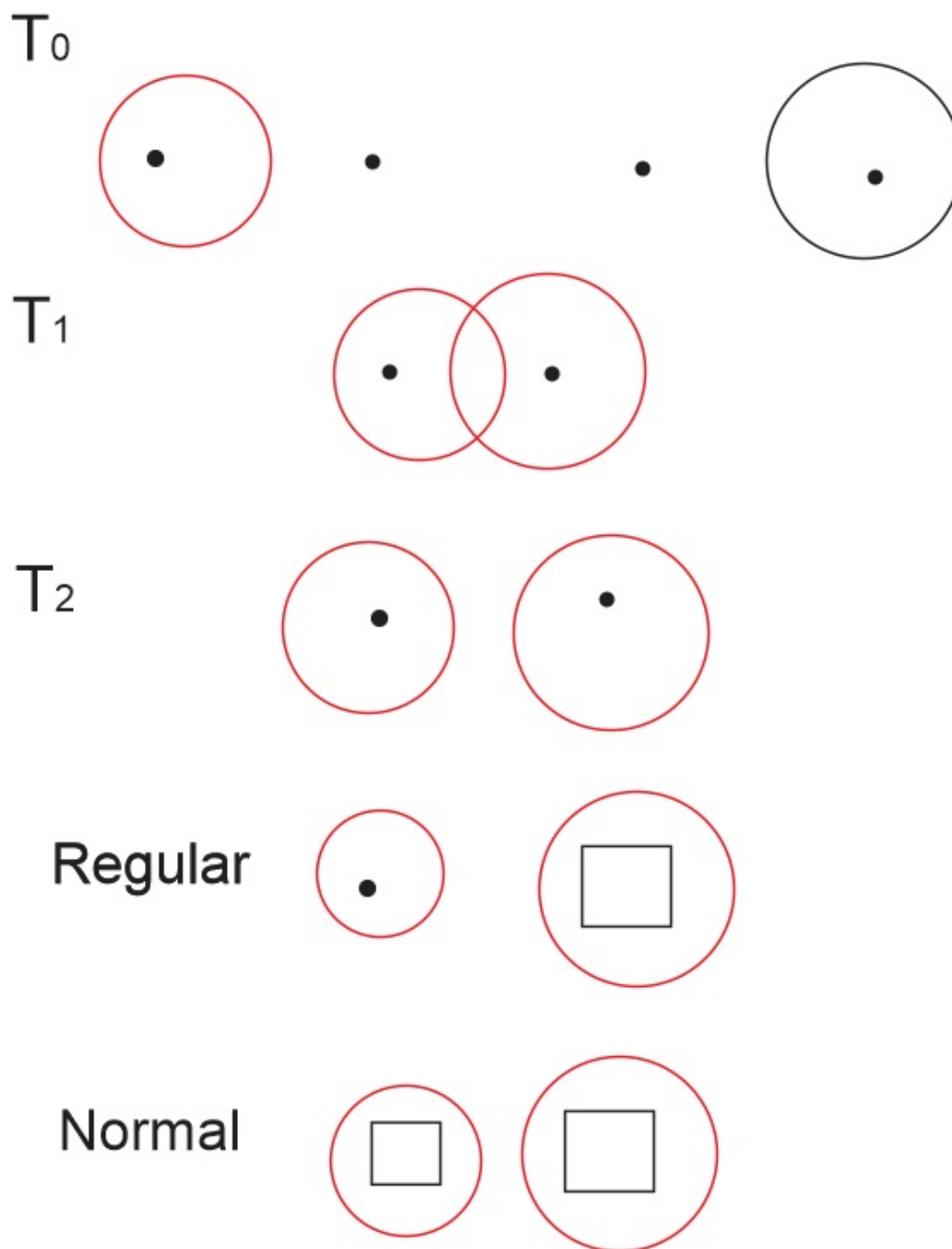
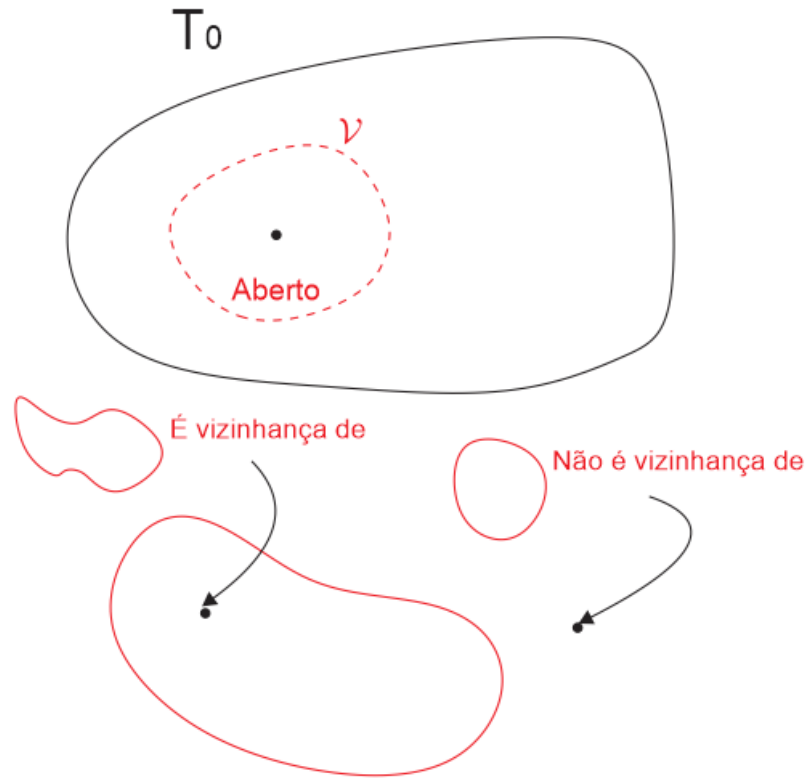


Figura 5.3: Separação de pontos.

**Proposição 5.15.** Um espaço  $X$  é  $T_0$  se e somente se  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$  para todo  $x, y \in X$  distintos.

*Demonstração.* Suponha que existe  $U$  aberto tal que  $x \in U$  e  $y \notin U$ . Então  $y \in X \setminus U$ , logo  $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U \not\ni x$ . Assim,  $x \notin \overline{\{y\}}$ . Como  $x \in \overline{\{x\}}$ , segue que  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ . Se  $y$  pode ser separado de  $x$  por um aberto, temos uma situação similar. Assim, se  $X$  é  $T_0$  temos que existe um aberto que separa um dos dois pontos do outro e assim  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ .

Figura 5.4: Equivalência de espaços  $T_0$ .

Se  $x \in \overline{\{y\}}$  então  $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ . Similarmente se  $y \in \overline{\{x\}}$  então  $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ . Assim, se  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$  então ou  $x \notin \overline{\{y\}}$  ou  $y \notin \overline{\{x\}}$ . No primeiro caso, temos que  $X \setminus \overline{\{y\}}$  separa  $x$  de  $y$  e no segundo caso, temos que  $X \setminus \overline{\{x\}}$  separa  $y$  de  $x$ . Assim,  $X$  é  $T_0$ .  $\square$

**Proposição 5.16.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{V}_x$  um sistema de vizinhanças de  $x$  para cada  $x \in X$ .

São equivalentes:

- 1)  $X$  é um espaço  $T_1$
- 2)  $\{x\}$  é um conjunto fechado para todo  $x \in X$ .
- 3)  $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$ .

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)). Suponhamos que  $X$  é  $T_1$ . Seja  $x \in X$ . Para cada  $y \in X$  distinto de  $x$ , existe um aberto  $U_y$  tal que  $x \notin U_y$  e  $y \in U_y$ . Assim  $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$  é um conjunto aberto. Logo  $\{x\}$  é um fechado.

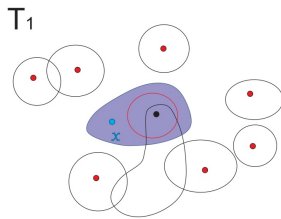
(2)  $\rightarrow$  3)). Assuma 2). Se  $x$  e  $y$  são pontos distintos de  $X$  então  $\{y\}$  é fechado, então  $U_y = X \setminus \{y\}$  é um aberto tal que  $x \in U_y$  e  $y \notin U_y$ . Como  $\mathcal{V}_x$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ , temos que existe  $W_y \in \mathcal{V}_x$  tal que  $W_y \subseteq U_y$ . Portanto  $x \in \bigcap \mathcal{V}_x \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} W_y \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y = \{x\}$ . Portanto  $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$ .

(3)  $\rightarrow$  1)). Assuma 3) e sejam  $x, y$  pontos distintos de  $X$ . Como  $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$ , segue que existe  $U \in \mathcal{V}_x$  tal que  $y \notin U$ . Como  $U \in \mathcal{V}_x$ , segue que  $x \in U$ . Logo  $X$  é  $T_1$ .  $\square$

Abaixo vemos que um espaço  $T_1$  pode ser sequências que convergem para muitos pontos.

**Exemplo 5.17.** Seja  $X$  um espaço infinito com a topologia co-finita. Então se a sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência injetora em  $X$  então a sequência converge para  $x$ , para todo  $x \in X$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e  $V$  uma vizinhança aberta de  $x$ . Então  $X \setminus V$  é finito. Como  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é injetora, existe  $N$  tal que  $x_n \notin X \setminus V$  para todo  $n \geq N$ . Como  $V$  é uma vizinhança aberta arbitrária, segue que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $x$ .  $\square$

Figura 5.5: Equivalência de espaços  $T_1$ .

Assim, para que tenhamos limite único precisamos de axiomas de separação em que os abertos não separem apenas os pontos, mas que separem os pontos ‘no entorno do outro ponto’.

**Definição 5.18.** Dizemos que um espaço topológico  $X$  é  $T_2$  ou Hausdorff se para cada par  $x, y$  de pontos distintos de  $X$  existe  $U, V$  abertos tais que  $x \in U, y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

**Exemplo 5.19.** O espaço  $X$  com  $X$  não enumerável com a topologia co-enumerável é um espaço  $T_1$  que não é  $T_2$ .

### 5.3.2 ‘Este aberto é pequeno demais para dois limites’: Espaços Hausdorff.

**Lema 5.20.** Seja  $X$  um espaço topológico,  $\mathcal{B}$  uma base de abertos e  $\mathcal{V}_x$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$  para cada  $x \in X$ . São equivalentes:

- 1)  $X$  é Hausdorff.
- 2) para cada  $x, y \in X$  distintos existem  $U, V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U, y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .
- 3) para cada  $x \in X$  o conjunto  $\bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$ .

*Demonstração.* A condição 1)  $\leftrightarrow$  2) é trivial de um lado e usa o fato de ser base do outro.

(1)  $\rightarrow$  3)). Fixe  $x$  e tome  $y \in X$  distinto de  $x$ . Então existem abertos  $W$  e  $V$  tais que  $x \in W$  e  $y \in V$  com  $W \cap V = \emptyset$ . Como  $\mathcal{V}_x$  é um sistema fundamental de vizinhanças, existe  $U \in \mathcal{V}_x$  tal que  $U \subseteq W$ . Logo  $U \subseteq X \setminus V$ . Portanto,  $\bar{U} \cap V = \emptyset$ . Logo,  $y \notin \bar{U}$ . Assim  $\bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$ .

(3)  $\rightarrow$  1)). Sejam  $x$  e  $y$  distintos em  $X$ . Por hipótese, existe  $W \in \mathcal{V}_x$  tal que  $y \notin \bar{W}$ . Como  $W$  é vizinhança de  $x$ , tome  $U$  aberto tal que  $x \in U \subseteq W$  e  $V = X \setminus \bar{W}$ . Então  $x \in U, y \in V$  e  $U \cap V \subseteq W \cap X \setminus \bar{W} = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 5.21.** Seja  $X$  um espaço topológico  $T_2$ . Então uma sequência convergente possui um único limite.

*Demonstração.* Suponha que  $x$  e  $y$  são limites de  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ . Suponhamos que  $x$  e  $y$  são distintos, então existem  $U$  e  $V$  abertos disjuntos tais que  $x \in U$  e  $y \in V$ . Existe  $n_x$  e  $n_y$  tais que  $x_n \in U$  para todo  $n \geq n_x$  e  $x_n \in V$  para todo  $n \geq n_y$ . Tomando  $n > \max\{n_x, n_y\}$  temos que  $x_n \in U \cap V$ , contradizendo que  $U \cap V = \emptyset$ . Assim,  $x = y$  e o limite é único.  $\square$

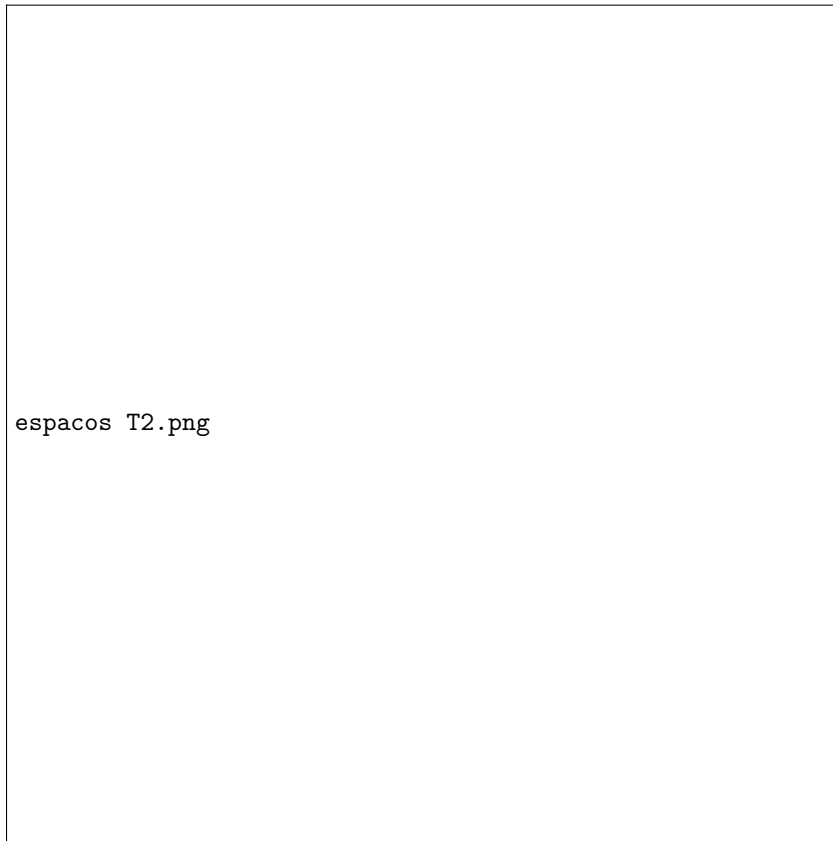
*Apenas por curiosidade, existe um axioma da separação para espaços em que toda sequência possui um único limite, chamado de  $T_{1\frac{1}{2}}$ .*

### 5.3.3 Comparando duas funções contínuas em espaços Hausdorff.

Vamos terminar esta secção com um último resultado relacionando a importância da propriedade de Hausdorff em questões de continuidade.

**Teorema 5.22.** Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  funções contínuas tais que  $Y$  é Hausdorff. Seja  $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$  é um subconjunto fechado de  $X$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $X \setminus E$  é um conjunto aberto. Seja  $y \in X \setminus E$ . Então  $f(y) \neq g(y)$ . Como  $Y$  é Hausdorff, existem  $U$  e  $V$  abertos disjuntos tais que  $f(y) \in U, g(y) \in V$ . Como  $f$  e  $g$  são contínuas, segue que  $f^{-1}(U)$  e  $g^{-1}(V)$  são vizinhanças abertas de  $y$ . Então  $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$  é uma vizinhança aberta de  $y$ . Se  $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$  então  $f(x) \in U$  e  $g(x) \in V$ . Como  $U \cap V = \emptyset$ , segue que  $f(x) \neq g(x)$ . Logo  $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X \setminus E$ . Portanto  $X \setminus E$  é aberto e  $E$  é fechado.  $\square$

Figura 5.6: Equivalência de espaços  $T_2$  ou Hausdorff.

**Corolário 5.23.** Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  funções contínuas, onde  $X$  é um espaço topológico arbitrário e  $Y$  é um espaço topológico Hausdorff. Se existe um denso  $D$  de  $X$  tal que  $f(x) = g(x)$  para cada  $x \in D$  então  $f = g$ .

**Exercício 5.24.** Se  $F \subseteq X$  finito e  $X$  é Hausdorff então existem abertos  $\{U_x : x \in F\}$  dois a dois disjuntos tais que  $x \in U_x$  para cada  $x \in F$ .



Figura 5.7: Sequências em espaços Haudorff tem no máximo um limite.

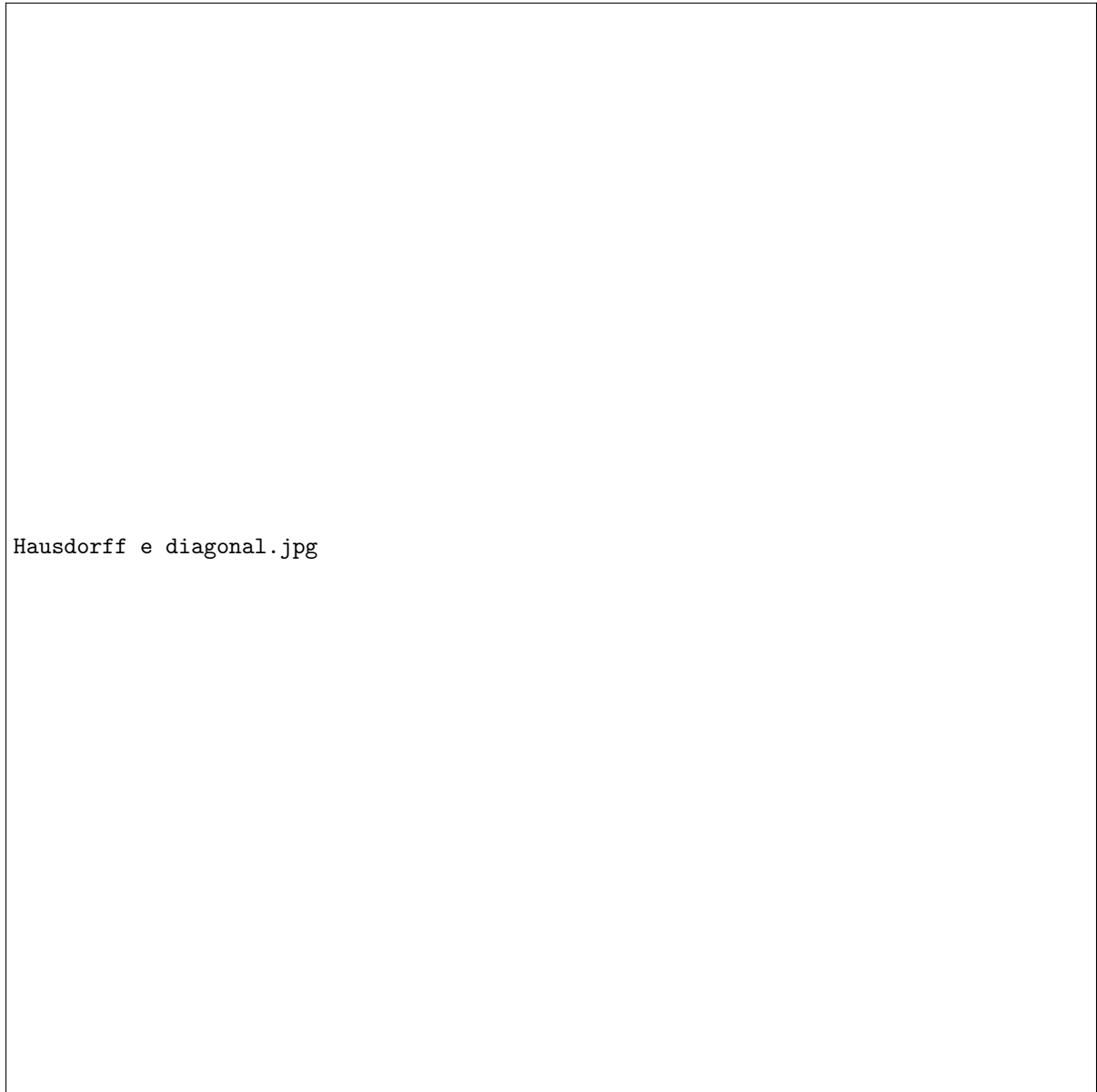


Figura 5.8:  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  é fechado para  $Y$  Hausdorff.

# Capítulo 6

## Filtros. Interior. Topologias geradas por Fecho e Interior.

### 6.1 Filtros

#### 6.1.1 Definição de Filtros.

Dado um conjunto  $A$  e um ponto de acumulação de  $x$  podemos tentar capturar esta informação usando a intersecção de  $A$  com as vizinhança de  $x$ . Podemos pensar nisso também quando temos um ‘buraco’ no espaço e usar abertos para identificar o buraco, esta é a noção intuitiva que queremos capturar com o filtro.

A convergência de um filtro pode ser pensados como se estivéssemos dando um ‘zoom’ num conjunto, onde nossas ‘lentes’ são os abertos.

**Definição 6.1.** Seja  $\mathcal{F}$  uma família não vazia de subconjuntos de  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  é um filtro de conjuntos se

- 1)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .
- 2) se  $A \subseteq B \subseteq X$  e  $A \in \mathcal{F}$  então  $B \in \mathcal{F}$ .
- 3) se  $A, B \in \mathcal{F}$  então  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .

Note que o filtro depende apenas do conjunto  $X$ .

**Exemplo 6.2.** Dado um conjunto infinito  $X$ , temos que  $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}$  é um filtro.

Dado  $a \in X$  o conjunto  $\{A \subseteq X : a \in A\}$  é um filtro. Dizemos que esse é o filtro principal gerado por  $a$ .

A família de todas as vizinhanças de um ponto  $x \in X$  formam um filtro.

A família de todos os conjuntos que contém um aberto denso de  $X$  formam um filtro (intersecção finita de abertos densos é um aberto denso).

Em geral, vemos os elementos de um filtro como elementos grandes (este termo faz bastante sentido quando se pensa, por exemplo, nos conjuntos de medida 1 dentro do intervalo  $[0, 1]$ .) O maior elemento do filtro sobre  $X$  é o próprio  $X$  e pensamos que os elementos menores do filtro contém informação mais relevante.

A noção dual de filtro de conjuntos é o ideal (por exemplo, o ideal dos conjuntos de medida nula, é um  $\sigma$ -ideal), mas para convergência em espaços topológicos o dual são as redes, que definiremos em outra aula.

Podemos ver um filtro como um conjunto parcialmente ordenado por  $\subseteq$  e considerar ponto de acumulação e limite de uma família indexada de conjuntos  $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ .

**Definição 6.3.** Um ponto de acumulação  $x$  de uma família de conjuntos indexado pelo filtro  $\mathcal{F}$  se para toda vizinhança  $U$  de  $x$  e todo  $F \in \mathcal{F}$  existe  $F' \in \mathcal{F}$  tal que  $F' \subseteq F$  e  $A_{F'} \cap U \neq \emptyset$  para cada  $G \subseteq F'$  com  $G \in \mathcal{F}$ .

Um ponto  $x$  é limite de uma família de conjuntos indexado pelo filtro  $\mathcal{F}$  se para toda vizinhança  $U$  de  $x$  e existe  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $A_G \subseteq U$  para cada  $G \subseteq F$  com  $G \in \mathcal{F}$ .



Vamos agora relacionar filtros ao espaço topológico. Após a definição iremos relacionar com a noção de convergência acima.

**Definição 6.4.** Seja  $X$  um espaço topológico,  $x \in X$  e  $\mathcal{F}$  um filtro sobre  $X$ .

Dizemos que  $x$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$  se  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \bar{A}$ .

Dizemos que  $x$  é um limite de  $\mathcal{F}$  se todas as vizinhanças de  $x$  pertencem a  $\mathcal{F}$ .

Podemos pensar que os elementos dos filtro são os seus próprios índices e considerar convergência de conjuntos.

**Lema 6.5.** Um ponto  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$  se e somente se  $x$  é ponto de acumulação da família indexada  $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ , onde  $A_F = F$  para todo  $F \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* Temos que  $x \in \bar{F}$  se e somente se  $F \cap U \neq \emptyset$  para cada  $F \in \mathcal{F}$  e  $U$  vizinhança de  $x$  se e somente se  $A_F \cap U \neq \emptyset$  para cada  $F \in \mathcal{F}$ . Para a ida, se  $x$  é ponto de acumulação de  $x$ , temos que  $A_F \cap U \neq \emptyset$  para cada  $U$  vizinhança de  $x$  e  $F \in \mathcal{F}$ . Assim,  $x$  é ponto de acumulação de  $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ . Para a volta, se  $F \in \mathcal{F}$  e  $U$  vizinhança de  $x$ , existe  $F' \subseteq F$  com  $F' \subseteq U$  tal que  $A_{F'} \cap U \neq \emptyset$  para cada  $G \subseteq F'$  com  $G \in \mathcal{F}$ . Em particular, temos que  $\emptyset \neq A_{F'} \cap U = F' \cap U \subseteq F \cap U$ . Assim, temos que  $x \in \bar{F}$ . Como  $F$  é um elemento arbitrário de  $\mathcal{F}$ , segue que  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Lema 6.6.** Um ponto  $x$  é limite de  $\mathcal{F}$  se e somente se  $x$  é limite da família indexada  $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ , onde  $A_F = F$  para todo  $F \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* Para a ida, seja  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Como  $\mathcal{F}$  converge para  $x$ , temos que  $U \in \mathcal{F}$ . Assim, para todo  $F \subseteq U$  com  $F \in \mathcal{F}$ , temos que  $A_F = F \subseteq U$ . Assim, temos que  $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$  converge para  $x$ . Para a volta, seja  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Como  $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$  converge para  $x$ , existe  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $A_G \subseteq U$  para todo  $G \subseteq F$  com  $G \in \mathcal{F}$ . Em particular temos que  $F = A_F \subseteq U$ . Como  $\mathcal{F}$  é filtro e  $F \subseteq U$ , segue que  $U \in \mathcal{F}$ . Assim,  $x$  é limite do filtro  $\mathcal{F}$ .  $\square$

### 6.1.2 Ponto de acumulação e convergência de filtros.

**Lema 6.7.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{F}$  um filtro sobre  $X$ . Se  $x \in X$  é um limite de  $\mathcal{F}$  então  $x$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ .

*Demonstração.* Para isto, basta mostrarmos que  $x \in \bar{A}$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ . Fixado,  $A \in \mathcal{F}$ , isto é equivalente a mostrar que  $U \cap A \neq \emptyset$  para todo  $U$  vizinhança de  $x$ . Por hipótese,  $U \in \mathcal{F}$ , portanto  $U \cap A \in \mathcal{F}$ . Pela definição de filtro, temos que os elementos de  $\mathcal{F}$  são não vazios. Logo  $U \cap A \neq \emptyset$  portanto  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Lema 6.8.** Seja  $X$  um espaço Hausdorff e  $\mathcal{F}$  um filtro convergente. Então o limite de  $\mathcal{F}$  é único. Reciprocamente, se todos os filtros convergentes tem limite único então o espaço é Hausdorff.

*Demonstração.* Se  $\mathcal{F}$  converge para  $x$  e  $y$  com  $x \neq y$  então  $\mathcal{F}$  contém todas as vizinhanças abertas de  $x$  e de  $y$ . Em particular contém uma vizinhança  $U$  de  $x$  e uma vizinhança  $V$  de  $y$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ , o que não é possível, pois  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .

Seja  $X$  um espaço que não é Hausdorff e sejam  $x$  e  $y$  dois pontos que testemunham este fato. Considere o conjunto  $\mathcal{C} = \{U : U \text{ é vizinhança de } x \text{ ou de } y\}$ . Dada uma família finita não vazia  $\mathcal{C}'$  de elementos de  $\mathcal{C}$ , o conjunto  $\bigcap \mathcal{C}'$  contém  $U \cap V$ , onde  $U$  é vizinhança aberta de  $x$  e  $V$  é vizinhança aberta de  $y$ . Assim,  $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$ . Portanto  $\mathcal{C}$  é uma base para um filtro  $\mathcal{F}$ . Claramente  $\mathcal{F}$  converge para  $x$  e para  $y$ .  $\square$

Como na construção de topologias, em muitos casos é mais conveniente usar uma família que gera o filtro.

**Definição 6.9.** Dizemos que uma família não vazia  $\mathcal{C}$  tem a propriedade de intersecção finita (PIF) se para toda família finita não vazia  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  temos  $\mathcal{C}' \neq \emptyset$ .

Note que todo filtro tem PIF.

**Definição 6.10.** Dado uma família  $\mathcal{C}$  de  $X$  com PIF, dizemos que o filtro gerado por  $\mathcal{C}$  é a família  $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \exists \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \text{ tal que } \mathcal{C}' \text{ é finito e não vazio e } \bigcap \mathcal{C}' \subseteq A\}$ .

**Lema 6.11.** O filtro gerado acima é de fato um filtro.

*Demonstração.* Temos que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$  então  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ .

- 1)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ , pois cada elemento de  $\mathcal{F}$  contém algum  $\bigcap \mathcal{C}'$  e  $\bigcap \mathcal{C}'$  é não vazio.
- 2) Dado  $A \subseteq B$  com  $A \in \mathcal{F}$ , a testemunha de que  $A \in \mathcal{F}$  também testemunha que  $B \in \mathcal{F}$ .
- 3) Se  $A, B \in \mathcal{F}$  então existem  $\mathcal{C}_A$  e  $\mathcal{C}_B$  tal que  $\bigcap \mathcal{C}_A \subseteq A$  e  $\bigcap \mathcal{C}_B \subseteq B$ . Assim,  $\bigcap (\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B) \subseteq A \cap B$  e portanto  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .  $\square$

### 6.1.3 Bases de filtros. Extensão de filtro.

**Definição 6.12.** Dizemos que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$  é uma sub-base para o filtro  $\mathcal{F}$  se  $\mathcal{F}$  é o filtro gerado por  $\mathcal{C}$ . Dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma base para o filtro  $\mathcal{F}$  se é uma sub-base tal que para cada  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ , existe  $F \in \mathcal{C}$  tal que  $F \subseteq \bigcap \mathcal{C}'$ .

Note que se  $\mathcal{C}$  é base para um filtro  $\mathcal{F}$ , então  $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \exists \mathcal{C} \in \mathcal{C} \text{ tal que } \mathcal{C} \subseteq F\}$ .

Dizemos que uma família  $\mathcal{C}$  é fechada por intersecções finitas se  $\bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$  para todo subconjunto finito  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ . Claramente uma sub-base fechada por intersecções finitas é uma base, assim, a noção de sub-base de filtro lembra a noção de sub-base de abertos.

**Definição 6.13.** Dizemos que um filtro  $\mathcal{G}$  estende o filtro  $\mathcal{F}$  se  $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$

As extensões de um filtro em termos de convergência correspondem às subsequências.

**Proposição 6.14.** Se  $\mathcal{F}$  possui  $x$  como ponto de acumulação então existe um filtro  $\mathcal{G}$  estendendo  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{G}$  converge para  $x$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{V}_x$  todas as vizinhanças de  $x$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \mathcal{V}_x$ . Usando o fato de que  $x$  é ponto de acumulação  $\mathcal{F}$  e que todos os elementos de  $\mathcal{V}_x$  são vizinhanças de  $x$ , temos que  $\mathcal{C}$  tem PIF (verifique). Seja  $\mathcal{G}$  o filtro gerado por  $\mathcal{C}$ . Claramente  $\mathcal{G}$  estende  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  converge para  $x$ .  $\square$

A prova do seguinte fato é deixada ao leitor.

**Proposição 6.15.** Seja  $\mathcal{C}$  uma base para um filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $X$ , onde  $X$  é um espaço topológico. Então  $x$  é ponto de acumulação de  $x$  se e somente se  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} \bar{A}$ .

**Lema 6.16.** Dado um filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  e uma função  $f : X \rightarrow Y$ , vamos denotar por  $f[\mathcal{F}]$  o conjunto  $\{f[A] : A \in \mathcal{F}\}$ . O conjunto  $f[\mathcal{F}]$  tem PIF.

### 6.1.4 Filtros e continuidade.

**Teorema 6.17.** Seja  $x \in X$  e  $f : X \rightarrow Y$ . São equivalentes:

- a)  $f$  é contínua em  $x$ .
- b) para todo filtro  $\mathcal{F}$ , se  $\mathcal{F}$  acumula em  $x$  então o filtro gerado por  $f[\mathcal{F}]$  acumula em  $f(x)$ .
- c) para todo filtro  $\mathcal{F}$ , se  $\mathcal{F}$  converge para  $x$  então o filtro gerado por  $f[\mathcal{F}]$  converge para  $f(x)$ .

*Demonstração.* (a)  $\rightarrow$  b). Dado  $A \in \mathcal{F}$ , temos que  $x \in \bar{A}$ , por uma das equivalências de continuidade, segue que  $f(x) \in \overline{f[A]}$ . Pela proposição deixada como exercício, segue que  $f(x)$  é ponto de acumulação do filtro gerado por  $f[\mathcal{F}]$ .

(a)  $\leftarrow$  b)) Dado  $A$  tal que  $x \in \bar{A}$ , considere o filtro  $\mathcal{F}$  gerado por  $\{A\}$ . Então por hipótese temos que  $f(x) \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} \overline{f[C]}$ . Em particular, temos que  $f(x) \in \overline{f[A]}$ .

(a)  $\rightarrow$  c)). Seja  $\mathcal{F}$  um filtro que converge para  $x$ . Se  $V$  é uma vizinhança de  $f(x)$ , temos pela continuidade de  $f$  em  $x$  que existe  $U$  vizinhança de  $x$  tal que  $f[U] \subseteq V$ . Como  $\mathcal{F}$  converge para  $x$ , temos que  $U \in \mathcal{F}$ . Assim,  $V$  é um elemento do filtro gerado por  $f[\mathcal{F}]$ . Portanto o filtro gerado por  $f[\mathcal{F}]$  converge para  $f(x)$ .

(c)  $\rightarrow$  b)) Seja  $\mathcal{F}$  um filtro que acumula em  $x$ . Então existe um filtro  $\mathcal{G}$  estendendo  $\mathcal{F}$  que converge para  $x$ . Por hipótese, o filtro gerado por  $f[\mathcal{G}]$  converge para  $f(x)$ . Portanto o filtro gerado por  $f[\mathcal{G}]$  acumula em  $f(x)$ . Como  $f[\mathcal{G}] \supseteq f[\mathcal{F}]$ , segue que  $f(x) \in \bigcap_{A \in \mathcal{G}} \overline{f[A]} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{f[A]}$ .

Portanto  $f(x)$  é um ponto de acumulação do filtro gerado por  $f[\mathcal{F}]$ .  $\square$

## 6.2 'O aberto dentro de você'.

### 6.2.1 Definição de Interior.

Já vimos a definição de fecho.

**Definição 6.18.** Dado um espaço topológico  $X$  e  $A \subseteq X$  o interior de  $A$ , denotado por  $\overset{\circ}{A}$  ou  $Int(A)$  é o maior aberto contido em  $A$ .

Vamos mostrar que o interior está bem definido.

**Lema 6.19.** Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todos os abertos contidos em  $A$ . Então  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  e  $\overset{\circ}{A} = \bigcup \mathcal{A}$ .

*Demonstração.* O conjunto  $\mathcal{A}$  contém  $\emptyset$ , assim  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Como  $\mathcal{A}$  é uma família de abertos contidos em  $A$  segue que  $\bigcup \mathcal{A}$  é um aberto com  $\bigcup \mathcal{A} \subseteq A$ . Dado  $U$  um aberto contido em  $A$ , temos que  $U \in \mathcal{A}$ . Então  $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ . Assim,  $\bigcup \mathcal{A} = \overset{\circ}{A}$ .  $\square$

O interior simplifica a tomada do aberto que testemunha que um conjunto é vizinhança de um ponto.

**Lema 6.20.** Um conjunto  $V$  é vizinhança de  $x$  se e somente se  $x \in \overset{\circ}{V}$ .

*Demonstração.* Se  $V$  é uma vizinhança de  $x$ , então existe um aberto  $U$  tal que  $x \in U \subseteq V$ . Pela definição de interior, segue que  $U \subseteq \overset{\circ}{V}$ . Portanto  $x \in \overset{\circ}{V}$ .

Reciprocamente, se  $x \in \overset{\circ}{V}$ , temos que  $\overset{\circ}{V}$  é um aberto contido em  $V$ . Assim,  $V$  é vizinhança de  $x$ .  $\square$

Já vimos como utilizar bases de abertos, base de fechados e sistemas fundamentais de vizinhanças abertas para construir topologias, iremos agora mencionar também como obter topologias usando operadores fecho e interior.

## 6.3 Fecho vs Interior.

O lema seguinte mostra a relação entre tomar interior e fecho sucessivamente:

**Lema 6.21.**  $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$  para todo subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$ .

*Demonstração.*  $\overline{\overset{\circ}{A}} \supseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$  e portanto  $\overline{\overset{\circ}{A}} \supseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$ . Por outro lado,  $\overset{\circ}{\overline{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$ , portanto,  $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$ . Assim,  $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$ .  $\square$

Assim como fechados e abertos são relacionados por complementares, o fecho e o interior também o são. Por motivos de visualização vamos usar a notação alternativa de fecho e interior.

**Teorema 6.22.**  $Int(A) = X \setminus Cl(X \setminus A)$  e  $Cl(A) = X \setminus Int(X \setminus A)$  para todo subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$ .

*Demonstração.* Temos que  $Int(A) \subseteq A$ . Assim,  $X \setminus Int(A) \supseteq X \setminus A$ . Como  $Int(A)$  é aberto, segue que  $X \setminus Int(A)$  é um fechado, logo  $X \setminus Int(A) \supseteq Cl(X \setminus A)$ . Usando novamente De Morgan, temos que  $Int(A) \subseteq X \setminus Cl(X \setminus A)$ . Para verificar a recíproca,  $Cl(X \setminus A) \supseteq X \setminus A$ . Usando De Morgan, temos que  $X \setminus Cl(X \setminus A) \subseteq X \setminus (X \setminus A) \subseteq A$ . Como  $X \setminus Cl(X \setminus A)$  é um aberto contido em  $A$ , segue que  $X \setminus Cl(X \setminus A) \subseteq Int(A)$ . Com isto,  $Int(A) = X \setminus Cl(X \setminus A)$ .

Pelo primeiro ítem temos que  $Int(B) = X \setminus Cl(X \setminus B)$  para todo subconjunto  $B$  de  $X$ . Tomando  $B = X \setminus A$ , teremos  $Int(X \setminus A) = X \setminus Cl(X \setminus (X \setminus A)) = X \setminus Cl(A)$ . Por De Morgan, temos  $X \setminus Int(X \setminus A) = Cl(A)$ .  $\square$

**Corolário 6.23.**  $\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$  para todo subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$ .

*Demonstração.* Já vimos que  $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$ . Substituindo  $A$  por  $X \setminus A$ , temos que

$\overline{\overline{\overset{\circ}{X \setminus A}}} = \overline{\overset{\circ}{\overline{X \setminus A}}}$ , para todo subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$ . Usando a relação de fecho e interior com complementos, temos  $\overline{\overline{\overset{\circ}{X \setminus A}}} = \overline{\overset{\circ}{\overline{X \setminus A}}} = Int(X \setminus \overset{\circ}{\overline{A}}) = X \setminus \overline{\overset{\circ}{A}}$ .

Similarmente, temos que  $\overline{\overline{\overset{\circ}{X \setminus A}}} = X \setminus \overline{\overset{\circ}{A}}$ . Assim, segue que  $\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ .  $\square$

## 6.4 Topologias geradas pelos Operadores Fecho e Interior.

Vamos agora descrever as propriedades de operador fecho e o operador interior para definirmos uma topologia.

**Teorema 6.24.** Dado um espaço topológico, o operador fecho tem as seguintes propriedades:

- OF1)  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .
- OF2)  $A \subseteq \overline{A}$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .
- OF3)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ , para todos os subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$ .
- OF4)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .

*Demonstração.* O vazio é fechado, assim o seu fecho é o vazio. O fecho de  $A$  contém  $A$ . O fecho de  $A$  é um fechado e o fecho de um fechado é ele próprio. Assim OF1), OF2) e OF4) estão satisfeitas.

Para OF3),  $\overline{A \cup B}$  é um fechado contendo  $A \cup B$ , assim  $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}$ . Por outro lado,  $A \subseteq \overline{A \cup B}$  e  $\overline{A \cup B}$  é fechado, assim  $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ . Analogamente,  $B \subseteq \overline{A \cup B}$  e  $\overline{A \cup B}$  é fechado, assim  $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ . Portanto,  $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ . Portanto  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$   $\square$

**Teorema 6.25.** Seja  $\phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  um operador tal que

- OF1)  $\phi(\emptyset) = \emptyset$ .
- OF2)  $A \subseteq \phi(A)$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .
- OF3)  $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$ , para todos os subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$ .
- OF4)  $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .

Então existe uma topologia tal que  $\phi$  é o operador fecho desta topologia. Diremos que esta é a topologia gerada pelo operador fecho  $\phi$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{C} = \{F \subseteq X : \phi(F) = F\}$ . Vamos mostrar que  $\mathcal{C}$  é uma base para fechados para uma topologia. De fato,  $\emptyset \in \mathcal{C}$  e se  $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$  então  $\phi(F_1 \cup F_2) = \phi(F_1) \cup \phi(F_2) = F_1 \cup F_2$ . Assim,  $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$ .

Seja  $\tau$  a topologia gerada pela base de fechados  $\mathcal{C}$ . Então  $\mathcal{C}$  é uma base de fechados para  $\tau$ . Vamos verificar que  $\mathcal{C}$  é o conjunto de todos os fechados. Por OF1) temos que  $\emptyset \in \mathcal{C}$ . Por OF2) temos que  $X \subseteq \phi(X) \subseteq X$ . Assim,  $X \in \mathcal{C}$ . Já vimos acima que a união de dois elementos de  $\mathcal{C}$  pertence a  $\mathcal{C}$ . Falta mostrar que se  $\emptyset \neq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  então  $\bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$ . Para isto, temos que verificar que  $\phi(\bigcap \mathcal{C}') = \bigcap \mathcal{C}'$ . Por OF2), temos que  $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \supseteq \bigcap \mathcal{C}'$ . Para mostrar a outra inclusão, tome  $F \in \mathcal{C}'$ . Então  $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \subseteq \phi(\bigcap \mathcal{C}') \cup \phi(F) = \phi((\bigcap \mathcal{C}') \cup F) = \phi(F) = F$ . Como vale para todo  $F \in \mathcal{C}'$ , segue que  $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \subseteq \bigcap \mathcal{C}'$ . Assim,  $\mathcal{C}$  são todos os fechados da topologia  $\tau$ . Seja  $\overline{A}$  o fecho de  $A$  na topologia  $\tau$ .

Pela definição de  $\mathcal{C}$  e pelo fato dela ser a família de todos os fechados de  $\tau$ , temos que  $\phi(F) = F = \overline{F}$  para todo  $F \in \mathcal{C}$ . Tome agora  $A$  um subconjunto arbitrário de  $X$ .

Por OF4),  $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$ , assim, pela definição de  $\mathcal{C}$ , temos que  $\phi(A) \in \mathcal{C}$  com  $A \subseteq \phi(A)$ . Assim, pela definição de fecho temos  $\overline{A} \subseteq \phi(A)$ . Por outro lado  $\phi(A) \subseteq \phi(A) \cup \phi(\overline{A}) = \phi(A \cup \overline{A}) = \phi(\overline{A}) = \overline{A}$ , por OF2) e pelo fato que  $\overline{A} \in \mathcal{C}$ . Assim  $\phi(A) = \overline{A}$  para todo  $A$  e  $\phi$  é o fecho de  $A$  na topologia  $\tau$ .  $\square$

**Exemplo 6.26.** Dizemos que um conjunto  $A$  é sequencialmente fechado se os limites de todas as seqüência convergente em  $A$  estão em  $A$ . Como vimos anteriormente, se um espaço é sequencial, então um conjunto sequencialmente fechado é um fechado. O fecho de um conjunto é sequencialmente fechado. Podemos tomar a intersecção de todos os sequencialmente fechados que contém um conjunto  $A$  e definir o fecho sequencial de  $A$ .

O fecho sequencial satisfaz as propriedades OF1)-OF4) e a topologia gerada pelo fecho sequencial é mais fina que a topologia original (será estritamente mais fina se o espaço original não for sequencial).

Se começarmos com um espaço em que as seqüências convergentes são apenas as eventualmente constantes, então todo conjunto é fechado na topologia gerada pelo fecho sequencial. Assim, a topologia associada ao fecho sequencial neste caso é discreta.

Agora iremos descrever o operador interior:

**Teorema 6.27.** Dado um espaço topológico, o operador interior tem as seguintes propriedades:

- OI1)  $\overset{\circ}{X} = X$ .
- OI2)  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .
- OI3)  $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ , para todos os subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$ .
- OI4)  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .

*Demonstração.* Fica a cargo do leitor verificar essa relação usando a definição de interior.

As relações acima podem também ser verificadas usando complementos:

Como  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ , segue que  $\overset{\circ}{X} = \text{Int}(X \setminus \emptyset) = X \setminus \overline{\emptyset} = X \setminus \emptyset = X$ .

Como  $X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$ , segue que  $A = X \setminus (X \setminus A) \supseteq X \setminus \overline{X \setminus A} = \text{Int}(X \setminus (X \setminus A)) = \overset{\circ}{A}$

De  $\overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = \overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}$  segue que  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))) = X \setminus (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) = X \setminus (\overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B}) = (X \setminus \overline{X \setminus A}) \cap (X \setminus \overline{X \setminus B}) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

De  $\overline{\overline{X \setminus A}} = \overline{X \setminus A}$ , segue que  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \text{Int}(\text{Int}(A)) = X \setminus \overline{X \setminus \text{Int}(A)} = X \setminus \overline{\overline{X \setminus A}} = X \setminus \overline{X \setminus A} = \overset{\circ}{A}$ .  $\square$

Agora veremos como definir uma topologia usando um operador interior.

**Teorema 6.28.** Seja  $\psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  um operador tal que

OI1)  $\psi(X) = X$ .

OI2)  $\psi(A) \subseteq A$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .

OI3)  $\psi(A \cap B) = \psi(A) \cap \psi(B)$ , para todos os subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$ .

OI4)  $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$ , para todo subconjunto  $A$  de  $X$ .

Então existe uma topologia tal que  $\psi$  é o operador interior desta topologia. Diremos que esta é a topologia gerada pelo operador interior  $\psi$ .

*Demonstração.* Podemos definir um operador fecho para uma topologia usando  $\phi(A) = X \setminus \psi(X \setminus A)$ . As propriedades de operador fecho para  $\phi$  seguem do uso da complementação e das propriedades de  $\psi$ . Tome a topologia gerada por  $\phi$  (em que  $\phi$  será o operador fecho). Usando complementares, teremos que  $\psi$  será o operador interior desta topologia.  $\square$

# Capítulo 7

## Redes e Subredes. Redes vs Filtros.

### 7.1 ‘Sai $\mathbb{N}$ e entra Conjuntos Dirigidos’: Redes.

#### 7.1.1 Definição de Conjunto Dirigido.

Como comentado anteriormente, para definir uma rede, temos que fixar um conjunto de índices com algum tipo de ordem. No exemplo que vimos anteriormente usamos o conjunto de vizinhanças de um ponto com a ordem da inclusão. Comparada ao caso abaixo, temos que  $U \leq V$  se e somente se  $U \supseteq V$ .

**Definição 7.1.** Um conjunto  $\Sigma$  com uma ordem  $\leq$  é um conjunto dirigido se

- a)  $\sigma \leq \sigma$  para todo  $\sigma \in \Sigma$ ,
- b)  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  e  $\sigma_2 \leq \sigma_3$  então  $\sigma_1 \leq \sigma_3$ , para todo  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3 \in \Sigma$ .
- c) para cada par  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$  existe  $\sigma$  tal que  $\sigma_1 \leq \sigma$  e  $\sigma_2 \leq \sigma$ .

*Pelo tipo de situação que aparece ao construir redes, é preferível permitir que existam  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  em  $\Sigma$  tais que  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  e  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ .*

#### 7.1.2 Definição de Rede. Ponto de Acumulação e Convergência.

**Definição 7.2.** Uma rede em um conjunto  $X$  é uma função de domínio  $\Sigma$  tal que  $x_\sigma \in X$  para cada  $\sigma \in \Sigma$ .

O ponto de acumulação e o limite de uma rede são similares às noções para sequências.

**Definição 7.3.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  uma rede em  $X$ .

Dizemos que  $x$  é um ponto de acumulação de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  se para toda vizinhança  $U$  de  $x$  e todo  $\sigma^* \in \Sigma$ , existe  $\sigma \geq \sigma^*$  tal que  $x_\sigma \in U$ . *Comumente, dizemos que a rede está frequentemente em  $U$ .*

Dizemos que  $x$  é um ponto limite de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  se para toda vizinhança  $U$  de  $x$  existe  $\sigma^* \in \Sigma$  tal que para  $\sigma \geq \sigma^*$  temos  $x_\sigma \in U$ . *Comumente, dizemos que a rede está eventualmente em  $U$ .*

**Lema 7.4.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  uma rede. Se  $x \in X$  é um limite de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  então  $x$  é um ponto de acumulação de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ .

*Demonstração.* Para isto, seja  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Então existe  $\sigma'$  tal que  $x_\sigma \in U$  para todo  $\sigma \geq \sigma'$ . Dado  $\sigma^* \in \Sigma$ , existe  $\sigma \geq \sigma'$  e  $\sigma \geq \sigma^*$ . Então  $x_\sigma \in U$  com  $\sigma \geq \sigma^*$ . Logo  $x$  é ponto de acumulação da rede.  $\square$

**Lema 7.5.** Seja  $X$  um espaço Hausdorff e  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  uma rede convergente. Então o limite de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  é único. Reciprocamente, se todas as redes convergentes tem limite único então o espaço é Hausdorff.

*Demonstração.* Se  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  converge para  $x$  e  $y$  com  $x \neq y$ . Fixe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e uma vizinhança  $V$  de  $y$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ , então existe  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  em  $\Sigma$  tal que  $x_\sigma \in U$  para todo  $\sigma \geq \sigma_x$  e  $x_\sigma \in V$  para todo  $\sigma \geq \sigma_y$ . Como  $\Sigma$  é dirigido, segue que existe  $\sigma' \in \Sigma$  tal que  $\sigma' \geq \sigma_x$  e  $\sigma' \geq \sigma_y$ . Então  $x_{\sigma'} \in U \cap V$ , uma contradição.

Se  $x, y$  testemunham que  $X$  não é Hausdorff, seja  $\mathcal{V}_x$  e  $\mathcal{V}_y$  sistemas fundamentais de vizinhanças de  $x$  e  $y$  respectivamente. Seja  $\Sigma = \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_y$  com a ordem  $(U', V') \geq (U, V)$  se  $U' \subseteq U$  e  $V' \subseteq V$ . O

conjunto  $\Sigma$  é dirigido. Para cada  $(U, V) \in \Sigma$ , fixe  $x_{(U, V)} \in (U \cap V)$ . Então  $x$  e  $y$  são limites da rede  $\{x_{(U, V)} : (U, V) \in \Sigma\}$ .  $\square$

## 7.2 O exemplo que deu origem à ~~série~~ rede.

### 7.2.1 Formalização do limite da integral de Riemann usando redes.

A definição de Rede foi motivada como uma ferramenta para formalizar um conceito de limite para a integral de Riemann.

**Exemplo 7.6.** Dado um intervalo fechado e limitado  $[a, b]$  uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $\Sigma$  o conjunto dos  $\sigma = \langle P_\sigma, C_\sigma \rangle$ , onde  $P_\sigma = \{a = t_0 \leq \dots \leq t_{n_\sigma} = b\}$  uma partição de  $[a, b]$  e  $C_\sigma = \{c_1, \dots, c_{n_\sigma}\}$  tal que  $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$  para todo  $1 \leq i \leq n_\sigma$ . Diremos que  $\sigma \leq_\Sigma \sigma^*$  se  $P_\sigma \subseteq P_{\sigma^*}$ . O conjunto  $\Sigma$  é dirigido.

Considere  $x_\sigma = \sum_{1 \leq i \leq n_\sigma} f(c_i)(t_i - t_{i-1})$ . Então dizemos que  $f$  é Riemann integrável se existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que a rede  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  converge para  $L$ .

Neste caso, dizemos que  $\int_a^b f(x)dx = L$ .

## 7.3 ‘O ‘Jr’ da rede, pode ficar maior que a rede, mas segue seus passos’.

### 7.3.1 Subredes.

A noção de subrede é menos intuitiva o que de subsequência. Se considerarmos uma sequência como rede, uma subrede não precisa ser uma sequência, nem precisa estar enumerada por um conjunto dirigido enumerável. O principal da subrede é que ela segue os ‘passos’ da rede, apenas ‘pisa’ (pontos do espaço) por onde a rede já passou e segue as direções por onde a rede passou (cofinalidade).

**Definição 7.7.** Sejam  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  dois conjuntos dirigidos e seja  $r : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ .

Dizemos que  $r$  preserva ordem se  $\sigma_1 \leq_\Sigma \sigma_2$  implica que  $r(\sigma_1) \leq_{\tilde{\Sigma}} r(\sigma_2)$ .

Dizemos que  $\Sigma$  é cofinal em  $\tilde{\Sigma}$  pela  $r$  se para todo  $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$ , existe  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $\tilde{\sigma} \leq_{\tilde{\Sigma}} r(\sigma)$ .

**Exemplo 7.8.** Seja  $\Sigma$  os subconjuntos finitos não vazios de  $\mathbb{N}$  com a ordem  $\subseteq$ . Então  $\Sigma$  é um conjunto dirigido. Considere  $\mathbb{N}$  com a ordem usual dos naturais. Então  $\mathbb{N}$  também é um conjunto dirigido. Tome  $r : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$  da pelo máximo de  $F$ . Então  $r$  preserva ordem e é cofinal.

**Definição 7.9.** Dizemos que  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  é uma subrede de  $\{y_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}\}$  se existe  $r : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  que preserva ordem e é cofinal e tal que  $x_\sigma = y_{r(\sigma)}$ .

**Exemplo 7.10.** Uma subsequência  $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$  é uma subrede usando  $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  com  $r(k) = n_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Se denotarmos uma subsequência como  $\{x_n : k \in A\}$  então ela é uma subrede usando  $r : A \rightarrow \mathbb{N}$  com  $r(n) = n$  para todo  $n \in A$ .

### 7.3.2 Rede vs sua Subrede.

**Proposição 7.11.** Dada uma rede que possui  $x$  como ponto de acumulação existe uma subrede que possui  $x$  como limite.

*Demonstração.* Tome  $\mathcal{V}_x$  uma base local de  $x$ . Se  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  possui  $x$  como ponto de acumulação então seja  $\Gamma = \{(\sigma, U) \in \Sigma \times \mathcal{V}_x \text{ tal que } x_\sigma \in U\}$ . Teremos que usar o fato que a rede acumula em  $x$  para provar que  $\Gamma$  é um conjunto dirigido. Por ser um subconjunto do dirigido  $\Sigma \times \mathcal{V}_x$  basta ver que  $\Gamma$  é um conjunto cofinal de  $\Sigma \times \mathcal{V}_x$ . De fato, se  $(\sigma, U) \in \Sigma \times \mathcal{V}_x$ , existe  $\sigma^* \geq \sigma$  tal que  $x_{\sigma^*} \in U$ . Assim  $(\sigma^*, U) \in \Gamma$  com  $(\sigma, U) \leq (\sigma^*, U)$ .

Defina  $r : \Gamma \rightarrow \Sigma$  como  $r(\sigma, U) = \sigma$ . Temos que  $r$  preserva ordem e  $r$  é cofinal, usando o fato que  $\Gamma$  é cofinal em  $\Sigma \times \mathcal{V}_x$ .

Defina  $x_{(\sigma, U)} = x_\sigma$  para cada  $(\sigma, U) \in \Gamma$  (pois  $r(\sigma, U) = \sigma$ ). Então  $\{x_{(\sigma, U)} : (\sigma, U) \in \Gamma\}$  é uma subrede. Vamos mostrar que esta subrede converge para  $x$ . De fato, seja  $W$  uma vizinhança de  $x$ . Então existe  $U \in \mathcal{V}_x$  tal que  $U \subseteq W$ . Fixe  $\sigma^*$  tal que  $x_{\sigma^*} \in U$ .

Então  $(\sigma^*, U) \in \Gamma$  e se  $(\sigma, V) \geq (\sigma^*, U)$  com  $(\sigma, V) \in \Gamma$  então  $x_{(\sigma, V)} \in V \subseteq U \subseteq W$ . Como  $W$  é uma vizinhança arbitrária de  $x$ , segue que a subrede converge para  $x$ .  $\square$

**Proposição 7.12.** Seja  $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  uma rede e  $G = \{y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  uma subrede de  $S$ . Se  $x$  é ponto de acumulação de  $G$  então  $x$  é ponto de acumulação de  $S$ .

*Demonstração.* Seja  $r : \Gamma \rightarrow \Sigma$  a testemunha que  $G$  é subrede de  $S$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$  e  $\sigma^* \in \Sigma$ . Como  $r$  é cofinal, existe  $\gamma^* \in \Gamma$  tal que  $r(\gamma^*) \geq \sigma^*$ . Como  $x$  é ponto de acumulação de  $G$  e  $U$  é vizinhança de  $x$ , existe  $\gamma \geq \gamma^*$  tal que  $y_\gamma \in U$ . Então  $x_{r(\gamma)} \in U$  com  $r(\gamma) \geq r(\gamma^*) \geq \sigma^*$  (pois  $r$  preserva ordem). Então para  $\sigma = r(\gamma)$  temos  $x_\sigma \in U$  com  $\sigma \geq \sigma^*$ . Portanto  $S$  acumula em  $x$ .  $\square$

### 7.3.3 Continuidade e Redes.

A continuidade da  $f$  usando redes parece visualmente mais natural do que usando filtros:

**Teorema 7.13.** Seja  $x \in X$  e  $f : X \rightarrow Y$ . São equivalentes:

- a)  $f$  é contínua em  $x$ .
- b) para toda rede  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ , se  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  acumula em  $x$  então a rede  $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$  acumula em  $f(x)$ .
- c) para toda rede  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ , se  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  converge para  $x$  então a rede  $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$  converge para  $f(x)$ .

*Demonstração.* (a)  $\rightarrow$  c). Seja  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  uma rede que converge para  $x$ . Vamos mostrar que  $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$  converge para  $f(x)$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $f(x)$ . Pela continuidade de  $f$  em  $x$ , segue que  $f^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $x$ . Logo, existe  $\sigma^* \in \Sigma$  tal que  $x_\sigma \in f^{-1}(V)$  para todo  $\sigma \geq \sigma^*$ . Portanto,  $f(x_\sigma) \in V$  para todo  $\sigma \geq \sigma^*$ . Como  $V$  é uma vizinhança arbitrária de  $f(x)$ , segue que  $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$  converge para  $f(x)$ .

(c)  $\rightarrow$  b). Seja  $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  uma rede que acumula em  $x$ . Então existe uma subrede  $G = \{y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  que converge para  $x$ . Por hipótese, a rede  $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$  converge para  $f(x)$ . Em particular,  $f(x)$  é ponto de acumulação de  $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ .

A  $r$  que testemunha que  $G$  é subrede de  $S$  também testemunha que  $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$  é subrede de  $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ , pois  $f(y_\gamma) = f(x_{r(\gamma)})$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $f(x)$  é ponto de acumulação da subrede  $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ , segue que  $f(x)$  é ponto de acumulação da rede  $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ .

(b)  $\rightarrow$  a). Suponhamos que  $f$  não é contínua em  $x$ . Então existe  $V$  uma vizinhança de  $f(x)$  tal que  $f^{-1}(V)$  não é vizinhança de  $x$ . Seja  $\mathcal{V}_x$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$  com a ordem  $U \geq V$  se e somente se  $U \subseteq V$ . Então  $\mathcal{V}_x$  é um conjunto dirigido. Para cada  $U \in \mathcal{V}_x$ , fixe  $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$  (o conjunto é não vazio por hipótese). Como visto anteriormente, temos que  $\{x_U : U \in \mathcal{V}_x\}$  é uma rede convergente para  $x$ . Em particular, esta rede acumula em  $x$ . Porém  $f(x_U) \notin V$ , para todo  $U \in \mathcal{V}_x$  (pois  $x_U \notin f^{-1}(V)$ ). Assim  $x$  não é ponto de acumulação de  $\{f(x_U) : U \in \mathcal{V}_x\}$ .  $\square$

## 7.4 Dualidade de Redes e Filtros.

Existe uma forma de passar de um filtro para uma rede e vice versa. Ela não ‘devolve’ a mesma coisa se começarmos de um rede para o filtro e do filtro para a rede, mas no caso de começar com uma rede com certa ‘cara’ para convergência/ponto de acumulação vamos encontrar um filtro com a mesma ‘cara’ e retornar para uma outra rede que tem a mesma ‘cara, mas que pode ser diferente. Então a dualidade é sobre ‘as propriedades do objeto’ e não o objeto em si.

### 7.4.1 De redes para filtros.

**Lema 7.14.** Dada uma rede  $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ , o conjunto  $\{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} : \sigma^* \in \Sigma\}$  tem PIF e é base para um filtro.

*Demonstração.* Dado um número finito de elementos de  $\{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} : \sigma^* \in \Sigma\}$ , estas vão estar associadas a um conjunto finito  $\Sigma'$  de  $\Sigma$ . Como  $\Sigma$  é dirigido, existe  $\sigma'$  tal que  $\sigma' \geq \sigma$  para cada  $\sigma \in \Sigma'$ . Então a intersecção contém  $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma'\}$ .  $\square$

Usando o fato acima, podemos definir um filtro associado a uma rede:

**Definição 7.15.** Dada uma rede  $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ , o filtro dual de  $S$  é o filtro gerado pelo conjunto  $\{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} : \sigma^* \in \Sigma\}$ .



### 7.4.2 De filtros para redes.

Para definirmos um filtro a partir de uma rede, iremos usar o fato que o filtro é um conjunto dirigido pelo contido.

**Definição 7.16.** Dado um filtro  $\mathcal{F}$ , seja  $\Sigma = \{(F, x) \in \mathcal{F} \times X \text{ tal que } x \in F\}$  com a relação  $(F, x) \geq (G, y)$  se  $F \subseteq G$  (fica a cargo do leitor notar que  $\Sigma$  é um conjunto dirigido). A rede associada a  $\mathcal{F}$  é a rede  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ , onde  $x_\sigma = x$  e  $(F, x) = \sigma \in \Sigma$ .

### 7.4.3 A dualidade de redes e filtros.

**Teorema 7.17.** Seja  $\mathcal{F}$  um filtro e  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  a rede gerada por  $\mathcal{F}$ .

Seja  $x \in X$ . Então:

- 1)  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$  se e somente se  $x$  é ponto de acumulação de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ .
- 2)  $x$  é limite de  $\mathcal{F}$  se e somente se  $x$  é limite de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ .

*Demonstração.* 1) Suponhamos que  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$  e  $(G, y) \in \Sigma$ . Como  $x$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ , segue que  $G \cap U \neq \emptyset$ . Tome  $z \in G \cap U$ . Então  $(G, z) \in \Sigma$ ,  $(G, z) \geq (G, y)$  e  $x_{(G, z)} = z \in U$ . Portanto  $x$  é ponto de acumulação da rede gerada por  $\mathcal{F}$ .

Suponhamos que  $x$  não é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ . Então existe  $G \in \mathcal{F}$  tal que  $x \notin \overline{G}$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $U \cap G = \emptyset$ . Fixe  $y \in G$ . Então  $(G, y) \in \Sigma$  e se  $(H, z) \geq (G, y)$  com  $(H, z) \in \Sigma$  então  $x_{(H, z)} \in H \subseteq G \subseteq X \setminus U$ . Portanto  $x_{(H, z)} \notin U$  e  $x$  não é ponto de acumulação da rede gerada por  $\mathcal{F}$ .

2) Suponhamos que  $x$  é limite de  $\mathcal{F}$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Como  $x$  é limite de  $\mathcal{F}$ , segue que  $U \in \mathcal{F}$ . Tome  $z \in U$ . Então  $(U, z) \in \Sigma$ . Para todo  $(G, y) \geq (U, z)$  com  $(G, y) \in \Sigma$  temos  $x_{(G, y)} = y \in G \subseteq U$ . Portanto  $x$  é limite da rede gerada por  $\mathcal{F}$ .

Suponhamos que  $x$  não é limite de  $\mathcal{F}$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $U \notin \mathcal{F}$ . Tome  $(G, y) \in \Sigma$ . Como  $U \notin \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}$  é filtro, segue que  $G \not\subseteq U$ . Logo, existe  $z \in G \setminus U$ . Temos que  $(G, z) \geq (G, y)$  e  $x_{(G, z)} = z \notin U$ . Como  $(G, z)$  é um elemento arbitrário de  $\Sigma$ , segue que  $U$  testemunha que a rede não converge para  $x$ .  $\square$

**Teorema 7.18.** Seja  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  uma rede e seja  $\mathcal{F}$  o filtro gerado por  $\mathcal{F}$ .

Seja  $x \in X$ . Então:

- 1)  $x$  é ponto de acumulação de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  se e somente se  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ .
- 2)  $x$  é limite de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$  se e somente se  $x$  é limite de  $\mathcal{F}$ .

*Demonstração.* 1) Suponha que  $x$  é ponto de acumulação de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ . Para mostrarmos que  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ , usando a propriedade de base de filtro, basta mostrar que  $x \in \overline{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\}}$  para todo  $\sigma^* \in \Sigma$ . Fixe  $\sigma^*$  e tome  $U$  uma vizinhança de  $x$ , como  $x$  é ponto de acumulação da rede, existe  $\sigma \geq \sigma^*$  tal que  $x_\sigma \in U$ . Portanto  $U \cap \{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} \neq \emptyset$ . Portanto  $x$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ .

Suponha que  $x$  não é ponto de acumulação de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e  $\sigma^* \in \Sigma$  tal que  $x_\sigma \notin U$  para todo  $\sigma \geq \sigma^*$ . Logo,  $U \cap \{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} = \emptyset$ . Portanto  $x \notin \overline{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\}}$ , com  $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} \in \mathcal{F}$ . Assim,  $x$  não é ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ .

2) Suponha que  $x$  é limite de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Para provarmos que  $x$  é limite de  $\mathcal{F}$ , basta mostrar que  $U \in \mathcal{F}$ . Como a rede converge para  $x$ , existe  $\sigma^*$  tal que  $x_\sigma \in U$  para todo  $\sigma \geq \sigma^*$ . Logo  $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\}$  pertence a base do filtro gerado pela rede. Assim,  $U \in \mathcal{F}$ .

Suponha que  $x$  não é limite de  $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que para todo  $\sigma^* \in \Sigma$  existe  $\sigma \geq \sigma^*$  tal que  $x_\sigma \notin U$ . Assim,  $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} \not\subseteq U$  para cada  $\sigma^* \in \Sigma$ . Assim,  $U$  não contém nenhum elemento da base que gera  $\mathcal{F}$ . Assim,  $U \notin \mathcal{F}$ .  $\square$

## Capítulo 8

# Subespaços. Subespaços métricos. Subespaços e Ordem Linear.

### 8.1 A topologia nos ‘cacos’ de $X$ .

#### 8.1.1 Topologia de subespaço.

Os subespaços topológicos usam os fragmentos dos abertos de  $X$  que podem ser ‘vistas’ dentro do subespaço.

**Definição 8.1.** Seja  $\langle X, \tau \rangle$  um espaço topológico e  $Y \subseteq X$ . Dizemos que  $Y$  é um subespaço topológico de  $X$  se  $Y$  é munida com a topologia  $\{Y \cap U : U \in \tau\}$ .

Em outras palavras, um subconjunto  $W$  de  $Y$  é aberto em  $Y$  se e somente se existe um aberto de  $X$  que intersectado a  $Y$  dá  $W$ .

Para ver que de fato temos uma topologia em  $Y$ , basta utilizar  $Y \cap \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (Y \cap C)$  e  $Y \cap \bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} (Y \cap C)$ .

**Proposição 8.2.** Seja  $Z$  um subespaço de  $Y$  e  $Y$  um subespaço de  $X$ . Então  $Z$  é subespaço de  $X$ .

*Demonstração.* Além das igualdades acima, basta notar que para todo subconjunto  $A$  de  $X$  temos  $A \cap Z = (A \cap Y) \cap Z$ .  $\square$

Vamos ver agora como ficam alguns objetos de  $X$  quando restritos a  $Y$ .

**Lema 8.3.** Seja  $Y$  um subespaço topológico de  $X$ .

- Se  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos de  $X$  então  $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$  é uma base de abertos de  $Y$ .
- Se  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $X$  então  $\{\{U \cap Y : U \in \mathcal{V}_y\} : y \in Y\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $Y$ .
- Se  $\mathcal{C}$  é uma base de fechados de  $X$  então  $\{F \cap Y : F \in \mathcal{C}\}$  é uma base de fechados de  $Y$ .
- Se  $A \subseteq Y$  então  $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$ .

(Note que em b) ‘jogamos fora’  $\mathcal{V}_x$  se  $x \notin Y$ , mas isto não afeta a topologia de  $Y$  por que há uma relação entre os sistemas fundamentais de vizinhanças dos pontos). Uma pergunta reversa seria, se  $Y$  é denso, podemos recuperar a topologia de  $X$  usando um sistema fundamental de vizinhanças abertas de  $Y$ ?

*Demonstração.* Basta usar a intersecção em a) e b).

Para c),  $\{X \setminus F : F \in \mathcal{C}\}$  é uma base de abertos de  $X$ . Portanto  $\{Y \setminus F : F \in \mathcal{C}\} = \{Y \cap (X \setminus F) : F \in \mathcal{C}\}$  é uma base de abertos de  $Y$ . Logo,  $\{Y \cap F : F \in \mathcal{C}\}$  é uma base de fechados de  $Y$ .

Para d), ambos os conjuntos estão em  $Y$  então fixe  $x \in Y$ . Então  $x \in \overline{A}^X$  se e somente se  $V \cap A \neq \emptyset$  para toda vizinhança de  $x$  em  $X$  se e somente se  $(V \cap Y) \cap A \neq \emptyset$  (pois  $A$  é subconjunto de  $Y$ ) se e somente se  $W \cap A \neq \emptyset$  para toda vizinhança  $W$  de  $x$  em  $Y$  se e somente se  $x \in \overline{A}^Y$ .  $\square$

### 8.1.2 Propriedades hereditárias.

**Definição 8.4.** Dizemos que uma propriedade topológica  $\mathcal{P}$  é hereditária se para todo  $X$  que tem  $\mathcal{P}$  então todo subespaço de  $X$  tem  $\mathcal{P}$ .

Dizemos que uma propriedade topológica  $\mathcal{P}$  é hereditária para fechados se para todo  $X$  que tem  $\mathcal{P}$  então todo subespaço fechado de  $X$  tem  $\mathcal{P}$ .

Dizemos que uma propriedade topológica  $\mathcal{P}$  é hereditária para abertos se para todo  $X$  que tem  $\mathcal{P}$  então todo subespaço aberto de  $X$  tem  $\mathcal{P}$ .

**Corolário 8.5.** Os axiomas de separação  $T_0$ ,  $T_1$  e  $T_2$  são hereditários.

*Demonstração.* Basta usar as testemunhas do espaço intersectadas com o subespaço.  $\square$

**Corolário 8.6.** O primeiro axioma de enumerabilidade é uma propriedade hereditária.

O segundo axioma de enumerabilidade é uma propriedade hereditária.

**Exercício 8.7.** Seja  $i : Y \rightarrow X$  a função inclusão, onde  $Y \subseteq X$ . Verifique que a topologia inicial de  $i$  é a topologia de subespaço.

## 8.2 Subespaços e métrica.

Vamos ver agora que no caso de um espaço métrico, podemos recuperar a topologia do espaço usando as bolas de centro num denso e raio  $\frac{1}{n}$  com  $n > 0$ .

### 8.2.1 A topologia da métrica do subespaço vs a topologia de subespaço do espaço métrico.

**Exemplo 8.8.** Seja  $X$  um espaço topológico gerado pela métrica  $d$ . Se  $Y$  é denso em  $x$  então as bolas centradas em pontos de  $Y$  formam uma base para  $X$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{B}$  o conjunto de todas as bolas abertas centradas em pontos de  $Y$  com raio  $\frac{1}{n}$  para alguma inteiro positivo  $n$ . Vamos mostrar que  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos de  $X$ .

Seja  $x \in X$  e  $U$  um aberto de  $X$ . Fixe  $n > 0$  natural tal que  $\epsilon = \frac{1}{n}$  e  $B(x, \epsilon) \subseteq U$ . Tome  $m > 0$  natural positivo tal que  $\delta = \frac{1}{m}$  satisfaz  $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Como  $Y$  é denso e  $B(x, \delta) \neq \emptyset$ , existe  $y \in Y$  tal que  $y \in B(x, \delta)$ . Logo, temos que  $x \in B(y, \delta)$  (pela simetria da métrica  $d$ ) e  $B(y, \delta) \in \mathcal{B}$ . Basta agora mostrar que  $B(y, \delta) \subseteq U$ . De fato, se  $z \in B(y, \delta)$ , então pela desigualdade triangular,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \delta + \delta \leq \epsilon$ . Assim,  $z \in B(x, \epsilon) \subseteq U$ . Como  $z$  é arbitrário segue que  $B(y, \delta) \subseteq U$ .  $\square$

Note que é importante que tomemos bolas de mesmo tamanho para termos uma base de abertos. Por exemplo se fixarmos uma seqüência positiva convergindo para 0 e só tomar bolas com raios desta seqüência, ainda teremos uma base de abertos. Mas, se tomarmos para cada ponto do denso uma seqüência de bolas centradas que encolhem arbitrariamente, este conjunto de bolas não precisa ser base.

**Corolário 8.9.** Seja  $Y$  um subespaço de  $X$  com a topologia gerada por uma métrica. A topologia de  $Y$  como subespaço topológico de  $X$  coincide com a topologia de  $Y$  como subespaço métrico.

*Demonstração.* As bolas centradas em pontos de  $X$  formam uma base de  $X$ , assim, as bolas centradas em pontos de  $Y$  intersectadas com  $Y$  que formam uma base do subespaço topológico, coincidem com as bolas abertas de  $Y$  centradas em pontos de  $Y$  que formam uma base da topologia gerada pela métrica em  $Y$ .  $\square$

**Corolário 8.10.** Se  $X$  é um espaço métrico então  $X$  satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade se e somente se  $X$  satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

*Demonstração.* Já vimos que um espaço topológico que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro. Se  $X$  é métrico e satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade, então  $X$  possui um denso enumerável e vimos acima que uma quantidade enumerável de bolas centradas em cada ponto do denso formam uma base. Como essa base é enumerável, segue que  $X$  satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.  $\square$

### 8.2.2 Axiomas da enumerabilidade em subespaços não métricos.

**Corolário 8.11.** A topologia da reta de Sorgenfrey não provém de uma métrica.

*Demonstração.* Vimos anteriormente que a reta de Sorgenfrey satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade, mas não satisfaz o segundo, assim, sua topologia não pode ser provida por uma métrica.  $\square$

**Corolário 8.12.** Se  $X$  é um espaço métrico que satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade e  $Y$  é um subespaço de  $X$  então  $Y$  satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

*Demonstração.* Como visto anteriormente, neste caso,  $X$  satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Assim,  $Y$  também satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Além disso, um espaço que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.  $\square$

Vamos ver agora que o terceiro axioma da enumerabilidade não é necessariamente preservada por subespaços.

**Exemplo 8.13.** Seja  $X$  o conjunto dos reais. Para cada  $x$  irracional, fixe uma sequência convergente de racionais  $\{q_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Considere o seguinte sistema de vizinhanças fundamentais: se  $x$  é racional, tome  $\mathcal{V}_x = \{\{x\}\}$  e se  $x$  é irracional, considere  $\mathcal{V}_x = \{\{x\} \cup \{q_{x,n} : n \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}$ . Temos que este é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para um topologia, pois  $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$  e  $x \in U$  para todo  $x \in X$  e  $U \in \mathcal{V}_x$ . Assim  $BL1)$  está satisfeita.

Dado  $x$ , se  $U$  e  $V$  são elementos de  $\mathcal{V}_x$  então um está contido no outro assim a intersecção está em  $\mathcal{V}_x$  e  $BL2)$  está satisfeita.

Finalmente, tome  $x \in X$ ,  $U \in \mathcal{V}_x$  e  $y \neq x$  tal que  $y \in U$ .

Se  $x$  é racional então  $BL3)$  está trivialmente satisfeita por que  $U = \{x\}$ . Se  $x$  é irracional então  $y$  será racional e  $\{y\} \in \mathcal{V}_y$  e  $BL3)$  está satisfeita.

Cada unitário de racional é aberto, assim o conjunto dos racionais é aberto e o subconjunto  $Y$  dos irracionais é fechado. Claramente, todo aberto no sistema fundamental de vizinhanças abertas contém um racional, assim  $X$  satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Para cada  $x \in Y$  e  $U \in \mathcal{V}_x$ , temos que  $U \cap Y = \{x\}$ . Assim, no subespaço  $Y$  todo unitário é aberto. Assim,  $Y$  é um subespaço discreto não enumerável. Portanto o único subconjunto denso de  $Y$  é  $Y$ , Assim,  $Y$  não satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Este tipo de topologia, com outra notação é chamado de  $\Psi$ -espaço, espaço de Moore-Mrówka ou espaço de Mrówka.

**Exemplo 8.14.** O plano de Niemytzky também é um espaço com conjunto enumerável denso (o conjunto dos pares de racionais dentro do semiplano superior) em que o eixo das abscissas é fechado e discreto não enumerável.

**Exemplo 8.15.** Note que satisfazer o terceiro axioma da enumerabilidade não é uma propriedade hereditária para fechados, mas é uma propriedade hereditária para abertos.

Ser metrizável é uma propriedade hereditária pelo que vimos nesta secção. Veremos eventualmente que ser ordenável não é uma propriedade hereditária.

## 8.3 Imersão e ordem linear. Cortes de Dedekind.

Dado um conjunto linearmente ordenado  $X$ . Sobre um subconjunto  $Y$  de  $X$  podemos considerar duas topologias: a topologia da ordem restrita a  $Y$  e a topologia de subespaço de  $X$  com a topologia da ordem de  $X$ .

**Definição 8.16.** Dizemos que  $Y$  é espaço topológico subordinado se existe um espaço ordenado  $X$  em que  $Y$  é subespaço topológico.

**Proposição 8.17.** Dado  $Y \subseteq X$  e  $X$  um espaço ordenado, a topologia de subespaço de  $Y$  é mais fina que a topologia de  $Y$  com a ordem restrita a  $Y$ .

*Demonstração.* Os elementos da subbase do espaço ordenado  $Y$  são  $\{z \in Y : z < y\} = \{z \in X : z < y\} \cap Y$  e  $\{z \in Y : z > y\} = \{z \in X : z > y\} \cap Y$  que são abertos na topologia de subespaço de  $Y$ .  $\square$

**Exemplo 8.18.** Seja  $X = [0, 1[ \cup \{2\}$ . A topologia de  $X$  como espaço ordenado é homeomorfa ao intervalo  $[0, 1]$  e em particular 2 é ponto de acumulação de  $[0, 1[$ . O conjunto  $X$  como subespaço de  $\mathbb{R}$  tem  $\{2\}$  como ponto isolado.



Figura 8.1: O subespaço de um espaço ordenado não precisa ser igual ao espaço gerado pela sub-ordem.

**Exemplo 8.19.** Considere  $X = \mathbb{R}$  com a ordem linear usual e  $\{0, 1\}$  com a ordem usual dos naturais. Defina  $(r, i) <_2 (s, j)$  se  $(r < s)$  ou  $(r = s \text{ e } i < j)$ . Então  $<_2$  é uma ordem linear sobre  $X$  e a topologia de subespaço sobre  $Y = \mathbb{R} \times \{1\}$  é homeomorfa a topologia de Sorgenfrey.

Os elementos da subbase de  $Y$  como subespaço de  $X$  são  $\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 0)\} \cap Y$ ,  $\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 1)\} \cap Y$ ,  $\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 0)\} \cap Y$  e  $\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 1)\} \cap Y$ .

Agora,  $\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 0)\} \cap Y = ]-\infty, s[ \times \{1\}$  (como 0 é mínimo na segunda coordenada todos os menores elementos com segunda coordenada 1 tem primeira coordenada menor que  $s$ ).

$\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 1)\} \cap Y = ]-\infty, s[ \times \{1\}$  (todos os elementos de  $Y$  tem segunda coordenada 1 assim, a primeira coordenada tem que ser menor que  $s$ ).

$\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 0)\} \cap Y = [s, +\infty[ \times \{1\}$  (o único elemento com primeira coordenada  $s$  maior que  $(s, 0)$  é  $(s, 1)$ , os outros elementos maiores que  $(s, 0)$  tem primeira coordenada maior que  $s$ ).

$\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 1)\} \cap Y = ]s, +\infty[ \times \{1\}$  (todos os elementos de  $Y$  tem segunda coordenada 1 assim, os elementos de  $Y$  maiores que  $(s, 1)$  tem primeira coordenada maior que  $s$ ).

Todos os intervalos da subbase da cópia da topologia de Sorgenfrey aparecem acima. Assim, a topologia de subespaço é mais fina que a da topologia de Sorgenfrey.

Apenas o quarto tipo de intervalo não aparece na subbase da cópia da topologia de Sorgenfrey, mas é um aberto na topologia de Sorgenfrey, pois  $]s, +\infty[ \times \{1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n > 0} [s + \frac{1}{n}, +\infty[ \times \{1\}$ . Assim a topologia de Sorgenfrey é mais fina que a topologia de subespaço.

Assim, a topologia de subespaço de  $Y$  é homeomorfa a topologia de Sorgenfrey.

A topologia da ordem sobre  $\mathbb{R} \times \{1\}$  é homeomorfa a topologia usual da reta. De fato,  $(r, 1) <_2 (s, 1)$  se e somente se  $r < s$ .

Note que no exemplo acima, para todo  $r$  real, não existe  $(s, j) \in X$  tal que  $(r, 0) <_2 (s, j) <_2 (r, 1)$ .

**Definição 8.20.** Dizemos que  $\langle X, < \rangle$  é denso em si mesmo se para todo  $x < y$  em  $X$  existe  $z \in X$  tal que  $x < y < z$ .

O conjunto dos reais, o conjunto dos irracionais e o conjunto dos racionais são conjuntos densos em si mesmo.

**Teorema 8.21.** Seja  $X$  um espaço ordenado, onde sua ordem linear é densa em si mesmo. Seja  $Y$  um subconjunto denso de  $X$ . Então a topologia de  $Y$  como subespaço de  $X$  coincide com a topologia da ordem sobre  $Y$ .

*Demonstração.* Já vimos que a topologia de subespaço sobre  $Y$  é mais fina que a topologia da ordem sobre  $Y$ .

Vamos mostrar então que os elementos da subbase do subespaço são abertos na topologia da ordem. Os abertos da subbase da topologia de subespaço são  $\{y \in X : y < x\} \cap Y$  e  $\{y \in X : y > x\} \cap Y$ .

Afirmamos que  $\{y \in X : y < x\} = \bigcup_{z < x, z \in Y} \{y \in X : y < z\}$ . De fato, como a ordem é linear, temos que  $\supseteq$  está satisfeita. Para mostrar  $\subseteq$ , tome  $y < x$ . Como  $X$  é densa em si mesma, segue que  $]y, x[$  é um intervalo não vazio. Como  $Y$  é denso em  $X$ , segue que existe  $z \in ]y, x[ \cap Y$ . Assim,  $y < z < x$  e  $y \in \bigcup_{z < x, z \in Y} \{y \in X : y < z\}$ .

De forma análoga, temos que  $\{y \in X : y > x\} = \bigcup_{z > x, z \in Y} \{y \in X : y > z\}$ .

Portanto  $\{y \in X : y < x\} \cap Y = (\bigcup_{z < x, z \in Y} \{y \in X : y < z\}) \cap Y = \bigcup_{z < x, z \in Y} (\{y \in X : y < z\} \cap Y) = \bigcup_{z < x, z \in Y} (\{y \in Y : y < z\})$ . A última reunião é um aberto na topologia da ordem de  $Y$ . Analogamente, podemos concluir que  $\{y \in X : y > x\} \cap Y$  é aberto na topologia da ordem de  $Y$ . Assim, a topologia da ordem em  $Y$  é mais fina que a topologia de subespaço de  $X$ .  $\square$

Um subespaço denso ser denso em si mesmo não garante que o espaço seja denso em si mesmo.

**Exemplo 8.22.** O conjunto linearmente ordenado  $X = [0, e] \cup [\pi, 4]$  não é denso em si mesmo, mas como  $e$  e  $\pi$  são irracionais, temos que  $X \cap \mathbb{Q}$  é denso em si mesmo.

O completamento de  $\mathbb{Q}$  usando cortes de Dedekind pode ser feito para todo conjunto linear  $Y$  denso em si mesmo sem ponto máximo ou mínimo. A ordem obtida também é densa em si mesma, sem máximo ou mínimo. A topologia de  $Y$  como subespaço coincidirá com a topologia original de  $Y$  dada pela ordem.

**Exercício 8.23.** Seja  $Y$  um espaço linear denso em si mesmo sem máximo ou mínimo. Um corte para  $Y$  é um conjunto  $A \subseteq Y$  tal que

- 1)  $A \subseteq Y$ ,  $A \neq \emptyset$  e  $A \neq Y$ .
- 2) se  $x < y$  e  $y \in A$  então  $x \in A$ .
- 3)  $A$  não tem máximo, ou seja para todo  $x \in A$ , existe  $y \in A$  tal que  $x < y$ .

Seja  $X$  o conjunto dos cortes de Dedekind de  $Y$ .

Mostre que os cortes estão linearmente ordenados por  $\subseteq$ , que  $y$  pode ser identificado com o corte  $\{x \in Y : x < y\}$ , que  $X$  é denso em si mesmo e que para todo  $C \subseteq X$  não vazio,  $\bigcup C = Y$  ou  $\bigcup C$  é um corte e neste segundo caso  $\bigcup C$  é o supremo de  $C$  na ordem do  $\subseteq$ .

## Capítulo 9

# Espaços regulares. Produto finito. Pseudométricas contínuas.

### 9.1 Separando pontos e fechados. Regularidade.

Uma outra pergunta natural seria, podemos recuperar a topologia de  $X$  apenas usando os pontos de um subconjunto denso  $Y$ ?

Como vimos anteriormente, podemos sempre recuperar  $\bar{U}$  para  $U$  aberto usando um denso, pois  $\bar{U} = \overline{U \cap Y}$ . Além disso  $U \subseteq \bar{U}$ , portanto  $\bar{U}$  é uma vizinhança de  $x$ . A questão aqui é se o fecho não torna os conjuntos com interior muito grande, ou seja  $\{\overset{\circ}{\bar{U}} : U \text{ vizinhança aberta de } x\}$  é uma base local para  $x$ ?

Para isto, é necessário que para toda vizinhança  $V$  de  $x$ , existe  $U$  vizinhança aberta de  $x$  tal que  $\overset{\circ}{\bar{U}} \subseteq V$ . Para termos isto iremos definir regularidade.

**Definição 9.1.** Um espaço  $X$  é regular se para todo ponto  $x \in X$  e todo aberto  $U$  contendo  $x$ , existe  $V$  aberto contendo  $x$  tal que  $\bar{V} \subseteq U$ .

Vamos ver algumas condições equivalentes a regularidade.

**Lema 9.2.** Seja  $X$  um espaço topológico. Seja  $\mathcal{C}$  uma sub-base de fechados,  $\mathcal{B}$  uma sub-base de abertos e  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $X$ . São equivalentes:

- 1)  $X$  é regular
- 2) para todo  $x \in X$  e todo  $F$  fechado tal que  $x \notin F$  então existem  $W$  e  $V$  abertos disjuntos tais que  $x \in V$  e  $F \subseteq W$ .
- 3) se  $\mathcal{C}$  é uma subbase de fechados e  $x \notin F$  com  $F \in \mathcal{C}$  então existe  $U$  aberto contendo  $x$  tal que  $\bar{U} \cap F = \emptyset$ .
- 4) se  $\mathcal{C}$  é uma subbase de fechados e  $x \notin F$  com  $F \in \mathcal{C}$  então existe  $W$  aberto tal que  $F \subseteq W$  e  $x \notin \bar{W}$ .
- 5) se  $\mathcal{B}$  é uma subbase de abertos, e  $x \in U$  com  $U \in \mathcal{B}$  então existe  $V$  aberto tal que  $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ ;
- 6) para todo  $x \in X$  e todo  $W \in \mathcal{V}_x$  existe  $U \in \mathcal{V}_x$  tal que  $\bar{U} \subseteq W$ .

*Demonstração.* 1)  $\rightarrow$  2). Seja  $x \in X$  e  $F$  um fechado tal que  $x \notin F$  então  $X \setminus F$  é um aberto contendo  $x$ . Pela regularidade de  $X$  segue que existe  $V$  aberto tal que  $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus F$ . Tome  $W = X \setminus \bar{V}$ . Então temos  $x \in V$ ,  $F \subseteq X \setminus \bar{V} = W$  e  $V \cap W = V \cap (X \setminus \bar{V}) \subseteq V \cap (X \setminus V) = \emptyset$ .

2)  $\rightarrow$  3). Seja  $x \notin F$  com  $F \in \mathcal{C}$ . Então existem abertos  $U$  e  $V$  disjuntos tais que  $x \in U$  e  $F \subseteq V$ . Assim  $\bar{U} \subseteq X \setminus V$ , pois  $U \subseteq X \setminus V$  e  $X \setminus V$  é fechado. Assim,  $\emptyset = \bar{U} \cap V \supseteq \bar{U} \cap F$ . Portanto  $\bar{U} \cap F = \emptyset$ .

3)  $\rightarrow$  4). Temos que  $\bar{U} \cap F = \emptyset$  se e somente se  $F \subseteq X \setminus \bar{U} = (X \setminus U)^\circ$ . Então  $W = (X \setminus U)^\circ \subseteq X \setminus U$ . Portanto  $W \cap U = \emptyset$  e  $x \notin \bar{W}$ .

4)  $\rightarrow$  5). Tome  $x \in U$  com  $U \in \mathcal{B}$ . Então  $x \notin X \setminus U$ . Como  $\mathcal{C}$  é uma subbase, existem  $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$  tal que  $x \notin C_1 \cup \dots \cup C_k$  e  $C_1 \cup \dots \cup C_k \supseteq X \setminus U$ . Para cada  $C_i$ , existe  $W_i$  aberto tal que  $C_i \subseteq W_i$  e  $x \notin \bar{W}_i$ . Tome  $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$ . Então  $x \notin \bar{W} = \bar{W}_1 \cup \dots \cup \bar{W}_n$ . Seja  $V = X \setminus \bar{W}$ . Então  $x \in V = X \setminus \bar{W} = \text{Int}(X \setminus W) \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_k) \subseteq U$ .

## Regularidade

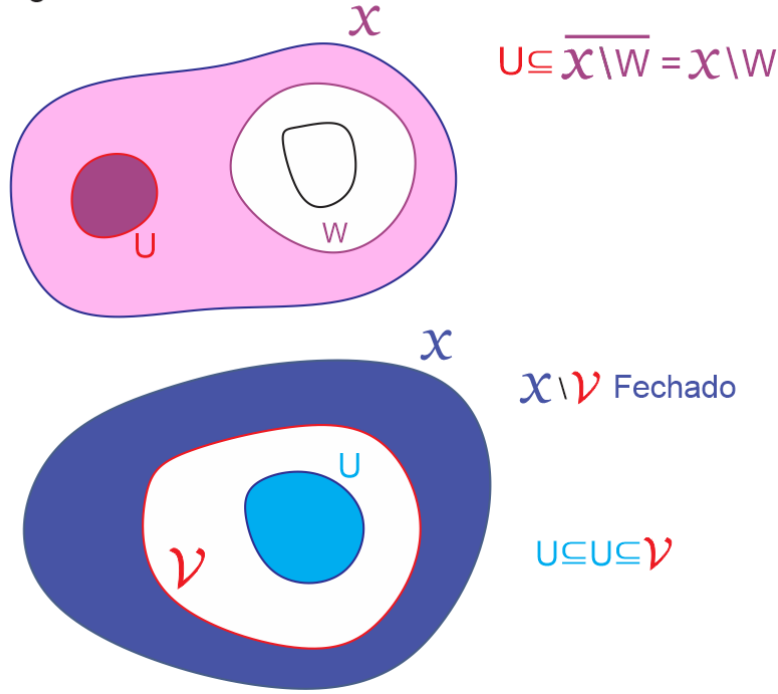


Figura 9.1: Espaços regulares.

5)  $\rightarrow$  6). Seja  $W \in \mathcal{V}_x$ . Como  $W$  é vizinhança de  $x$  e  $\mathcal{B}$  é subbase de abertos, existe  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  finito tal que  $x \in \bigcap \mathcal{B}' \subseteq W$ . Para cada  $O \in \mathcal{B}'$  existe  $V_O$  aberto contendo  $x$  tal que  $\overline{V_O} \subseteq O$ . Seja  $U \in \mathcal{V}_x$  tal que  $U \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{B}'} V_O$ . Então  $\overline{U} \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{B}'} \overline{V_O} \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{B}'} O \subseteq \bigcap \mathcal{B}' \subseteq W$ .

6)  $\rightarrow$  1). Seja  $x \in U$  com  $U$  aberto. Como  $\mathcal{V}_x$  é sistema fundamental de vizinhanças de  $x$  existe  $V \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V \subseteq U$ . Por hipótese, existe  $O \in \mathcal{V}_x$  tal que  $\overline{O} \subseteq V$ . Tome  $W = \overset{\circ}{O}$ . Então  $x \in W \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq V \subseteq U$ . Como  $x$  é arbitrário, temos que  $X$  é regular.  $\square$

A última condição é as vezes referida como ‘ $X$  é regular em  $x$ ’.

**Definição 9.3.** Dizemos que  $U$  é um aberto regular se  $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$ .

**Definição 9.4.** Dizemos que  $F$  é um fechado regular se  $\overline{\overline{F}} = F$ .

**Proposição 9.5.** Um conjunto  $F$  é fechado regular se e somente se  $X \setminus F$  é um aberto regular. Um espaço possui uma base de fechados regulares se e somente possui uma base de abertos regulares.

*Demonstração.* As relações valem das relações de complementações de fechos e interior.  $\square$

**Teorema 9.6.** Um espaço regular  $X$  possui uma base de abertos regulares.

*Demonstração.* Seja  $x$  um ponto e  $U$  um aberto contendo  $x$ . Então existe um aberto  $V$  tal que  $x \in \overline{V} \subseteq U$ . Então  $\overset{\circ}{\overline{V}}$  é um aberto regular tal que  $x \in \overset{\circ}{\overline{V}} \subseteq U$  (pois  $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{V}}} = \overset{\circ}{\overline{V}}$ ). Assim os abertos regulares formam uma base.  $\square$

**Corolário 9.7.** Seja  $X$  um espaço regular e  $D$  é um subconjunto denso de  $X$ . Então  $\{\overset{\circ}{A} : \emptyset \neq A \subseteq D\}$  é uma base de abertos para  $X$ .

*Demonstração.* Vimos que os abertos regulares formam uma base. Agora para cada aberto regular  $U$ , temos que  $\overline{U \cap D} = \overset{\circ}{U} = U$  e  $U \cap D \subseteq D$ .  $\square$

**Definição 9.8.** Um espaço regular e  $T_1$  é chamado de espaço  $T_3$ .

**Lema 9.9.** Um espaço  $T_3$  é  $T_2$ .



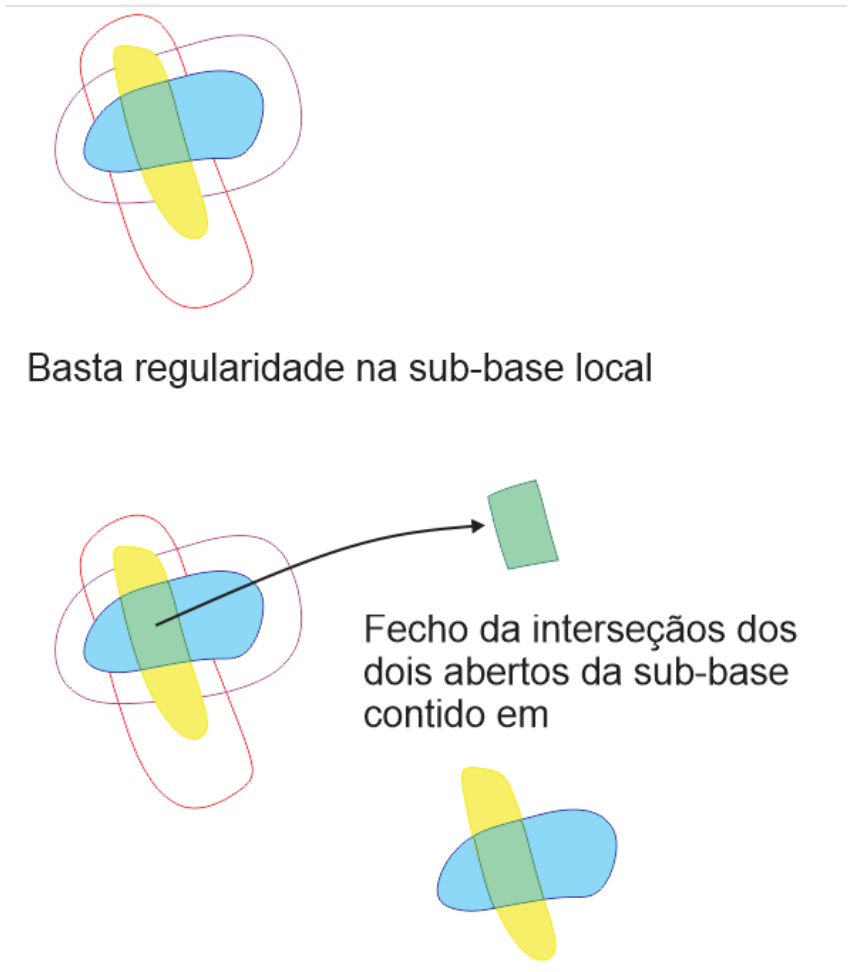


Figura 9.2:

*Demonstração.* Se um espaço é  $T_1$  então os pontos são fechados. Assim, num espaço  $T_3$ , existe um aberto que separa o ponto do unitário do outro ponto por abertos disjuntos. Assim o espaço satisfaz  $T_2$ .  $\square$

Vamos ver um exemplo de espaço Hausdorff que não é regular.

**Exemplo 9.10.** Seja  $X$  o conjunto dos reais e  $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ . Para cada  $x = 0$  seja  $\mathcal{V}_x = \{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ \setminus S : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ . Para cada  $x \neq 0$  seja  $\mathcal{V}_x = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[ : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ . Temos um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia mais fina do que a da topologia de  $\mathbb{R}$ . Claramente esta topologia é Hausdorff e o conjunto dos racionais formam um conjunto denso. O fecho de  $S$  na topologia usual é conjunto  $S \cup \{0\}$ , mas na topologia mais fina,  $0 \notin \overline{S}^X$ . Assim,  $S$  é fechado em  $X$ . Dado  $W$  um aberto contendo  $S$ , para cada  $n \in \mathbb{N}, n > 0$  existe um irracional  $\xi_n$  tal que  $\xi_n$  e  $\frac{1}{n}$  distam menos que  $\frac{1}{n}$ . Assim,  $\xi_n$  converge para 0 em  $\mathbb{R}$ , mas também convergem para 0 em  $X$ . Assim,  $0 \in \overline{W}^X$ . Logo,  $X$  não é regular.

Vamos mostrar que na verdade  $X$  não possui uma base de abertos regulares no 0. Seja  $n \in \mathbb{N}$  com  $n > 0$ . O fecho do conjunto  $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ \setminus S$  é  $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  e o interior de  $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  é  $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ . Logo, nenhum aberto regular contendo 0 está contido em  $X \setminus S$ .

**Proposição 9.11.** Regularidade é uma propriedade hereditária.

*Demonstração.* Seja  $Y \subset X$  com  $X$  regular. Se  $x \notin F$  em  $Y$  com  $F$  fechado em  $Y$  então  $x \notin \overline{F}^X$ . Pela regularidade de  $X$  existem  $U$  e  $V$  abertos em  $X$  tal que  $x \in U$ ,  $\overline{F}^X \subseteq V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Então  $U \cap Y$  e  $V \cap Y$  são abertos de  $Y$  tal que  $x \in U \cap Y$ ,  $F = \overline{F}^X \cap Y \subseteq V \cap Y$  e  $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ .  $\square$

## 9.2 Produto topológico finito.

Num produto de dois espaços topológicos, o mais natural como um aberto no produto de ambos é pensar num retângulo com base um aberto do primeiro espaço e altura um aberto do segundo espaço. Não podemos esperar que todos os abertos sejam retângulos. Não existe métrica para pensarmos em definir ‘discos’.

**Definição 9.12.** Dado uma família finita de espaços topológicos  $\{\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle\}$ , a topologia produto sobre  $\prod_{i=1}^n X_n$  é a topologia gerada pela base  $\{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \tau_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Abertos deste tipo são chamados de abertos básicos da topologia produto.

Note que o conjunto acima satisfaz as propriedades para ser base de uma topologia, pois,  $(\prod_{i=1}^n U_i) \cap (\prod_{i=1}^n V_i) = \prod_{i=1}^n (U_i \cap V_i)$ .

**Lema 9.13.** Fixe uma família finita de espaços topológicos  $\{\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle\}$ .

1) se  $\mathcal{B}_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  é uma base de abertos então  $\mathcal{B} = \{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \mathcal{B}_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$  é uma base para a topologia produto. Em particular  $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^n \{U_j \times \prod_{i \neq j} X_i : U_j \in \mathcal{B}_j\}$  é uma subbase de abertos.

2) Seja  $x_i \in X_i$  e  $\mathcal{V}_{x_i}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Então  $\{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \mathcal{V}_{x_i} \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $(x_i : 1 \leq i \leq n)$ .

*Demonstração.* 1) Seja  $(x_i : 1 \leq i \leq n)$  um ponto de  $\prod_{i=1}^n X_n$  e  $W$  um aberto arbitrário de  $\prod_{i=1}^n X_n$ . Pela definição de topologia produto, existem  $U_i \in \tau_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \prod_{i=1}^n U_i \subseteq W$ . Como  $\mathcal{B}_i$  é base para  $X_i$ , existe  $V_i \in \mathcal{B}_i$  tal que  $x_i \in V_i \subseteq U_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . Então  $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \prod_{i=1}^n V_i \subseteq \prod_{i=1}^n U_i \subseteq W$ . Assim,  $\mathcal{B}$  é uma base.

Para ver que  $\mathcal{S}$  é uma sub-base, basta aplicar  $\bigcap_{j=1}^n (U_j \times \prod_{i \neq j} X_i) = \prod_{i=1}^n U_i$ .

2) A demonstração é similar a de 1).  $\square$

**Corolário 9.14.** O produto finito de espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

O produto finito de espaços que satisfazem o segundo axioma de enumerabilidade satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.



Figura 9.3: Um aberto básico de um produto de dois espacos.

**Lema 9.15.** Fixe uma família finita de espaços topológicos  $\{\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle\}$  e bases de fechados  $\mathcal{C}_i$  de  $X_i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Temos que  $\prod_{i=1}^n C_i$  é fechado se  $C_i$  é fechado em  $X_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$  e a família  $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^n \{F_j \times \prod_{i \neq j} X_i : F_j \in \mathcal{C}_j\}$  é uma sub-base de fechados para a topologia produto.

*Demonstração.* Note que  $\prod_{i=1}^n X_i \setminus (C_j \times \prod_{i \neq j} X_i) = (X_j \setminus C_j) \times \prod_{i \neq j} X_i$  e o conjunto à direita é um aberto. Portanto,  $C_j \times \prod_{i \neq j} X_i$  é um fechado. Como  $\prod_{i=1}^n C_i = \bigcap_{j=1}^n (C_j \times \prod_{i \neq j} X_i)$  e a intersecção de fechados é fechada temos que  $\prod_{i=1}^n C_i$  é um fechado. Basta notar que  $\{\prod_{i=1}^n X_i \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$  é uma sub-base de abertos usando as sub-bases de abertos  $\{X_i \setminus F : F \in \mathcal{C}_i\}$ , pois  $\mathcal{C}_i$  é uma base de fechados de  $X_i$ . Logo  $\mathcal{F}$  é uma sub-base de fechados.  $\square$

**Proposição 9.16.** Se  $A_i \subseteq X_i$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ , então  $\overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$ .

*Demonstração.* Seja  $x_i \in X_i$  e  $\mathcal{V}_{x_i}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Então  $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \overline{\prod_{i=1}^n A_i}$  se e somente se  $\prod_{i=1}^n U_i \cap \prod_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$  para cada  $U_i \in \mathcal{V}_{x_i}$  e  $1 \leq i \leq n$  (usando o fato que  $\{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \mathcal{V}_{x_i} \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de

$(x_i : 1 \leq i \leq n)$  se e somente se  $\prod_{i=1}^n (U_i \cap A_i) \neq \emptyset$  se e somente se  $U_i \cap A_i \neq \emptyset$  para cada  $1 \leq i \leq n$  se e somente se  $x_i \in \overline{A_i}$  para  $1 \leq i \leq n$  se e somente se  $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$ .  $\square$

**Corolário 9.17.** Se  $D_i$  é denso em  $X_i$  para  $1 \leq i \leq n$  então  $\prod_{i=1}^n D_i$  é denso em  $\prod_{i=1}^n X_i$ . O produto finito de espaços que satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro axioma da enumerabilidade.

**Proposição 9.18.** Dada uma  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  funções contínuas, a função  $f = \prod_{i=1}^n f_i : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \prod_{i=1}^n Y_i$  dada por  $(x_i : 1 \leq i \leq n) \mapsto (f_i(x_i) : 1 \leq i \leq n)$  é uma função contínua.

*Demonstração.* Seja  $\prod_{i=1}^n U_i$  um aberto básico de  $\prod_{i=1}^n Y_i$ . Temos que  $f^{-1}[\prod_{i=1}^n U_i] = \prod_{i=1}^n f_i^{-1}[U_i]$  que é um aberto básico de  $\prod_{i=1}^n X_i$ . Assim  $f$  é uma função contínua.  $\square$

Deixaremos para provar alguns resultados de produtos para quando definirmos a topologia produto para um produto arbitrário de espaços topológicos.

A seguir iremos falar de pseudométricas contínuas e de grupos topológicos cuja definições dependem do produto no quadrado. O objetivo aqui é usar essas noções como exemplos que utilizam a continuidade no quadrado e por isso não faremos comentários sobre os diversos exemplos de grupos topológicos existentes. Todo grupo é um grupo topológico munido com a topologia discreta.

## 9.3 Pseudométricas contínuas.

### 9.3.1 Relacionando funções com pseudométricas,

**Definição 9.19.** Dizemos que  $\rho$  é uma pseudométrica em  $X$  se  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que

- 1)  $\rho(x, x) = 0$  e  $\rho(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in X$ . ( $\rho(x, y)$  pode ser 0 com  $x \neq y$ ).
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ , para todo  $x, y \in X$
- 3)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ , para todo  $x, y, z \in X$ .

Ou seja, a única diferença entre métricas e pseudométricas é que a distância de dois pontos numa pseudométrica pode ser 0. A noção de pseudométrica acaba sendo útil para falar sobre espaços completamente regulares que veremos futuramente.

**Definição 9.20.** Dada uma pseudométrica  $\rho$ , a topologia gerada por  $\rho$  é dada pela base de bolas abertas  $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X \text{ e } \epsilon > 0\}$ .

Para mostrar que a interseção de duas bolas é reunião de bolas, basta usar a desigualdade triangular como no caso da métrica. Note que se a distância de dois pontos é 0 então as bolas de mesmo raio centradas nelas são iguais.

**Definição 9.21.** Dado uma pseudométrica  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X$  um espaço topológico, dizemos que  $\rho$  é uma pseudométrica contínua em  $X$  se  $\rho$  é contínua com  $X \times X$  tem a topologia produto e  $\mathbb{R}$  tem a topologia usual da reta.

**Proposição 9.22.** Seja  $\rho$  uma pseudométrica sobre  $X$  e considere  $\tau$  um espaço topológico cuja topologia é mais fina do que a topologia  $\tau_\rho$  gerado por uma pseudométrica.

Então  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, onde  $X \times X$  é munido com a topologia produto, onde  $X$  está com a topologia  $\tau$ .

*Demonstração.* Seja  $(x, y) \in X \times X$  e tome um  $\epsilon > 0$ . Seja  $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ . Então, dado  $(a, b) \in B_\rho(x, \delta) \times B_\rho(y, \delta)$  temos  $\rho(a, b) - \rho(x, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) + \rho(y, b) - \rho(x, y) = \rho(a, x) + \rho(y, b)$  e  $\rho(x, y) - \rho(a, b) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) - \rho(a, b) = \rho(x, a) + \rho(b, y) = \rho(a, x) + \rho(y, b)$ . Assim  $|\rho(a, b) - \rho(x, y)| \leq \rho(a, x) + \rho(y, b)$  e  $\rho[B_\rho(x, \delta) \times B_\rho(y, \delta)] \subseteq ]\rho(x, y) - \epsilon, \rho(x, y) + \epsilon[$ . Logo  $\rho$  é contínua.  $\square$

**Proposição 9.23.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $\rho$  é uma pseudométrica contínua em  $X$ . Então as bolas abertas de  $\rho$  são abertas em  $X$ . Assim, a topologia gerada por  $\rho$  é menos fina do que a topologia de  $X$ .

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$  e  $x \in X$ . Tome  $y \in B_\rho(x, \epsilon)$ . Seja  $\delta = \frac{\epsilon - \rho(x, y)}{2}$ .

Como  $\rho$  é contínua em  $(x, y)$  existe um aberto  $U \times V$  contendo  $(x, y)$  tal que  $\rho[U \times V] \subseteq ]\rho(x, y) - \delta, \rho(x, y) + \delta[$ . Em particular, para  $z \in V$  temos que  $(x, z) \in U \times V$ . Logo,  $\rho(x, z) \in ]\rho(x, y) - \delta, \rho(x, y) + \delta[$ . Portanto  $|\rho(x, z) - \rho(x, y)| < \delta$ . Com isto  $\rho(x, z) = |\rho(x, z) - \rho(x, y) + \rho(x, y)| \leq |\rho(x, z) - \rho(x, y)| + |\rho(x, y)| < \delta + \rho(x, y) < \epsilon$  e  $V \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$ . Como  $y \in B_\rho(x, \epsilon)$  é arbitrário e  $y \in V \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$ , segue que  $B_\rho(x, \epsilon)$  é aberto em  $X$ .  $\square$

**Proposição 9.24.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Então  $\rho_f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$  é uma pseudométrica. Se  $f$  é contínua então a topologia gerada por  $\rho_f$  é menos fina do que a topologia de  $X$  e  $\rho_f$  é uma pseudométrica contínua em  $X$ .

*Demonstração.* Primeiro, vamos verificar que  $\rho$  é uma pseudométrica. De fato,  $\rho_f(x, x) = |f(x) - f(x)| = 0$ .  $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \rho_f(y, x) \geq 0$ . Assim, as condições 1) e 2) estão satisfeitas. Finalmente,  $\rho_f(x, z) = |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = \rho_f(x, y) + \rho_f(y, z)$ , assim a condição 3) de pseudométrica está satisfeita.

Suponha que  $X$  é um espaço topológico e  $f$  é contínua. Já vimos em produtos finitos que  $f \times f : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (tal que  $(x, y) \mapsto (f(x), f(y))$ ) é contínua. A função  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $(a, b) \mapsto |a - b|$  é contínua. Assim a composta  $h \circ (f \times f) = \rho_f$  é uma função contínua. Foi visto acima que, como  $\rho_f$  é contínua em  $X$ , a topologia gerada por  $\rho_f$  é menos fina do que a topologia de  $X$ .  $\square$

# Capítulo 10

## Topologias geradas por pseudométricas. Grupos topológicos.

### 10.1 Topologia geradas por pseudométricas.

**Definição 10.1.** Dada uma família de pseudométricas  $\mathcal{R}$  sobre o conjunto  $X$  dizemos que a topologia gerada pelas pseudométricas em  $\mathcal{R}$  é a topologia gerada pela sub-base de abertos  $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X, \rho \in \mathcal{R} \text{ e } \epsilon > 0\}$ .

**Proposição 10.2.** A topologia gerada pelas pseudométricas  $\{\rho_1, \rho_2\}$  coincide com a topologia gerada pela pseudométrica  $\rho = \rho_1 + \rho_2$

*Demonstração.* Primeiro, note que  $\rho$  é uma pseudométrica usando o fato que ela é a soma de duas pseudométricas.

( $\leftarrow$ ). Fixe um ponto  $x$  e  $\epsilon > 0$ . Então  $B_\rho(x, \epsilon) \subseteq B_{\rho_1}(x, \epsilon) \cap B_{\rho_2}(x, \epsilon)$ . De fato, se  $z \in B_\rho(x, \epsilon)$  então  $\rho(x, z) = \rho_1(x, z) + \rho_2(x, z) < \epsilon$ . Assim,  $\rho_1(x, z) < \epsilon$  e  $\rho_2(x, z) < \epsilon$ .

Vamos mostrar que  $B_{\rho_1}(x, \epsilon)$  é  $\rho$ -aberto. De fato, se  $y \in B_{\rho_1}(x, \epsilon)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B_{\rho_1}(y, \delta) \subseteq B_{\rho_1}(x, \epsilon)$ . Logo,  $y \in B_\rho(y, \delta) \subseteq B_{\rho_1}(y, \delta) \subseteq B_{\rho_1}(x, \epsilon)$ . Assim,  $B_{\rho_1}(x, \epsilon)$  é  $\rho$ -aberto. Analogamente, temos que  $B_{\rho_2}(x, \epsilon)$  é  $\rho$ -aberto. .

( $\rightarrow$ ). Por outro lado, se  $z \in B_{\rho_1}(x, \epsilon) \cap B_{\rho_2}(x, \epsilon)$  então  $\rho(x, z) = \rho_1(x, z) + \rho_2(x, z) < 2\epsilon$ . Portanto  $B_{\rho_1}(x, \epsilon) \cap B_{\rho_2}(x, \epsilon) \subseteq B_\rho(x, 2\epsilon)$ . Assim, dado  $y \in B_\rho(x, \epsilon)$  existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\rho(y, 2\delta) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$ . Então  $y \in B_{\rho_1}(y, \delta) \cap B_{\rho_2}(y, \delta) \subseteq B_\rho(y, 2\delta) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$ . Assim,  $B_\rho(x, \epsilon)$  é aberta na topologia gerada por  $\{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\square$

**Corolário 10.3.** Dada uma família de pseudométricas  $\mathcal{R}$ , existe uma família de pseudométricas  $\mathcal{R}^*$  que gera a mesma topologia que  $\mathcal{R}$  e tal que  $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X, \rho \in \mathcal{R}^* \text{ e } \epsilon > 0\}$  é uma base para a topologia.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{R}^* = \{\rho_1 + \dots + \rho_n : \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{R}\}$ . Então as topologia geradas por ambas são as mesmas e para cada ponto  $x \in X$  e uma intersecção finita de elementos de  $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X, \rho \in \mathcal{R} \text{ e } \epsilon > 0\}$  que contém  $x$  utiliza uma quantidade finita de pseudométricas. A pseudométrica  $\rho$  que é a soma dessas pseudométricas está em  $\mathcal{R}^*$  e há uma  $\rho$ -bola centrada em  $x$  contida na intersecção.  $\square$

#### 10.1.1 ‘Esta pseudométrica rende até $\mathbb{N}$ vezes mais.’

Vimos que duas (e assim finitas) pseudométricas geram a mesma topologia de alguma pseudométrica. Vamos ver agora que isso pode ser melhorado para uma quantidade enumerável.

**Lema 10.4.** Dada uma pseudométrica  $\rho$  existe uma pseudométrica  $\rho^*$  limitada por 1 tal que a topologia gerada por ambas é a mesma. Se  $r$  é um real positivo então a topologia gerada por  $r\rho$  coincide com a topologia gerada por  $\rho$ .

*Demonstração.* Dada uma pseudométrica  $\rho$ , tome  $\rho^*(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$ . Fica a cargo do leitor notar que  $\rho^*$  é uma pseudométrica. Note também que  $B_\rho(x, \epsilon) = B_{\rho^*}(x, \epsilon)$  para cada  $x \in X$  e  $0 < \epsilon < 1$ . Assim as topologias geradas pelos sistemas fundamentais de vizinhanças geram a mesma topologia, pois

a topologia gerada pelas bolas abertas coincide com a topologia gerada pelas bolas de raio menor que 1.

No segundo caso, fica a cargo do leitor notar que  $r\rho$  é uma métrica. Temos que  $r\rho(x, y) < \epsilon$  se e somente se  $\rho(x, y) < \frac{\epsilon}{r}$ . Portanto,  $B_\rho(x, \frac{\epsilon}{r}) = B_{r\rho}(x, \epsilon)$ . Segue então que as topologias geradas pelas bolas abertas de cada métrica serão as mesmas.  $\square$

**Proposição 10.5.** Seja  $X$  um espaço topológico. Dada uma família  $\mathcal{R} = \{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$  de pseudométricas contínuas limitadas por 1 então  $\rho = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n}{2^{n+1}} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma pseudométrica contínua.

Em particular, a topologia gerada por  $\mathcal{R}$  coincide com a topologia gerada por  $\rho$ .

*Demonstração.* Vamos assumir que todas as topologias em  $\mathcal{R}$  são contínuas em  $X$ . Como  $\rho(x, y) \leq 1$  para todo  $(x, y) \in X \times X$ , então  $\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x, y)}{2^{n+1}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$ . Sob estas condições, a função  $\rho$  é contínua (iremos fazer a prova deste resultado em separado no final da secção).  $\square$

**Teorema 10.6.** Dada uma topologia sobre  $X$  gerada por uma família enumerável de pseudométricas, existe uma pseudométrica que gera a topologia de  $X$ .

*Demonstração.* Podemos tomar então uma família  $\mathcal{R}$  enumerável de pseudométricas limitadas por 1 que geram a topologia de  $X$ . As pseudométricas em  $\mathcal{R}$  são contínuas, pois a topologia gerada por  $\mathcal{R}$  é menos fina que a topologia de  $X$ . Enumerando  $\mathcal{R} = \{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$  podemos definir uma pseudométrica  $\rho$  que é contínua na topologia de  $X$ . Assim a topologia de  $\rho$  é menos fina que a topologia de  $X$ .

Fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $\rho_n(x, y) \leq 2^{n+1}\rho(x, y)$  para cada  $(x, y) \in X \times X$ .

Assim, temos que  $B_\rho(x, \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon) = B_{2^{n+1}\rho}(x, \epsilon) \subseteq B_{\rho_n}(x, \epsilon)$ . Logo, a topologia gerada por  $\rho$  é mais fina que a topologia gerada por  $\mathcal{R}$ .

Como  $\mathcal{R}$  gera a topologia de  $X$ , concluímos que a topologia gerada por  $\rho$  é mais fina que a topologia de  $X$ . Assim  $\rho$  gera a topologia de  $X$ .  $\square$

Na proposição acima, aplicaremos para o espaço  $X \times X$ ,  $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$  e  $f_n = \frac{\rho_n}{2^{n+1}}$  for  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 10.7.** Seja  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  uma sequência de reais positivos tal que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$  e sejam  $f_n : X \rightarrow [0, a_n]$  contínuas para todo  $n$  (topologia usual do intervalo em  $[0, 1]$ ).

Então  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  é contínua.

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e  $\epsilon > 0$ . Tome  $N \in \mathbb{N}$  positivo tal que  $\sum_{n \geq N} a_n < \frac{\epsilon}{4}$ . Para cada  $i < N$ , seja  $U_i$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $f_i[U_i] \subseteq ]f_i(x) - \frac{\epsilon}{2N}, f_i(x) + \frac{\epsilon}{2N}[$ . Tome  $U = \bigcap_{0 \leq i < N} U_i$ . Se  $y \in U$  então para cada  $i < N$  temos que se  $y \in U_i \rightarrow |f_i(y) - f_i(x)| < \frac{\epsilon}{2N}$ . Assim,  $|\sum_{i=0}^{N-1} f_i(y) - \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x)| < \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\epsilon}{2N} = \frac{\epsilon}{2}$ . Logo  $|f(x) - f(y)| \leq |\sum_{i=0}^{N-1} f_i(y) - \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x)| + |\sum_{n \geq N} f_n(y)| + |\sum_{n \geq N} f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n \geq N} a_n + \sum_{n \geq N} a_n < \epsilon$ . Logo  $f$  é contínua em  $x$ . Como  $x$  é arbitrário, a função  $f$  é contínua.  $\square$

## 10.2 Distância de ponto a fechado em espaços pseudométricos.

### 10.2.1 Distância de um ponto a um subconjunto.

**Definição 10.8.** Dada uma pseudométrica  $\rho$  e  $A$  um subconjunto não vazio de  $X$  podemos definir a função:  $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$ .

**Lema 10.9.** Seja  $X$  um espaço topológico com a topologia  $\tau$  e  $\rho$  uma pseudométrica contínua em  $X$ . Seja  $\tau_\rho$  a topologia gerada por  $\rho$ . A função  $f(x) = \rho(x, A)$  é uma contínua em  $X$ . Temos que  $f(x) = 0$  se e somente se  $x \in \overline{A}^{\tau_\rho}$ . Dado  $y \notin \overline{A}^{\tau_\rho}$ , a função  $g(x) = \frac{f(x)}{\rho(x, y) + f(y)}$  é contínua,  $g(x) \in [0, 1]$ ,  $g(y) = 1$  e  $g[\overline{A}^{\tau_\rho}] \subseteq \{0\}$ .

*Demonstração.* Dado  $a \in A$ ,  $\rho(x, A) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a)$ . Portanto  $\rho(x, A) - \rho(x, y) \leq \rho(y, a)$  para cada  $a \in A$ . Logo  $\rho(x, A) - \rho(x, y) \leq \rho(y, A)$ . Assim,  $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$ . Similarmente, podemos concluir que  $\rho(y, A) \leq \rho(y, x) + \rho(x, A) = \rho(x, y) + \rho(x, A)$ . Portanto temos que  $|f(x) - f(y)| = |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$ . Assim, fixado  $\epsilon$ , se  $y \in B_\rho(x, \epsilon) \rightarrow \rho(x, y) < \epsilon \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \rightarrow f(y) \in ]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$ . Assim,  $f$  é contínua em  $x$ . Como  $x$  é arbitrário, segue que  $f$  é contínua em  $X$ .

Temos que  $f(x) = 0$  se e somente se  $\rho(x, A) = 0$  se e somente se  $B_\rho(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$  se e somente se  $x \in \overline{A}^{\tau_\rho}$ .

Dado  $y \notin \overline{A}^{\tau\rho}$ , temos que  $f(y) \neq 0$ . A função no denominador de  $g$  não se anula, e tanto a função no numerador quanto no denominador são contínuas, portanto  $g$  é contínua. Como  $g$  é uma fração de números não negativos, temos que  $g(x) \geq 0$ . Vimos acima que  $f(x) \leq \rho(x, y) + f(y)$ , assim  $g(x) = \frac{f(x)}{\rho(x, y) + f(y)} \leq \frac{\rho(x, y) + f(y)}{\rho(x, y) + f(y)} = 1$ .

Para  $y$  temos  $g(y) = \frac{f(y)}{\rho(y, y) + f(y)} = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$ .

Se  $x \in \overline{A}^{\tau\rho}$  então  $f(x) = 0$ . Logo  $g(x) = \frac{0}{\rho(x, y) + f(y)} = 0$ .  $\square$

### 10.2.2 Funções contínuas geradas por pseudométricas contínuas.

**Teorema 10.10.** Seja  $\mathcal{R}$  uma família de pseudométricas em  $X$  e  $\tau$  a topologia gerada por estas pseudométricas. Então para todo  $x \in X$  e todo  $F$   $\tau$ -fechado tal que  $x \notin F$  existe uma função  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\tau$ -contínua tal que  $g(x) = 1$  e  $g[F] \subseteq \{0\}$ .

*Demonstração.* Podemos assumir sem perda de generalizada que as somas finitas de pseudométricas em  $\mathcal{R}$  estão em  $\mathcal{R}$ . Assim o conjunto das  $\rho$ -bolas abertas com  $\rho$  in  $\mathcal{R}$  formam uma base. Sejam  $x$  e  $F$  como no enunciado. Temos que  $X \setminus F$  é um aberto contendo  $x$ . Assim existe  $\rho \in \mathcal{R}$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $x \in B_\rho(x, \epsilon) \subseteq X \setminus F$ .

Seja  $A = X \setminus B_\rho(x, \epsilon) \supseteq F$ . Como  $\tau_\rho$  é menos fina que  $\tau$ , segue do teorema que existe  $g$  contínua tal que  $g(x) = 1$  e  $g[F] \subseteq g[A] = g[\overline{A}^{\tau\rho}] \subseteq \{0\}$ .  $\square$

O teorema abaixo é a versão métrica do Teorema de Urysohn que veremos daqui a algumas aulas (no caso o que une é o enunciado e não a demonstração).

**Teorema 10.11.** Seja  $X$  um espaço definido por uma pseudométrica. Sejam  $F$  e  $G$  dois conjunto fechado e disjuntos de  $X$ . Então existe uma função contínua  $g : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $g[G] \subseteq \{1\}$  e  $g[F] \subseteq \{0\}$ .

*Demonstração.* Como  $X$  é a topologia gerada pela pseudométrica, temos que  $F = \overline{F}^{\tau\rho}$  e  $G = \overline{G}^{\tau\rho}$ . Assim  $g(x) = \frac{\rho(x, F)}{\rho(x, G) + \rho(x, F)}$  é uma função contínua de  $X$  em  $[0, 1]$  tal que  $g(x) = 0$  se  $x \in F$  e  $g(x) = 1$  se  $x \in G$ .  $\square$

## 10.3 Grupos Topológicos.

### 10.3.1 Definição de grupo topológico.

Os grupos topológicos são definidos a partir da continuidade das suas operações. Como a definição serve para grupos Abelianos ou não-Abelianos, iremos usar a notação multiplicativa. Quando o grupo é Abeliano, em alguns casos é utilizado a notação aditiva.

**Definição 10.12.** Um conjunto  $G$  com uma operação binária  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  e uma operação unária  $^{-1} : G \rightarrow G$  e um elemento  $e$  é um grupo com estas operações se:

- 1)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  para todo  $x, y, z \in G$  (propriedade associativa).
- 2)  $x \cdot e = e \cdot x = x$  para cada  $x \in G$ .
- 3)  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ .

Um grupo é chamado de Abeliano se

- 4)  $x \cdot y = y \cdot x$  para todo  $x, y \in G$  (propriedade comutativa).

**Definição 10.13.** Seja  $\cdot$  a operação multiplicativa de um grupo,  $e$  seu elemento neutro e  $^{-1}$  a operação inversa. Dizemos que  $\tau$  é uma topologia de grupo para  $G$  se as funções

- 1)  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ , com  $G \times G$  com a topologia produto.
- 2)  $^{-1} : G \rightarrow G$ .

são contínuas. Neste caso, dizemos que  $G$  é um grupo topológico (munido com a topologia  $\tau$ ).

Dizemos que  $G$  é um grupo paratopológico se 1) é contínua (sem se preocupar com a continuidade de 2)

**Exemplo 10.14.** O  $\mathbb{R}$  com a topologia usual e a operação da soma é um grupo topológico.

A reta de Sorgenfrey é um grupo paratopológico que não é um grupo topológico.



*Demonstração.* O caso de  $\mathbb{R}$  fica a cargo do leitor.

Fixado  $(x, y)$  e  $\epsilon > 0$ ,  $[x + y, x + y + \epsilon[$  é uma vizinhança de  $x + y$  e  $[x + \frac{\epsilon}{2}][y + \frac{\epsilon}{2}[$  é uma vizinhança básica de  $(x, y)$  tal que  $[x + \frac{\epsilon}{2}][y + \frac{\epsilon}{2}[\subseteq [x + y, x + y + \epsilon[$ . Portanto  $+$  é contínua em  $(x, y)$ . Como  $(x, y)$  é arbitrária, segue que  $+$  é contínua.

Vamos mostrar que  $-$  não é contínua na topologia de Sorgenfrey, note que  $[0, 1[$  é uma vizinhança aberta de 0 na reta de Sorgenfrey, mas dada uma vizinhança  $U$  de 0, existe  $\delta > 0$  tal que  $[0, 2\delta[\subseteq U$ . Agora  $\delta \in U$  e  $-\delta \notin [0, 1[$ , portanto  $-U \not\subseteq [0, 1[$  para toda vizinhança  $U$  de 0. Logo  $-$  não é contínua em 0 (o mesmo argumento serve para qualquer outro ponto).  $\square$

Como a translação é uma operação contínua, o conjunto de todas as vizinhanças de um ponto podem ser encontradas por translação. Assim ao tentar definir uma topologia de grupo usando sistemas de vizinhanças, é razoável esperar que possamos definir a topologia definindo apenas um sistema fundamental de vizinhanças de  $e$  e obtendo as vizinhanças dos outros pontos por translação.

Como o grupo pode não ser Abelian, pode haver diferenças entre translações à direita ou à esquerda.

Vamos analisar um pouco a situação para as vizinhanças de  $e$  para um espaço topológico  $G$ . Dado uma vizinhança aberta  $W$  de  $e$ , como  $e \cdot e = e$ , existe  $O, V$  abertos contendo  $e$  tal que  $O \cdot V \subseteq W$ . Tomando a intersecção  $U = O \cap V$ , segue que

$$1) U^2 := U \cdot U \subseteq W.$$

Se  $W$  é uma vizinhança aberta de  $e$ , a continuidade da inversa implica que existe  $V$  vizinhança aberta de  $e$  tal que

$$2) V^{-1} \subseteq W.$$

Se  $x \in V$  então pela translação contínua, segue que existe  $U$  vizinhança de  $e$  tal que

$$3) x \cdot U \subseteq V.$$

Se  $U$  é uma vizinhança de  $e$ , pela continuidade das translações, temos que para cada  $x \in X$ ,  $x \cdot U$  é uma vizinhança de  $x$  e  $x \cdot U \cdot x^{-1}$  é uma vizinhança de  $e$ . Temos que estes tipos de vizinhanças são um sistema de fundamental de vizinhanças de  $e$  (isto relaciona as translações à direita e à esquerda com vizinhanças de  $e$ ). Então para todo  $V$ , existe  $U$  tal que

$$4) x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq V.$$

**Lema 10.15.** Para todo  $W$  vizinhança aberta de  $e$  no grupo topológico  $G$  existe  $U$  vizinhança aberta de  $e$  tal que  $U \subseteq W$  e  $U^{-1} = U$ .

*Demonstração.* Como  $W$  é aberto, temos que  $W^{-1}$  é aberto. Como  $e^{-1} = e$ , temos que  $W^{-1}$  é vizinhança aberta de  $e$ . Logo  $U = W \cap W^{-1}$  é vizinhança aberta de  $e$  contida em  $W$ . Além disso,  $x \in U$  se e somente se  $x \in W \cap W^{-1}$  se e somente se  $x^{-1} \in W^{-1} \cap W$  se e somente se  $x^{-1} \in U$ .  $\square$

**Definição 10.16.** Dizemos que  $U$  é uma vizinhança simétrica de  $e$  se  $U = U^{-1}$ .

**Proposição 10.17.** Grupos topológicos  $T_0$  são  $T_1$ .

Todo grupo topológico é regular.

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in G$ . Como  $G$  é  $T_0$ , trocando  $x$  e  $y$  de posição se necessário, existe  $W$  aberto tal que  $x \in W$  e  $y \notin W$ . Seja  $V$  vizinhança aberta de  $e$  tal que  $x \cdot V \subseteq W$ . Então  $y \notin x \cdot V$ . Temos que  $V^{-1}$  é uma vizinhança de  $e$ , assim  $y \cdot V^{-1}$  é vizinhança de  $y$ . Afirmamos que  $x \notin y \cdot V^{-1}$ . De fato, se  $x \in y \cdot V^{-1}$  então existe  $z \in V^{-1}$  tal que  $x = y \cdot z$ . Assim,  $y = x \cdot z^{-1} \in x \cdot V$ , contradição. Portanto existe uma vizinhança de  $y$  que separa  $x$ , assim  $X$  é  $T_1$ .

Seja  $x \in G$  e  $V$  um aberto tal que  $x \in V$ . Seja  $W$  uma vizinhança de  $e$  tal que  $x \cdot W \subseteq V$ . Tome  $U$  uma vizinhança simétrica de  $e$  tal que  $U \cdot U \subseteq W$ . Seja  $y \in \overline{x \cdot U}$ . Então  $y \cdot U \cap x \cdot U \neq \emptyset$ . Então existe  $z_1, z_2 \in U$  tais que  $y \cdot z_1 = x \cdot z_2$ . Portanto, segue que  $x^{-1} \cdot y = z_2 \cdot (z_1)^{-1} \in U \cdot U^{-1} = U \cdot U \subseteq W$ . Assim,  $y \in x \cdot W$  e  $x \cdot \overline{U} \subseteq x \cdot W \subseteq V$ . Assim,  $G$  é regular em  $x$ . Como  $x$  é arbitrário, temos que  $G$  é regular.  $\square$

### 10.3.2 Topologia de grupo gerada pelo sistema de vizinhanças do elemento neutro.

**Teorema 10.18.** Seja  $\mathcal{V}_e$  uma família não vazia de subconjuntos de  $G$  contendo  $e$  tais que

GT1) para cada  $W \in \mathcal{V}_e$ , existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $U^2 \subseteq W$ .

GT2) para cada  $W \in \mathcal{V}_e$  existe  $V \in \mathcal{V}_e$  tal que  $V^{-1} \subseteq W$ .

GT3) para cada  $V \in \mathcal{V}_e$  e para cada  $x \in V$  existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $x \cdot U \subseteq V$ .

GT4) para cada  $V \in \mathcal{V}_e$  e para cada  $x \in X$  existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq V$ .

GT5) para cada  $V, W \in \mathcal{V}_e$  existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $U \subseteq V \cap W$ .

Então  $\{\mathcal{V}_x : x \in G\}$ , onde  $\mathcal{V}_x = \{x \cdot U : U \in \mathcal{V}_e\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia de grupo.

Além disso,  $\{\mathcal{W}_x : x \in G\}$ , onde  $\mathcal{W}_x = \{U \cdot x : U \in \mathcal{V}_x\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças para a topologia acima.

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que temos um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia. Temos que  $\mathcal{V}_x$  é não vazio e pela definição se  $W \in \mathcal{V}_x$  então existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $W = x \cdot U \ni x \cdot e = x$ . Logo  $x \in W$ . Assim BL1) está satisfeita.

Se  $W_1, W_2 \in \mathcal{V}_x$  então existem  $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_e$  tal que  $W_1 = x \cdot U_1$  e  $W_2 = x \cdot U_2$ . Por GT5), existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $U \subseteq U_1 \cap U_2$ . Então  $x \cdot U \in \mathcal{V}_x$  e  $x \cdot U \subseteq (x \cdot U_1) \cap (x \cdot U_2) = W_1 \cap W_2$ . Assim, BL2) está satisfeita.

Seja  $x \in G$ ,  $W \in \mathcal{V}_x$  e  $y \in W$  então existe  $V \in \mathcal{V}_e$  tal que  $W = x \cdot V$ . Logo,  $x^{-1} \cdot y \in x^{-1} \cdot W = x^{-1} \cdot x \cdot V = V$ . Então por GT3), existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $x^{-1} \cdot y \cdot U \subseteq V$ . Portanto  $x \cdot x^{-1} \cdot y \cdot U \subseteq x \cdot V$ . Portanto,  $y \cdot U \subseteq x \cdot V = W$ . Assim BL3) está satisfeita, pois  $y \cdot U \in \mathcal{V}_y$ .

Seja  $\tau$  a topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças.

Vamos mostrar que  $\cdot$  é contínua. Dado  $x, y \in G$ , tome  $W \in \mathcal{V}_{x \cdot y}$  e seja  $V \in \mathcal{V}_e$  tal que  $x \cdot y \cdot V \subseteq W$ . Por GT1) existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $U^2 \subseteq V$ . Usando GT4) existe  $O \in \mathcal{V}_e$  tal que  $y^{-1} \cdot O \cdot y \subseteq U$ . Assim,  $O \subseteq y \cdot U \cdot y^{-1}$ . Temos que  $(x \cdot O) \times (y \cdot U)$  é uma vizinhança básica de  $(x, y)$  e  $x \cdot O \cdot y \cdot U \subseteq x \cdot y \cdot U \cdot y^{-1} \cdot y \cdot U = x \cdot y \cdot U \cdot U \subseteq x \cdot y \cdot V \subseteq W$ . Assim,  $\cdot$  é contínua em  $(x, y)$ . Como  $(x, y) \in G^2$  é arbitrária, segue que  $\cdot$  é contínua.

Vamos mostrar que  $^{-1}$  é contínua. Seja  $x \in G$  e  $W \in \mathcal{V}_e$ . Então  $x^{-1} \cdot W$  é uma vizinhança básica arbitrária de  $x^{-1}$ . Existe  $V \in \mathcal{V}_e$  tal que  $x \cdot V \cdot x^{-1} \subseteq W$ , por GT4). Então  $V \subseteq x^{-1} \cdot W \cdot x$ . Usando GT2), tome  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $U^{-1} \subseteq V$ . Então  $x \cdot U$  é vizinhança de  $x$  e  $(x \cdot U)^{-1} = U^{-1} \cdot x^{-1} \subseteq V \cdot x^{-1} \subseteq x^{-1} \cdot W \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot W$ . Assim,  $^{-1}$  é contínua em  $x$ . Como  $x$  é um ponto arbitrário de  $G$ , segue que  $^{-1}$  é contínua.

Para terminar, fixe  $x \in G$ . Vamos mostrar que  $\mathcal{W}_x$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$ . Primeiro precisamos checar que  $W \cdot x$  é um aberto na topologia para cada  $W \in \mathcal{V}_e$ . Dado  $y \in W \cdot x$ , temos que  $y \cdot x^{-1} \in W$ . Por GT3), existe  $V \in \mathcal{V}_e$  tal que  $y \cdot x^{-1} \cdot V \subseteq W$ . Por GT4), tome  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq V$ . Assim,  $y \cdot x^{-1} \cdot x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq W$ . Portanto,  $y \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq W$  e  $y \cdot U \subseteq W \cdot x$ . Como  $y \in W \cdot x$  é arbitrário segue que  $W \cdot x$  é um aberto.

Dada um vizinhança  $x \cdot W$  com  $W \in \mathcal{V}_e$ . Pela GT4). existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $x^{-1} \cdot U \cdot x \subseteq W$ . Assim,  $U \subseteq x \cdot W \cdot x^{-1}$ . Portanto,  $U \cdot x \subseteq x \cdot W \cdot x^{-1} \cdot x = x \cdot W$ .  $\square$

Note que GT4) está sempre satisfeita para grupos Abelianos.

**Exemplo 10.19.** Seja  $G$  um grupo Abeliano e  $\mathcal{V}_e$  uma família de subgrupos fechada por intersecções finitas (ou seja, a intersecção de um número finito de elementos da família pertence à família). Então  $\mathcal{V}_e$  gera uma topologia de grupo para  $G$ .

# Capítulo 11

## Produtos. Imersão.

### 11.1 Produtos Infinitos. O Axioma da Escolha. Produto caixa.

Quando tratamos do produto de dois conjuntos, seus elementos são vistos como pares ordenados. No caso de um produto finito, são vistos como uma  $n$ -upla, fixando um bijeção entre a família finita de conjuntos e um natural  $n$  que servirá de índice. Para o produto infinito, isto precisa de uma formulação melhor.

Dada uma família  $\{X_i : i \in I\}$ , iremos considerar os elementos de  $\prod_{i \in I} X_i$  como funções  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$  tal que  $f(i) \in X_i$  para todo  $i \in I$ .

Em geral, a primeira reação ao trabalhar com um produto infinito é tomar um elementos. Ao tomar um elemento, já estamos aplicando o Axioma da Escolha (já utilizamos o Axioma da Escolha diversas vezes aqui sem fazer menção dele).

**Definição 11.1. O Axioma da Escolha** é a afirmação: Para toda família  $\{X_i : i \in I\}$  tal que  $X_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in I$ , o conjunto  $\prod_{i \in I} X_i$  é não vazio.

O Axioma da Escolha é consistente com os outros axiomas usuais da teoria dos conjuntos (resultado demonstrado por Gödel na década de 1940). Falando toscamente, consistente significa que você não aumenta o risco de mostrar que os axiomas usuais levam a uma contradição se assumir o Axioma da Escolha. Ou seja, se chegarmos a uma contradição usando os axioma usuais da teoria dos conjuntos e o Axioma da Escolha, então existe uma contradição apenas usando os axiomas usuais da teoria dos conjuntos sem usar o Axioma da Escolha.

Na década de 1960, Cohen provou que a negação do Axioma da Escolha também é consistente com os outros axiomas usuais da teoria dos conjuntos criando uma técnica chamada de forcing. Neste caso, dizemos que o Axioma da Escolha é independente dos axiomas usuais da teoria dos conjuntos.

Em geral, iremos continuar a usar o Axioma da Escolha sem fazer menção do uso dele, com exceção de quando utilizarmos alguma de suas diversas equivalências.

#### 11.1.1 ‘Que topologia para o produto de espaços topológicos arbitrários combina melhor com o produto finito?’

Talvez a mais natural de se pensar seja (como foi o caso historicamente) tomar um aberto de cada coordenada e tomar o produto destes para formar uma base.

**Definição 11.2.** Seja  $\{X_i : i \in I\}$  uma família não vazia de espaços topológicos, onde  $X_i$  está munido com uma topologia  $\tau_i$  para cada  $i \in I$ . O produto-caixa (‘box-product’ em inglês) é a topologia gerada pela base  $\{\prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i\}$ .

**Exemplo 11.3.** O produto caixa de espaços discretos é um espaço discreto. Basta notar que se  $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$  então  $\prod_{i \in I} \{x_i\}$  é um aberto cujo único elemento é  $(x_i : i \in I)$ .

Este produto torna os abertos ‘muito pequenos’ e acabou caindo em desuso com a prova do teorema de Tychonoff usando o que é chamado agora de produto de Tychonoff.

Note que se tomarmos uma sub-base  $\mathcal{S}_i$  para  $X_i$  para cada  $i \in I$ ,  $\bigcup_{j \in I} \{U_j \times \prod_{j \neq i} X_i : U_j \in \mathcal{S}_j\}$  é uma sub-base para uma topologia em  $\prod_{i \in I} X_i$  menos fina que a topologia caixa. A relação pode

ser estrita, pois as intersecções finitas podem não recuperar os abertos básicos do produto caixa. Esta sub-base vai ser uma base da topologia de Tychonoff.

## 11.2 Produto de Tychonoff.

### 11.2.1 Definição do produto de Tychonoff.

Antes de definirmos o produto de Tychonoff, iremos definir suporte.

**Definição 11.4.** Dado  $\prod_{i \in I} A_i$ , onde  $\emptyset \neq A_i \subseteq X_i$  para cada  $i \in I$ , dizemos que o suporte de  $\prod_{i \in I} A_i$  é o conjunto  $\{i \in I : A_i \neq X_i\}$ . Se este conjunto é finito, diremos que o suporte é finito.

Note que a base de abertos do produto caixa consiste de um produto de abertos de suporte arbitrário. O produto de Tychonoff limita o suporte utilizado.

**Definição 11.5.** Seja  $\{X_i : i \in I\}$  uma família não vazia de espaços topológicos, onde  $X_i$  está munido com uma topologia  $\tau_i$  para cada  $i \in I$ . O produto de Tychonoff é a topologia gerada pela base  $\{\prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i \text{ tal que } \prod_{i \in I} U_i \text{ tem suporte finito}\}$ .

**Exemplo 11.6.** Seja  $X_i$  com pelo menos dois pontos para cada  $X_i$  e  $I$  infinito. Então  $\prod_{i \in I} X_i$  com a topologia de Tychonoff não possui pontos isolados.

De fato, seja  $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$  e seja  $V$  é uma vizinhança arbitrária de  $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$ . Então existe um aberto da base  $\prod_{i \in I} U_i$  tal que  $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq V$ . Seja  $J$  o suporte de  $\prod_{i \in I} U_i$ . Como  $J$  é finito e  $I$  é infinito, temos  $I \setminus J$  infinito. Então o conjunto  $\prod_{j \in J} \{x_j\} \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \subseteq \prod_{i \in I} U_i \subseteq V$ . Assim,  $V$  possui infinitos pontos (na verdade uma quantidade não enumerável) e portanto nenhum ponto de  $\prod_{i \in I} X_i$  é isolado.

**Proposição 11.7.** Se  $A_i \subseteq X_i$ , para todo  $1 \leq i \in I$ , então  $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ .

*Demonstração.* Seja  $x_i \in X_i$  e  $\mathcal{V}_{x_i}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_i$  para cada  $i \in I$ . Seja  $\mathcal{V}$  o sistema fundamental de vizinhanças de  $(x_i : i \in I)$  definido a partir dos abertos básicos usando  $\mathcal{V}_{x_i}$

Então  $(x_i : i \in I) \in \overline{\prod_{i \in I} A_i}^{\prod_{i \in I} X_i}$  se e somente se  $U \cap \prod_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$  para cada  $U = \prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{V}$  se e somente se  $\prod_{i \in I} (U_i \cap A_i) \neq \emptyset$  se e somente se  $W_i \cap A_i \neq \emptyset$  para cada  $W_i \in \mathcal{V}_{x_i}$  e  $i \in I$  se e somente se e somente se  $x_i \in \overline{A_i}^{X_i}$  para  $i \in I$  se e somente se  $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}^{X_i}$ .  $\square$

**Proposição 11.8.** Se  $Y_i$  é um subespaço de  $X_i$  para cada  $i \in I$  então a topologia de subespaço de  $\prod_{i \in I} Y_i$  como subespaço de  $\prod_{i \in I} X_i$  coincide com a topologia de produto dos subespaços  $Y_i$ .

*Demonstração.* A topologia de subespaço de  $Y = \prod_{i \in I} Y_i$  é dada pela base  $\{(\prod_{i \in I} U_i) \cap Y : U_i \in \tau_i \text{ tal que } \prod_{i \in I} U_i \text{ tem suporte finito}\}$ .

A topologia do produto de subespaços  $\prod_{i \in I} Y_i$  é dada pela base  $\{\prod_{i \in I} (U_i \cap Y_i) : U_i \in \tau_i \text{ tal que } \prod_{i \in I} (U_i \cap Y_i) \text{ tem suporte finito}\}$  (neste caso se não estiver no suporte  $U_i \cap Y_i = Y_i$ ).

Basta notar que  $(\prod_{i \in I} U_i) \cap Y = \prod_{i \in I} (U_i \cap Y_i)$  para concluirmos que as bases são iguais e portanto temos a mesma topologia.  $\square$

Obviamente o caso interessante é tomar outros tipos de subespaços.

**Teorema 11.9.** Seja  $\mathcal{B}_i$  uma base para  $X_i$  para cada  $i \in I$ . Então  $\{\prod_{i \in I} U_i : \exists J \subseteq I \text{ finito}, U_j \in \mathcal{B}_j \forall j \in J \text{ e } U_i = X_i \forall i \in I \setminus J\}$  é uma base para a topologia de Tychonoff de  $\prod_{i \in I} X_i$ .

Seja  $\mathcal{S}_i$  uma sub-base para  $X_i$  para cada  $i \in I$ . Então  $\bigcup_{j \in I} \{U_j \times \prod_{j \neq i} X_i : U_j \in \mathcal{S}_j\}$  é uma sub-base a topologia de Tychonoff de  $\prod_{i \in I} X_i$ .

Seja  $\mathcal{V}_{x_i}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_i$  em  $X_i$  para cada  $i \in I$ . Então  $\{\prod_{i \in I} U_i : \exists J \subseteq I \text{ finito}, U_j \in \mathcal{V}_{x_j} \forall j \in J \text{ e } U_i = X_i \forall i \in I \setminus J\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $(x_i : i \in I)$  em  $\prod_{i \in I} X_i$  para a topologia de Tychonoff de  $\prod_{i \in I} X_i$ .

### 11.2.2 Convergência em produtos.

**Definição 11.10.** Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow Y$  é aberta se  $f[U]$  é aberto em  $Y$ , para todo  $U$  aberto de  $X$ .

**Lema 11.11.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  e  $\mathcal{B}$  é uma base de  $X$ . Então  $f$  é uma função aberta se e somente se  $f[U]$  é aberto para todo  $U \in \mathcal{B}$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ). Basta usar a hipótese e o fato que elementos da base são abertos.

( $\leftarrow$ ). Se  $W$  é um aberto de  $X$ , então seja  $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{B} : U \subseteq W\}$ . Como  $\mathcal{B}$  é base, temos que  $\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\} = W$ . Assim,  $f[W] = f[\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}] = \bigcup\{f[U] : U \in \mathcal{V}\}$ , pois a união das imagens é imagem da união.  $\square$

**Proposição 11.12.** Seja  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  a projeção na coordenada  $j$ . A projeção  $\pi_j$  é contínua e aberta, para cada  $j \in I$ . A topologia inicial de  $\{\pi_i : i \in I\}$  é a topologia de Tychonoff.

*Demonstração.* Fixe  $j \in I$  e  $U_j$  um aberto de  $X_j$ . Então  $\pi_j^{-1}[U_j] = U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$  é um aberto na topologia produto. Assim,  $\pi_j$  é uma função contínua.

Seja  $\prod_{i \in I} U_i$  um aberto básico na topologia produto. Então  $\pi_j[\prod_{i \in I} U_i] = U_j$  é aberto em  $X_j$ . Como os abertos básicos do produto formam uma base da topologia, segue que  $\pi_j$  é uma função aberta.

Vamos agora verificar que a topologia produto coincide com a topologia das projeções.

Já vimos que  $\pi_j$  é contínua na topologia produto, para cada  $j \in I$ . Assim, a topologia produto é mais fina que a topologia gerada pelas projeções.

Por outro lado, vimos que os abertos básicos  $U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$  com  $U_j$  aberto em  $X_j$  e  $j \in I$  formam uma subbase da topologia produto e estas são abertos na topologia gerada pelas projeções por serem da forma  $\pi_j^{-1}[U_j]$ .  $\square$

**Corolário 11.13.**  $f : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  é contínua se e somente se  $\pi_j \circ f$  é contínua para cada  $j \in I$ .

*Demonstração.* Segue do fato da topologia produto ser a topologia gerada pelas projeções.  $\square$

**Proposição 11.14.** Seja  $S = ((x_{i,\lambda}) : i \in I) : \lambda \in \Lambda$  uma rede em  $\prod_{i \in I} X_i$ . Então  $S$  converge para  $(x_i : i \in I)$  se e somente se  $S_i = (x_{i,\lambda} : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $x_i$  para todo  $i \in I$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ). Se  $S$  converge para  $(x_i : i \in I)$ , pela continuidade de  $\pi_j$  segue que  $(\pi_j((x_{i,\lambda}) : i \in I)) : \lambda \in \Lambda = (x_{j,\lambda} : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $\pi_j((x_i : i \in I)) = x_j$ .

Reciprocamente, seja  $U = \prod_{i \in I} U_i$  um aberto básico da topologia produto contendo  $(x_i : i \in I)$ . Seja  $J = \{i \in I : U_i \neq X_i\}$  o suporte de  $\prod_{i \in I} U_i$  ( $J$  é finito por definição de aberto básico). Para cada  $j \in J$ , fixe  $\lambda_j$  tal que  $x_{j,\lambda} \in U_j$  para cada  $\lambda \geq \lambda_j$ . Como  $\Lambda$  é dirigido e  $J$  é finito, existe  $\lambda^*$  tal que  $\lambda^* \geq \lambda_j$  para cada  $j \in J$ . Assim  $x_{j,\lambda} \in U_j$ , para cada  $j \in J$  e  $\lambda \geq \lambda^*$ .

Portanto  $((x_{i,\lambda}) : i \in I) \in U$  para cada  $\lambda \geq \lambda^*$ . Como os abertos básicos formam uma base de abertos, segue que a rede  $S$  converge.  $\square$

**Proposição 11.15.** Seja  $\mathcal{F}$  um filtro  $\prod_{i \in I} X_i$  e seja  $\mathcal{F}_i$  o filtro gerado por  $\{\pi_i[F] : F \in \mathcal{F}\}$ . Então  $\mathcal{F}$  converge para  $(x_i : i \in I)$  se e somente se  $\mathcal{F}_i$  converge para  $x_i$  para todo  $i \in I$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ). Suponha que  $\mathcal{F}$  converge para  $(x_i : i \in I)$ . Então as vizinhanças de  $(x_i : i \in I)$  são elementos de  $\mathcal{F}$ . Dado  $j \in I$  e  $U_j$  uma vizinhança aberta de  $x_j$ , temos que  $\pi_j^{-1}[U_j]$  é vizinhança de  $(x_i : i \in I)$ . Logo,  $\pi_j^{-1}[U_j] \in \mathcal{F}$ . Portanto,  $\pi_j[\pi_j^{-1}[U_j]] = U_j \in \mathcal{F}_j$ . Assim, toda vizinhança de  $x_j$  pertence a  $\mathcal{F}_j$ . Portanto,  $\mathcal{F}_j$  converge para  $x_j$ .

( $\leftarrow$ ). Se  $\mathcal{F}_i$  converge para  $x_i$  para cada  $i \in I$  então toda vizinhança  $U_i$  de  $x_i$  em  $X_i$  está no filtro  $\mathcal{F}_i$ . Assim, existe  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $\pi_i[F] \subseteq U_i$ . Portanto  $F \subseteq \pi_i^{-1}[U_i]$ . Como  $\mathcal{F}$  é filtro e  $F \in \mathcal{F}$ , segue que  $\pi_i^{-1}[U_i] \in \mathcal{F}$ . Como  $\mathcal{F}$  é filtro segue que todas as vizinhanças abertas básicas que contém  $(x_i : i \in I)$  pertencem a  $\mathcal{F}$ . Assim,  $\mathcal{F}$  converge para  $(x_i : i \in I)$ .  $\square$



Figura 11.1: A topologia de Tychonoff é a topologia inicial das projeções.

### 11.2.3 Propriedade produtiva.

**Definição 11.16.** Dizemos que uma propriedade é produtiva se dada uma propriedade  $\mathcal{P}$ , se cada espaço numa família tem  $\mathcal{P}$  então o produto de Tychonoff dessa família tem propriedade  $\mathcal{P}$ .

Dizemos que a propriedade é finitamente (enumeravelente) produtiva se cada espaço da família tem  $\mathcal{P}$  e a família de espaços é finita (enumerável) então o produto de Tychonoff dessa família tem a propriedade  $\mathcal{P}$ .

**Corolário 11.17.** O primeiro axioma de enumerabilidade é enumeravelmente produtiva.

O segundo axioma de enumerabilidade é enumeravelmente produtiva.

*Demonstração.* Se  $I$  é enumerável e  $X_i$  satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade para cada  $i \in I$  então tomando uma base enumerável  $\mathcal{B}_i$  para cada  $X_i$ , a base de abertos usando os  $\mathcal{B}_i$ 's é enumerável e portanto  $\prod_{i \in I} X_i$  satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Se  $I$  é enumerável e  $X_i$  satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade para cada  $i \in I$  então tomando uma base enumerável  $\mathcal{V}_{x_i}$  para um ponto  $x_i$  de  $X_i$ , a base local de abertos usando os  $\mathcal{V}_{x_i}$ 's é enumerável e portanto  $\prod_{i \in I} X_i$  satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.  $\square$

**Proposição 11.18.** Os axiomas de separação  $T_0$ ,  $T_1$ , Hausdorff e regular são propriedades produtivas.

*Demonstração.* Dados dois pontos distintos  $(x_i : i \in I)$  e  $(y_i : i \in I)$ . Existe  $j \in I$  tal que  $x_j \neq y_j$ . Sejam  $U_j$  e  $V_j$  as testemunhas para  $T_0$ ,  $T_1$  ou Hausdorff para  $x_j$  e  $y_j$  em  $X_j$ . Então  $U = U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$  e  $V = V_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$  são as testemunhas, pois

$$\begin{aligned} U \cap V &= (U_j \cap V_j) \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i, \\ (x_i : i \in I) \in V &\text{ se e so se } x_j \in V_j \text{ e} \\ (y_i : i \in I) \in U &\text{ se e so se } y_j \in U_j. \end{aligned}$$

Vamos agora verificar que a regularidade é produtiva. Seja  $(x_i : i \in I)$  e tome  $W$  um aberto contendo este ponto. Existe então um aberto básico  $U$  de suporte finito  $J$  tal que  $(x_i : i \in I) \in U = \prod_{i \in I} U_i \subseteq W$ . Para cada  $j \in J$  segue da regularidade de  $X_j$  que existe  $V_j$  vizinhança aberta de  $x_j$  em  $X_j$  tal que  $x_j \in V_j \subseteq \overline{V_j}^{X_j} \subseteq U_j$ . Tome  $V = \prod_{j \in J} V_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$ . Então  $(x_i : i \in I) \in V \subseteq \overline{V}^{\prod_{i \in I} X_i} = \prod_{j \in J} \overline{V_j}^{X_j} \times \prod_{i \in I \setminus J} \overline{X_i}^{X_i} \subseteq \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i = U \subseteq W$ . Assim, o produto  $\prod_{i \in I} X_i$  é regular.  $\square$

O próximo exemplo usa um argumento diagonal.

**Exemplo 11.19.** Seja  $X_i = \{a_i, b_i\}$  com a topologia discreta para cada  $i \in I$  com  $I$  não enumerável. Então  $\prod_{i \in I} X_i$  não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade (e por isso, também não satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade).

*Demonstração.* Suponha que  $(a_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$  possua uma base local enumerável  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Podemos supor que cada  $V_n$  é um aberto básico e tome  $J_n$  o suporte de  $V_n$ . Como  $J_n$  é finito, segue que  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$  é enumerável. Como  $I$  é não enumerável, existe  $k \in I \setminus J$ . Então  $U = \{a_k\} \times \prod_{i \in I \setminus \{k\}} X_i$  é uma vizinhança  $(a_i : i \in I)$ .

Como  $V_n$  e  $U$  são abertos básicos do produto, temos que  $V_n \subseteq U$  implica que suporte  $U$  é um subconjunto do suporte de  $V_n$ . Mas,  $k \notin J_n$ , assim,  $V_n \not\subseteq U$  e  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  não é uma base local, contradição.  $\square$

**Corolário 11.20.** Seja  $X_i$  um produto de espaços  $T_1$  com pelo menos dois pontos para cada  $i \in I$  com  $I$  não enumerável. Então todos os pontos de  $\prod_{i \in I} X_i$  não possuem base local enumerável.

*Demonstração.* Seja  $(a_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$  um ponto arbitrário. Para cada  $i \in I$  fixe um ponto  $b_i \in X_i \setminus \{a_i\}$ . Então  $(a_i : i \in I)$  não possui base enumerável em  $\prod_{i \in I} \{a_i, b_i\}$ . Claramente,  $\prod_{i \in I} \{a_i, b_i\}$  é um subespaço de  $\prod_{i \in I} X_i$  e portanto,  $\prod_{i \in I} X_i$  também não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.  $\square$

Fixe  $x_i \in X_i$ . Se  $D_i$  é denso em  $X_i$  para todo  $i \in I$  então  $D = \{(y_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i : \exists J \subseteq I$  finito  $y_j \in D_j \forall j \in J$  e  $y_i = x_i \forall i \in I \setminus J\}$  é denso em  $\prod_{i \in I} X_i$ . Para ver isto, mas notar que todo aberto básico interessa  $D$ .

Em particular, temos que o produto enumerável de espaços satisfazendo o terceiro axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade. Veremos que este resultado pode ser melhorado.

#### 11.2.4 Produto não enumerável de espaços satisfazendo o terceiro axioma de enumerabilidade.

A prova utiliza funções ‘escada’ e usar uma base num conjunto de índices para construir um denso pequeno.

**Teorema 11.21. Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery** (caso enumerável). Seja  $\{X_i : i \in 2^{\mathbb{N}}\}$  uma família de espaços que satisfazem o terceiro axioma de enumerabilidade. Então  $\prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} X_i$  satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

*Demonstração.* Para cada  $i \in 2^{\mathbb{N}}$ , fixe  $D_i$  um subconjunto denso enumerável de  $X_i$ .

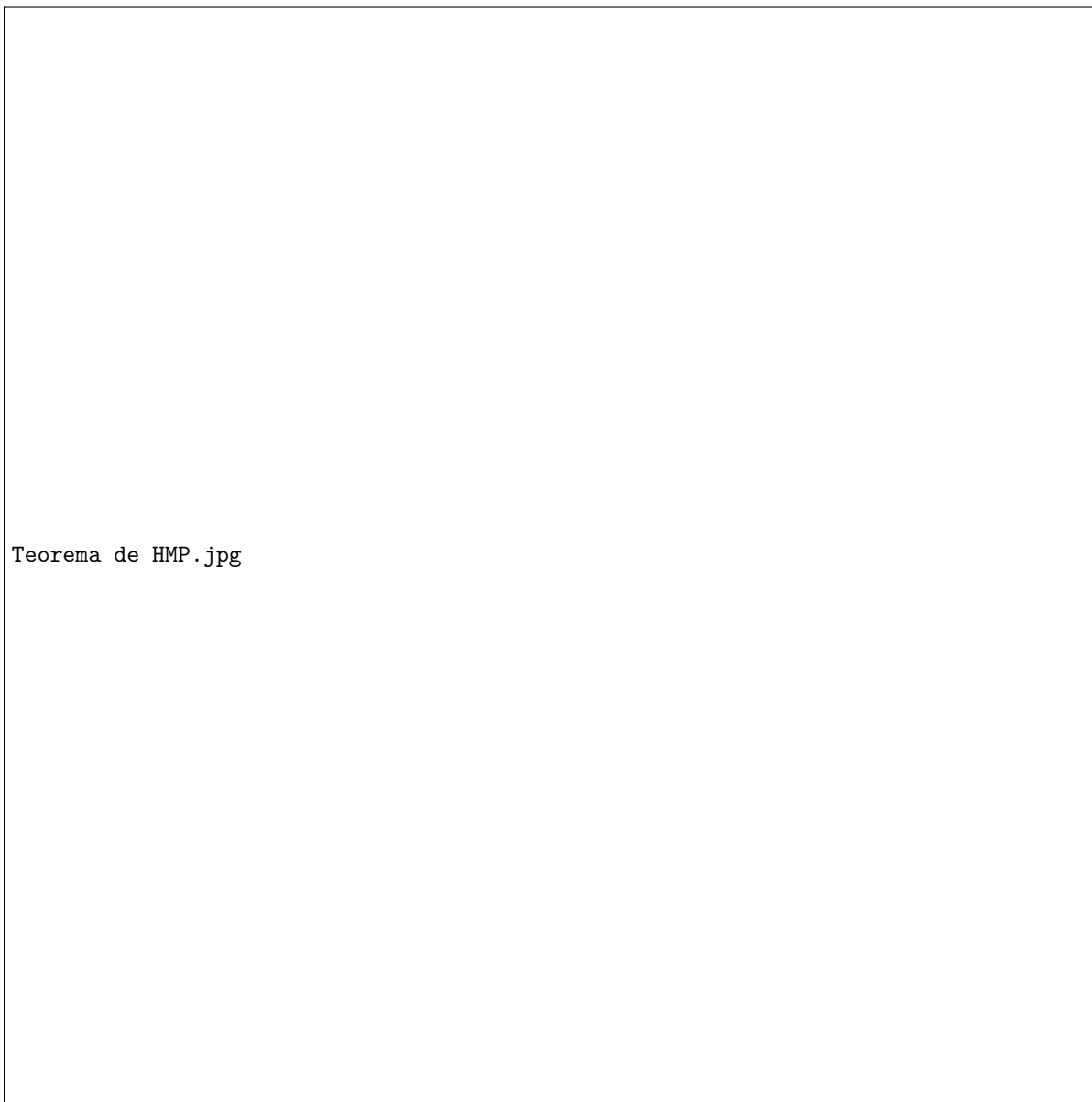
Seja  $\mathcal{B}$  uma base enumerável de  $2^{\mathbb{N}}$  (tomando  $2 = \{0, 1\}$  com a topologia discreta e  $2^{\mathbb{N}}$  com a topologia de Tychonoff). Seja  $\mathcal{F}$  a família de subconjuntos finitos  $\{B_1, \dots, B_n\}$  de  $\mathcal{B}$  tal que  $B_1, \dots, B_n$  são dois a dois disjuntos.

A família  $\mathcal{F}$  é enumerável. Seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções  $f$  tal que  $f$  tem domínio  $\mathcal{B}' \in \mathcal{F}$  e  $f(B) \in \mathbb{N}$  para cada  $B \in \mathcal{B}'$ . Então  $f \in \mathcal{D} := \bigcup_{\mathcal{B}' \in \mathcal{F}} \mathbb{N}^{\mathcal{B}'}$ . Como cada  $\mathcal{B}'$  é finito, logo cada  $\mathbb{N}^{\mathcal{B}'}$  é enumerável. Como  $\mathcal{F}$  é enumerável, segue que  $\mathcal{D}$  é enumerável. *A  $f$  é uma função escada no conjunto de índices.*

Para cada  $f \in \mathcal{D}$ , vamos associar um ponto de  $\prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} X_i$ . Antes, enumere cada  $D_i$  como  $\{d_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$  (pode haver repetição se for um conjunto finito). Defina  $x_f = (x_{f,i} : i \in 2^{\mathbb{N}})$  tal que  $x_{f,i} = d_{i,f(B)}$  se existe algum  $B \in \mathcal{B}' = \text{dom } f$  tal que  $i \in B$  e  $x_{f,i} = d_{i,0}$  se  $i \notin \bigcup \mathcal{B}'$ .

Vamos provar que  $D = \{x_f : f \in \mathcal{D}\}$  é denso em  $\prod_{i \in I} X_i$ . De fato, tome  $\prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} U_i$  um aberto básico de  $\prod_{i \in I} X_i$ . Como o suporte  $J$  desse aberto é finito e  $2^{\mathbb{N}}$  é um espaço Hausdorff, existe  $\{B_j : j \in J\}$  abertos de  $\mathcal{B}$  dois a dois disjuntos tais que  $j \in B_j$  para cada  $j \in J$ . Então  $\{B_j : j \in J\} \in \mathcal{F}$ . Como  $D_j$  é denso em  $X_j$ , fixe  $n_j \in \mathbb{N}$  tal que  $d_{j,n_j} \in U_j$  para cada  $j \in J$ . Seja  $g \in \mathcal{D}$  tal que  $\text{dom } g = \{B_j : j \in J\} \in \mathcal{F}$  e  $g(B_j) = n_j$  para cada  $j \in J$ .

Então  $x_{g,j} = d_{j,g(B_j)} = d_{j,n_j} \in U_j$  para cada  $j \in J$ . Logo  $x_g \in \prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} U_i$  e  $D \cap \prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} U_i \neq \emptyset$ . Assim,  $D$  é denso enumerável.  $\square$



Teorema de HMP.jpg

Figura 11.2: O teorema de Hewitt Marczewski Pondiczery.



## 11.3 'Aquecimento antes de imergir'.

Vimos anteriormente como definir um subespaço a partir de um espaço. Podemos pensar no processo inverso: dado um espaço topológico  $Y$ , queremos ver  $Y$  como um subespaço de algum espaço  $X$  com propriedades interessantes. Por exemplo, construir os reais a partir dos racionais. Como no caso da construção dos reais, temos uma cópia usando uma função que preserva a ordem e as propriedades das operações dos racionais.

No caso de espaços topológicos, isto significa usar funções contínuas.

**Definição 11.22.** Dizemos que  $f : Y \rightarrow X$  é uma imersão contínua se  $f : Y \rightarrow f[Y]$  é um homeomorfismo, onde  $f[Y]$  está equipada com a topologia de subespaço de  $X$ .

Podemos começar com a situação que temos uma função injetora num produto de espaços e usar a topologia inicial para gerar uma topologia. Neste caso, vamos ter uma imersão.

**Exemplo 11.23.** Seja  $Y$  um subespaço topológico de  $X$ . A função  $i : Y \rightarrow X$  tal que  $y \mapsto y$  é uma imersão contínua. É comum identificarmos  $f[Y]$  com  $Y$  e pensarmos em imersões como inclusões.

## 11.4 'Kit imersão'.

Podemos também já ter uma topologia no espaço e querer vê-lo como subespaço de um produto de espaços. Precisamos que a função seja injetora e que seja um homeomorfismo com a imagem. Em cada um desses casos, precisamos impor alguma propriedade à família de funções.

### 11.4.1 Função diagonal usando uma família de funções.

Mesmo no dia a dia, alguns dados das pessoas são tabelados (idade, sexo, altura, peso, etc...) e a partir delas é possível diferenciar as pessoas mesmo sem ter todos os seus dados. Cada dado pode ser pensado como uma coluna na tabela e a pessoa é representada pelos dados de uma linha da tabela. Se duas linhas tem a mesma informação, os dados que temos não diferenciam todas as pessoas da lista. Mas para tomada de algumas decisões ignoramos a pessoa e comparamos a outra a partir dos seus dados.

**Definição 11.24.** Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  uma família de funções tal que  $f_i : X \rightarrow Y_i$  para cada  $i \in I$  e definir  $f = \Delta\mathcal{F} = \Delta_{i \in I} f_i : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$  tal que para cada  $x \in X$ ,  $f(x) = (f_i(x) : i \in I)$ .

Para podermos trabalhar com funções contínuas de um espaço  $X$ , o espaço precisa ter funções contínuas com uma certa abundância. No caso, a abundância será conseguir separar pontos e separar pontos de fechados, que serão definidos a seguir. Sem uma métrica conseguimos apenas dizer que estão ele está encostado ou não, o que nos faz remeter a fecho.

Por exemplo, existem espaços regulares  $X$  em que as únicas funções contínuas de  $X$  em  $\mathbb{R}$  são constantes (as constantes são sempre contínuas). Assim, quando tentarmos usar as funções no produto de funções contínuas reais deste espaço, as funções contínuas enxergam só um ponto e a diagonal é um ponto.

### 11.4.2 Famílias que separam pontos.

Se as pessoas estiverem em fila e estiverem bem alinhados nem sabemos quantas pessoas estão nela dependendo do ângulo de visão.

**Definição 11.25.** Dizemos que  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  separa pontos se para cada  $x, y \in X$  distintos, existe  $i \in I$  tal que  $f_i(x) \neq f_i(y)$ .

**Teorema 11.26.** Se  $\mathcal{F}$  separa pontos então  $\Delta\mathcal{F}$  é injetora. (*isto não envolve topologias.*)

*Demonstração.* Se  $x \neq y$  então existe  $j \in I$  tal que  $f_j(x) \neq f_j(y)$ . Portanto  $\Delta_{i \in I} f_i(x) \neq \Delta_{i \in I} f_i(y)$  e a função diagonal é injetora.  $\square$

### 11.4.3 Famílias que separam pontos de fechados

Dependendo do ângulo de visão uma pessoa pode ficar escondida atrás de uma árvore.

Se a pessoa estiver camuflada, ter algum ângulo de visão em que ela não esteja grudada a árvore ajudaria reconhecer que ela não faz parte da árvore. No caso, se não enxergamos distâncias, só conseguimos saber se está encostado ou não, o que nos remete a fechos.

**Definição 11.27.** Seja  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  uma família de funções tais que tal que  $f_i : X \rightarrow Y_i$ , onde  $Y_i$  é um espaço topológico para cada  $i \in I$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  separa pontos de fechados de  $X$  se para cada  $x \in X$  e todo  $F$  fechado com  $x \notin F$  existe  $i \in I$  tal que  $f_i(x) \notin f_i[F]$ .

**Teorema 11.28.** Seja  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  uma família de funções tais que tal que  $f_i : X \rightarrow Y_i$ , onde  $Y_i$  é um espaço topológico para cada  $i \in I$ . Se  $\mathcal{F}$  separa pontos de fechados então  $\Delta\mathcal{F}[F]$  é fechado em  $\Delta\mathcal{F}[X]$  para todo subconjunto fechado  $F$  de  $X$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $F$  seja fechado em  $X$ . Seja  $y \in \Delta\mathcal{F}[X]$  com  $y \in \overline{\Delta\mathcal{F}[F]}^{\prod_{i \in I} Y_i}$ . Então existe  $x \in X$  tal que  $\Delta\mathcal{F}(x) = y = (f_i(x) : i \in I)$ . Vamos mostrar que  $x \in F$ . Caso contrário, como  $\mathcal{F}$  separa pontos de fechados, existe  $j \in I$  tal que  $f_j(x) \notin \overline{f_j[F]}^{Y_j}$ . Assim  $y = (f_i(x) : i \in I) \notin \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$ .

Como  $\Delta\mathcal{F}[F] \subseteq \prod_{i \in I} f_i[F] \subseteq \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$ , e o último conjunto é fechado, segue que  $\overline{\Delta\mathcal{F}[F]}^{\prod_{i \in I} Y_i} \subseteq \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$ . Como  $y \notin \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$ , segue que  $y \notin \overline{\Delta\mathcal{F}[F]}^{\prod_{i \in I} Y_i}$ , contradição. Assim,  $\Delta\mathcal{F}[F]$  é fechado em  $\Delta\mathcal{F}[X]$ .  $\square$

**Teorema 11.29.** (Teorema de Imersão). Se  $\mathcal{F}$  é uma família de funções contínuas que separa pontos e separa pontos de fechados, então  $\Delta\mathcal{F}$  é uma imersão.

*Demonstração.* Temos que  $\Delta\mathcal{F}$  é uma função injetora e contínua. Então  $\Delta\mathcal{F} : X \rightarrow \Delta\mathcal{F}[X]$  é uma bijeção contínua que leva fechados a fechados. Assim, a sua inversa,  $(\Delta\mathcal{F})^{-1} : \Delta\mathcal{F}[X] \rightarrow X$  é contínua e portanto  $\Delta\mathcal{F}$  é uma imersão contínua.  $\square$

## 11.5 ‘Antes de imergir num produto, verifique se os equipamentos funcionam’.

### 11.5.1 Imersão de espaços $T_0$ .

Há como fazer a imersão de qualquer espaços  $T_0$  usando o espaço  $D = \{0, 1\}$  com a topologia  $\tau = \{\emptyset, \{0\}, D\}$ . O espaço  $D$  é  $T_0$  logo o produto de cópias de  $D$  é  $T_0$ .

**Proposição 11.30.** Seja  $X$  um espaço  $T_0$  e  $\mathcal{F}$  o conjunto de todas as funções contínuas de  $X$  em  $D$ . Então  $\mathcal{F}$  separa pontos e separa pontos de fechados. Assim,  $\Delta\mathcal{F}$  é uma imersão de  $X$  em  $D^{\mathcal{F}}$ .

*Demonstração.* O argumento da imersão é similar, pois estamos usando funções contínuas. Então basta provar que  $\mathcal{F}$  separa pontos e separa pontos de fechados. Como o espaço  $X$  não precisa ser  $T_1$ , separar fechados não implica separar pontos.

Dado  $x \neq y$ , devido a  $X$  ser  $T_0$  podemos assumir que existe  $U$  aberto em  $X$  tal que  $x \in U$  e  $y \notin U$  (invertamos  $x$  e  $y$  caso contrário). Seja  $f : X \rightarrow D$  tal que  $f[U] = \{0\}$  e  $f[X \setminus U] = \{1\}$ . Temos que os abertos de  $D$  tem imagem inversa aberta:  $f^{-1}[\{0\}] = U$  e  $f^{-1}[\{1\}] = X \setminus U$ . Assim,  $f$  é contínua e  $\mathcal{F}$  separa pontos.

Se  $x \in X$ ,  $x \notin F$  com  $F$  fechado então seja  $g$  tal que  $g[X \setminus F] = \{0\}$  e  $g[F] = \{1\}$ . De modo análogo,  $g$  é contínua. Para finalizar  $g(x) \notin g[F] = \{1\}$  e  $\{1\}$  é fechado, pois seu complemento,  $\{0\}$ , é aberto em  $D$ .  $\square$

### 11.5.2 Imersões de 0-dimensionais.

**Definição 11.31.** Um espaço topológico  $X$  é 0-dimensional se possui uma base de aberto-fechados (clopens), ou seja uma base em que para todo  $U$  da base de abertos,  $U = \overset{\circ}{U} = \overline{U}$ .

**Proposição 11.32.** Seja  $X$  um espaço 0-dimensional. Então as funções contínuas em  $\{0, 1\}$  separam pontos de fechados.

*Demonstração.* Para cada  $U$  aberto e fechado, a função  $f : X \rightarrow \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $f[U] = \{0\}$  e  $f[X \setminus U] = \{1\}$  é contínua. Como temos uma base de clopens, segue que  $X$  é completamente regular.  $\square$

**Teorema 11.33.** Um espaço é 0-dimensional e Hausdorff se e somente se pode ser imerso no espaço  $\{0, 1\}^J$ , para algum conjunto de índices  $J$ , onde  $\{0, 1\}$  é discreto.

*Demonstração.* Se  $X$  é 0-dimensional então a família  $\mathcal{F}$  das funções contínuas de  $X$  em  $\{0, 1\}$  separam pontos de fechados. Como  $X$  é  $T_1$  também separa pontos. Assim,  $X$  pode ser imerso em  $\{0, 1\}^{\mathcal{F}}$ .

Por outro lado, fixe  $J$  um conjunto de índices. Note que ser 0-dimensional é uma propriedade topológica hereditária, pois a base de clopens do espaço gera uma base de clopens do subespaço. Ser 0-dimensional também é produtiva, por que os abertos básicos usando bases de clopens formam uma base de clopens do produto.

Como  $T_2$  também é uma propriedade hereditária e produtiva e  $\{0, 1\}$  é Hausdorff e 0-dimensional, então todo subespaço de  $\{0, 1\}^J$  é 0-dimensional e  $T_2$ . Assim, como 0-dimensional é propriedade topológica, todo subespaço imerso em  $\{0, 1\}^J$  é 0-dimensional e  $T_2$ .  $\square$

**Exemplo 11.34.** O  $\Psi$ -espaço definido anteriormente usando sequências de racionais convergindo para irracionais, foi definido por uma base de clopens e é  $T_1$ , assim é 0-dimensional e  $T_2$ . Assim pode ser imerso num produto de  $\{0, 1\}$ 's.

# Capítulo 12

## Separando fechado de fechados.

### 12.1 Axiomas de separação para fechados e fechados.

#### 12.1.1 Normalidade. $T_4$ .

**Definição 12.1.** Um espaço  $X$  é normal se dados dois subconjuntos fechados disjuntos  $F$  e  $G$  de  $X$  existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $F \subseteq U$  e  $G \subseteq V$ .

**Teorema 12.2.** São equivalentes para um espaço topológico  $X$ :

- 1)  $X$  é normal.
- 2)  $X = O \cup W$  com  $O$  e  $W$  abertos então existem  $A$  e  $B$  fechados com  $A \subseteq O$  e  $B \subseteq W$  tal que  $X = A \cup B$ .
- 3) Se  $F$  e  $G$  são fechados disjuntos então existe  $U$  aberto de  $X$  tal que  $F \subseteq U$  e  $\overline{U} \cap G = \emptyset$ .
- 4) Se  $F$  é fechado e  $F \subseteq W$  com  $W$  aberto, então existe  $U$  aberto tal que  $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W$ .

*Demonstração.* A verificação fica a cargo do leitor. □

**Teorema 12.3.** Normalidade é uma propriedade hereditária para fechados.

*Demonstração.* Seja  $Y$  um subespaço fechado de  $X$ , com  $X$  normal. Tome  $F$  e  $G$  fechados disjuntos de  $Y$ . Então  $F$  e  $G$  são fechados em  $X$ . Pela normalidade, existe  $U$  e  $V$  abertos disjuntos em  $X$  tal que  $F \subseteq U$  e  $G \subseteq V$ . Então  $U \cap Y$  e  $V \cap Y$  são abertos disjuntos de  $Y$  tais que  $F \subseteq U \cap Y$  e  $G \subseteq V \cap Y$ . □

**Exemplo 12.4.** (Espaço normal  $T_0$  que não é  $T_1$ ). Seja  $X$  o conjunto dos reais com a topologia gerada pelos intervalos  $\{]r, +\infty[ : r \in X\}$ . O espaço é  $T_0$ . O fecho de  $\{x\}$  é  $] - \infty, x]$ . Assim o espaço não é  $T_1$  e é normal, pois não há um par de fechados disjuntos não vazios. Se tomarmos um ponto que não pertence a um fechado, o ponto está à direita do fechado, assim, qualquer aberto que contém o fechado contém o ponto. Com isto, o espaço não é regular.

**Proposição 12.5.** Um espaço normal  $T_1$  é regular.

*Demonstração.* Basta notar que pontos são fechados e usar a normalidade entre um ponto e um fechado para obter regularidade. □

**Definição 12.6.** Dizemos que um espaço é  $T_4$  se é normal e  $T_1$ .

**Corolário 12.7.** Espaços  $T_4$  são  $T_3$ .

#### 12.1.2 ‘Colcha de retalhos’ ou ‘amarrar sapatos’?

Vamos provar um lema técnico que é usado na demonstração de que regular + base enumerável = normal e regular + espaço enumerável = normal. Ela será usada novamente quando definirmos espaços Lindelöf. Alguns autores chamam o método de “shoe lacing”.

**Lema 12.8.** Sejam  $F$  e  $G$  fechados e  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  tais que  $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ ,  $G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ ,  $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}) \cap G = \emptyset$  e  $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}) \cap F = \emptyset$ . Então existem  $A$  e  $B$  abertos disjuntos tais que  $F \subseteq A$  e  $G \subseteq B$ .



Figura 12.1: Equivalências de normalidade.

*Demonstração.* Note que não precisaríamos fazer nada se  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n}$  ou  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n}$ , pois nesse caso teríamos  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n} \cap G = \emptyset$  ou  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} \cap F = \emptyset$  que é testemunha para a normalidade para  $F$  e  $G$ .

A ideia é ‘remover rebarbas’ de  $U_n$  e  $V_n$  para que as uniões do que sobrar dos  $U_n$  e do  $V_n$  fiquem disjuntas. Só que é preciso tomar o cuidado de não ‘cortar demais’, para que a união ainda cubra  $F$  e  $G$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $U_n^* = U_n \setminus \overline{\bigcup_{i \leq n} V_i}$  e  $V_n^* = V_n \setminus \overline{\bigcup_{i \leq n} U_i}$ . Defina então  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*$  e  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$ .  $A$  e  $B$  são abertos pois são uniões de abertos.

Note que  $F \cap \overline{\bigcup_{i \leq n} V_i} = F \cap \bigcup_{i \leq n} \overline{V_i} = \emptyset$  por que estamos tomando o fecho de uma união finita. Similarmente,  $G \cap \overline{\bigcup_{i \leq n} U_i} = \emptyset$ . Assim, temos que a parte removida de  $U_n$  e  $V_n$  não foi demasiada, pois  $F \cap U_n = F \cap U_n^*$  e assim  $F \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^* = F \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = F$  e portanto  $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^* = A$ . De modo análogo,  $G \subseteq B$ .

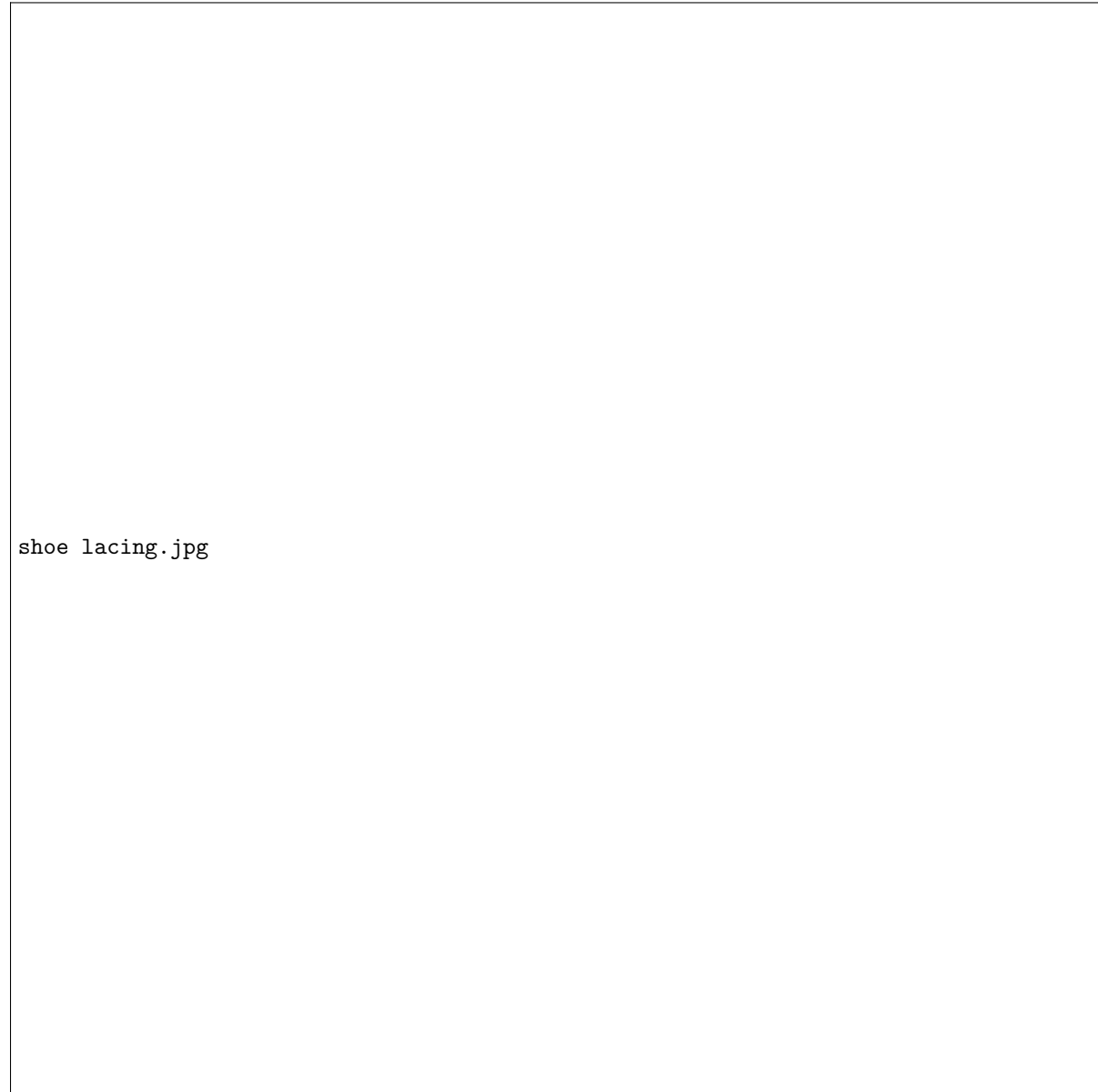
Resta verificar  $A$  e  $B$  são disjuntos. Suponhamos por contradição que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*$  e  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$  se intersectam e tome  $x \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*)$ . Em particular,  $x \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n)$ . Tome  $k$  mínimo tal que  $x \in U_k$  ou  $x \in V_k$ . Neste caso, temos que  $x \notin U_l \cup V_l$  para  $l < k$ . Em particular,  $x \notin U_l^*$  e  $x \notin V_l^*$

para cada  $l < k$ .

Se  $x \in U_k$  então  $x \in \overline{\bigcup_{n \leq m} U_n}$  para todo  $m \geq k$ , assim temos que  $x \notin V_m \setminus \overline{\bigcup_{n \leq m} U_n} = V_m^*$  para todo  $m \geq k$ . Assim,  $x \notin V_m^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , uma contradição.

Se  $x \in V_k$ , por um argumento análogo, temos que  $x \notin U_m^*$  para todo  $m \geq k$ . Assim,  $x \notin U_m^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , uma contradição.

Assim  $x \notin U_k \cup V_k$  contradizendo a existência de  $k$ . Assim, não existe  $x$  na interseção e os abertos  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*$  e  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$  são disjuntos.  $\square$



shoe lacing.jpg

Figura 12.2: O ‘Shoe-lacing’.

### 12.1.3 Regular + algo enumerável = normal.

**Teorema 12.9.** Se  $X$  é regular e enumerável então  $X$  é normal. Se  $X$  é regular e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade então  $X$  é normal.

*Demonstração.* Seja  $X$  um espaço regular enumerável e sejam  $F$  e  $G$  fechados disjuntos. Enumere  $F = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $G = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Pela regularidade, como  $a_n \notin G$  existe  $U_n$  aberto contendo  $a_n$

tal que  $\overline{U_n} \cap G = \emptyset$ . Como  $b_n \notin F$ , também segue da regularidade que existe  $V_n$  aberto contendo  $b_n$  tal que  $\overline{V_n} \cap F = \emptyset$ . Esta família satisfaz as condições para que existam abertos disjuntos contendo  $F$  e  $G$ , Portanto  $X$  é normal.

Se  $X$  é um espaço regular satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade, fixe  $\mathcal{B}$  uma base enumerável de abertos.

Seja  $\mathcal{B}_F = \{O \in \mathcal{B} : \exists x \in F, x \in O \text{ e } \overline{O} \cap G = \emptyset\}$  e  $\mathcal{B}_G = \{O \in \mathcal{B} : \exists x \in G, x \in O \text{ e } \overline{O} \cap F = \emptyset\}$ . Vamos checar que  $\bigcup \mathcal{B}_F \supseteq F$ . De fato, se  $x \in F$  então  $x \notin G$  e pela regularidade e o fato de  $\mathcal{B}$  ser base, existe  $O \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in O$  e  $\overline{O} \cap G = \emptyset$ . Assim,  $x \in O \in \mathcal{B}_F$ . De modo análogo, teremos  $\bigcup \mathcal{B}_G \supseteq G$ . Basta então enumerar  $\mathcal{B}_F = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $\mathcal{B}_G = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Como no caso anterior, isto testemunha a normalidade. □

## 12.2 ‘Conte comigo para encontrar um espaço que não é normal’.

### 12.2.1 Cardinalidade de conjuntos.

**Definição 12.10.** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  dizemos que  $|A| \leq |B|$  se existe uma função injetora  $f : A \rightarrow B$ .

A definição acima pode ser feita sem se preocupar com o Axioma da Escolha. O próximo teorema também pode ser demonstrado sem o Axioma da Escolha:

**Teorema 12.11.** (Cantor-Bernstein) Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , se  $|A| \leq |B|$  e  $|B| \leq |A|$  então uma função bijetora  $f : A \rightarrow B$ .

A prova do teorema acima (sem usar o Axioma da Escolha) é feito no curso de Teoria dos Conjuntos. Para poder apreciar por que o Axioma da Escolha não é usado precisa ver o Teorema da recursão (também estudado no curso de Teoria dos Conjuntos).

**Definição 12.12.** Dizemos que  $|A| = |B|$  se existe uma bijeção entre  $A$  e  $B$ .

Dizemos que  $X$  é enumerável se  $|X| \leq |\mathbb{N}|$ .

Um conjunto  $A$  é finito se e somente se existe um natural  $n$  tal que  $|A| = |n|$ .

Com o Axioma da Escolha, temos que um conjunto  $X$  é infinito se e somente se  $|\mathbb{N}| \leq |X|$ .

Sob o Axioma da Escolha, um conjunto é finito se e somente se não existe uma função injetora de  $\mathbb{N}$  em  $X$ , mas isto não é equivalente a ser finito sem assumir alguma forma fraca do Axioma da Escolha.

Note que a princípio o  $|A|$  usado para a desigualdade e na igualdade poderiam não ter correlação direta. Elas têm pelo teorema de Cantor-Bernstein.

Não podemos pensar em  $|A|$  como uma classe de equivalência por que  $|A|$  não é um conjunto. Existe porém uma forma de encontrar um representante bem definido quando assumimos o Axioma da Escolha. Então sob o Axioma da Escolha, teremos um conjunto  $\kappa$  que denotaremos  $|A| = \kappa$ .

Iremos comentar sobre isso quando falarmos de boa ordem. Por enquanto  $|A|$  se refere a comparar a cardinalidade de um conjunto com o do outro usando funções injetora e bijetoras.

Podemos comparar cardinalidade usando funções sobrejetoras quando temos o Axioma da Escolha (se existe uma função sobrejetora de  $B$  em  $A$  então existe uma injetora de  $A$  em  $B$ ).

**Definição 12.13.** Se  $A$  e  $B$  são disjuntos então  $|A| + |B|$  é a cardinalidade de  $A \cup B$ . Se  $A$  e  $B$  não são disjuntos tome  $A'$  e  $B'$  com as cardinalidade de  $A$  e  $B$  com  $A'$  e  $B'$  disjuntos e tome  $|A| + |B| = |A' \cup B'|$ . Se  $A$  e  $B$  são conjuntos  $|A| \cdot |B|$  é a cardinalidade de  $A \times B$ .

Vamos assumir os seguintes resultados:

**Proposição 12.14.** A soma e produto de cardinais é bem definida, é comutativa e associativa.

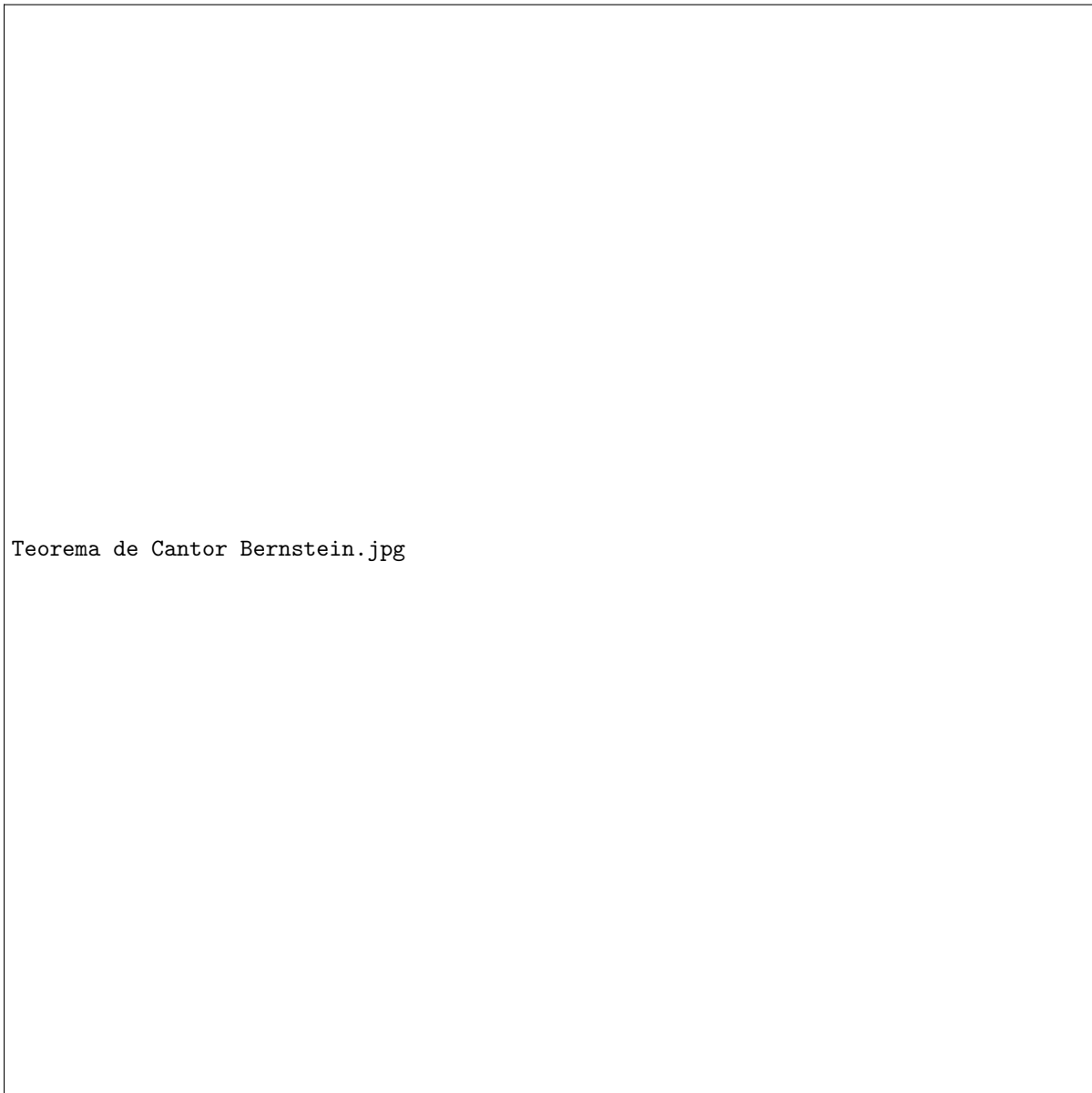
Para todo  $A$  e  $B$  temos  $|A| < |B|$ ,  $|A| = |B|$  ou  $|B| < |A|$ . (Isto é equivalente ao Axioma da Escolha).

Se  $B$  é infinito e  $|A| < |B|$  então  $|B \setminus A| = |B|$ .

$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ .

$|A \cup B| \leq |A| + |B|$ .

Se  $A$  e  $B$  são infinitos então  $|A| \cdot |B| = |A| + |B| = \max\{|A|, |B|\}$ . (Levando em consideração a ‘ordem’).



Teorema de Cantor Bernstein.jpg

Figura 12.3: O Teorema de Cantor-Bernstein.

Note que dos resultados acima, temos que o conjunto dos irracionais tem a mesma cardinalidade dos reais.

**Teorema 12.15. (Cantor)** Seja  $A$  um conjunto. Então não existe uma função injetora de  $\mathcal{P}(A)$  em  $A$ .

*Demonstração.* A prova é feita por um argumento diagonal.

Suponha por absurdo que existe  $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ . Seja  $B = \{f(x) : f(x) \notin x\}$ . Como  $B \in \mathcal{P}(A)$ , temos que  $f(B)$  está definido.

Se  $f(B) \in B$  então pela definição de  $B$ , temos que  $f(B) \notin B$ , uma contradição. Se  $f(B) \notin B$  então  $f(B)$  satisfaz a propriedade para estar em  $B$ , assim  $f(B) \in B$ , novamente uma contradição. Assim,  $f(B)$  não está bem definida e portanto  $f$  não existe.  $\square$

### 12.2.2 Usando cardinalidade para mostrar que um espaço não é normal.

**Teorema 12.16.** Se  $X$  é um espaço normal com  $D \subseteq X$  denso e  $A$  é um subconjunto fechado e discreto de  $X$  com  $A$  e  $D$  infinitos. Então  $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(D)|$ .



*Demonstração.* A primeira coisa a notar é que todo subconjunto de  $A$  é fechado. De fato,  $A \setminus B$  é aberto em  $A$ , assim  $B = A \setminus (A \setminus B)$  é fechado em  $A$ . Como  $A$  é fechado em  $X$ , segue que  $B$  é fechado em  $X$ .

Pela normalidade de  $X$ , para cada  $B \in \mathcal{P}(A)$ , podemos fixar um aberto  $U_B$  tal que  $B \subseteq U_B$  e  $\overline{U_B} \cap (A \setminus B) = \emptyset$ .

Seja  $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(D)$  dada por  $B \mapsto U_B \cap D$ . Vamos provar que  $f$  é injetora. Antes, lembramos que o fecho de um aberto por um denso é igual ao fecho desse aberto. Se  $B \neq C$  e ambos são subconjuntos de  $X$ , podemos assumir que  $B \setminus C \neq \emptyset$  (caso contrário trocamos a ordem de  $B$  e  $C$ ). Seja  $x \in B \setminus C$ . Então  $x \in B \subseteq \overline{U_B} = \overline{U_B \cap D}$ . Por outro lado,  $x \in A \setminus C$  e  $\emptyset = (A \setminus C) \cap \overline{U_C} = (A \setminus C) \cap \overline{U_C \cap D}$ , assim  $x \notin \overline{U_C \cap D}$ . Logo  $\overline{U_B \cap D} \neq \overline{U_C \cap D}$ , o que implica que  $U_B \cap D \neq U_C \cap D$ . Assim,  $f(B) \neq f(C)$ , como queríamos.  $\square$

**Exemplo 12.17.** (Um espaço que não é normal). Tomemos o  $\Psi$ -espaço visto anteriormente, onde o conjunto dos racionais é denso e o conjunto dos irracionais é fechado e discreto. Como os racionais tem a mesma cardinalidade que  $\mathbb{N}$  e os irracionais tem a mesma cardinalidade de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  e  $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| \not\leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ , segue que o espaço não pode ser normal. Como visto anteriormente, é um espaço  $T_3$ .

**Exemplo 12.18.** O Plano de Niemytski. Mais um espaço que não é  $T_4$ .

*Demonstração.* A prova da não normalidade do Plano de Niemytski segue o argumento de contagem. Temos um denso enumerável (os pares de racionais no semiplano superior aberto são densos por que todos os elementos da base contém uma bola do  $\mathbb{R}^2$  contida no semiplano superior aberto). O espaço é Hausdorff por que a topologia é mais fina do que a topologia de subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Veremos mais tarde que ela satisfaz axiomas mais fortes que  $T_2$ .  $\square$

## 12.3 ‘Tem alguém não-normal aí?’.

### 12.3.1 Espaços hereditariamente normais. Espaços $T_5$ .

Eventualmente provaremos que normalidade não é uma propriedade hereditária. Porém já podemos mostrar que normalidade não é uma propriedade produtiva.

**Definição 12.19.** Dizemos que  $X$  é um espaço hereditariamente normal se todo subespaço de  $X$  é normal. Dizemos que um espaço é  $T_5$  se é hereditariamente normal e  $T_1$ .

**Exemplo 12.20.** Todo espaço pseudométrico é hereditariamente normal.

*Demonstração.* Todo espaço métrico é normal já que os fechados disjuntos podem ser separados por uma função contínua  $f$ . De fato, se  $F$  e  $G$  são fechados, vimos que existe  $f$  contínua tal que  $f[F] = \{0\}$  e  $f[G] = \{1\}$  então  $f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]]$  e  $f^{-1}[[\frac{1}{2}, 1]]$  testemunham a normalidade para  $F$  e  $G$ . Como todo subespaço de um métrico é métrico, segue que todo subespaço é normal.  $\square$

**Teorema 12.21.** Um espaço  $X$  é hereditariamente normal se e somente se todos os subespaços abertos de  $X$  são normais.

*Demonstração.* A ida é óbvia. Vamos provar a volta. Seja  $Y$  um subconjunto de  $X$  e  $F$  e  $G$  dois fechados disjuntos de  $Y$ .

Note que se  $\overline{F}^X$  e  $\overline{G}^X$  são disjuntos segue da normalidade de  $X$  (*esta linha é desnecessária, sai do argumento abaixo, com  $W = X$ .*)

Temos que  $\overline{F}^X \cap \overline{G}^X \neq \emptyset$  é um fechado. Então tome  $W = X \setminus (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X)$ . Note que  $Y \subseteq W$  (e em particular  $F \cup G \subseteq W$ ), de fato temos  $Y \cap (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = (Y \cap \overline{F}^X) \cap (Y \cap \overline{G}^X) = F \cap G = \emptyset$ . E portanto  $Y \subseteq X \setminus (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = W$ . Temos que  $\overline{F}^W$  e  $\overline{G}^W$  são fechado de  $W$ . Vamos mostrar que estes fechados de  $W$  são disjuntos. De fato,  $\overline{F}^W \cap \overline{G}^W = (\overline{F}^X \cap W) \cap (\overline{G}^X \cap W) = W \cap (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = (X \setminus (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X)) \cap (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = \emptyset$ . Assim, usando a normalidade de  $W$  (pois  $W$  é aberto), existem  $U$  e  $V$  abertos disjuntos de  $W$  tais que  $\overline{F}^W \subseteq U$  e  $\overline{G}^W \subseteq V$ . Assim  $U \cap Y$  e  $V \cap Y$  são abertos disjuntos de  $Y$  tais que  $F \subseteq U \cap Y$  e  $G \subseteq V \cap Y$ . Assim,  $Y$  é normal.  $\square$

Para um outra equivalência de hereditariamente normal, precisamos de uma definição.

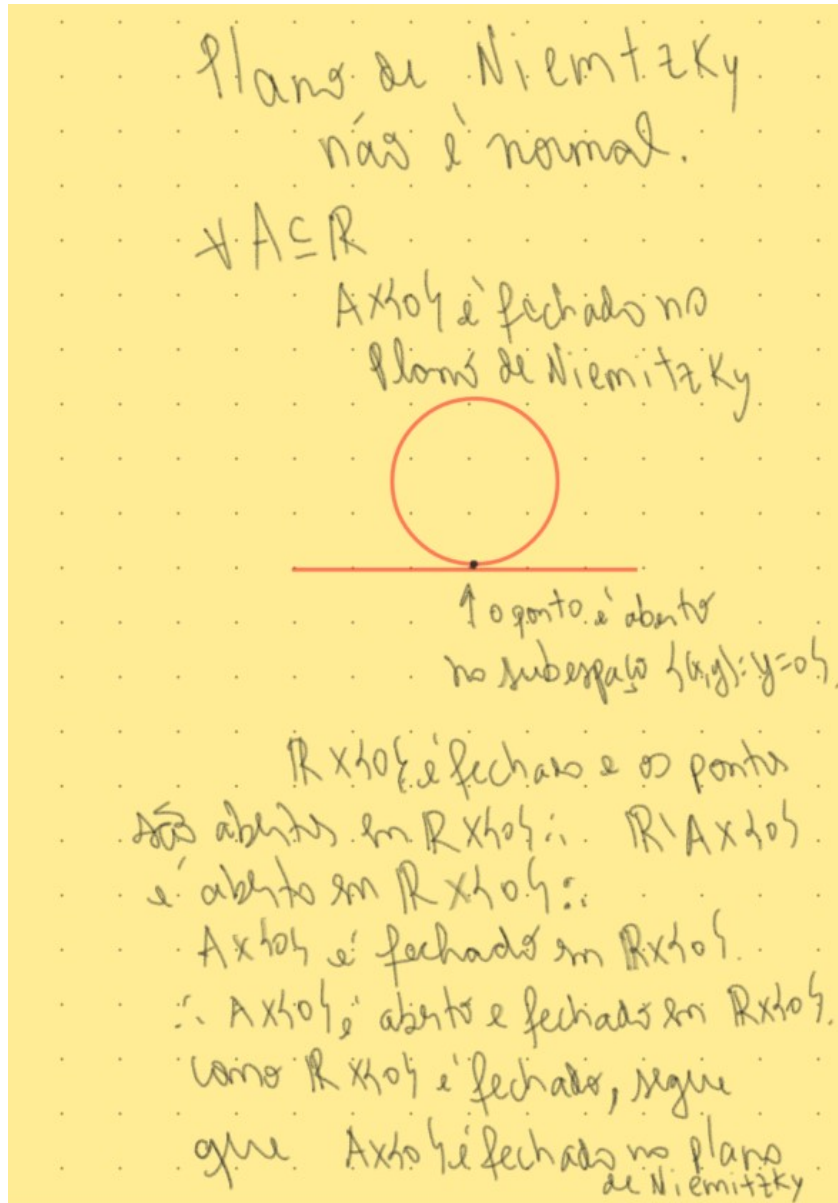


Figura 12.4: O plano de Niemytzky não é normal.

**Definição 12.22.** Dizemos que um par de subconjuntos  $A$  e  $B$  de um espaço topológico  $X$  são separados se  $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ .

Claramente estas propriedades são topológicas.

**Teorema 12.23.** Um espaço é hereditariamente normal se e somente se para todo par de conjuntos separados  $A$  e  $B$  existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $A \subseteq U$  e  $B \subseteq V$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $X$  seja hereditariamente normal. Tome  $A$  e  $B$  separados em  $X$ . Então  $W = X \setminus \bar{A}^X \cap \bar{B}^X$  é um subconjunto aberto. Similarmente à prova da outra equivalência, temos que  $\bar{A}^W$  e  $\bar{B}^W$  são fechados disjuntos de  $W$ . Assim, existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  de  $W$  tais que  $A \subseteq \bar{A}^W \subseteq U$  e  $B \subseteq \bar{B}^W \subseteq V$ . Como  $W$  é aberto em  $X$ , temos que  $U$  e  $V$  são abertos de  $X$ .

Para a recíproca, basta provar que todo subconjunto aberto  $W$  de  $X$  é normal. Seja  $F$  e  $G$  subconjuntos fechados disjuntos de  $W$ . Então  $W \setminus F$  é aberto em  $W$ , portanto aberto em  $X$ . Portanto  $F \subseteq X \setminus (W \setminus F)$  com  $X \setminus (W \setminus F)$  fechado e portanto  $\bar{F}^X \subseteq X \setminus (W \setminus F)$ . Assim  $\bar{F}^X \cap G \subseteq \bar{F}^X \cap (W \setminus F) = \emptyset$ . Por um argumento similar, temos  $\bar{G}^X \cap F = \emptyset$ . Portanto  $F$  e  $G$  são separados em  $X$ . Por hipótese, existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $F \subseteq U$  e  $G \subseteq V$ . Então  $U \cap W$  e  $V \cap W$  são testemunhas da normalidade de  $W$  para  $F$  e  $G$ .  $\square$

### 12.3.2 ‘Ser normal não é sempre produtivo’.

**Exemplo 12.24.** A reta de Sorgenfrey é hereditariamente normal.

*Demonstração.* Seja  $W$  um aberto na reta de Sorgenfrey  $X$ . Sejam  $F$  e  $G$  subconjuntos fechados de  $W$ . Para cada  $x \in F$  existe um intervalo  $[x, a_x[$  contido em  $W$  tal que  $x \in [x, a_x[$  e  $[x, a_x[ \cap G = \emptyset$ . Para cada  $y \in G$  existe um intervalo aberto  $[y, b_y[$  contido em  $W$  tal que  $y \in [y, b_y[$  e  $[y, b_y[ \cap F = \emptyset$ .

Tome  $U = \bigcup_{x \in F} [x, a_x[$  e  $V = \bigcup_{y \in G} [y, b_y[$ . Resta verificar que  $U$  e  $V$  são disjuntos. Se este não é o caso, existe  $z \in W$ ,  $x \in F$  e  $y \in G$  tal que  $z \in [x, a_x[ \cap [y, b_y[$ . Temos então  $x \leq z < a_x$  e  $y \leq z < b_x$ . Primeiro note que  $x \neq y$ , pois  $x \in F$ ,  $y \in G$  e  $F \cap G = \emptyset$ . Se  $x < y$  então  $x < y \leq z < a_x$  e  $[x, a_x[ \cap G \neq \emptyset$ , contradição. Se  $y < x$  então  $y < x \leq z < b_x$  e  $[y, b_y[ \cap F \neq \emptyset$ , contradição. Logo  $U \cap V = \emptyset$  e  $U$  e  $V$  testemunham a normalidade de  $F$  e  $G$  em  $W$ .  $\square$

**Exemplo 12.25.** Normalidade e normalidade hereditária não são propriedades produtivas.

*Demonstração.* Bastará mostrarmos que o quadrado do espaço de Sorgenfrey não é normal. Primeiro, note que  $\{[x, x + \epsilon[ \times [y, y + \epsilon[ : x, y \in X\}$  é uma base de abertos de  $X \times X$ . Seja  $Q$  o conjunto dos racionais (não iremos escrever  $\mathbb{Q}$  por que a topologia usada aqui não é a da reta real). Então claramente  $Q \times Q$  é denso em  $X \times X$ .

Seja  $A = \{(x, -x) : x \in X\}$ . O conjunto  $A$  é um fechado na topologia produto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e a topologia de  $X \times X$  é mais fina, assim,  $A$  é fechada na topologia de  $X \times X$ . Temos que  $A \cap ([x, x+1[ \times [-x, -x+1]) = \{(x, -x)\}$  (pois  $y \geq x$  implica que  $-y \leq -x$ ). Assim,  $A$  é um subespaço fechado e discreto em  $A$ . Vimos que se  $X \times X$  fosse normal, teríamos  $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(Q \times Q)|$ , mas  $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  e  $|\mathcal{P}(Q \times Q)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ , contradizendo o teorema de Cantor.  $\square$



Figura 12.5: O produto cartesiano de retas de Sorgenfrey é não normal.

# Capítulo 13

## Básico de Compacidade.

### 13.1 ‘Não só de fechado e limitado vive o compacto’.

A palavra compacto = ‘fechado e limitado’ vale para subespaços de  $\mathbb{R}^n$ , mas não é a noção geral de compacidade.

#### 13.1.1 Bê-á-bá da compacidade.

**Definição 13.1.** Dado  $X$ , dizemos que  $\mathcal{M}$  é uma cobertura ou recobrimento de  $X$  se  $\bigcup \mathcal{M} = X$ . Dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma subcobertura ou subrecobrimento de  $\mathcal{M}$  se  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$  e  $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup \mathcal{M} = X$ . Se todos os elementos de  $\mathcal{M}$  tem alguma propriedade como aberto, fechado, clopen etc.. dizemos que temos um cobertura aberta, fechada, clopen etc...

A ideia é que compacto deve tentar preservar um pouco da finitude. Como uma quantidade de abertos interessantes fossem ‘pontos’.

**Definição 13.2.** Dado  $X$  um espaço topológico, dizemos que  $X$  é compacto se toda cobertura aberta de  $X$  possui uma subcobertura aberta finita, ou seja se  $\mathcal{U}$  é uma cobertura aberta de  $X$  então existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  finita tal que  $\bigcup \mathcal{U}' = X$ .

Note que não estamos assumindo nenhum axioma de separação para definir compacidade. Vamos provar alguns resultados básicos para espaços compactos arbitrários.

Primeiro deles é falar sobre a compacidade de um subespaço usando abertos do espaço:

**Proposição 13.3.** Um subespaço  $Y \subseteq X$  é compacto se e somente se para toda família  $\mathcal{U}$  de abertos de  $X$  tal que  $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$  então existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  finito tal que  $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$  (note que  $\bigcup \mathcal{U}'$  não precisa ser igual a  $\bigcup \mathcal{U}$ ).

*Demonstração.* ( $\leftarrow$ ). Seja  $\mathcal{V}$  uma cobertura de  $Y$ . Como  $Y$  é subespaço de  $X$ , podemos fixar  $\mathcal{U} = \{U \in \tau_X : U \cap Y \in \mathcal{V}\}$ . Claramente para cada  $V \in \mathcal{V}$ , existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $V = U \cap Y$ . Assim,  $\bigcup \mathcal{U} \supseteq Y$ . Por hipótese existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  finito tal que  $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ . Assim  $Y = (\bigcup \mathcal{U}') \cap Y = \bigcup \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}'\}$ . Temos que  $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}'\} \subseteq \mathcal{V}$  e assim encontramos uma subcobertura finita de  $\mathcal{V}$ .

( $\rightarrow$ ). Seja  $\mathcal{U}$  uma família de abertos de  $X$  tal que  $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ . Temos que  $\mathcal{V} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$  é uma cobertura aberta de  $Y$ . Por hipótese, existe  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  tal que  $\bigcup \mathcal{V}' = Y$ . Para cada  $V \in \mathcal{V}'$ , fixe  $U_V \in \mathcal{U}$  tal que  $V = U_V \cap Y$  (note que  $\{U : U \cap Y = V\}$  pode ser um conjunto infinito). Então  $\mathcal{U}' = \{U_V : V \in \mathcal{V}'\}$  é um subconjunto finito de  $\mathcal{U}$  tal que  $\bigcup \mathcal{U}' \supseteq \bigcup \mathcal{V}' = Y$ .  $\square$

**Corolário 13.4.** Subespaços fechados de um compacto  $X$  são compactos.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U}$  uma família de abertos de  $X$  tal que  $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ . Como  $F$  é um fechado,  $X \setminus F$  é aberto e portanto  $\{X \setminus F\} \cup \mathcal{U}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Pela compacidade de  $X$  segue que existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  finita tal que  $\{X \setminus F\} \cup \mathcal{U}'$  é recobrimento finito de  $\{X \setminus F\} \cup \mathcal{U}$ . Como  $X \setminus F \cap F = \emptyset$ , segue que  $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ . Como  $\mathcal{U}$  era arbitrária, segue que  $F$  é compacta.  $\square$

**Teorema 13.5.** Seja  $X$  um espaço. São equivalentes:

- 1) Um espaço é compacto.
- 2) toda família de fechados com PIF tem intersecção não vazia.
- 3) toda rede possui ponto de acumulação.
- 4) toda rede possui uma subrede convergente.
- 5) todo filtro possui ponto de acumulação.
- 6) todo filtro pode ser estendido a um filtro convergente.

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)). Suponha que  $X$  possui uma família  $\mathcal{F}$  de fechados com PIF cuja intersecção é vazia. Então  $\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$  é uma cobertura de  $X$  (note que  $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) = X \setminus (\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = X$ ) e sem subcobertura finita. Assim,  $X$  não é compacto.

(2)  $\rightarrow$  3)). Suponha que  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  é uma rede. Seja  $\mathcal{F}$  o filtro gerado por  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ . Então  $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$  é uma família com PIF. Portanto,  $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ . Fixe  $x \in \bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ . Logo o filtro  $\mathcal{F}$  tem  $x$  como ponto de acumulação e pela dualidade,  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  tem  $x$  como ponto de acumulação.

(3)  $\rightarrow$  4)). Já visto que toda rede que acumula num ponto possui uma rede que converge para este ponto.

(4)  $\rightarrow$  5)). Dado um filtro, tome a rede  $S$  associada. Por hipótese, a rede possui uma subrede que converge para  $x$ . Assim, a rede tem  $x$  como ponto de acumulação. Pela dualidade,  $x$  é ponto de acumulação do filtro.

(5)  $\rightarrow$  6)). Já foi visto que se um filtro acumula para um ponto então existe uma extensão do filtro que converge para o ponto.

(6)  $\rightarrow$  1)). Seja  $X$  um espaço que não é compacto. Então existe uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$  sem cobertura finita. Assim,  $\mathcal{C} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$  possui PIF. Tome  $\mathcal{F}$  um filtro estendendo o filtro gerado por  $\mathcal{C}$ . Então  $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcap \mathcal{C} = \emptyset$ . Assim,  $\mathcal{F}$  não tem ponto de acumulação e portanto não converge. Assim, o filtro gerado por  $\mathcal{C}$  não satisfaz a condição 6). □

**Definição 13.6.** Seja  $A$  um subconjunto não-vazio de um espaço topológico  $X$ . Dizemos que  $x$  é um ponto de acumulação completo de  $X$  se  $|U \cap A| = |A|$ , para cada vizinhança  $U$  de  $x$ .

**Teorema 13.7.** Se  $X$  é compacto então todo subconjunto infinito de  $X$  possui um ponto de acumulação completo.

*Demonstração.* Suponha que  $A$  é infinito e não tem ponto de acumulação completo. Para cada  $x \in X$  tome  $U_x$  vizinhança aberta de  $x$  tal que  $|U_x \cap A| < |A|$ . Então  $\{U_x : x \in X\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Qualquer subfamília é da forma  $\{U_x : x \in X'\}$ , onde  $X' \subseteq X$  é finito. Agora,  $A \cap \bigcup \{U_x : x \in X'\} = \bigcup \{A \cap U_x : x \in X'\}$ . Assim,  $|A \cap \bigcup \{U_x : x \in X'\}| = |\bigcup \{A \cap U_x : x \in X'\}| \leq \sum_{x \in X'} |A \cap U_x| < |A|$ . Logo  $A \cap \bigcup \{U_x : x \in X'\} \neq A$ . Assim esta cobertura aberta testemunha que  $X$  não é compacto. □

A recíproca do resultado acima também vale, mas iremos usar boa ordem, por isso ela será feita quando retornamos a equivalências do Axioma da Escolha.

**Definição 13.8.** Dizemos que  $Y$  é uma imagem contínua de  $X$  se existe uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f[X] = Y$ .

**Proposição 13.9.** A imagem contínua de um compacto é um compacto.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $Y$ . Pela continuidade da  $f$ , temos que  $\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Como  $X$  é compacto, existe  $\mathcal{V}'$  subcobertura finita de  $\mathcal{V}$ . Fixe  $\mathcal{U}'$  finita tal que  $\mathcal{V}' = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}'\}$ . Então  $Y = f[X] = \bigcup_{V \in \mathcal{V}'} f[V] = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U = \bigcup \mathcal{U}'$ . Assim,  $\mathcal{U}'$  é uma subcobertura de  $\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{U}$  é arbitrário, segue que  $Y$  é compacto. □

**Proposição 13.10.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base de abertos de  $X$ . Então  $X$  é compacto se e somente se toda cobertura de abertos por elementos de  $\mathcal{B}$  possui uma subcobertura finita.

*Demonstração.* A ida é verdade, pois os elementos de  $\mathcal{B}$  são abertos.

Para a volta, seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Seja  $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U}, V \subseteq U\}$ . Primeiro, note que  $\mathcal{V}$  é uma cobertura. De fato, dado  $x \in X$ , existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U$ . Assim, existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subseteq U$  e portanto  $x \in V \in \mathcal{V}$ . Por hipótese, existe  $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{V}$  finito tal que  $\mathcal{V}^*$  é uma subcobertura de  $\mathcal{V}$ . Para cada  $V \in \mathcal{V}^*$ , fixe  $U_V \in \mathcal{U}$  tal que  $V \subseteq U_V$  (existe pela definição de  $V \in \mathcal{V}$ ). Assim,  $\{U_V : V \in \mathcal{V}^*\}$  é uma subcobertura finita de  $\mathcal{U}$ , pois  $\bigcup_{V \in \mathcal{V}^*} V \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}^*} U_V$ . □

### 13.1.2 Compactos com axiomas de separação.

Vimos que subespaços fechados de compactos são compactos. A recíproca não vale em geral:

**Exemplo 13.11.** Seja  $X$  o conjunto dos naturais com a topologia co-finita. Então o único fechado infinito é  $X$ . O espaço  $X$  é compacto e  $T_1$ .

Tome  $Y$  o conjunto dos pares. O conjunto  $Y$  na topologia de subespaço tem a topologia co-finita em  $Y$  e é um subconjunto compacto, mas não é fechado em  $X$ .

**Teorema 13.12.** Se  $X$  é Hausdorff e  $F \subseteq X$  é compacto então  $F$  é fechado.

*Demonstração.* Para cada  $x \in X \setminus F$ , e  $y \in F$ , existe  $U_y$  e  $V_y$  abertos disjuntos tais que  $x \in U_y$  e  $y \in V_y$ . Assim  $F \subseteq \bigcup \{V_y : y \in F\}$ . Pela compacidade de  $F$ , existe  $F^* \subseteq F$  finita tal que  $F \subseteq \bigcup \{V_y : y \in F^*\}$ . Tome  $U = \bigcap_{y \in F^*} U_y$ . Então  $U \cap F \subseteq U \cap (\bigcup_{y \in F^*} V_y) = \bigcup_{y \in F^*} (U \cap V_y) \subseteq \bigcup_{y \in F^*} (U_y \cap V_y) = \emptyset$ . Como  $x \in X \setminus F$  é arbitrário, segue que  $X \setminus F$  é aberto e portanto  $F$  é fechado.  $\square$

**Corolário 13.13.** Se  $X$  é compacto  $T_2$  então  $X$  é regular.

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e  $F$  um fechado que não contém  $x$ . Temos que  $F$  é compacto, e pela prova do teorema  $U$  e  $V = \bigcup \{V_y : y \in F^*\}$  são abertos disjuntos tais que  $x \in U$  e  $F \subseteq V$ . Assim,  $X$  é regular.  $\square$

**Teorema 13.14.** Se  $X$  é regular e compacto então  $X$  é normal.

*Demonstração.* O argumento é similar ao que já foi feito acima. Tome  $F$  e  $G$  fechados disjuntos. Para cada  $x \in F$ , temos que  $x \notin G$ , assim existe  $U_x$  e  $V_x$  abertos disjuntos tais que  $x \in U_x$  e  $G \subseteq V_x$ . Pela compacidade de  $F$  existe  $F' \subseteq F$  finito tal que  $F \subseteq \bigcup \{U_x : x \in F'\}$ . Tome  $V = \bigcap \{V_x : x \in F'\}$ . Então  $U$  e  $V$  são abertos disjuntos tais que  $F \subseteq U$  e  $G \subseteq V$ .  $\square$

**Corolário 13.15.** Se  $X$  é compacto  $T_2$  então  $X$  é  $T_4$ .

O resultado de que compactos regulares são normais segue da demonstração de 'shoe-lacing', o que neste caso é um desperdício de notação por que estamos usando uma quantidade finita de abertos. Veremos uma demonstração usando o 'shoe-lacing' para espaços Lindelöf, quando falarmos sobre propriedades relacionadas à compacidade.

### 13.1.3 Três provas de que produto finito de compactos é compacto.

Vimos que normalidade não era produtiva. A compacidade é produtiva, mas o caso geral será feito mais tarde.

**Teorema 13.16.** Se  $X$  e  $Y$  são compactos então  $X \times Y$  é compacto.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{B}$  a base dos abertos básicos de  $X \times Y$ .

Tome  $\mathcal{W}$  uma cobertura aberta de  $X \times Y$  contida em  $\mathcal{B}$ . Para cada  $x \in X$ , temos que  $\{x\} \times Y$  é um subespaço homeomorfo a  $Y$  portanto, compacto. Então existe  $\mathcal{W}_x \subseteq \mathcal{W}$  finita tal que  $\bigcup \mathcal{W}_x \supseteq \{x\} \times Y$ . Seja  $U_x = \bigcap \{U : x \in U, \exists V(U \times V \in \mathcal{W}_x)\}$ . Por ser uma interseção finita de abertos contendo  $x$ ,  $U_x$  é uma vizinhança aberta de  $x$ . Então  $\{U_x : x \in X\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ .

Assim, existe  $X_0 \subseteq X$  finito tal que  $\{U_x : x \in X_0\}$  é uma subcobertura finita de  $\{U_x : x \in X\}$ . Afirmamos que  $\mathcal{W}^* = \bigcup_{x \in X_0} \mathcal{W}_x$  é uma subcobertura finita de  $\mathcal{W}$ . Claramente  $\mathcal{W}^* \subseteq \mathcal{W}$  e é finita. Para ver que  $\mathcal{W}^*$  recobre  $X \times Y$ , fixe  $(x, y) \in X \times Y$ . Por hipótese, existe  $x_0 \in X_0$  tal que  $x \in U_{x_0}$ . Por hipótese,  $\bigcup \mathcal{W}_{x_0} \supseteq \{x_0\} \times Y$ . Assim, existe  $U \times V \in \mathcal{W}_{x_0}$  tal que  $(x_0, y) \in U \times V$ . Então  $x \in U_{x_0} \subseteq U$  e  $y \in V$ . Assim,  $(x, y) \in U \times V \in \mathcal{W}_{x_0} \subseteq \mathcal{W}^*$ .  $\square$

**Exercício 13.17.** (Tentativa de usar redes). Seja  $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$  uma rede em  $X \times Y$ . Então  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  é uma rede em  $X$  e  $(y_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  é uma rede em  $Y$ . Pela compacidade de  $X$  e  $Y$  existem  $a \in X$  e  $b \in Y$  e subredes  $(a_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  e  $(b_\gamma : \gamma \in \Gamma)$  que convergem para  $a$  e  $b$  respectivamente. Seja  $\theta_x : \Sigma \rightarrow \Lambda$  e  $\theta_y : \Gamma \rightarrow \Lambda$  tais que  $a_\sigma = x_{\theta_x(\sigma)}$  e  $b_\gamma = y_{\theta_y(\gamma)}$ .

- 1) qual o problema de tentar usar a rede  $((a_\sigma, b_\gamma) : (\sigma, \gamma) \in \Sigma \times \Gamma)$ ?
- 2) qual o problema de tentarmos usar  $(\Sigma, \Gamma)^* = \{(\sigma, \gamma) \in \Sigma \times \Gamma : \theta_x(\sigma) = \theta_y(\gamma)\}$  e a rede  $((a_{\sigma, \gamma}, b_{\sigma, \gamma}) : (\sigma, \gamma) \in (\Sigma, \Gamma)^*, \text{ onde } (a_{\sigma, \gamma}, b_{\sigma, \gamma}) = (a_\sigma, b_\gamma) \text{ para todo } (\sigma, \gamma) \in (\Sigma, \Gamma)^*$ ?

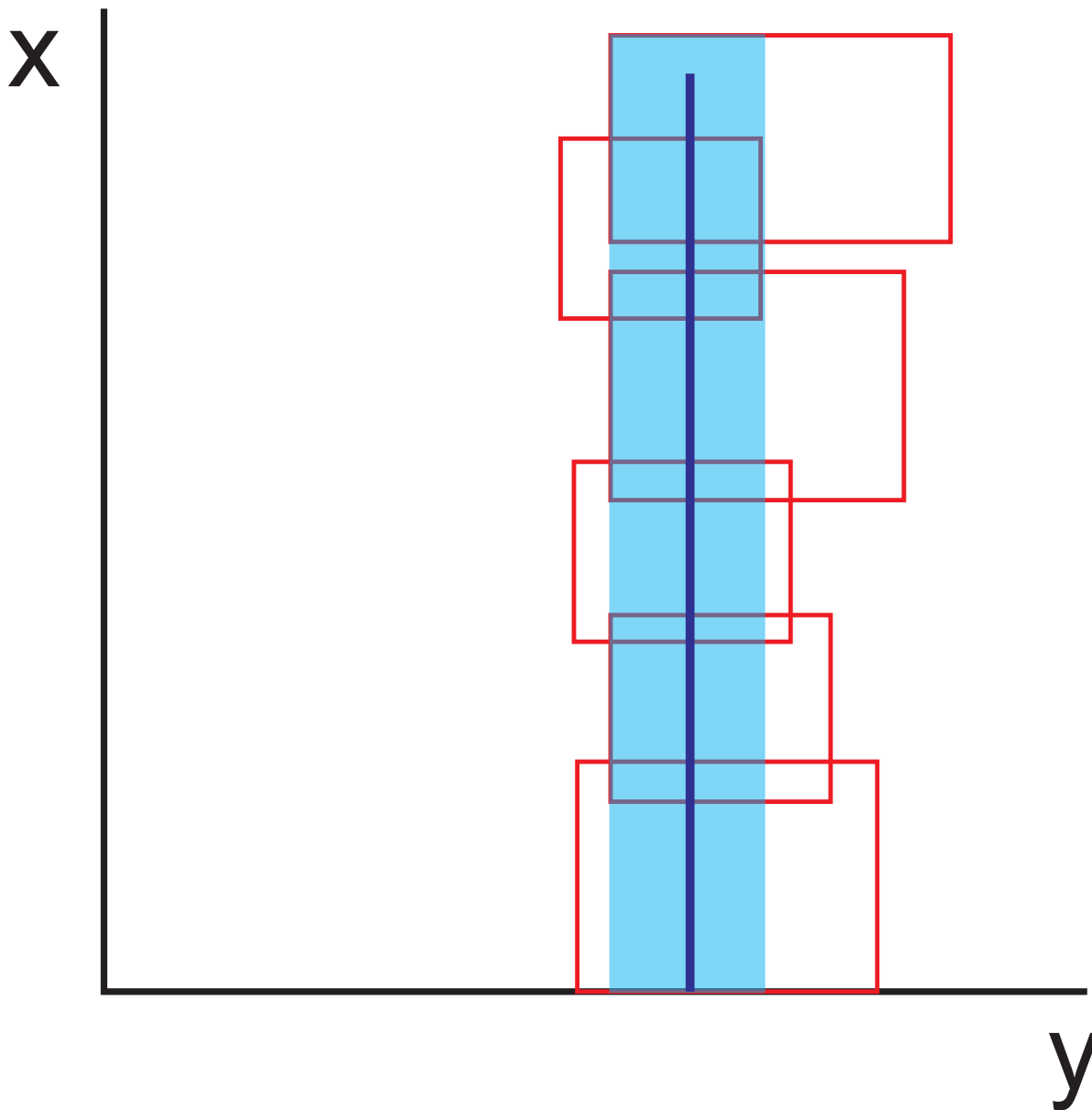


Figura 13.1: O lema do Tubo - produtos de dois compactos é compacto.

*Demonstração.* (Usando redes). Seja  $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$  uma rede em  $X \times Y$ . Então  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  é uma rede em  $X$ .

Pela compacidade de  $X$  existem  $x \in X$  e uma subrede  $(a_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  de  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  que converge para  $x$ . Seja  $\theta_1 : \Sigma \rightarrow \Lambda$  a testemunha que é subrede, ou seja, tal que  $a_\sigma = x_{\theta_1(\sigma)}$ . Podemos definir  $(b_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  uma subrede de  $(y_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  de modo que  $b_\sigma = y_{\theta_1(\sigma)}$ . Então  $((a_\sigma, b_\sigma) : \sigma \in \Sigma)$  é um subrede de  $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$ . Agora,  $(b_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  é uma rede em  $Y$ . Pela compacidade de  $Y$  existe uma subrede  $(v_\gamma : \gamma \in \Gamma)$  que converge para  $y \in Y$  e  $\theta_2 : \Gamma \rightarrow \Sigma$  a testemunha que é subrede, ou seja  $v_\gamma = b_{\theta_2(\gamma)}$ . Defina  $(u_\gamma : \gamma \in \Gamma)$  tal que  $u_\gamma = a_{\theta_2(\gamma)}$ . Então  $(u_\gamma : \gamma \in \Gamma)$  é uma subrede de  $(a_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  e portanto  $(u_\gamma : \gamma \in \Gamma)$  converge para  $x$ . Logo,  $((u_\gamma, v_\gamma) : \gamma \in \Gamma)$  é uma subrede de  $((a_\sigma, b_\sigma) : \sigma \in \Sigma)$ . Como subrede de subrede é subrede, segue que  $((u_\gamma, v_\gamma) : \gamma \in \Gamma)$  é uma subrede de  $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$ . Como a primeira coordenada da subrede converge para  $x$  e a segunda converge para  $y$  segue que a rede  $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$  possui uma subrede que converge para  $(x, y)$ . Assim,  $X \times Y$  é compacto.  $\square$

Note que num produto infinito, não poderíamos usar este mesmo argumento para ir achando subredes de subredes infinitas vezes.



*Demonstração.* (Usando filtros) Seja  $\mathcal{F}$  um filtro em  $X \times Y$  e  $\pi_X$  e  $\pi_Y$  as projeções em  $X$  e  $Y$  respectivamente. Seja  $\mathcal{F}_X$  o filtro gerado por  $\{\pi_X[F] : F \in \mathcal{F}\}$ . Como  $X$  é compacto, existe  $x \in X$  e um filtro estendendo  $\mathcal{F}_x$  que converge para  $x$ . Seja  $\mathcal{V}_x$  o sistema de vizinhanças de  $x$  em  $X$ . Então pela definição de convergência, segue que  $\mathcal{V}_x \cup \mathcal{F}_X$  tem PIF (pois está contido na extensão de  $\mathcal{F}_X$  que converge para  $x$ ).

Afirmamos que  $\mathcal{F} \cup \{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\}$  tem PIF. Como  $\mathcal{F}$  tem PIF e  $\{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\}$  tem PIF, basta mostrar que  $F \cap (U \times Y) \neq \emptyset$  para  $F \in \mathcal{F}$  e  $U \in \mathcal{V}_x$ . Mas  $F \cap (U \times Y) \neq \emptyset$  se e somente se  $\pi_X[F] \cap U \neq \emptyset$  (de fato,  $(a, b) \in F \cap (U \times Y) \leftrightarrow (a, b) \in F$  e  $a \in U \leftrightarrow a \in \pi_X[F]$  e  $a \in U \leftrightarrow \pi_X[F] \cap U$ ). O último termo da equivalência é não vazio por que  $\mathcal{V}_x \cup \{\pi_X[F] : F \in \mathcal{F}\}$  tem PIF.

Seja  $\mathcal{F}_1$  o filtro gerado por  $\mathcal{F} \cup \{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\}$  e  $\mathcal{F}_Y$  o filtro gerado por  $\{\pi_Y[F] : F \in \mathcal{F}_1\}$ . Como  $Y$  é compacto, existe  $y \in Y$  e um filtro estendendo  $\mathcal{F}_Y$  que converge para  $y$ . Seja  $\mathcal{V}_y$  as vizinhanças de  $y$  em  $Y$ . Então temos que  $\mathcal{F}_Y \cup \mathcal{V}_y$  tem PIF. Por argumentos similares ao anterior, temos que  $\mathcal{F}_1 \cup \{X \times V : V \in \mathcal{V}_y\}$  tem PIF. Então  $\mathcal{F} \cup \{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\} \cup \{X \times V : V \in \mathcal{V}_y\}$  tem PIF.

Logo,  $\mathcal{F} \cup \{U \times V : U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y\}$  tem PIF. Com isto, este conjunto gera um filtro que estende  $\mathcal{F}$  e que contém uma base local de  $(x, y)$ . Portanto  $\mathcal{F}$  pode ser estendido para um filtro que converge para  $(x, y)$ . Portanto  $X \times Y$  é compacto.  $\square$

Note que aqui também não podemos fazer extensões sucessivas do filtro se tivermos um produto infinito.

Como em redes, não podemos tomar os dois filtros das projeções, estender ambos para convergir e depois tentar usar o produto dessas duas extensões para estender o filtro original.

# Capítulo 14

## Compacidade em espaço ordenado. O Lema de Urysohn.

### 14.0.1 Ordem e Compacidade. A compacidade de $[0, 1]$ .

Vamos relembrar algumas definições.

Dado um conjunto não-vazio  $A$  de um conjunto linearmente ordenado  $X$  por  $<$ .

Dizemos que  $a \in X$  é limitante superior de  $A$  se  $x \leq a$  para todo  $x \in A$ . Caso  $a \in A$ , dizemos que  $a$  é máximo.

Dizemos que  $a \in X$  é supremo de  $A$  se

$x \leq a$  para todo  $x \in A$  e

se  $b \in X$ ,  $x \leq b$  para todo  $x \in A$  então  $a \leq b$ .

Dizemos que  $a \in X$  é limitante inferior de  $A$  se  $x \geq a$  para todo  $x \in A$ . Se  $a \in A$  dizemos que  $a$  é o mínimo de  $A$ .

Dizemos que  $a \in X$  é ínfimo de  $A$  se

$x \geq a$  para todo  $x \in A$  e

se  $b \in X$ ,  $x \geq b$  para todo  $x \in A$  então  $a \geq b$ .

Lembramos que um espaço é conexo se e somente se não possuem subconjuntos abertos e fechados (clopen) distintos de  $\emptyset$  e o espaço todo.

**Teorema 14.1.** Seja  $X$  uma ordem linear que possui mínimo e tal que todo subconjunto não-vazio possui supremo. Então  $X$  é compacto e conexo na topologia gerada pela ordem.

*Demonstração.* Seja  $x_0$  o mínimo de  $X$  e seja  $x_1$  o supremo de  $X$ . Como  $x_1 \in X$  segue que  $x_1$  é máximo de  $X$ . Note que os intervalos abertos que formam a base de abertos da topologia são  $[x_0, a[$ ,  $]a, b[$  e  $]b, x_1]$ .

Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura de intervalos abertos. Basta verificarmos para este caso, pois os intervalos abertos formam uma base de abertos. Seja  $A = \{a \in X : [x_0, a]$  possui subcobertura finita  $\}$ . Como  $x_0 \in A$ , o conjunto é não vazio. Seja  $a_0 = \sup A$ .

Primeiro, iremos verificar que  $a_0 \in A$ . Se este não fosse o caso, então  $a_0$  é supremo de  $A$  que não é máximo. Seja  $U \in \mathcal{U}$  o intervalo aberto tal que  $a_0 \in U$ . Como  $a_0$  é supremo mas não é máximo de  $A$  existe  $x \in U \cap A$  tal que  $x < a_0$ , e portanto  $[x_0, x]$  pode ser coberto por um número finito de intervalos (pois  $x \in A$ ) e  $[x, a_0]$  está contido em  $U$ . Assim,  $[x_0, a_0]$  também pode ser coberto por um número finito e  $a_0 \in A$ .

Vamos agora provar que  $a_0 = x_1$ . Se este não for o caso, existe  $y_1 \in X$  com  $a_0 < y_1 \leq x_1$  tal que  $y_1$  é a extremidade à direita de  $U$ . Seja  $V \in \mathcal{U}$  tal que  $y_1 \in V$ . Então  $[x_0, y_1] = [x_0, a_0] \cup [a_0, y_1 \cup \{y_1\}]$  onde  $[x_0, a_0]$  pode ser coberta por uma quantidade finita de intervalos de  $\mathcal{U}$ ,  $[a_0, y_1[ \subseteq U$  e  $\{y_1\} \subseteq V$ . Assim  $[x_0, y_1]$  pode ser coberta por uma quantidade finita de intervalos, portanto  $y_1 \in A$ , contradizendo que  $a_0$  é máximo de  $A$ . Assim  $A \ni a_0 = x_1$  e  $X = [x_0, x_1]$  pode ser coberto por uma quantidade finita de intervalos de  $\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{U}$  era arbitrário, temos que  $X$  é compacto.  $\square$

**Corolário 14.2.**  $[0, 1]$  é compacto.

compacidade e ordem.jpg

Figura 14.1: Compactos e conexos linearmente ordenados.

**Proposição 14.3.** Seja  $X$  linearmente ordenado tal que todo subconjunto não-vazio limitado superiormente de  $X$  possui supremo em  $X$ . Então todo subconjunto não-vazio limitado inferiormente de  $X$  possui ínfimo.

*Demonstração.* Seja  $A$  um subconjunto não-vazio limitado inferiormente. Então tome  $B = \{x \in X : x \leq a \ \forall a \in A\}$ . O limitante inferior de  $A$  pertence a  $B$ , assim  $B$  é não-vazio e podemos tomar  $b$  o supremo de  $B$ . Fixado  $a \in A$ , temos que  $x \leq a$  para todo  $x \in B$ . Assim,  $b = \sup B \leq a$ . Assim,  $b$  é um limitante inferior de  $A$ . Dado  $c$  outro limitante inferior de  $A$ , temos que  $c \leq a$  para todo  $a \in A$ . Assim,  $c \in B$ . Logo,  $c \leq b$ . Portanto  $b$  é ínfimo de  $A$ .  $\square$

**Teorema 14.4.** Seja  $X$  linearmente ordenado tal que todo subconjunto não-vazio limitado superiormente de  $X$  possui supremo em  $X$ . Então  $A \subseteq X$  é compacto se e somente se  $A$  é fechado e limitado.

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ). Se  $A$  é ilimitado superiormente então  $\mathcal{U} = \{\{y : y < x\} : x \in A\}$  é uma família de abertos de  $X$  tal que  $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ , mas qualquer subfamília finita  $\mathcal{U}' = \{\{y : y < x\} : x \in A'\}$  ( $A' \subseteq A$  finito) é tal que  $A \ni \max A' \notin \bigcup \mathcal{U}'$ . Assim conjuntos ilimitados superiormente não são compactos.

Analogamente, podemos verificar que conjuntos ilimitados inferiormente não são compactos.

Portanto se  $A$  é um subconjunto compacto então é limitado (limitado superiormente e limitado inferiormente).

O espaço  $X$  é Hausdorff. Assim, se  $A$  é compacto, então  $A$  é fechado.

Com isto temos que subconjuntos compactos de  $X$  são fechados e limitados.

( $\leftarrow$ ). Para a recíproca, suponha que  $A$  é fechado e limitado. Então tome  $x_0$  um limitante inferior de  $A$  e  $x_1$  um limitante superior de  $A$ . Temos que  $[x_0, x_1]$  é um subconjunto fechado de  $X$ , assim contém todos os supremos de seus subconjuntos e a topologia da ordem em  $[x_0, x_1]$  coincide com a topologia de subespaço por ser um intervalo. Assim,  $[x_0, x_1]$  é um compacto. Como  $A$  é fechado em  $X$  e  $A \subseteq [x_0, x_1]$ , temos que  $A$  é fechado em  $[x_0, x_1]$ . Como os subconjuntos fechados de compactos são compactos, segue que  $A$  é compacto.  $\square$

Vamos dizer que  $A \subseteq \prod_{i \in I} X_i$  é limitado se existem intervalos fechados  $J_i$  com extremidades em  $X_i$  tais que  $A \subseteq \prod_{i \in I} J_i$ .

**Teorema 14.5.** Seja  $X_i$  com uma ordem linear tal que todo subconjunto limitado possui supremo para cada  $i \in I$ ,  $I$  finito. Então  $A \subseteq \prod_{i \in I} X_i$  é compacto se e somente se  $A$  é fechado e limitado.

*Demonstração.* Seja  $\pi_k$  a projeção de  $\prod_{i \in I} X_i$  em  $X_k$  para cada  $k \in I$ .

( $\rightarrow$ ). Se  $A$  é compacto então temos que  $\pi_k[A]$  é compacto. Além disso,  $A \subseteq \prod_{i \in I} \pi_i[A]$ . O conjunto  $\pi_k[A]$  é limitado em  $X_k$ , assim existe um intervalo fechado  $J_k$  com extremidades em  $X_k$  tais que  $\pi_k[A] \subseteq J_k$ . Portanto  $A \subseteq \prod_{i \in I} J_i$  e  $A$  é limitado. Como cada  $X_i$  é Hausdorff e a propriedade Hausdorff é produtiva, segue que  $\prod_{i \in I} X_i$  é Hausdorff.  $A$  é um subconjunto compacto de um Hausdorff, portanto  $A$  é fechado em  $\prod_{i \in I} X_i$ .

( $\leftarrow$ ). Suponha que  $A$  é fechado e limitado em  $\prod_{i \in I} X_i$ . Então  $A \subseteq \prod_{i \in I} J_i$ , onde  $J_i$  é um compacto. Então  $A$  é um subespaço fechado do compacto  $\prod_{i \in I} J_i$ , logo  $A$  é compacto.  $\square$

**Corolário 14.6.** Um subespaço  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  é compacto se e somente se  $A$  é fechado e limitado (na distância Euclidiana).

*Demonstração.* Basta notar que um subconjunto é limitado na distância Euclidiana do  $\mathbb{R}^n$  se e somente se é um subconjunto limitado usando a ordem.  $\square$

Vamos ver agora que espaços normais possuem funções reais contínuas em abundância para separar fechados (há casos em que o espaço é normal por ter poucos fechados disjuntos). Então se tomarmos um espaço normal e  $T_1$  (ou seja  $T_4$ ), teremos que as funções reais contínuas servem para imergir um normal  $T_1$  num produto de intervalos. Espaços compactos Hausdorff são  $T_4$ .

Assim, qualquer espaço compacto Hausdorff por mais abstrato que possa parecer, será homeomorfo a um subespaço fechado de um produto de intervalos.

## 14.1 Pré aquecimento ao Lema de Urysohn

### 14.1.1 Uma equivalência de $\mathbb{R}$ como conjunto ordenado.

Já vimos a prova da versão métrica do Lema de Urysohn, que era:

Se  $X$  é gerado por uma pseudométrica e  $F$  e  $G$  são fechados disjuntos então existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f[F] = \{0\}$  e  $f[G] = \{1\}$ .

Vamos fazer um exemplo usando os racionais para melhorar a intuição sobre a ideia da construção. Neste exemplo, associamos pontos a pontos para ir construindo uma ordem entre dois conjuntos infinitos enumeráveis. Depois usamos a propriedade dos supremos para completar a função.

**Lema 14.7.** Seja  $X$  um conjunto linearmente ordenado, denso em si mesmo, enumerável e sem ponto de máximo ou de mínimo. Então a ordem de  $X$  é isomorfa a ordem de  $\mathbb{Q}$  (isto é, existe uma bijeção de  $X$  em  $\mathbb{Q}$  que preserva ordem.)

*Demonstração.* Por ser denso em si mesmo, temos que  $X$  é infinito e enumerável. Seja  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  uma enumeração bijetora com os naturais. Também para os racionais, tome uma enumeração  $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$  que é uma bijeção com os naturais. O argumento é olhar os dois lados da enumeração para criar um isomorfismo parcial de ordem.

(\*) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  vamos definir  $f_n : A_n \rightarrow B_n$  um isomorfismo de ordem tal que  $A_n$  é um subconjunto finito  $X$ ,  $B_n$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{Q}$  e  $\{x_i : i \leq n\} \subseteq A_n$  e  $\{q_i : i \leq n\} \subseteq B_n$  e tal que  $f_m$  é uma extensão de  $f_n$  para todo  $m > n$ .

Vamos primeiro supor que (\*) foi construído e provar que existe o isomorfismo. Seja  $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  (aqui estamos considerando que  $f$  é um conjunto de pares ordenados, onde a primeira coordenada é o elemento do domínio e a segunda coordenada é o valor de  $f$  no ponto). Dado  $x, x' \in X$ , com  $x < x'$ , existe  $n$  tal que  $x, x' \in A_n$ , assim  $f(x) = f_n(x) < f_n(x') = f(x')$ . Com isto,  $f$  tem domínio  $X$ , é injetora e preserva ordem. Para ver que  $f$  é sobre, dado  $q \in \mathbb{Q}$ , existe  $n$  tal que  $q \in B_n$ , assim existe  $x \in A_n$  tal que  $f(x) = f_n(x) = q$ . Assim,  $f$  é sobre.

Para  $n = 0$ , seja  $A_0 = \{x_0\}$ ,  $B_0 = \{q_0\}$  e  $f(x_0) = q_0$ .

Suponha que  $f_i$  está definida para todo  $i \leq n$  satisfazendo (\*) e vamos construir  $f_{n+1}$ .

Vamos adicionar no máximo dois pontos ao domínio e ao contradomínio para definir  $f_{n+1}$ . Faremos isso em duas etapas:

1) Se  $x_{n+1} \in A_n$  então seja  $A'_n = A_n$ ,  $B'_n = B_n$  e  $f'_n = f_n$ .

Se  $x_{n+1} \notin A_n$  então seja  $A'_n = A_n \cup \{x_{n+1}\}$ . Vamos considerar os três casos:

-  $x_{n+1}$  é máximo de  $A'_n$ , tome  $s \in \mathbb{Q} \setminus B_n$  maior que todos os elementos de  $B_n$ .

-  $x_{n+1}$  é mínimo de  $A'_n$ , tome  $s \in \mathbb{Q} \setminus B_n$  menor que todos os elementos de  $B_n$ .

-  $x_{n+1}$  não é nem máximo nem mínimo de  $A'_n$ , tome  $a_1$  o máximo de  $\{x \in A_n : x < x_{n+1}\}$  e  $a_2$  o mínimo de  $\{x \in A_n : x > x_{n+1}\}$ . Tome  $r_1$  o máximo de  $\{f_n(x) : x \in A_n \text{ e } x < x_{n+1}\}$  e  $r_2$  o mínimo de  $\{f_n(x) : x \in A_n \text{ e } x > x_{n+1}\}$ . Como  $f_n$  é um isomorfismo de ordem, temos que  $r_1 < r_2$ . Como  $\mathbb{Q}$  é denso em si mesmo, existe  $s \in \mathbb{Q} \setminus B_n$  tal que  $r_1 < s < r_2$ .

Em qualquer um dos três casos, seja  $B'_n = B_n \cup \{s\}$  e seja  $f'_n|_{A_n} = f_n$  e  $f'_n(x_{n+1}) = s$ .

2) Vamos agora começar com  $f'_n$ . A prova é uma repetição do que foi feito acima usando a função inversa de  $f'_n$ , mas iremos fazer os detalhes.

Se  $q_{n+1} \in B'_n$  então seja  $A_{n+1} = A'_n$ ,  $B_{n+1} = B'_n$  e  $f_{n+1} = f'_n$ .

Se  $q_{n+1} \notin B'_n$  então seja  $B_{n+1} = B'_n \cup \{q_{n+1}\}$ . Temos três casos:

$q_{n+1}$  é máximo de  $B_{n+1}$ , tome  $a \in X \setminus A'_n$  maior que todos os elementos de  $A'_n$ .

$q_{n+1}$  é mínimo de  $B_{n+1}$ , tome  $a \in X \setminus A'_n$  menor que todos os elementos de  $A'_n$ .

-  $q_{n+1}$  não é nem máximo nem mínimo de  $B_{n+1}$ , tome  $r_1$  o máximo de  $\{q \in B_{n+1} : q < q_{n+1}\}$  e  $r_2$  o mínimo de  $\{q \in B_{n+1} : q > q_{n+1}\}$ . Tome  $a_1$  o máximo de  $\{(f'_n)^{-1}(q) : q \in B'_n \text{ e } q < q_{n+1}\}$  e  $a_2$  o mínimo de  $\{(f'_n)^{-1}(q) : q \in B'_n \text{ e } q > q_{n+1}\}$ . Como  $f'_n$  é um isomorfismo de ordem, temos que  $a_1 < a_2$ . Como  $X$  é denso em si mesmo, existe  $a \in X \setminus A'_n$  tal que  $a_1 < a < a_2$ .

Seja  $A_{n+1} = A'_n \cup \{a\}$ ,  $f_{n+1}|_{A'_n} = f'_n$  e  $f_{n+1}(a) = q_{n+1}$ . Então  $f_{n+1}$  é um isomorfismo entre  $A_{n+1}$  e  $B_{n+1}$  com  $x_{n+1} \in X_{n+1}$  e  $q_{n+1} \in B_{n+1}$ .  $\square$

**Teorema 14.8.** Seja  $Y$  um conjunto linearmente ordenado denso em si, sem ponto de máximo e mínimo em que todo todo conjunto limitado não vazio possui supremo. Se  $Y$  tem um conjunto denso enumerável então  $Y$  é isomorfo a  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Seja  $X$  um conjunto enumerável e denso de  $Y$ . Então  $X$  é denso em si mesmo, não tem máximo ou mínimo. Então existe um isomorfismo  $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ . Defina  $g(y) = \sup \{f(x) : x < y, x \in X\}$ . Então  $g$  é um isomorfismo de  $Y$  em  $\mathbb{R}$ .

Dado  $y_1 < y_2$  tome  $x_1, x_2 \in X$  tal que  $y_1 < x_1 < x_2 < y_2$ . Então  $g(y_1) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq g(y_2)$ . Assim,  $g$  preserva ordem e é injetora. Para provar que  $g$  é sobrejetora, fixe  $r \in \mathbb{R}$ . Então  $S = \{s \in \mathbb{Q} : s < r\}$  é tal que  $r = \sup S$ . Seja  $A = f^{-1}[S]$ . Temos que  $A$  é limitado superiormente, portanto podemos tomar  $t = \sup A$ .

Afirmamos que  $A = \{x \in X : x < t\}$ . Como  $S$  não tem máximo e  $f$  é isomorfismo, segue que  $A$  não tem máximo. Assim,  $A \subseteq \{x \in X : x < t\}$ . Por outro lado, se  $x < t$ , existe  $x' \in A$  tal que  $x < x' \leq t$ . Como  $f$  é isomorfismo, temos que  $f(x) < f(x') < r$ , pois,  $x' \in A$  implica que  $f(x') < r$ . Logo,  $x \in A$  e temos  $A \supseteq \{x \in X : x < t\}$ .

Assim,  $g(t) = \sup f[A] = \sup S = r$  e  $g$  é sobre.  $\square$



Figura 14.2: Isomorfismos com o conjunto dos racionais.

## 14.2 ‘Uma ponte entre dois fechados’: Lema de Urysohn.

### 14.2.1 Fazendo rodela para construir uma função contínua.

No caso de Lema de Urysohn, vamos associar uma rodela a um intervalo, então seria jogar cada ponto da rodela a algum lugar ‘próximo’ do valor que a função irá receber ao final da construção. Aumentando o número de rodela iremos também dar mais precisão sobre onde estão os pontos em função das rodela e rodela mais finas se associam a intervalos cada vez menores, o que garantirá a continuidade da função. As rodela seriam mais ou menos as aproximações de um conjunto de curvas de nível da função que estamos construindo.

Ao invés de  $[0, 1]$  a conta funciona igual para um intervalo  $[a, b]$ . Nesse caso temos dois plateaus, o  $F$  em altura  $a$  e o  $G$  em altura  $b$ . O gráfico da extensão seria uma ponte entre eles.

**Teorema 14.9.** (Lema de Urysohn) Se  $X$  é normal e  $F$  e  $G$  são fechados disjuntos então existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f[F] = \{0\}$  e  $f[G] = \{1\}$ .

*Demonstração.* Vamos começar enumerando todos os racionais entre no intervalo fechado  $[0, 1]$  com uma

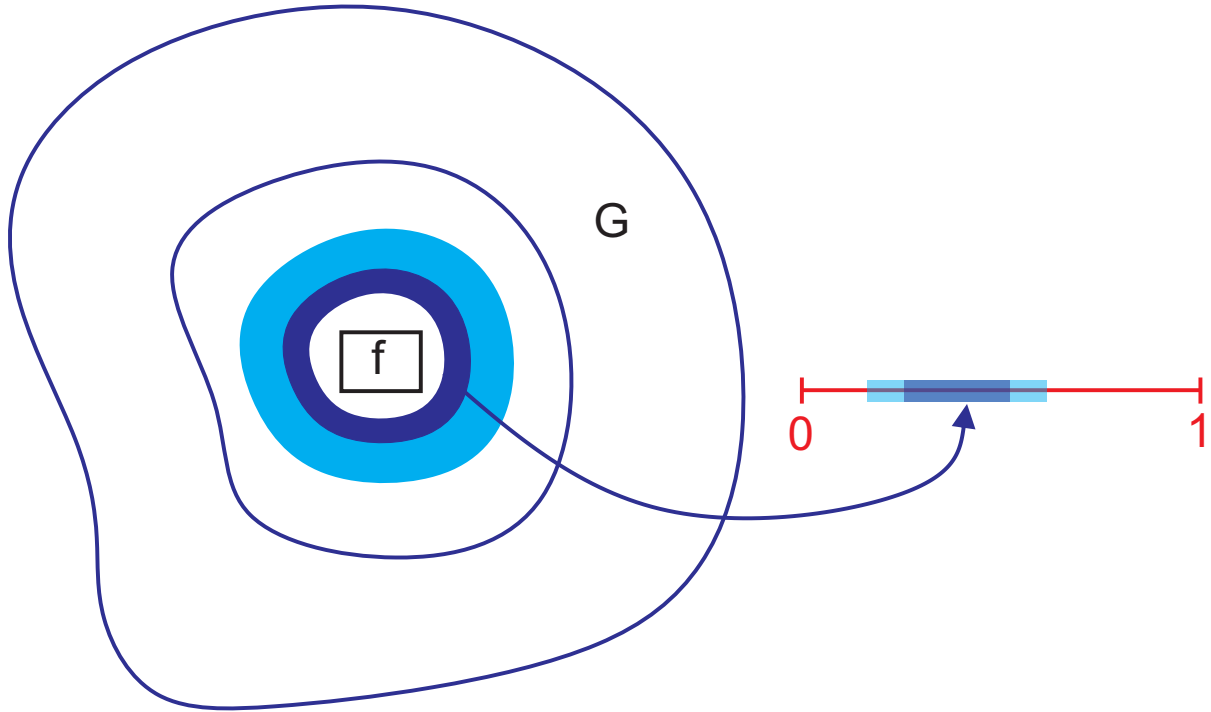


Figura 14.3: O Lema de Urysohn.

bijeção  $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$  de forma que  $r_0 = 0$  e  $r_1 = 1$ . Usando normalidade, podemos encontrar  $U_0$  e  $U_1$  abertos de  $X$  tais que  $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq X \setminus G$ . Suponhamos que já definimos  $U_{r_k}$  para todo  $k \leq n$  de modo que se  $r_k < r_j$  então  $\overline{U_{r_k}} \subseteq U_{r_j}$ . Tome  $r_{n+1}$ . Como  $0 = r_0 < r_{n+1} < 1 = r_1$ , podemos fixar  $r_i$  e  $r_m$  com  $i, m \leq n$  tais que  $r_i < r_{n+1} < r_m$  e  $r_m - r_i$  é o menor valor possível (ou seja  $r_i$  é o mais próximo à esquerda de  $r_{n+1}$  e  $r_m$  o mais próximo à direita de  $r_{n+1}$ ). Temos por indução que  $\overline{U_{r_i}} \subseteq U_{r_m}$ . Assim, pela normalidade de  $X$  existe um aberto  $U_{r_{n+1}}$  tal que  $\overline{U_{r_i}} \subseteq U_{r_{n+1}} \subseteq \overline{U_{r_{n+1}}} \subseteq U_{r_m}$ . Como  $r_i$  e  $r_m$  são os mais próximos a  $r_{n+1}$ , segue que se  $r_k < r_j$  então  $\overline{U_{r_k}} \subseteq U_{r_j}$  para todo  $j, k \leq n+1$ .

Agora vamos definir  $f : X \rightarrow [0, 1]$ . Seja  $f(x) = \inf(\{r_k : x \in U_{r_k}\} \cup \{1\})$ . De fato,  $f(x) \in [0, 1]$ .

Para mostrar que  $f$  é uma função contínua, basta mostrar que  $f^{-1}[[0, r[$  e  $f^{-1}]]r, 1]$  são conjuntos abertos, pois os abertos da forma  $[0, r[$  e  $]r, 0]$  formam uma subbase de  $[0, 1]$ . Seja  $x \in f^{-1}[[0, r[$ . Então  $f(x) < r$ . logo seja  $q$  racional tal que  $f(x) < q < r$ . Pela definição de  $f(x)$ , segue que  $x \in U_q$ . Pela definição de  $f$  temos que  $f(y) \leq q$  para todo  $y \in U_q$ . Assim,  $x \in U_q \subseteq f^{-1}[[0, r[$ . Como  $x$  é um ponto arbitrário do conjunto, segue que  $f^{-1}[[0, r[$  é aberto.

Seja  $x \in f^{-1}]]r, 1]$ . Então  $r < f(x)$ . Tome  $q, q'$  racionais tais que  $r < q < q' < f(x)$ . Como  $q' < f(x)$  segue que  $x \notin U_{q'}$ . Assim,  $x \notin \overline{U_{q'}}$ . Para cada  $y \notin \overline{U_{q'}}$ , temos que  $y \notin U_{q'}$ , assim  $r < q \leq f(y)$ . Portanto  $x \in X \setminus \overline{U_{q'}} \subseteq f^{-1}]]r, 1]$ . Como  $x$  era um ponto arbitrário do conjunto, segue que  $f^{-1}]]r, 1]$  é um conjunto aberto. Como a imagem inversa de abertos da subbase são abertos, temos que  $f$  é contínua.

Falta apenas checar que  $f[F] = \{0\}$  e  $f[G] = \{1\}$ . Se  $x \in F$  então  $x \in U_0$ , logo  $f(x) = 0$ . Se  $x \in G$  então  $x \notin X \setminus G$ . Como  $U_q \subseteq U_1 \subseteq X \setminus G$ , segue que  $x \notin U_q$ , para todo  $q$  racional entre 0 e 1. Assim,  $f(x) = 1$ .  $\square$

# Capítulo 15

## Separando ponto e fechado por funções.

### 15.1 Espaços completamente regulares.

#### 15.1.1 Definição de Espaços completamente regulares.

**Definição 15.1.** Um espaço  $X$  é completamente regular se para todo  $x \in X$  e todo fechado  $F$  tal que  $x \notin F$  existe uma função  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f(x) = 0$  e  $f[F] = 1$ . Note que podem existir pontos  $y$  em  $X \setminus (\{x\} \cup F)$  tais que  $f(y)$  vale 0 ou 1.

**Exemplo 15.2.** Todo espaço gerado por pseudométricas é completamente regular.

Já vimos que dado  $x \in X$  e  $F$  fechado com  $x \notin F$  existe  $g : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $g(x) = 1$  e  $g[F] \subseteq \{0\}$ . Tome  $f(x) = 1 - g(x)$ .

**Proposição 15.3.** Espaços completamente regulares são regulares.

*Demonstração.* Sejam  $x \in X$  e  $F$  um fechado tal que  $x \notin F$ . Como  $X$  é completamente regular, existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f(x) = 0$  e  $f[F] = \{1\}$ . Tome  $U = f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]$  e  $V = f^{-1}[[\frac{1}{2}, 1]]$ . Então  $x \in U$ ,  $F \subseteq V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Assim,  $X$  é regular.  $\square$

**Exemplo 15.4.** Normal não implica completamente regular.

*Demonstração.* Vimos que existe um espaço  $X$  normal  $T_0$  que não é regular. Logo,  $X$  é um espaço normal que não é completamente regular.  $\square$

**Proposição 15.5.** Um espaço regular e normal é completamente regular.

*Demonstração.* Dado um ponto  $x$  e  $F$  fechado com  $x \notin F$ , pela regularidade, existe  $U$  aberto contendo  $x$  tal que  $\bar{U} \cap F = \emptyset$ . Usando o Lema de Urysohn, existe uma função contínua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f[\bar{U}] = \{0\}$  e  $f[F] = \{1\}$ . Como  $x \in \bar{U}$ , segue que  $f$  testemunha a regularidade completa para  $x$  e  $F$ .  $\square$

#### 15.1.2 Algumas condições equivalentes a ser completamente regular.

**Lema 15.6.** Seja  $X$  um espaço topológico. Seja  $\mathcal{C}$  uma subbase de fechados,  $\mathcal{B}$  uma subbase de abertos e  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $X$ . São equivalentes:

- 1)  $X$  é completamente regular
- 2) para todo  $x \in X$  e todo  $W$  aberto tal que  $x \in W$  então existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f(x) = 0$  e  $f[X \setminus W] = 1$ .
- 3) se  $\mathcal{C}$  é uma subbase de fechados e  $x \notin F$  com  $F \in \mathcal{C}$  então existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f(x) = 0$  e  $f[F] = 1$ .
- 4) se  $\mathcal{B}$  é uma subbase de abertos, e  $x \in U$  com  $U \in \mathcal{B}$  então existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f(x) = 0$  e  $f[X \setminus U] = 1$ .



*Demonstração.* 1)  $\leftrightarrow$  2). É apenas a relação de que complementar de aberto é fechado e vice versa. 1)  $\rightarrow$  3) e 2)  $\rightarrow$  4) seguem do fato que os elementos da subbase são abertos.

3)  $\rightarrow$  1). Seja  $x \in X$  e  $F$  um fechado tal que  $x \notin F$ . Como  $\mathcal{C}$  é uma base de fechados, existem  $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$  tal que  $x \notin C_1 \cup \dots \cup C_k$  e  $C_1 \cup \dots \cup C_k \supseteq F$ . Para cada  $C_i$ , existe  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f_i[C_i] = \{1\}$  e  $f_i(x) = 0$ . Tome  $f$  tal que  $f(y) = \max\{f_1(y), \dots, f_k(y)\}$ . Então  $f$  é contínua (verifique que o máximo de duas funções contínua é contínua) e  $f(x) = 0$  e  $f[F] = 1$ .

4)  $\rightarrow$  1). Tome os complementares de  $\mathcal{B}$  para termos um subbase de fechados  $\mathcal{C}^*$ . Como  $\mathcal{B}$  satisfaz a condição em 4), segue que  $\mathcal{C}^*$  satisfaz a propriedade em 3). Aplicando 3) para  $\mathcal{C}^*$  temos que vale 1).  $\square$

### 15.1.3 Completamente regular, pseudométricas e topologias iniciais de completamente regulares.

Uma forma um pouco tosca para pensar sobre isso é que cada pseudométrica dá uma medição imprecisa entre um ponto e um fechado, mas o espaço pode ser tão torto que é preciso de uma quantidade grande de medições para identificar corretamente os pontos e fechados.

**Teorema 15.7.** São equivalentes: Um espaço é completamente regular se e somente se sua topologia é gerada por uma família de pseudométricas.

*Demonstração.* Já vimos que a família de pseudométricas gera uma topologia completamente regular.

Suponhamos que  $X$  é completamente regular e tome  $\mathcal{F}$  a família de todas as funções contínuas de  $X$  em  $[0, 1]$ . Para cada  $f \in \mathcal{F}$ , seja  $\rho_f$  a pseudométrica gerada por  $f$ . Como vimos anteriormente, as  $\rho_f$  são pseudométricas contínuas em  $X$  e portanto as  $\rho_f$ -bolas abertas são abertas em  $X$ . Assim a topologia gerada pelas pseudométricas contínuas é menos fina que a topologia de  $X$ . Seja  $x \in X$  e  $V$  uma vizinhança aberta de  $x$ . Como  $X$  é completamente regular, existe  $h : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $h(x) = 0$  e  $h[X \setminus V] \subseteq \{1\}$ . Temos que  $\rho_h(x, y) = |h(x) - h(y)| = 1$  para cada  $y \in X \setminus V$ . Assim  $B_{\rho_h}(x, \frac{1}{2}) \cap X \setminus V = \emptyset$ . Portanto temos que  $x \in B_{\rho_h}(x, \frac{1}{2}) \subseteq V$  e portanto as  $\rho$ -bolas abertas geradas pelas pseudométricas contínuas formam uma base da topologia de  $X$ .  $\square$

**Teorema 15.8.** São equivalentes:

- 1) Um espaço  $X$  é completamente regular.
- 2)  $X$  possui a topologia inicial de uma família de funções limitadas de  $X$  em  $[0, 1]$ .
- 3)  $X$  possui a topologia inicial de uma família de funções limitadas de  $X$  em  $\mathbb{R}$ .
- 4)  $X$  possui a topologia inicial de uma família de funções de  $X$  em  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)) Se  $X$  é completamente regular com a topologia  $\tau$  então seja  $\mathcal{F}$  a família de funções contínuas de  $X$  em  $[0, 1]$ . Tome a topologia  $\tau_{\mathcal{F}}$  gerada por  $\mathcal{F}$ . Como  $\tau_{\mathcal{F}}$  é a topologia menos fina que torna todas as  $\mathcal{F}$  contínuas, segue que  $\tau_{\mathcal{F}} \subseteq \tau$ . Para ver a recíproca, seja  $x \in X$  e  $V$  um conjunto  $\tau$  aberto, existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  e  $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}$ . Como  $f \in \mathcal{F}$  segue que  $f$  é  $\tau_{\mathcal{F}}$ -contínua. Portanto,  $f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]] \in \tau_{\mathcal{F}}$ . Mas,  $x \in f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]] \subseteq V$ . Assim,  $\tau_{\mathcal{F}}$  é uma base para  $\tau$  e  $\tau = \tau_{\mathcal{F}}$ .

(2)  $\rightarrow$  3)) é imediata.

(3)  $\rightarrow$  4)) é imediata.

(4)  $\rightarrow$  1)) Suponha que  $\mathcal{F}$  é uma família de funções de  $X$  em  $\mathbb{R}$  e seja  $\tau_{\mathcal{F}}$  a topologia inicial gerada por  $\mathcal{F}$ .

Seja  $x \in X$  e  $F$  um fechado que não contém  $x$ . Então existe  $U_i$  um aberto de  $\mathbb{R}$  e  $f_i \in \mathcal{F}$  para  $1 \leq i \leq n$  tal que  $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i] \subseteq X \setminus F$ .

Para cada  $i$  seja  $\delta_i > 0$  tal que  $]f_i(x) - \delta_i, f_i(x) + \delta_i[ \subseteq U_i$ . Seja  $g_i$  tal que  $g_i(t) = \min\{1, \frac{1}{\delta_i}|f_i(t) - f_i(x)|\}$ . Para  $1 \leq i \leq n$ , a função  $g_i : X \rightarrow [0, 1]$  é contínua e  $g_i(x) = 0$ . Se  $t \in g_i^{-1}[[0, 1]]$  então  $g_i(t) = \frac{1}{\delta_i}|f_i(t) - f_i(x)| < 1$ . Logo,  $|f_i(t) - f_i(x)| < \delta_i$ . Portanto  $f_i(t) \in ]f_i(x) - \delta_i, f_i(x) + \delta_i[ \subseteq U_i$ . Logo  $g_i^{-1}[[0, 1]] \subseteq f_i^{-1}[U_i]$ .

Tome  $g$  tal que  $g(t) = \max\{g_i(t) : 1 \leq i \leq n\}$ . Então  $g$  é contínua,  $g(x) = 0$  e  $g^{-1}[[0, 1]] \subseteq g_i^{-1}[[0, 1]]$ . Portanto  $g^{-1}[[0, 1]] \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i] \subseteq X \setminus F$ . Assim  $g[F] \subseteq \{1\}$ .  $\square$

**Corolário 15.9.** Seja  $\mathcal{F}$  uma família de funções  $f_i : X \rightarrow Y_i$ , onde cada  $Y_i$  é completamente regular para cada  $i \in I$ . Então topologia inicial gerada por  $\mathcal{F}$  é completamente regular.

*Demonstração.* Para cada  $i \in I$ , seja  $\mathcal{G}_i$  as funções contínuas de  $Y_i$  em  $\mathbb{R}$ . A topologia inicial gerada por  $\mathcal{F}$  coincide com a topologia inicial gerada por  $\bigcup_{i \in I} \{g \circ f_i : g \in \mathcal{G}_i\}$ . Portanto a topologia é completamente regular.  $\square$

**Corolário 15.10.** Regularidade completa é uma propriedade hereditária e produtiva.

*Demonstração.* Subespaço e produto de Tychonoff são topologias iniciais.  $\square$

### 15.1.4 Produto enumerável de espaços metrizáveis é metrizável.

**Teorema 15.11.** Se  $X_i$  é um espaço gerado por uma topologia pseudométrica, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , então  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  com a topologia produto é um espaço pseudometrizável

*Demonstração.* Dada a pseudométrica  $\rho_i \in X_i$ , considere a pseudométrica  $\tilde{\rho}_i = \rho_i \circ \pi_i$ . A topologia gerada por  $\{\tilde{\rho}_i : i \in \mathbb{N}\}$  coincide com a topologia produto e a topologia gerada por uma família enumerável de pseudométricas é gerada por uma pseudométrica.  $\square$

**Corolário 15.12.** O espaço  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  é um espaço metrizável.

*Demonstração.* A pseudométrica que gera a topologia é uma métrica.  $\square$

## 15.2 O Axioma de Separação $T_{3\frac{1}{2}}$ .

### 15.2.1 Definindo $T_{3\frac{1}{2}}$

Dado um espaço topológico arbitrário, queremos enxergá-lo como o subespaço de um outro espaço. No caso, o espaço mais simples seria o produto de Tychonoff de  $J$  cópias do intervalo  $[0, 1]$  que será denotado por  $[0, 1]^J$ . Como  $[0, 1]^J$  satisfaz  $T_2$  e é completamente regular, podemos apenas trabalhar com a imersões de espaços  $T_2$  que são completamente regulares.

**Definição 15.13.** Um espaço completamente regular e  $T_1$  é chamado de espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

**Lema 15.14.** Um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  é  $T_3$ .

*Demonstração.* Já vimos que espaços completamente regulares são regulares. Então espaços completamente regulares  $+ T_1$  são regulares  $+ T_1 = T_3$ .  $\square$

Ainda não vimos exemplo de regular que não é completamente regular e isso será feito depois.

### 15.2.2 Por que $T_{3\frac{1}{2}}$ ? E outras observações sobre a definição.

Há lugares (como receitas de bolo e livros de matemática) em que  $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$ . A propriedade  $T_4$  é mais forte que  $T_{3\frac{1}{2}}$  pelo Lema de Urysohn. Existem autores que usam  $T_{\frac{7}{2}}$  ou  $T_{3.5}$ .

Não há um consenso sobre a notação. Alguns autores denotam  $T_3$  como espaços regulares e Hausdorff e espaços  $T_{3\frac{1}{2}}$  como espaços completamente regulares e Hausdorff. Alguns outros autores usam regular como equivalente a  $T_3$  e alguns colocam que  $T_3$  não implica  $T_1$ . E o mesmo ocorre com completamente regular e  $T_{3\frac{1}{2}}$ , assim, é preciso verificar qual a definição que o autor utilizada em seu texto.

Decidimos usar a notação de completamente regular sem  $T_1$  por que isto facilita a notação para falar de topologias geradas por pseudométricas (num texto antigo, eu usei  $T_3$  e regulares como a mesma coisa, então até a mesma pessoa pode mudar sua notação).

## 15.3 Resumindo as relações $T_i$ , $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$ .

**Teorema 15.15.**  $T_4 \rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \rightarrow T_3 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0$  e nenhuma delas é uma equivalência.

*Demonstração.* Vimos que  $T_4$  implica regular e que regular  $+ normal$  implica completamente regular. Assim,  $T_4$  implica  $T_{3\frac{1}{2}}$  (ou diretamente usar o Lema de Urysohn e que unitários são fechados num  $T_1$ .)

Já vimos que completamente regular implica regular, que  $T_3 = regular + T_1$  implica  $T_2$  que implica  $T_1$  que implica  $T_0$ .

Também já vimos exemplos de  $T_0$  que não é  $T_1$ ,  $T_1$  que não é  $T_2$ ,  $T_2$  que não é  $T_3$ . Veremos abaixo os exemplos de  $T_3$  que não é  $T_{3\frac{1}{2}}$  e  $T_{3\frac{1}{2}}$  que não é  $T_4$ .  $\square$

### 15.3.1 Um $T_3$ que não é $T_{3\frac{1}{2}}$ .

Vamos ver outros exemplos quando vermos quocientes.

**Exemplo 15.16.**  $T_3$  não implica completamente regular.

*Demonstração.* Seja  $X_0$  o semiplano superior fechado de  $\mathbb{R}^2$  e  $X = X_0 \cup \{(0, -1)\}$ .

Para cada  $(x, y) \in X$  com  $y > 0$  seja  $\mathcal{V}_{(x,y)} = \{(x, y)\}$ .

Para cada  $(x, 0)$ ,  $S_{x,0} = \{(x, t) : 0 \leq t \leq 2\} \cup \{(x, 0) + (t, t) : 0 \leq t \leq 2\}$ . Note que  $S_{(x,0)}$  são dois segmentos de reta saindo de  $(x, 0)$ , um com ângulo de 45 graus com o eixo das abscissas e o outro com ângulo de 90. O sistema de vizinhanças  $\mathcal{V}_{x,0}$  é dado por  $\{(x, 0) \cup (S_{(x,0)} \setminus F) : F \subseteq X_0 \text{ é finito}\}$ .

Para  $(0, -1)$ , defina  $\mathcal{V}_{(0,-1)} = \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\} : i \in \mathbb{N}\}$ .

Fica a cargo do leitor se convencer que  $\{\mathcal{V}_{(x,y)} : (x, y) \in X\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para uma topologia de  $X$  e que esta topologia é  $T_1$ .

Note que os abertos em  $\mathcal{V}_{(x,y)}$  com  $(x, y) \in X_0$  são clopen. Portanto temos a regularidade para todo  $(x, y) \in X_0$ . Falta verificar apenas a regularidade de  $X$  para o ponto  $(0, -1)$ . Note que se  $i \in \mathbb{N}$  então  $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\} \subseteq \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\}$ . De fato tome  $(x', y') \in X$  com  $x' < i + 1$ . Se  $y' > 0$  então  $\{(x', y')\}$  é aberto e não intersecta  $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\}$ . Se  $y' = 0$  então  $(x'', y'') \in S_{(x',0)}$  é tal que  $x'' \leq x' + 2 < i + 1 + 2 \leq i + 3$ . Portanto  $S_{(x',0)} \cap \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\} = \emptyset$ . Assim,  $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\} \subseteq \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\}$ . Assim,  $X$  é regular em  $(x, 0)$ .

Vamos agora verificar que  $X$  não é completamente regular. Primeiro note que  $F = \{(x, 0) : x \leq 0\}$  é um fechado.

**Afirmção.** Se  $f(x, 0) = 1$  e  $f$  é contínua então existe  $E_x$  enumerável tal que  $f[S_{(x,0)} \setminus E_x] = \{1\}$ .

*Demonstração da Afirmção.* Para cada  $n > 0$  natural, existe  $F_n$  finito tal que  $f[\{(x, 0)\} \cup (S_{(x,0)} \setminus F_n)] \subseteq ]1 - \frac{1}{n}, 1]$ . Tomando  $E_x = \bigcup_{n>0} F_n$ , temos que  $f[S_{(x,0)} \setminus E_x] = \{1\}$ .

Suponha que existe uma função contínua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f[F] = \{1\}$  e  $f((0, -1)) = 0$ .

Tome  $A_0$  infinito enumerável em  $[-1, 0]$ . Por hipótese,  $f((x, 0)) = 1$  para cada  $x \in A_0$ . Para cada  $x \in A_0$  fixe  $E_x$  tal que  $f[S_{(x,0)} \setminus E_x] = \{1\}$ . Temos que  $\bigcup_{x \in A_0} E_x$  é enumerável. Temos que  $[0, 1] \setminus \{t : (t, s) \in \bigcup_{x \in A_0} E_x\}$  é não enumerável, logo podemos fixar  $A_1 \subseteq [0, 1] \setminus \{t : (t, s) \in \bigcup_{x \in A_0} E_x\}$  infinito. Se  $a \in A_1$  então  $(S_{(x,0)} \setminus E_x) \cap S_{(a,0)} \neq \emptyset$ , para cada  $x \in A_0$ . Assim para todo  $F \subseteq X$  finito, temos que existe  $x \in A_0$  tal que  $(S_{(x,0)} \setminus E_x) \cap (S_{(a,0)} \setminus F) \neq \emptyset$  (pois os segmentos de inclinação 45 graus são dois a dois disjuntos). Se  $(u, v) \in (S_{(x,0)} \setminus E_x) \cap (S_{(a,0)} \setminus F)$  então  $f((u, v)) = 1$  assim,  $f((a, 0)) = 1$  para todo  $a \in A_1$ . Podemos agora prosseguir por indução e encontrar  $A_n \subseteq [n-1, n]$  tal que  $f[A_n \times \{0\}] = \{1\}$  para cada natural  $n$ . Portanto, para toda vizinhança  $W$  de  $(0, -1)$ , existe  $n$  tal que  $A_n \times \{0\} \subseteq W$ . Então  $f((0, -1)) = 1$ , contradição.  $\square$

### 15.3.2 Um $T_{3\frac{1}{2}}$ e não é $T_4$ .

**Exemplo 15.17.** O Plano de Niemytski é  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

*Demonstração.* Já vimos que o exemplo não é normal. A topologia de Niemytski é mais fina do que a topologia do semiplano superior fechado de  $\mathbb{R}^2$ , logo ela é Hausdorff.

O eixo das abscissas no topologia de Niemytski é um fechado e discreto na sua topologia de subespaço. De fato, o eixo das abscissas é fechado em  $\mathbb{R}^2$  e a topologia de Niemytski é mais fina do que a topologia de subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . As vizinhanças do sistema fundamental de vizinhanças de um ponto na abscissa usado na definição da topologia só intersectam um ponto da abscissa, assim, os pontos da abscissa são isolados no subespaço da abscissa.

Para ver que o plano de Niemytski é completamente regular, tomemos um ponto  $(x, y) \in X$  e um aberto do sistema de vizinhanças de  $\mathcal{V}_{(x,y)}$ . Vamos começar com  $y > 0$ . O aberto é uma bola aberta centrada em  $(x, y)$  de raio  $\epsilon$  onde a bola está toda contida no semiplano superior aberto. Temos que a métrica Euclidiana é contínua por que a topologia de Niemytski é mais fina do que a do semiplano superior com a topologia de subespaço. Assim a distância  $d$  de  $(x, y)$  a um ponto do semiplano superior aberto é contínua. Para cada  $(a, b) \in X$  seja

$$f(a, b) = \begin{cases} d((x, y), (a, b)) & \text{se } (a, b) \in B_d((x, y), \epsilon) \\ 1 & \text{se } (a, b) \notin B_d((x, y), \epsilon) \end{cases}$$

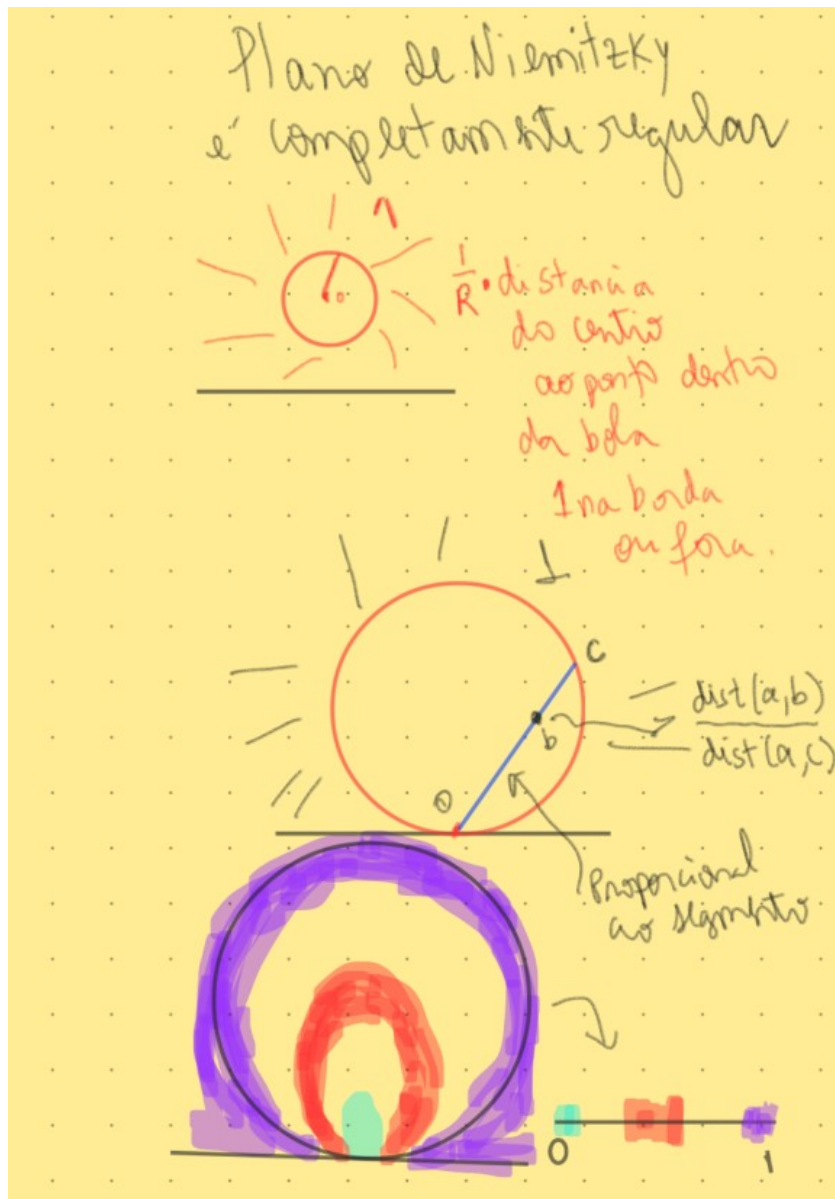


Figura 15.1: O espaço de Niemytzky é completamente regular (e portanto  $T_{3\frac{1}{2}}$ ).

Para os pontos  $(a, b)$  cuja distância é menor que 1, podemos usar a continuidade da distância dentro da bola. Para os pontos cuja distância é maior que 1 basta usar a continuidade da função constante no aberto  $X \setminus B_d((x, y), \epsilon]$ . Para o ponto  $(a, b)$  de distância 1 a  $(x, y)$ , dada uma vizinhança de  $V$  de 1, encontre uma vizinhança  $U$  de  $(a, b)$  tal que  $d((x, y), (a, b)) \in V$  para todo  $(a, b) \in U$ . Então  $f((a, b)) \in V$  para todo  $(a, b) \in U$  (pois  $1 \in V$ ).

Para os pontos  $(x, 0)$ , Fixe  $\delta > 0$ . A bola  $B_d((x, \delta), \delta)$ , então  $V_\delta = B_d((x, \delta), \delta) \cup \{(x, 0)\}$  é uma vizinhança no sistema fundamental de  $(x, 0)$ .

Para  $(a, b)$  no semiplano superior aberto, podemos traçar a semireta que sai de  $(x, 0)$  que passa por  $(a, b)$ . Então essa semireta intersecta a circunferência  $S_d((x, \delta), \delta)$  de centro  $(x, \delta)$  e raio  $\delta$  em exatamente um ponto que denotaremos por  $(a^*, b^*)$ . Podemos comparar a distância de  $(a, b)$  e  $(a^*, b^*)$  usando

$$g(a, b) = \frac{d((x, 0), (a, b))}{d((x, 0), (a^*, b^*))} \quad \text{para todo } (a, b) \text{ no semiplano superior aberto.}$$

**Afirmção.** Fixe  $\gamma > 0$ . Então  $g(a, b) = \frac{\gamma}{\delta}$  para todo  $(a, b) \in S_d((x, \gamma), \gamma)$  se  $(a, b) \neq (x, 0)$ .

*Dem. da Afirmção:* Vamos calcular  $g(a, b)$  para  $(a, b) \in S_d((x, \gamma), \gamma)$  com  $(a, b) \neq (x, 0)$ . Se tomamos o ponto  $(x, 2\gamma) \in S_d((x, \gamma), \gamma)$ , temos que o ponto  $(x^*, (2\gamma)^*)$  é o ponto  $(x, 2\delta)$ . Assim,  $g(x, 2\gamma) = \frac{\gamma}{\delta}$ .

Escolha  $(a, b) \neq (x, 0)$  pertencente a  $S_d((x, \gamma), \gamma)$  com  $a \neq x$ . Como ambas as circunferências são tangentes a abscissa no ponto  $(0, 0)$ , podemos ver que o triângulo  $(x, 0)$   $(a, 0)$  e  $(a, b)$  é semelhante ao triângulo  $(x, 0)$ ,  $(a^*, 0)$  e  $(a^*, b^*)$ . Temos então que  $g(a, b) = \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{\sqrt{(a^*-x)^2 + (b^*)^2}} = \frac{b}{b^*} = l$ . Também temos que  $(a-x)^2 + (b-\gamma)^2 = \gamma^2$ . Logo,  $(a-x)^2 + b^2 - 2b\gamma + \gamma^2 = \gamma^2$  e segue que  $(a-x)^2 + b^2 = 2b\gamma$ . Além disso, Também temos que  $(a^*-x)^2 + (b^*-\delta)^2 = \delta^2$ . Logo,  $(a^*-x)^2 + (b^*)^2 - 2b^*\delta + \delta^2 = \delta^2$  e segue que  $(a^*-x)^2 + (b^*)^2 = 2b^*\delta$ . Então  $l^2 = \frac{(a-x)^2 + b^2}{(a^*-x)^2 + (b^*)^2} = \frac{2b\gamma}{2b^*\delta} = l \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ . Portanto  $g(a, b) = l = \frac{\gamma}{\delta}$ .  $\square$

Usando a afirmação que acima, note que essa função é contínua no plano superior aberto como subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Para isto, observe que uma bolinha no semiplano superior se encaixa dentro de um arco de um círculo de raio menor que a distância de  $(x, 0)$  à bolinha e um raio maior que a distância de qualquer ponto da bolinha a  $(x, 0)$ .

A topologia no subespaço coincide com a topologia de subespaço aberto do plano de Niemytski. Denote  $V_\delta = B_d((x, \delta), \delta) \cup \{(x, 0)\}$ . Assim,  $g$  é contínua na topologia de Niemytski dentro do semiplano superior aberto.

Defina

$$h(a, b) = \begin{cases} g(a, b) & \text{se } (a, b) \in V_\delta \\ 1 & \text{se } (a, b) \in X \setminus V_\delta \end{cases}$$

Para checar a continuidade precisamos dividir em 4 tipos de pontos. Primeiro vamos checar sobre o valor de  $g$  nos pontos de  $V_\gamma$ :

1) no ponto  $(x, 0)$ . Dado um  $\epsilon > 0$ , fixe  $\gamma < \epsilon \cdot \delta$ .

Assim, para todo  $(a, b)$  em  $V_\gamma$  distinto de  $(x, 0)$ , temos que  $h(a, b) = g(a, b) < g(a', b') < \frac{\gamma}{\delta} < \epsilon$  onde  $(a', b')$  é o ponto de  $S_d((x, \gamma), \gamma)$  correspondente a  $(a, b)$  quando tomamos o segmento que passa por  $(x, 0)$  e  $(a, b)$ . A partir disto, temos que  $h[V_\gamma] \subseteq [0, \epsilon]$  e  $h$  é contínua em  $(x, 0)$ .

2) no ponto  $(a, b)$  com  $(a, b) \notin B_d((x, \delta), \delta]$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $(a, b)$  que não intercepta  $B_d((x, \delta), \delta]$ , logo não intersecta  $V_\delta$ . Então temos  $h[U] = \{1\}$ . Portanto  $h$  é contínua em  $(a, b)$ .

3)  $(a, b) \in V_\delta \setminus \{(x, 0)\}$ . Neste caso,  $(a, b) \in B_d((x, \delta), \delta)$  que é um aberto no semiplano superior e  $g$  e  $h$  coincidem em  $B_d((x, \delta), \delta)$ . Como  $g$  é contínua em  $B_d((x, \delta), \delta)$ , segue que  $h$  é contínua em  $(a, b) \in B_d((x, \delta), \delta)$ .

4)  $(a, b) \in S_d((x, \delta), \delta) \setminus \{(x, 0)\}$ . Claramente temos que  $h(a, b) = 1$ . Dada uma vizinhança aberta de  $V$  de 1, como  $(a, b)$  está no semiplano superior aberto existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $(a, b)$  tal que  $g[U] \subseteq V$ . Como  $1 \in V$ , segue que  $h[U] \subseteq V$  e  $h$  é contínua em  $(a, b)$ .  $\square$

### 15.3.3 Imersão de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ em produtos de intervalos.

**Teorema 15.18.** Seja  $\mathcal{F}$  a família de todas as funções contínuas de  $X$  em  $[0, 1]$ , onde  $[0, 1]$  está com a topologia usual. Então  $\Delta\mathcal{F}$  é uma imersão de  $X$  em  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ .

*Demonstração.* A função  $\Delta\mathcal{F}$  é uma função contínua, pois  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$  tem a topologia inicial das projeções  $\{\pi_f : f \in \mathcal{F}\}$  e  $\pi_f \circ \Delta\mathcal{F} = f$  é contínua para cada  $f \in \mathcal{F}$ .

Como o espaço é  $T_1$  basta mostrarmos que  $\mathcal{F}$  separa pontos de fechados. Dado  $x \in X$  e  $F$  fechado tal que  $x \notin F$ , existe pela definição de completamente regular uma função  $f \in \mathcal{F}$  tal que  $f(x) = 0$  e  $f[F] \subseteq \{1\}$ . Logo  $f(x) \notin f[F] = \{1\}$ . Logo,  $\Delta\mathcal{F}$  satisfaz a propriedade desejada pelo teorema da imersão.  $\square$

### 15.3.4 Imersões ‘econômicas’. Um teorema de metrização.

Vamos agora ver que podemos imergir usando menos funções.

**Teorema 15.19.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base de abertos infinita de um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$   $X$ . Então existe uma família  $\mathcal{F}$  de funções contínuas que separa pontos e que separa ponto de fechados com  $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{B}|$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{C} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \bar{U} \subseteq V \text{ e existe } f : X \rightarrow [0, 1] \text{ contínua com } f[\bar{U}] = \{0\} \text{ e } f[X \setminus V] = \{1\}\}$ . Para cada  $(U, V) \in \mathcal{C}$ , fixe  $f_{(U, V)}$  tal que  $f_{(U, V)}[\bar{U}] = \{0\}$  e  $f_{(U, V)}[X \setminus V] = \{1\}$ . Defina então  $\mathcal{F} = \{f_{(U, V)} : (U, V) \in \mathcal{C}\}$ . Como  $X$  é  $T_1$ , basta mostrarmos que  $\mathcal{F}$  separa pontos de fechados.

Seja  $x \in X$  e  $F$  um fechado tal que  $x \notin F$ . Usando que  $\mathcal{B}$  é base, existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subseteq X \setminus F$ . Usando que  $X$  é completamente regular, existe  $g : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $g(x) = 0$  e  $g[X \setminus V] = 1$ . Seja  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq g^{-1}[[0, \frac{1}{2}]]$ .

Seja  $f$  tal que  $f(y) = 2 \cdot \max\{0, g(y) - \frac{1}{2}\}$ . A função  $f$  é contínua,  $f(y) \in [0, 1]$  para todo  $y \in X$ .

Se  $y \in \bar{U}$  então  $g(y) < \frac{1}{2}$  e portanto  $f(y) = 2 \cdot \max\{0, g(y) - \frac{1}{2}\} = 2 \cdot 0 = 0$ .

Se  $y \in X \setminus V$  então  $g(y) = 1$ . Portanto  $f(y) = 2 \cdot \max\{0, g(y) - \frac{1}{2}\} = 2 \cdot \max\{0, \frac{1}{2}\} = 1$ .

Portanto,  $(U, V) \in \mathcal{C}$  e  $f_{(U, V)} \in \mathcal{F}$ . Logo, temos que  $f_{(U, V)}(x) \in f_{(U, V)}[\bar{U}] = \{0\}$  e  $f_{(U, V)}[F] \subseteq f_{(U, V)}[X \setminus V] = \{1\}$ .

Assim,  $\mathcal{F}$  separa pontos de fechados.  $\square$

**Teorema 15.20.** Se  $X$  é  $T_3$  e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade então  $X$  é isomorfo a um subespaço de  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ . Em particular,  $X$  é metrizable.

*Demonstração.* Vimos que um espaço regular e com base enumerável é normal. Espaços normais e  $T_1$  são  $T_{3\frac{1}{2}}$ . Um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  com base enumerável possui uma família enumerável que separa pontos e separa pontos de fechados. Assim,  $X$  pode ser imerso num produto enumerável de  $[0, 1]$ 's que é metrizable. Assim,  $X$  é homeomorfo a um subespaço de um metrizable, portanto  $X$  é metrizable.  $\square$

## Capítulo 16

# Equivalências e aplicações do Axioma da Escolha. Teorema de Tychonoff.

### 16.1 O Lema de Zorn.

**Definição 16.1.** Uma ordem parcial é uma ordem reflexiva e transitiva (dois elementos não precisam ser comparáveis).

Um subconjunto não vazio de uma ordem parcial é uma cadeia se é um subconjunto linearmente ordenado na subordem.

Um elemento na ordem parcial é maximal se nenhum elemento da ordem é estritamente maior que ele. (Note que elemento maximal não precisa ser máximo, e que podem existir maximais incomparáveis).

Lema de Zorn: Dada uma ordem parcial tal que toda cadeia tem majorante então a ordem parcial possui elementos maximais.

**Teorema 16.2.** O Axioma da Escolha é equivalente ao Lema de Zorn.

A prova desse resultado é feito no curso de teoria dos conjuntos.

### 16.2 ‘Vai um ultracafezinho aí? Acabou de passar no ...’.

#### 16.2.1 Ultrafiltro.

**Definição 16.3.** Dizemos que um filtro  $\mathcal{F}$  de  $X$  é um ultrafiltro se é filtro maximal na relação  $\subseteq$ , ou seja, se  $\mathcal{G}$  é um filtro tal que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  então  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ .

**Teorema 16.4.** Todo filtro pode ser estendido para um ultrafiltro.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{G}$  um filtro sobre  $X$ . Seja  $\mathfrak{F}$  a família de todos os filtros  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ . Como  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$ , segue que  $\mathcal{F}$  é uma ordem parcial não-vazia, pois  $\subseteq$  é transitiva e reflexiva. Seja  $\mathfrak{F}'$  uma cadeia em  $\mathfrak{F}$ . Vamos verificar que  $\bigcup \mathfrak{F}'$  é um majorante para a família  $\mathfrak{F}'$ . Claramente  $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathfrak{F}'$  para cada  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}'$ . Assim, basta mostrarmos que  $\bigcup \mathfrak{F}' \in \mathfrak{F}$ . Como  $\mathcal{G} \subseteq \bigcup \mathfrak{F}'$ , resta verificarmos que  $\bigcup \mathfrak{F}'$  é um filtro.

Como  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  para todo  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}'$ , segue que  $\emptyset \notin \bigcup \mathfrak{F}'$ .

Seja  $A \in \bigcup \mathfrak{F}'$  e  $B$  tal que  $A \subseteq B \subseteq X$ . Então existe  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}'$  tal que  $A \in \mathcal{F}$ . Como  $\mathcal{F}$  é filtro,  $A \in \mathcal{F}$  e  $A \subseteq B \subseteq X$ , segue que  $B \in \mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathfrak{F}'$ . Assim,  $B \in \bigcup \mathfrak{F}'$ .

Dados,  $A, B \in \bigcup \mathfrak{F}'$  existe  $\mathcal{F}_A$  e  $\mathcal{F}_B$  elementos de  $\mathfrak{F}'$  tais que  $A \in \mathcal{F}_A$  e  $B \in \mathcal{F}_B$ . Como  $\mathfrak{F}'$  é uma cadeia, segue que  $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_B$  ou  $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{F}_A$ . No primeiro caso, temos que  $A, B \in \mathcal{F}_B$  e no segundo temos que  $A, B \in \mathcal{F}_A$ . Assim, pelo fato de serem filtros, temos que  $A \cap B \in \mathcal{F}_B \subseteq \bigcup \mathfrak{F}'$  ou  $A \cap B \in \mathcal{F}_A \subseteq \bigcup \mathfrak{F}'$ . Assim,  $A \cap B \in \bigcup \mathfrak{F}'$ .

Com isto,  $\bigcup \mathfrak{F}'$  é um filtro em  $\mathfrak{F}$ .

Como toda cadeia de  $\mathfrak{F}$  possui majorante, segue do Lema de Zorn que  $\mathfrak{F}$  possui um elemento maximal  $\mathcal{F}$ . Como  $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$ , segue que  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ .

Se  $\mathcal{F}'$  é um filtro contendo  $\mathcal{F}$ , então em particular, temos que  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$ . Assim,  $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}$ . Pela maximalidade de  $\mathcal{F}$  em  $\mathfrak{F}$ , segue que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ .

Logo,  $\mathcal{F}$  é um ultrafiltro estendendo  $\mathcal{G}$ . □

**Proposição 16.5.** Seja  $\mathcal{F}$  um filtro sobre  $X$ .

São equivalentes:

- 1)  $\mathcal{F}$  é ultrafiltro.
- 2) Se  $A \in \mathcal{P}(X)$  e  $A \cap F \neq \emptyset$  para cada  $F \in \mathcal{F}$  então  $A \in \mathcal{F}$ .
- 3)  $\mathcal{F}$  é um filtro primo, ou seja, para todos  $A, B$  subconjuntos de  $X$  tais que  $A \cup B \in \mathcal{F}$  então  $A \in \mathcal{F}$  ou  $B \in \mathcal{F}$ .
- 4) para todo  $A \in \mathcal{P}(X)$  ou  $A \in \mathcal{F}$  ou  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)). Seja  $\mathcal{F}$  um ultrafiltro e suponhamos que  $A \cap F \neq \emptyset$  para cada  $F \in \mathcal{F}$ . Então  $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$  possui PIF. Assim essa família gera um filtro  $\mathcal{G}$  que estende  $\mathcal{F}$ . Pela maximalidade de  $\mathcal{F}$ , segue que  $A \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$ . Assim,  $A \in \mathcal{F}$ .

(2)  $\rightarrow$  3)). Suponhamos que vale 2) e tome  $A, B \subseteq X$  tais que  $A \cup B \in \mathcal{F}$ . Se  $A \in \mathcal{F}$  então a hipótese está satisfeita. Se  $A \notin \mathcal{F}$  então existe  $F_A \in \mathcal{F}$  tal que  $A \cap F_A = \emptyset$ . Como  $A \cup B$  e  $F_A$  pertencem a  $\mathcal{F}$  segue que  $(A \cup B) \cap F_A \in \mathcal{F}$ . Agora,  $(A \cup B) \cap F_A = (A \cap F_A) \cup (B \cap F_A) \subseteq \emptyset \cup B = B$ . Assim,  $B$  contém um elemento de  $\mathcal{F}$  e portanto  $B \in \mathcal{F}$ .

(3)  $\rightarrow$  4)). Para cada  $A \subseteq X$ , temos que  $A \cup (X \setminus A) = X \in \mathcal{F}$ . Assim, como  $\mathcal{F}$  é primo, segue que ou  $A \in \mathcal{F}$  ou  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ .

(4)  $\rightarrow$  1)). Iremos fazer pela contrapositiva. Suponhamos que  $\mathcal{F}$  não é um ultrafiltro. Então existe um filtro  $\mathcal{G}$  tal que  $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$  e  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Fixe  $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ . Como  $\mathcal{G}$  é filtro e  $A \in \mathcal{G}$ , segue que  $X \setminus A \notin \mathcal{G}$ . Como  $\mathcal{F}$  é subconjunto de  $\mathcal{G}$ , segue que  $X \setminus A \notin \mathcal{F}$ . Assim, temos que nem  $A$  e nem  $X \setminus A$  pertencem a  $\mathcal{F}$ . Assim 4) não está satisfeita. □

**Lema 16.6.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é um função (não é necessário topologias e continuidade aqui) e  $\mathcal{F}_X$  é um ultrafiltro em  $X$  então o filtro  $\mathcal{F}_Y$  gerado por  $\{f[F] : F \in \mathcal{F}_X\}$  é um ultrafiltro em  $Y$ .

*Demonstração.* Já vimos anteriormente que  $\mathcal{F}$  é um filtro. Suponha  $B \subseteq Y$ . Então  $f^{-1}[B] \cup f^{-1}[X \setminus B] = X \in \mathcal{F}_X$ . Como  $\mathcal{F}_X$  é primo, segue que  $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}_X$  ou  $f^{-1}[X \setminus B] \in \mathcal{F}_X$ . Assim ou  $f[f^{-1}[B]]$  ou  $f[f^{-1}[X \setminus B]]$  pertencem  $\mathcal{F}_Y$ .

Como  $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$  e  $f[f^{-1}[X \setminus B]] \subseteq X \setminus B$ , segue que  $B \in \mathcal{F}_Y$  ou  $X \setminus B \in \mathcal{F}_Y$ . Assim,  $\mathcal{F}_Y$  é um ultrafiltro. □

### 16.2.2 Teorema de Tychonoff usando ultrafiltros.

**Teorema 16.7.** (Teorema de Tychonoff) O produto de espaços compactos é compacto (usando ultrafiltros).

*Demonstração.* Seja  $\{X_i : i \in I\}$  uma família de espaços compactos não-vazios. E seja  $\mathcal{G}$  um filtro em  $\prod_{i \in I} X_i$ . Seja  $\mathcal{F}$  um ultrafiltro que estende  $\mathcal{G}$ . Para cada  $i \in I$ , seja  $\mathcal{F}_i$  o filtro gerado pela base  $\{\pi_i[F] : F \in \mathcal{F}\}$  para cada  $i \in I$ .

Fixe  $j \in I$ . Já vimos que, como  $\mathcal{F}$  é ultrafiltro então o filtro  $\mathcal{F}_j$  gerado pela imagem de uma função, é ultrafiltro. Pela compacidade de  $X_j$ , temos que existe alguma extensão de  $\mathcal{F}_j$  que converge para algum ponto  $x_j$ . Como  $\mathcal{F}_j$  é ultrafiltro, segue que esta extensão convergente é o próprio  $\mathcal{F}_j$ .

Já vimos anteriormente que um filtro no produto converge para  $(x_i : i \in I)$  se e somente se os filtros  $\mathcal{F}_i$  gerados pela projeções de  $\mathcal{F}$  por  $\pi_i$  convergem para  $x_i$  para cada  $i \in I$ .

Portanto  $\mathcal{F}$  converge.

*Caso alguém queira ver a prova direta deste último fato na direção que necessitamos: Similarmente como na prova do caso finito, podemos verificar que*

*( $U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i) \cap F \neq \emptyset$  para cada  $F \in \mathcal{F}$  e cada  $U_j$  vizinhança aberta de  $x_j$ . Como  $\mathcal{F}$  é um ultrafiltro, segue que  $U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i \in \mathcal{F}$ . Como isto vale para todo  $j \in J$ , todos os abertos subbásicos contendo  $(x_i : i \in I)$  pertencem a  $\mathcal{F}$ . Como  $\mathcal{F}$  é um filtro, segue que todos os abertos básicos que contém  $(x_i : i \in I)$  são elementos de  $\mathcal{F}$ . Logo,  $\mathcal{F}$  converge para  $(x_i : i \in I)$ .*

Assim, todo filtro em  $\prod_{i \in I} X_i$  possui uma extensão convergente. Portanto, temos que  $\prod_{i \in I} X_i$  é compacto.



Note a importância de  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}_i$  serem suas únicas extensões para que o argumento funcione.  $\square$

**Corolário 16.8.**  $[0, 1]^I$  é um espaço compacto Hausdorff, para todo conjunto de índices  $I$ .

## 16.3 'Caiu na ultrarrede é ~~ultrapeixe~~ limite'.

### 16.3.1 Ultrarredes.

**Definição 16.9.** Uma rede  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  é uma ultrarrede se para todo  $A \subseteq X$  existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq A$  ou  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq X \setminus A$ .

**Teorema 16.10.** Toda rede possui uma subrede que é uma ultrarrede.

*Demonstração.* Dada uma rede  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ , já vimos que  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} : \lambda_0 \in \Lambda$  gera um filtro. Assim podemos estender este conjunto para um ultrafiltro  $\mathcal{F}$ .

Considere  $\Gamma = \{(\lambda, F) \in \Lambda \times \mathcal{F} : x_\lambda \in F\}$  onde  $(\lambda', F') \geq (\lambda, F)$  se  $\lambda' \geq \lambda$  e  $F' \subseteq F$ .

Seja  $\phi : \Gamma \rightarrow \Lambda$  tal que  $\phi(\lambda, F) = \lambda$ . Claramente a projeção na primeira coordenada preserva ordem, assim,  $\phi$  preserva ordem, pois é a projeção restrita a  $\Gamma$ . Para ver que  $\phi$  é cofinal, para cada  $\lambda \in \Lambda$ , temos que  $(\lambda, X) \in \Gamma$  com  $\phi(\lambda, X) \geq \lambda$ .

Seja  $y_{(\lambda, F)} = x_{\phi((\lambda, F))} = x_\lambda$ . Então  $(y_{(\lambda, F)} : (\lambda, F) \in \Gamma)$  é uma subrede de  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ .

Resta verificarmos que  $(y_{(\lambda, F)} : (\lambda, F) \in \Gamma)$  é uma ultrarrede. Para isto, tome  $A \subseteq X$ . Como  $\mathcal{F}$  é ultrafiltro, segue que existe  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $F \subseteq A$  ou  $F \subseteq X \setminus A$ . Temos que  $F \cap \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \neq \emptyset$ . Assim, fixe  $\lambda_0$  tal que  $x_{\lambda_0} \in F$ . Assim,  $(\lambda_0, F) \in \Gamma$  e

Então  $\{y_{(\lambda', F')} : (\lambda', F') \geq (\lambda_0, F)\} \subseteq F$  (pois, pela definição de  $\Gamma$  e da rede, temos  $y_{(\lambda', F')} = x_{\lambda'} \in F' \subseteq F$ ).

Portanto,  $\{y_{(\lambda', F')} : (\lambda', F') \geq (\lambda_0, F)\} \subseteq A$  ou  $\{y_{(\lambda', F')} : (\lambda', F') \geq (\lambda_0, F)\} \subseteq X \setminus A$ . Logo,  $(y_{(\lambda, F)} : (\lambda, F) \in \Gamma)$  é ultrarrede.  $\square$

**Teorema 16.11.** Se  $x$  é ponto de acumulação de uma ultrarrede  $S$  então  $x$  é limite de  $S$ .

*Demonstração.* Seja  $S = (x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  uma ultrarrede que tem  $x$  como ponto de acumulação. Tome  $U$  uma vizinhança de  $X$ . Então existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq U$  ou  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq X \setminus U$ . Note que a segunda opção é equivalente à  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \cap U = \emptyset$ .

Como  $x$  é ponto de acumulação de  $S$ , segue que existe  $\lambda \geq \lambda_0$  tal que  $x_\lambda \in U$ . Assim  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \cap U \neq \emptyset$ . Logo,  $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq U$ . Como  $U$  é uma vizinhança arbitrária de  $x$  segue que  $S$  converge para  $x$ .  $\square$

### 16.3.2 Teorema de Tychonoff usando ultrarredes.

**Teorema 16.12.** (Teorema de Tychonoff) O produto de espaços compactos é compacto (usando ultrarredes.).

*Demonstração.* Seja  $\{X_i : i \in I\}$  uma família de espaços compactos não-vazios. E seja  $S$  uma rede em  $\prod_{i \in I} X_i$ . Podemos tomar então uma ultrarrede  $((x_{\lambda, i} : i \in I) : \lambda \in \Lambda)$  que é uma subrede de  $S$ .

Para cada  $j \in I$ , temos pela compacidade de  $X_j$  que existe  $x_j \in X_j$  tal que  $x_j$  é ponto de acumulação de  $(x_{\lambda, j} : \lambda \in \Lambda)$ . Então temos que  $(x_{\lambda, i} : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $x_i$  para todo  $i \in I$ . Neste caso, já vimos que  $((x_{\lambda, i} : i \in I) : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $(x_i : i \in I)$ .  $\square$

## 16.4 De volta à normalidade: a normalidade não é hereditária.

### 16.4.1 'Just a spoon full of compactness to help the hereditarily normality go down.'

**Teorema 16.13.** Um espaço é  $T_{3\frac{1}{2}}$  se e somente se é um subespaço denso de um compacto Hausdorff.

Um espaço é compacto Hausdorff se e somente se  $X$  é homeomorfo a um subespaço fechado de um produto de  $[0, 1]$ 's.

*Demonstração.* Já vimos que as funções contínuas de um espaço  $X$   $T_{3\frac{1}{2}}$  em  $[0, 1]$  separam pontos e separam pontos de fechados. Assim, é homeomorfo a um supespaço de produtos de  $[0, 1]$ 's. Como vimos, o produto de  $[0, 1]$ 's é compacto. Tomando o fecho da imagem contínua, temos um compacto em que a imagem é densa (o fecho de um compacto é compacto). Assim podemos usar a imagem contínua pela imersão para ver  $X$  como um subespaço denso de um compacto.

Se o espaço é compacto Hausdorff, ele é  $T_{3\frac{1}{2}}$  e pode ser imerso num produto de  $[0, 1]$ 's. Assim, sua imagem contínua é compacta num produtos de  $[0, 1]$ 's. Este produto é Hausdorff, logo a imagem compacta é fechada neste produto.  $\square$

**Corolário 16.14.** A normalidade não é uma propriedade hereditária.

*Demonstração.* Já vimos alguns exemplos de espaços  $T_{3\frac{1}{2}}$  que não são  $T_4$ . Como visto anteriormente, qualquer  $T_{3\frac{1}{2}}$  é subespaço de um compacto Hausdorff e espaços compactos Hausdorff são  $T_4$ . Assim, existem espaços  $T_4$  que contém um subespaço que não é normal.  $\square$

## 16.5 ‘Se está bem ordenado então a ordem tá de boa’.

### 16.5.1 Boa ordem. Ordinais. Cardinais.

**Definição 16.15.** Uma ordem linear  $<$  sobre  $X$  é uma boa ordem se todo subconjunto não-vazio possui mínimo. Dizemos neste caso que  $X$  é bem ordenado.

**Exemplo 16.16.** O conjunto dos naturais com a ordem usual é bem ordenado.

Os resultados a seguir são provados no curso de teoria dos conjuntos.

**Definição 16.17.** Dado um conjunto bem-ordenado  $\langle X, < \rangle$  dizemos que  $A$  é um segmento inicial de  $X$  se existe  $a \in X$  tal que  $A = \{x \in X : x < a\}$ .

Todos os conjuntos bem ordenados podem ser comparados entre si:

**Teorema 16.18.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos bem ordenados. Então uma e apenas uma das seguintes acontece:

- 1)  $X$  e  $Y$  são isomorfos.
- 2)  $X$  é isomorfo a um segmento inicial de  $Y$ .
- 3)  $Y$  é isomorfo a um segmento inicial de  $X$ .

Existem conjuntos bem ordenados pelo  $\in$ . A vantagem deles é que eles estão em qualquer modelo da teoria dos conjuntos.

**Definição 16.19.** Um conjunto  $\alpha$  é um ordinal se os elementos de  $\alpha$  são bem ordenados por pertence e todo elemento de  $\alpha$  é um subconjunto  $\alpha$ , ou seja,  $\beta \in \gamma \in \alpha$  então  $\beta \in \alpha$ .

O menor dos ordinais é o conjunto  $\emptyset$  que é representado por 0. O 1 é o conjunto cujo único elemento é 0. Ou seja,  $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$ . O 2 é o conjunto cujos elementos são 0 e 1:  $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Esta é uma forma de representar os naturais utilizando apenas a operação  $\in$ .

Note que aqui não faria sentido falar ainda em 1045 por que podemos definir de 0 a 9 como foi feito acima, mas a partir daí estaremos falando na base decimal, que só pode ser definida depois de provarmos que as operações de soma, multiplicação e exponenciação estão bem definidas e satisfazem as propriedades usuais. Para chegar a soma formal, precisamos fazer uma recursão e provar as propriedades por indução. Para a multiplicação usamos que a soma está bem definida e a usamos para definir a multiplicação por recursão etc...

**Lema 16.20.** Dado um ordinal  $\alpha$ ,  $\alpha \cup \{\alpha\}$  é um ordinal. Não existe nenhum ordinal entre  $\alpha$  e  $\alpha \cup \{\alpha\}$ .

Antes de podermos trabalhar com os naturais e usar recursão ou indução, precisamos que exista o conjunto dos naturais!

A existência do conjuntos dos naturais, denotado por  $\omega$  é feita pelo Axioma do Infinito.

Axioma do Infinito: existe um conjunto indutivo, onde  $X$  é indutivo se  $\emptyset \in X$  e se  $x \in X$  então  $x \cup \{x\} \in X$ .

Assim, dado um indutivo  $X$ ,  $\omega$  é a intersecção de todos os indutivos contidos em  $X$ . Esse conjunto dá exatamente os naturais definidos na forma acima e é chamado de  $\omega$ . Note que não podemos falar diretamente que  $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  sem que isso seja uma informalidade.

Assim,  $\omega$  e  $\mathbb{N}$  são o mesmo conjunto, mas geralmente  $\omega$  é visto como um conjunto ordenado com operação de soma e multiplicação de ordinais e  $\mathbb{N}$  como um semigrupo algébrico com uma ordem.

A operação de soma  $n + m$  é definida recursivamente por  $n + 0 = n$  e  $n + (m + 1) = (n + m) + 1$ . Note que  $(m + 1) + n$  não é imediatamente igual a  $(m + n) + 1$  e nem  $m + n = n + m$  imediatamente usando apenas o sucessor para definí-los.

**Definição 16.21.** Dado um ordinal  $\alpha$  denotamos  $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$  que é chamado de sucessor de  $\alpha$ . Dizemos que  $\beta$  é sucessor se existe  $\alpha$  tal que  $\beta = \alpha + 1$ . Se  $\beta$  não é sucessor então dizemos que  $\beta$  é ordinal limite.

Os ordinais são importantes para formalizar a recursão transfinita e a indução transfinita. Iremos mais tarde usar construções indutivas de forma intuitiva. Quando fazemos uma construção indutiva, geralmente temos três casos:  $\alpha = 0$ ,  $\alpha$  sucessor e  $\alpha$  limite.

Note que dado um conjunto bem ordenado e um ordinal, podemos comparar a ambos, no teorema abaixo, vemos que sempre há ordinais que 'medem' o mesmo que um conjunto bem ordenado.

**Teorema 16.22.** Todo conjunto bem ordenado é isomorfo a um ordinal.

A princípio, pode parecer que não existem muitos ordinais.

**Teorema 16.23.** Para todo ordinal  $\alpha$  existe um ordinal  $\beta$  tal que  $|\alpha| < |\beta|$ .

**Definição 16.24.** Um ordinal é inicial se  $\beta < \alpha$  implica que  $|\beta| < |\alpha|$ . Os ordinais iniciais são utilizados para representar a cardinalidade de um conjunto bem ordenado.

**Teorema 16.25.** Se  $A$  é um conjunto não vazio de ordinais então  $A$  tem mínimo. Se  $A$  é um conjunto de ordinais então  $\bigcup A$  é o supremo de  $A$ .

Com os resultados acima, podemos ver que 'todos os ordinais juntos' não é um conjunto, pois se fosse a sua reunião seria um ordinal e teríamos um ordinal maior que este.

**Teorema 16.26.** O Axioma da Escolha é equivalente a todo conjunto pode ser bem ordenado.

Sob o Axioma da Escolha, a cardinalidade de um conjunto pode ser representado por um ordinal inicial. Neste sentido os ordinais iniciais são chamados de cardinais.

A grande vantagem de usar uma enumeração usando um ordinal inicial (cardinal) é que os 'segmentos iniciais' tem cardinalidade menor, possibilitando alguns argumentos de cardinalidade. Veremos um exemplo a seguir.

Iremos depois enunciar mais propriedades de cardinais quando precisarmos nas construções. Vimos anteriormente que num espaço compacto todo conjunto infinito possui ponto de acumulação completo. Veremos agora a recíproca que usa boa ordem.

## 16.5.2 Compacidade usando escolha explicitamente.

**Teorema 16.27.** Se todo subconjunto infinito de  $X$  possui um ponto de acumulação completo então  $X$  é compacto.

*Demonstração.* Suponha que  $X$  não é compacto. Então seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $X$  que não possui subcobertura finita. Seja  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  uma subcobertura aberta de cardinalidade mínima (*tome o conjunto de todos os cardinais tais que existe uma subcobertura dessa cardinalidade. O conjunto de cardinais é um conjunto de ordinais iniciais e por isso tem mínimo*) e seja  $\kappa$  a cardinalidade de  $\mathcal{V}$  (*aqui  $\kappa$  é um ordinal inicial*). Enumere  $\mathcal{V}$  como  $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ . Como  $\mathcal{U}$  não tem subcobertura finita, segue que  $\kappa$  é infinito. Seja  $z \notin X$  e para cada  $\alpha < \kappa$ , escolha  $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta$  se este conjunto é não-vazio e tome  $x_\alpha = z$  caso contrário.

Tome  $I = \{\alpha : x_\alpha \neq z\}$ . Afirmamos que  $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ . De fato, se  $x \in X$ , tome  $\gamma$  mínimo tal que  $x \in U_\gamma$ . Então  $x \in U_\gamma \setminus \bigcup_{\beta < \gamma} U_\beta$ . Assim, o conjunto  $U_\gamma \setminus \bigcup_{\beta < \gamma} U_\beta \neq \emptyset$ . Portanto,  $x_\gamma \in U_\gamma \setminus \bigcup_{\beta < \gamma} U_\beta$  e  $\gamma \in I$ . Logo,  $x \in U_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ . Como  $\mathcal{V}$  é uma cobertura de cardinalidade mínima  $\kappa$ , segue que  $|I| = \kappa$ . Seja  $A = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ . Vamos verificar que  $A$  não tem ponto de acumulação completo.

De fato, para cada  $x \in X$  tome  $\gamma \in I$  tal que  $x \in U_\gamma$ . Então  $x_\alpha \notin U_\gamma$  para cada  $\alpha \in I$  com  $\alpha > \gamma$ . Assim,  $U_\gamma$  é um vizinhança de  $x$  tal que  $U_\gamma \cap A \subseteq \{x_\beta : \beta \leq \gamma\}$  e  $|\{x_\beta : \beta \leq \gamma\}| < \kappa = |I| = |A|$   $\square$

# Capítulo 17

## Pseudométricas completas (+ Totalmente limitado = Compacto).

### 17.1 Espaços completamente metrizáveis.

#### 17.1.1 Sequências de Cauchy. Pseudométricas completas.

**Definição 17.1.** Seja  $\rho$  uma pseudométrica sobre  $X$ . Dizemos que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$  para todo  $n, m > N$ .

**Teorema 17.2.** Seja  $\rho$  uma pseudométrica sobre  $X$ . Se  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência convergente então é uma sequência de Cauchy.

*Demonstração.* Seja  $x$  um limite da sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ . Então para  $\frac{\epsilon}{2}$  temos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$  para todo  $n > N$ . Logo, pela desigualdade triangular,  $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$  para todo  $m, n > N$ .  $\square$

**Definição 17.3.** Uma pseudométrica é completa se toda sequência de Cauchy converge.

Dizemos que  $X$  é completamente metrizável se existe uma métrica completa que gera a topologia.

**Proposição 17.4.** 1) Toda sequência de Cauchy é limitada.

2) Se uma subsequência de uma sequência de Cauchy converge então a sequência de Cauchy converge.

3) Se uma sequência de Cauchy tem ponto de acumulação então a sequência converge.

*Demonstração.* 1) Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho(x_n, x_m) < 1$  para cada  $n, m > N$ . Seja  $M > \max(\{\rho(x_{N+1}, x_m) : m \leq N\} \cup \{1\})$ . Então temos que  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x_{N+1}, M)$ .

2) Se  $(x_{n_k} : k \in \mathbb{N})$  converge para  $x$ . Tome  $K$  tal que  $\rho(x_{n_l}, x) < \frac{\epsilon}{2}$  para cada  $l > K$ . Seja  $N$  tal que  $\rho(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$  para cada  $m, n > N$ . Então para cada  $n > N$  fixe  $l > K$  tal que  $n_l > N$ . Então  $\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_l}) + \rho(x_{n_l}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Assim, a sequência de Cauchy converge para  $x$ .

3) Se uma sequência tem ponto de acumulação então ela tem uma subsequência convergente. Segue então de 2).  $\square$

**Exemplo 17.5.** O  $\mathbb{R}$  com a métrica usual é completa. Toda sequência de Cauchy é limitada. Assim, a sequência está contida num intervalo fechado e limitado que é um compacto. Assim, a sequência possui um ponto de acumulação. Como é uma sequência de Cauchy com ponto de acumulação, segue que é uma sequência convergente.

**Exemplo 17.6.** O intervalo aberto  $]0, 1[$  não é completo na métrica usual, pois a sequência  $\{(\frac{1}{n} : n > 0)\}$  é de Cauchy, mas não converge.

O  $\mathbb{R}$  com a métrica usual é completa. Como  $]0, 1[$  é homeomorfa a  $\mathbb{R}$ , temos que  $]0, 1[$  é completamente metrizável.

## 17.2 Produtos e subespaços de completamente metrizáveis.

**Proposição 17.7.** Se  $X$  é um espaço pseudométrico completo e  $F$  é um subespaço fechado, então  $F$  é subespaço completo com a pseudométrica restrita a  $F \times F$ .

*Demonstração.* Seja  $\rho$  a pseudométrica que gera a topologia de  $X$ . Seja  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  uma seqüência de Cauchy  $\rho$ . Então existe  $x \in X$  que é limite da seqüência de Cauchy. Como  $F$  é fechado e a seqüência está contida em  $F$  segue que o limite  $x$  pertence a  $F$ . Assim, toda seqüência de Cauchy em  $F$  tem ponto de acumulação em  $F$ . Portanto,  $F$  é completamente metrizável.  $\square$

**Proposição 17.8.** Se  $X$  é um espaço pseudométrico completo e  $U$  é um subespaço aberto, então  $U$  é subespaço completamente metrizável (não é a pseudométrica restrita ao subespaço).

*Demonstração.* Seja  $f(x) = \rho(x, X \setminus U) \geq 0$  a distância de  $x$  ao fechado  $X \setminus U$  pela pseudométrica  $\rho$ . Temos que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in U$ , pois  $f(x) = 0$  se e só se  $x \in X \setminus U$ . Assim,  $f$  é uma função contínua em  $U$  que não se anula em  $U$ . Seja  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  para todo  $x \in U$ . Então  $g : U \rightarrow ]0, +\infty[$  é contínua. Já vimos que  $\rho_g = |g(x) - g(y)|$  é uma pseudométrica contínua em  $U \times U$ . Assim,  $\sigma = \rho + \rho_g$  é uma pseudométrica que gera a topologia de  $U$ .

Resta mostrarmos que  $\sigma$  é uma pseudométrica completa.

Tome  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  uma seqüência de Cauchy em  $\sigma$ . Como  $\rho \leq \sigma$ , então em  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma seqüência de Cauchy em  $\rho$  no aberto  $U$ . Portanto é uma seqüência de Cauchy em  $\rho$  em  $X$ . Como  $\rho$  é completa em  $X$ , existe  $x \in X$  tal que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $x$ . Como  $f$  é contínua em  $X$ , segue que  $f(x_k)$  converge para  $f(x)$ . Como  $\rho_g \leq \rho$ , temos que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é de Cauchy em  $\rho_g$ . Assim,  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é limitada em  $\rho_g$ . Isto implica que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho_g(x_0, x_m) < N$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Portanto  $|g(x_0) - g(x_m)| < N$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Portanto existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $(g(x_n) : n \in \mathbb{N})$  é limitado superiormente por  $M$ . Assim  $f(x_n)$  é limitado inferiormente por  $\frac{1}{M}$ . Assim,  $f(x) \geq \frac{1}{M} > 0$ . Portanto  $x \notin X \setminus U$  e  $x \in U$ . Como  $g$  é contínua em  $U$ , segue que  $(g(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(x)$ . Logo  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $x$  em  $\rho_g$ . Assim, a  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $x$  em  $\sigma$  (pois converge para  $x$  em  $\rho$  e em  $\rho_g$ ).  $\square$

**Lema 17.9.** Dado um espaço  $Y$  chamamos de  $\Delta(Y^{\mathbb{N}}) = \{(x_i : i \in \mathbb{N}) \in Y^{\mathbb{N}} : x_i = x_j \text{ para todo } i, j \in \mathbb{N}\}$ . Então  $Y$  é homeomorfo a  $\Delta(Y^{\mathbb{N}})$ .

*Demonstração.* A função  $f(y) = (y_i : i \in \mathbb{N})$  tal que  $y_i = y$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  é uma função contínua, pois  $\pi_i \circ f(y) = y$  é contínua. Por outro lado  $\pi_0 : \Delta(Y^{\mathbb{N}}) \rightarrow Y$  é a inversa de  $f$  e é contínua. Assim  $Y$  e  $\Delta(Y^{\mathbb{N}})$  são homeomorfos.  $\square$

**Teorema 17.10.** Se  $X_i$  é um espaço gerado por uma pseudométrica completa para cada  $i \in I = \mathbb{N}$  então a topologia de  $\prod_{i \in I} X_i$  é gerada por uma pseudométrica completa.

*Demonstração.* Primeiro note que se  $\rho$  é completa então  $\rho^* = \min\{\rho, 1\}$  é uma métrica completa (basta usar  $\epsilon \leq 1$  para ver isto). Já vimos que a topologia gerada por  $\rho$  é a mesma gerada por  $\rho^*$ . Assim, podemos assumir que a métrica completa  $\rho_i$  que gera a topologia de  $X_i$  são limitadas por 1.

Já vimos que a topologia produto coincide com a topologia gerada por  $\rho$  onde  $\rho(x, y) = \sum_{n \in I} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^{n+1}}$  para cada  $x = (x_n : n \in I)$  e  $y = (y_n : n \in I)$ , com  $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$ .

Resta então mostrarmos que  $\rho$  é completa. Suponha que  $((x_{i,k} : i \in I) : k \in \mathbb{N})$  é uma seqüência de Cauchy em  $\rho$ . Como  $\rho_i(x, y) \leq 2^{i+1}\rho(x, y)$ , segue que  $(x_{i,k} : k \in \mathbb{N})$  é uma seqüência de Cauchy em  $\rho_i$  para cada  $i \in I$ . Como  $\rho_i$  é completa, existe  $a_i \in X$  tal que  $(x_{i,k} : k \in \mathbb{N})$  converge para  $a_i$  em  $\rho_i$ .

Portanto  $(x_{i,k} : k \in \mathbb{N})$  converge para  $a_i$  na topologia  $X_i$  para cada  $i \in I$ . Logo  $((x_{i,k} : i \in I) : k \in \mathbb{N})$  converge para  $(a_i : i \in I)$  na topologia produto de  $\prod_{i \in I} X_i$ .  $\square$

**Teorema 17.11.** Seja  $X$  um Hausdorff. Se  $X_i$  é um subespaço de  $X$  gerado por uma métrica completa para cada  $i \in \mathbb{N}$  então  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i$  é completamente metrizável.

*Demonstração.* Podemos fixar uma métrica completa que gera a topologia de  $X_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Temos que  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  é um subespaço de  $X^{\mathbb{N}}$  gerado por uma métrica completa.

Temos que  $X$  é Hausdorff então  $X_{j,k} = \{(x_i : i \in \mathbb{N}) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i : x_j = x_k\}$  é um conjunto fechado de  $X^{\mathbb{N}}$ . Então  $\Delta(X^{\mathbb{N}}) = \bigcap_{j,k \in \mathbb{N}} X_{j,k}$  é um fechado de  $X^{\mathbb{N}}$ .

Logo,  $\Delta(X^{\mathbb{N}}) \cap (\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i)$  é um fechado de  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ , e portanto completamente metrizável. Note que  $\Delta((\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i)^{\mathbb{N}}) = \Delta(X^{\mathbb{N}}) \cap (\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i)$ . Como  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i$  é homeomorfo a  $\Delta((\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i)^{\mathbb{N}})$ , segue que a intersecção  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i$  é completamente metrizável.  $\square$

**Corolário 17.12.** A intersecção enumerável de abertos de um espaço completamente metrizável é completamente metrizável.

*Demonstração.* Se  $X$  é métrico então  $X$  é Hausdorff. Todo aberto de um completamente metrizável é completamente metrizável, assim a intersecção dos abertos é completamente metrizável.  $\square$

### 17.2.1 Totalmente limitado. Teorema de Heine-Borel.

**Definição 17.13.** Seja  $X$  um espaço pseudométrico.

Dizemos o espaço é totalmente limitado se para todo  $\epsilon > 0$  existe uma quantidade finita de pontos  $X_0$  de  $X$  tal que  $X = \bigcup_{x \in X_0} B(x, \epsilon)$ .

**Definição 17.14.** Seja  $X$  um espaço pseudométrico. Dizemos que um conjunto  $D$  é  $\epsilon$ -denso se toda bola aberta de  $X$  de raio  $\epsilon$  contém um ponto de  $D$ .

**Proposição 17.15.** Um espaço pseudométrico é totalmente limitado se e somente se para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto finito  $\epsilon$ -denso.

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$ . Então existe  $X_0$  finito tal que  $X = \bigcup_{x \in X_0} B(x, \epsilon)$ . Dado uma bola  $B(y, \epsilon)$ , temos que existe  $x \in X_0$  tal que  $y \in B(x, \epsilon)$ . Assim,  $x \in B(y, \epsilon)$ . Portanto  $X_0$  é  $\epsilon$ -denso.

Para a recíproca, seja  $D$  um subconjunto  $\epsilon$ -denso. Basta notar que  $\bigcup_{x \in D} B(x, \epsilon) = X$ . Se  $y \in X$  então existe  $x \in D$  tal que  $x \in B(y, \epsilon)$ . Portanto  $y \in B(x, \epsilon)$ .  $\square$

**Teorema 17.16.** (Teorema de Heine-Borel) Seja  $X$  um espaço pseudometrizável. Então  $X$  é compacto se e somente se  $X$  possui uma pseudométrica completa e totalmente limitada.

Note que a *mesma* métrica tem que ser completa e totalmente limitada. Como vimos anteriormente,  $\mathbb{R}$  possui uma métrica completa. Se tomarmos a métrica usual de  $]0, 1[$  é totalmente limitada (dado  $\epsilon > 0$ , tome  $n$  natural positivo tal que  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , então  $\{\frac{k}{n} : 1 \leq k \leq n-1\}$  é  $\epsilon$ -denso). Usando o homomorfismo, podemos definir em  $\mathbb{R}$  uma métrica totalmente limitada. Então  $\mathbb{R}$  possui uma métrica completa e outra totalmente limitada, mas  $\mathbb{R}$  não é compacto.

*Demonstração.* Vamos assumir que  $\rho$  uma pseudométrica que gera a topologia de  $X$ . Seja  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy em  $\rho$ . Como  $X$  é compacto, a sequência (qualquer sequência) tem ponto de acumulação, assim tem uma subsequência que converge para  $x$ . Por ser uma sequência de Cauchy, segue que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $x$ . Assim,  $\rho$  é uma pseudométrica completa. Para ver que  $\rho$  é totalmente limitada, note que  $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ , portanto pela compacidade, possui uma subcobertura finita. Então existe  $X_0 \subseteq X$  finita tal que  $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X_0\}$  é subcobertura aberta. Assim,  $X = \bigcup_{x \in X_0} B_\rho(x, \epsilon)$  e  $\rho$  é totalmente limitada.

Vamos agora assumir que  $\rho$  é uma pseudométrica totalmente limitada e completa. Para cada  $n$  natural positivo, seja  $D_n$  um conjunto finito  $\frac{1}{n}$ -denso em  $X$ . Então  $D = \bigcup_{n > 0} D_n$  é denso em  $X$ . Assim, temos que o espaço pseudométrico  $X$  possui uma base enumerável  $\mathcal{B}$  de bolas abertas.

Vamos mostrar que  $X$  é compacto. Basta mostrar que toda cobertura aberta por elementos de  $\mathcal{B}$  possui subcobertura finita. Como  $\mathcal{U}$  é um subconjunto de  $\mathcal{B}$ , segue que  $\mathcal{U}$  é enumerável. Podemos então enumerar  $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Se  $\mathcal{U}$  possuir uma subcobertura finita, terminamos. Vamos supor por absurdo que não existe uma subcobertura finita.

Vamos definir agora uma sequência  $(x_k : k \in \mathbb{N})$  em  $X$  e  $(n_k : k \in \mathbb{N})$  estritamente crescente tal que

1)  $x_l \notin \bigcup_{i \leq n_{k-1}} U_i$  se  $l \geq k > 1$  e

2)  $x_k \in \bigcup_{i \leq n_k} U_i$ .

Tome  $x_0 \in X$  arbitrário e seja  $n_0$  tal que  $x_0 \in \bigcup_{i \leq n_0} U_i$ . A condição 1) está trivialmente satisfeita e  $n_0$  foi definida para satisfazer 2).

Vamos supor que já definimos  $(x_k : k \leq m)$  em  $X$  e  $(n_k : k \leq m)$ . Por hipótese, temos que  $X \setminus \bigcup_{i \leq n_m} U_i$  é não vazio. Assim podemos tomar  $x_{m+1} \in X \setminus \bigcup_{i \leq n_m} U_i$ . Assim, 1) está satisfeita.

Tome  $N$  tal que  $x_{m+1} \in U_N$  (necessariamente teremos que  $N > n_m$ ) e defina  $n_{m+1} = N$ . Então a condição 2) está satisfeita.

Agora, temos uma sequência  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Vamos produzir uma subsequência dessa sequência que é de Cauchy.

Isto é feito por indução sobre  $\mathbb{N}$ . Temos que  $X$  pode ser coberto por um número finito de bolas abertas de raio  $\frac{1}{2}$ . Assim, uma dessas bolas deve conter uma quantidade infinita de elementos da sequência  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Todos os elementos da sequência dentro dessa bola distam menos que 1. Então podemos fixar  $I_0 \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que  $\rho(x_n, x_m) < 1$  para cada  $n, m \in I_0$ .

Temos que  $X$  pode ser coberto por um número finito de bolas abertas de raio  $\frac{1}{2^2}$ . Assim, uma dessas bolas deve conter uma quantidade infinita de elementos da sequência  $\{x_k : k \in I_0\}$ . Todos os elementos da sequência dentro dessa bola distam menos que  $\frac{1}{2}$ . Então podemos fixar  $I_1 \subseteq I_0$  infinito tal que  $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$  para cada  $n, m \in I_1$ .

Assim podemos proceder indutivamente e obter uma sequência decrescente  $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \dots$  tal que para cada  $j \in \mathbb{N}$  temos  $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2^j}$  para cada  $n, m \in I_j$ .

Agora, escolha indutivamente uma sequência  $(x_{k_l} : l \in \mathbb{N})$  tal que  $k_{l+1} > k_l$  e  $k_l \in I_l$  para cada  $l \in \mathbb{N}$  (isto é possível, pois cada  $I_l$  é infinito). Agora veremos que  $(x_{k_l} : l \in \mathbb{N})$  é de Cauchy. De fato, dado  $\epsilon > 0$  tome  $l_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^{l_0}} < \epsilon$ . Então para todo  $j \geq l_0$  temos que  $x_{k_j} \in I_j \subseteq I_{l_0}$ . Assim, temos que para todo  $j, l \geq l_0$  temos  $\rho(x_{k_j}, x_{k_l}) < \frac{1}{2^{l_0}} < \epsilon$ . Portanto  $(x_{k_l} : l \in \mathbb{N})$  é de Cauchy. Por hipótese, devido a  $\rho$  ser completa, existe  $x \in X$  tal que  $(x_{k_l} : l \in \mathbb{N})$  converge para  $x$ . Seja  $m_0$  tal que  $x \in \bigcup_{i \leq m_0} U_i$ . Tome  $l_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_{k_{l_1}} > m_0$ . Então  $x \in \bigcup_{i \leq n_{k_{l_1}}} U_i =: W$ .

Então, temos que  $x_k \notin \bigcup_{i \leq n_{k_{l_1}}} U_i = W$  para cada  $k > k_{l_1}$ . Assim,  $x$  não é ponto de acumulação da sequência  $(x_k : l \in \mathbb{N})$ . Assim,  $x$  não é limite de  $(x_{k_l} : l \in \mathbb{N})$ , uma contradição. Portanto segue que  $\mathcal{U}$  tem uma subcobertura finita e com isso,  $X$  é compacto.  $\square$

### 17.2.2 Continuidade e oscilação em espaços completos.

**Definição 17.17.** Dado um ponto  $y \in M$  e um denso  $D$  de  $M$  e  $f : D \rightarrow N$ . A oscilação de  $f$  em  $x$  é o número  $\inf\{\sup\{d_N(f(t), f(y)) : t, y \in B(x, \delta) \cap D\} : \delta > 0\}$ .

**Lema 17.18.** Uma função entre espaços métricos  $f : M \rightarrow N$  é contínua em  $x$  se e somente se a oscilação de  $f$  em  $x$  é 0.

*Demonstração.* Se  $f$  é contínua em  $x$  então para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f[B_M(x, \delta)] \subseteq B_N(f(x), \epsilon)$ . Assim, pela desigualdade triangular temos  $\sup\{d_N(f(t), f(y)) : t, y \in B(x, \delta) \cap M\} \leq 2\epsilon$ . Como para cada  $\epsilon$  existe um  $\delta$  como acima, segue que

$$\inf\{\sup\{d_N(f(t), f(y)) : t, y \in B(x, \delta) \cap M\} : \delta > 0\} \leq \inf\{2\epsilon : \epsilon > 0\} = 0.$$

Reciprocamente, se a oscilação é 0. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\sup\{d_N(f(t), f(y)) : t, y \in B(x, \delta) \cap M\} < \epsilon$ . Em particular,  $\sup\{d_N(f(t), f(x)) : t \in B(x, \delta) \cap M\} < \epsilon$ . Assim, temos que  $f[B_M(x, \delta)] \subseteq B_N(f(x), \epsilon)$ . Logo  $f$  é contínua em  $x$ .  $\square$

**Teorema 17.19.** Seja  $D \subseteq M$  denso, onde  $f : D \rightarrow N$  é contínua e seja  $N$  um espaço métrico completo. Seja  $\tilde{M}$  o conjunto dos pontos de  $M$  onde a oscilação de  $f$  é 0. Então existe  $g : \tilde{M} \rightarrow N$  tal que  $g$  estende  $f$  e  $g$  é contínua em  $\tilde{M}$ .

*Demonstração.* Para cada  $x \in \tilde{M}$ , seja se  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  uma sequência em  $D$  que converge para  $x$ . Como  $x \in \tilde{M}$ , segue que  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy. Como  $N$  é um espaço métrico completo, existe um único ponto para o qual a sequência  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge. Vamos chamar este ponto de  $g(x)$ .

Dado uma outra sequência  $(x'_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq D$  que converge para  $x$ , temos que a sequência  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  tal que  $y_{2n} = x_n$  e  $y_{2n+1} = x'_n$  é também uma sequência convergente para  $x$ . Assim, como  $x \in \tilde{M}$ , temos que  $(f(y_n) : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy e portanto converge, pois  $N$  é completo. Como a subsequência  $(f(y_{2n}) : n \in \mathbb{N}) = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(x)$ . Como  $(f(y_n) : n \in \mathbb{N})$  é de Cauchy e possui uma subsequência que converge para  $g(x)$  então  $(f(y_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(x)$ . Assim, a subsequência  $(f(x'_n) : n \in \mathbb{N}) = (f(y_{2n+1}) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(x)$ . Assim, temos que  $g(x)$  é tal que se a sequência de  $(x_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq D$  converge para  $x$  então a sequência  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(x)$ . Além disso, se  $x \in D$  então  $g(x) = f(x)$ , pois neste caso temos uma sequência de  $D$  que converge para  $x$  e  $f$  é contínua em  $D$ .

Assim  $g : \tilde{M} \rightarrow N$  está definida.

Vamos calcular a oscilação de  $g$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta^* > 0$  tal que  $\sup\{d_N(f(t), f(y)) : t, y \in B(x, \delta^*) \cap D\} < \epsilon$ . Para cada  $z \in B(x, \delta^*) \cap \tilde{M}$ , temos que existe  $(x_{z,n} : n \in \mathbb{N}) \subseteq B(x, \delta^*) \cap D$

converge para  $z$ . Assim,  $(f(x_{z,n}) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(z)$ . Logo, dados  $y, t \in B(x, \delta) \cap \tilde{M}$ , temos  $d_N(g(t), g(y)) \leq d_N(g(t), f(x_{t,n})) + d_N(f(x_{t,n}), f(x_{y,m})) + d_N(f(x_{y,m}), g(y))$ .

O termo do meio, como  $x_{t,n}$  e  $x_{y,m}$  pertencem a  $B(x, \delta^*) \cap D$ , por hipótese é menor que  $\epsilon$ . Como  $(f(x_{t,n}) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(t)$  e  $(f(x_{y,n}) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $g(y)$ , podemos fixar  $n, m \in \mathbb{N}$  tal que  $d_N(g(t), f(x_{t,n})) < \epsilon$  e  $d_N(f(x_{y,m}), g(y)) < \epsilon$ . Então temos que  $d_N(g(t), g(y)) < 3\epsilon$  para todo  $t, y \in B(x, \delta^*) \cap \tilde{M}$ . Assim  $\sup\{d_N(g(t), g(y)) : t, y \in B(x, \delta) \cap \tilde{M}\} \leq 3\epsilon$ . Como para cada  $\epsilon > 0$  arbitrário existe  $\delta^*$ , segue que  $\inf\{\sup\{d_N(g(t), g(y)) : t, y \in B(x, \delta) \cap \tilde{M}\} : \delta > 0\} = \inf\{3\epsilon : \epsilon > 0\} = 0$ .

Como a oscilação de  $g$  em  $x$  é 0 para todo  $x \in \tilde{M}$ , segue que  $g$  é contínua em  $\tilde{M}$ .  $\square$



# Capítulo 18

## Completamento de espaços métricos.

### 18.1 ‘O $\mathbb{Q}$ vamos completar hoje?’

#### 18.1.1 $\mathbb{R}$ como completamento de $\mathbb{Q}$ .

O próprio completamento de  $\mathbb{Q}$  pode ser feito usando seqüências de Cauchy. Iremos começar fazendo isto. Neste caso temos que redefinir algumas coisas usando  $\mathbb{Q}$ , pois ‘ainda’ não podemos usar  $\mathbb{R}$ . Vamos fazer algumas definições específicas para  $\mathbb{Q}$ . Assim, a leitura adequada desta secção é imaginar que  $\mathbb{R}$  não existe ainda.

**Definição 18.1.** Uma seqüência de Cauchy em  $(r_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  é uma seqüência de Cauchy se para todo  $K$  natural positivo, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|r_n - r_m| < \frac{1}{K}$  para todo  $n, m > N$ .

Duas seqüências de Cauchy de Cauchy são equivalentes se para todo  $K$  inteiro positivo, existe  $N$  inteiro positivo tal que  $|r_n - s_n| < \frac{1}{K}$  para todo  $n > N$ . Vamos denotar a relação por  $(r_n : n \in \mathbb{N}) \sim (s_n : n \in \mathbb{N})$ .

**Lema 18.2.** Duas seqüências de Cauchy  $(r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(s_n : n \in \mathbb{N})$  são equivalentes se e somente se para todo  $N, K$  inteiros positivos existe  $n > N$  tal que  $|r_n - s_n| < \frac{1}{K}$ .

*Demonstração.* A ida é imediata. Para a volta, tome  $M$  tal que  $|r_k - r_m| < \frac{1}{3K}$  e  $|s_k - r_m| < \frac{1}{3K}$  para  $k, m \geq M$ . Tome  $N > M$  tal que  $|r_N - s_N| < \frac{1}{3K}$ . Então, para todo  $n > N$  temos  $|r_n - s_n| \leq |r_n - r_N| + |r_N - s_N| + |s_N - r_n| < \frac{1}{K}$ .  $\square$

**Teorema 18.3.** A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência.

*Demonstração.* Claramente  $(r_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(r_n : n \in \mathbb{N}) \sim (s_n : n \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r_n : n \in \mathbb{N})$ . Para ver a transitiva,  $(r_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(s_n : n \in \mathbb{N}) \sim (t_n : n \in \mathbb{N})$ , fixe  $N$  e  $K$ .

Existe  $N_1$  tal que  $|s_n - s_m| < \frac{1}{3K}$  para todo  $m, n > N_1$ .

Então existe  $n_1 > \max\{N, N_1\}$  tal que  $|r_{n_1} - s_{n_1}| < \frac{1}{3K}$  e existe  $n_2 > \max\{N, N_1\}$  tal que  $|s_{n_2} - t_{n_2}| < \frac{1}{3K}$ .

Então  $|r_{n_1} - t_{n_1}| \leq |r_{n_1} - s_{n_1}| + |s_{n_1} - s_{n_2}| + |s_{n_2} - t_{n_2}| < \frac{1}{3K} + \frac{1}{3K} + \frac{1}{3K} = \frac{1}{K}$ . O termo do meio vem do fato de  $n_1, n_2 > N_1$ .  $\square$

**Definição 18.4.** Para cada  $(r_n : n \in \mathbb{N})$  seqüência de Cauchy, denote por  $[(r_n : n \in \mathbb{N})]$  a classe de equivalência de  $(r_n : n \in \mathbb{N})$ .

Seja  $\mathbb{R} = \{[(r_n : n \in \mathbb{N})] : (r_n : n \in \mathbb{N}) \text{ é seqüência de Cauchy}\}$ .

Denote por  $(q)$  a seqüência constantemente  $q$ . Esta é uma seqüência de Cauchy.

Seja  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $i[q] = [(q)]$ .

Vamos definir as operações de soma, oposto, multiplicação e inverso e veremos que são extensões das operações em  $i[\mathbb{Q}]$ .

**Proposição 18.5.** As operações abaixo estão bem definidas e estendem as relações de  $i[\mathbb{Q}]$ , onde  $i$  preserva as operações:

$$1) [(r_n : n \in \mathbb{N})] + [(s_n : n \in \mathbb{N})] := [(r_n : n \in \mathbb{N}) + (s_n : n \in \mathbb{N})] = [(r_n + s_n : n \in \mathbb{N})].$$

- 2)  $-[(r_n : n \in \mathbb{N})] := [(-r_n : n \in \mathbb{N})]$ .  
 3)  $[(r_n : n \in \mathbb{N})][(s_n : n \in \mathbb{N})] := [(r_n s_n : n \in \mathbb{N})]$ .  
 4) Se  $[(r_n : n \in \mathbb{N})] \neq i(0)$  então  $[(r_n : n \in \mathbb{N})]^{-1} = [((r'_n)^{-1} : n \in \mathbb{N})]$ , onde  $(r_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r'_n : n \in \mathbb{N})$  com  $r'_n \neq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Note que só pode haver uma quantidade finita de 0's em  $(r_n : n \in \mathbb{N})$ , caso contrário, haveria uma subsequência convergindo para 0 e a sequência seria equivalente a  $i(0)$ .

*Demonstração.* 1) Note que a soma de duas sequências de Cauchy é Cauchy, pois  $(r_n + s_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy usando o fato que  $|(r_n + s_n) - (r_m + s_m)| = |(r_n - r_m) + (s_n - s_m)| \leq |r_n - r_m| + |s_n - s_m|$ .

Sejam  $(r'_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(s'_n : n \in \mathbb{N}) \sim (s_n : n \in \mathbb{N})$ .

Então para que  $(r_n + s_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r'_n + s'_n : n \in \mathbb{N})$  precisamos fixar  $K$  inteiro positivo.

Seja  $N$  tal que  $|r_n - s_n| < \frac{1}{2K}$  e  $|r'_n - s'_n| < \frac{1}{2K}$  para todo  $n > N$  pela equivalência. Então temos  $|(r_n + s_n) - (r'_n + s'_n)| \leq |r_n - r'_n| + |s_n - s'_n| < 2 \cdot \frac{1}{2K} = \frac{1}{K}$ . Portanto  $N$  testemunha a equivalência no caso de  $K$ .

Também é claro que  $i(q) + i(p) = i(p + q)$  para todo  $p, q \in \mathbb{Q}$ .

2) Se  $(r'_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r_n : n \in \mathbb{N})$  então para cada  $K, N$  inteiros positivos existe  $n > N$  tal que  $|r_n - r'_n| < \frac{1}{K}$ . Logo  $|(-r_n) - (-r'_n)| < \frac{1}{K}$ . Assim  $(-r'_n : n \in \mathbb{N}) \sim (-r_n : n \in \mathbb{N})$  e a operação está bem definida. Claramente  $-i(q) = i(-q)$ .

3) Note que a soma de duas sequências de Cauchy é Cauchy, pois  $(r_n s_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy usando o fato que sequências de Cauchy são limitadas e  $|(r_n s_n) - (r_m s_m)| = |(r_n s_n) - (r_n s_m) + (r_n s_m) - (r_m s_m)| \leq |r_n(s_n - s_m)| + |(r_n - r_m)s_m| \leq |r_n||s_n - s_m| + |r_n - r_m||s_m|$ .

Sejam  $(r'_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(s'_n : n \in \mathbb{N}) \sim (s_n : n \in \mathbb{N})$ .

Então para que  $(r_n s_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r'_n s'_n : n \in \mathbb{N})$  precisamos fixar  $K$  inteiro positivo. Seja  $L > 0$  tal que  $|r_n|, |r'_n|, |s_n|$  e  $|s'_n|$  sejam menores que  $L$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $N$  tal que  $|r_n - r'_n| < \frac{1}{2KL}$  e  $|s_n - s'_n| < \frac{1}{2KL}$  para todo  $n \geq N$  que segue da equivalência. Fixe  $n > N$ . Então temos

$|(r_n s_n) - (r'_n s'_n)| = |(r_n s_n) - (r_n s'_n) + (r_n s'_n) - (r'_n s'_n)| \leq |(r_n s_n) - (r_n s'_n)| + |(r_n s'_n) - (r'_n s'_n)| = |r_n||s_n - s'_n| + |r_n - r'_n||s'_n| \leq L|s_n - s'_n| + |r_n - r'_n|L < 2L \frac{1}{2KL} = \frac{1}{K}$ . Portanto  $N$  testemunha a equivalência para  $K$ .

Também é claro que  $i(q)i(p) = i(pq)$  para todo  $p, q \in \mathbb{Q}$ .

4) Sejam  $(r_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r'_n : n \in \mathbb{N})$  dois representantes de uma classe  $\neq i(0)$  com  $r_n \neq 0 \neq r'_n$  para todo  $n \in \omega$ . Temos que existe  $K_0$  inteiro positivo tal que  $|r_n| \geq \frac{1}{K_0}$  (caso contrário existiria para cada  $k > 0$  infinitos termos  $r_n$  tais que  $|r_n| < \frac{1}{k}$ , assim podemos tomar indutivamente  $n_k > n_{k-1}$  com  $|r_{n_k}| < \frac{1}{k}$ . Assim  $(r_n : n \in \mathbb{N})$  teria a subsequência  $(r_{n_k} : k \in \mathbb{N})$  convergindo para 0. Logo  $(r_n : n \in \mathbb{N})$  converge para 0 e  $[(r_n : n \in \mathbb{N})] = i(0)$ , uma contradição. De modo similar, existe  $K'_0$  tal que  $|r'_n| \geq \frac{1}{K'_0}$ . Então para todo  $m \in \mathbb{N}$  temos

$$\left| \frac{1}{r_m} - \frac{1}{r'_m} \right| = \left| \frac{r'_m - r_m}{r_m r'_m} \right| \leq (r'_m - r_m) K_0 K'_0 = |r_m - r'_m| K_0 K'_0.$$

Fixado  $K$  existe  $N$  tal que  $|r'_n - r_n| < \frac{1}{K K_0 K'_0}$  para todo  $n > N$ . Assim, temos

$$\left| \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right| < |r_n - r'_n| K_0 K'_0 < \frac{1}{K} \text{ para cada } n > N.$$

Com isto  $(\frac{1}{r_n} : n \in \mathbb{N}) \sim (\frac{1}{r'_n} : n \in \mathbb{N})$ .

Claramente  $i(q)^{-1} = i(q^{-1})$  para  $q \neq 0$ . □

**Corolário 18.6.** (do ítem 4)). Se  $[(r_n : n \in \mathbb{N})] \neq 0$  então existe  $(r'_n : n \in \mathbb{N}) \sim (r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $K$  inteiro positivo tal que  $r'_n > \frac{1}{K}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  ou  $r'_n < -\frac{1}{K}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corolário 18.7.** O  $\mathbb{R}$  possui a propriedade arquimediana: para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \epsilon$ .

A partir desse corolário podemos definir os reais positivos e negativos:

**Definição 18.8.** Dizemos que  $a \in \mathbb{R}$  é positivo se existe  $(r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $K$  positivo tal que  $a = [(r_n : n \in \mathbb{N})]$  e  $r_n > \frac{1}{K}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Em geral podemos comparar dos reais escolhendo um representante:

**Definição 18.9.** Dado  $a, b \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $a < b$  se existem  $(r_n : n \in \mathbb{N})$ ,  $(s_n : n \in \mathbb{N})$  e  $K$  inteiro positivo tais que  $a = [(r_n : n \in \mathbb{N})]$ ,  $b = [(s_n : n \in \mathbb{N})]$  e  $r_n + \frac{1}{K} < s_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 18.10.** A ordem está bem definida, é linear e  $a < b$  se e somente se  $b - a$  é positivo.

Usando as propriedades da soma e adição coordenada a coordenada, pode-se mostrar que as operações em  $\mathbb{R}$  satisfazem as propriedades básicas. Iremos apenas dar um exemplo. Para verificar a distributiva, temos  $[(r_n : n \in \mathbb{N})] + [(s_n : n \in \mathbb{N})][(t_n : n \in \mathbb{N})] = [(r_n + s_n : n \in \mathbb{N})][(t_n : n \in \mathbb{N})] = [(r_n + s_n)t_n : n \in \mathbb{N}] = [(r_n t_n + s_n t_n) : n \in \mathbb{N}] = [(r_n t_n : n \in \mathbb{N})] + [(s_n t_n : n \in \mathbb{N})] = [(r_n : n \in \mathbb{N})][(t_n : n \in \mathbb{N})] + [(s_n : n \in \mathbb{N})][(t_n : n \in \mathbb{N})]$ .

De modo similar, pode-se verificar que a operação oposto e o inverso são de fato, o oposto aditivo e o inverso multiplicativo, onde  $i(0)$  é o elemento neutro da adição e  $i(1)$  o elemento neutro da multiplicação e as relações com a ordem linear.

Fica a cargo do leitor analisar se já discutimos o suficiente para concluir que

**Teorema 18.11.** O  $\mathbb{R}$  é um corpo ordenado arquimediano.

Como  $\mathbb{R}$  tem a propriedade arquimediana, definir sequência de Cauchy com  $\epsilon$  real positivo ou  $\frac{1}{K}$  para  $K$  inteiro positivo é equivalente.

**Proposição 18.12.** Se  $(r_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(s_n : n \in \mathbb{N})$  são seqüências de Cauchy tais que  $|r_n - s_n| < \frac{1}{K}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  então  $|(r_n : n \in \mathbb{N}) - (s_n : n \in \mathbb{N})| \leq \frac{1}{K}$ .

Se  $(x_n : n \in \mathbb{N}) \in [(r_n : n \in \mathbb{N})]$  então  $(i(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $[(r_n : n \in \mathbb{N})]$ .

Vamos agora mostrar que toda seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  converge.

**Teorema 18.13.** Seja  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  então existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $a$ .

*Demonstração.* Dada uma subseqüência de Cauchy podemos fixar uma subseqüência  $(a_{n_k} : k \in \mathbb{N})$  tal que  $|a_{n_m} - a_{n_l}| < \frac{1}{2^k}$  para todo  $m, l \geq k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . (Este tipo de conta foi feita anteriormente).

Para cada  $k$ , começando com um representante arbitrário, podemos tomar uma subseqüência de Cauchy e esta é também um representante da classe. Assim, para cada  $k$  podemos tomar uma seqüência de Cauchy  $(x_{k,m} : m \in \mathbb{N})$  tal que  $|x_{k,m} - x_{k,l}| < \frac{1}{2^k}$  para todo  $l, m \in \mathbb{N}$  e  $[(x_{k,m} : m \in \mathbb{N})] = a_{n_k}$ . Tome  $y_k = x_{k,k}$ . Vamos verificar primeiro que  $(y_k : k \in \mathbb{N})$  é uma seqüência de Cauchy. Vamos supor sem perda de generalidade que  $k \leq k'$ . Então

$|y_k - y_{k'}| = |x_{k,k} - x_{k',k'}| \leq |x_{k,k} - x_{k,m}| + |x_{k,m} - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_{n_{k'}}| + |a_{n_{k'}} - x_{k',t}| + |x_{k',t} - x_{k',k'}| < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 5 \cdot \frac{1}{2^k}$ . Assim, temos que  $|y_m - y_l| < 5 \cdot \frac{1}{2^k}$  para todo  $m, l \geq k$ . Logo a seqüência  $(y_k : k \in \mathbb{N})$  é de Cauchy.

Seja  $a = [(y_k : k \in \mathbb{N})]$ . Vamos provar que  $a$  é o limite de  $(a_{n_k} : k \in \mathbb{N})$ . Tomando  $k > m$  temos

$|a - a_{n_m}| \leq |a - y_k| + |y_k - x_{k,t}| + |x_{k,t} - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_{n_m}| = |a - y_k| + |x_{k,k} - x_{k,t}| + |x_{k,t} - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_{n_m}| < |a - y_k| + \frac{1}{2^k} + |x_{k,t} - a_{n_k}| + \frac{1}{2^m} \leq |a - y_k| + |x_{k,t} - a_{n_k}| + 2 \cdot \frac{1}{2^m}$ . Podemos então escolher  $k > m$  tal que  $|a - y_k| < \frac{1}{2^m}$  e  $t > m$  tal que  $|x_{k,t} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^m}$ .

Assim, temos que  $|a - a_{n_m}| < 4 \cdot \frac{1}{2^m}$ . Portanto, para todo  $l \geq m$  teremos  $|a - a_{n_l}| < 4 \cdot \frac{1}{2^m}$ . Logo, a seqüência  $(a_{n_k} : k \in \mathbb{N})$  converge para  $a$ . Como  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  é de Cauchy, segue que  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $a$ .

*Observação:* Ao invés de tomar subseqüências poderíamos ter começado com uma seqüência e fazer toda a conta de encontrar a subseqüência no meio da construção que poluiria ainda mais o visual do representante do limite.  $\square$

**Teorema 18.14.** (Intervalos encaixantes) Seja  $a_0, b_0$  reais e uma seqüência  $a_0 \leq a_1 \dots a_k \leq b_m \leq b_{m-1} \leq \dots b_1 \leq b_0$  tal que  $(|b_n - a_n| : n \in \mathbb{N})$  converge a 0 então existe um único  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$ .

*Demonstração.* Basta notar que  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(b_n : n \in \mathbb{N})$  são seqüência de Cauchy. Para isto, basta notar que se  $n \leq m$  então  $|a_n - a_m| \leq |a_n - b_n|$  e  $|b_n - b_m| \leq |b_n - a_n|$ . Pela propriedade de  $\mathbb{R}$ , a seqüências de Cauchy convergem para um ponto dentro do intervalo  $[a_n, b_n]$  para todo  $n$ . Como  $(|b_n - a_n| : n \in \mathbb{N})$  converge a 0, segue  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(b_n : n \in \mathbb{N})$  que a intersecção contém no máximo um ponto. Como ambas as seqüências convergem para um ponto da intersecção segue que a intersecção não é vazia e este ponto único é o limite de  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(b_n : n \in \mathbb{N})$ .  $\square$

**Corolário 18.15.** Todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  limitado superiormente possui supremo.

*Demonstração.* A equivalência deste fato com o teorema dos intervalos encaixantes pode ser visto num livro de Cálculo 1.  $\square$

Já vimos a unicidade de  $\mathbb{R}$  como espaço ordenado.

## 18.2 Vamos completar o assunto sobre métricos.

### 18.2.1 Completamento de espaços métricos.

Agora iremos voltar a falar normalmente de  $\mathbb{R}$  então podemos falar de métricas como antes.

**Definição 18.16.** Dado um espaço métrico  $X$  com a métrica  $d_X$ , um completamento  $M$  de  $X$  é um espaço métrico  $M$  com métrica completa  $d_M$  e uma imersão isométrica  $i$  de  $X$  em  $M$ , isto é  $d_X(x, y) = d_M(i(x), i(y))$  para cada  $x, y \in X$  tal que  $i[X]$  é denso em  $M$ .

**Teorema 18.17.** Se  $i : X \rightarrow M$  e  $j : X \rightarrow N$  são completamentos de um espaço métrico  $\langle X, d_X \rangle$  com as métricas  $d_M$  e  $d_N$  respectivamente, então existe uma isometria entre  $M$  e  $N$  que fixa os pontos de  $X$  (ou seja a isometria  $f : M \rightarrow N$  é uma bijeção tal que  $f(i(x)) = j(x)$  para cada  $x \in X$  e  $d_N(f(a), f(b)) = d_M(a, b)$  para cada  $a, b \in M$ ).

*Demonstração.* Primeiro vamos definir uma extensão de  $j : X \rightarrow N$  para uma função  $\hat{j} : M \rightarrow N$ .

Para cada  $a \in M$ , pela densidade de  $i[X]$  existe uma sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  tal que  $(i(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $a$  em  $M$ . Queremos definir  $\hat{j}(a)$  como o limite de  $(j(x_n) : n \in \mathbb{N})$ . Para isto, precisamos verificar duas coisas: que  $(j(x_n) : n \in \mathbb{N})$  possui limite e que o limite é o mesmo, independente da sequência escolhida.

Primeiro, como  $d_N(j(x_n), j(x_m)) = d_X(x_n, x_m) = d_M(i(x_n), i(x_m))$ , segue que  $(j(x_n) : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy. Assim, ela converge para algum ponto  $r \in N$ . Agora, dada uma outra sequência  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  que tal que  $(i(y_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $a$ . Seja  $(z_n : n \in \mathbb{N})$  definida por  $z_{2n} = x_n$  e  $z_{2n+1} = y_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . A sequência  $(i(z_n) : n \in \mathbb{N})$  também converge para  $a$  e é uma sequência de Cauchy, assim,  $(j(z_n) : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy em  $N$ , portanto converge. Como uma subsequência de  $(j(z_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $r$ . Assim, todas as subsequências de  $(j(z_n) : n \in \mathbb{N})$  convergem para  $r$  e portanto  $(j(y_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $r$ . Assim  $\hat{j}(a)$  está bem definida.

Temos que verificar que  $\hat{j}$  é uma isometria. Sejam  $a, b \in M$ . Vamos tomar uma sequência  $(x_k : k \in \mathbb{N})$  tal que  $d_M(a, i(x_k)) < \frac{1}{2^k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $(j(x_k) : k \in \mathbb{N})$  converge para  $\hat{j}(a)$  podemos tomar uma subsequência  $(x_{k_l} : l \in \mathbb{N})$  tal que  $d_N(j(x_{k_l}), \hat{j}(a)) < \frac{1}{2^l}$ . Assim, temos que  $d_M(a, i(x_{k_l})) \leq \frac{1}{2^{k_l}} \leq \frac{1}{2^l}$ .

Então podemos assumir que  $(x_k : k \in \mathbb{N})$  é tal que  $d_M(a, i(x_k)) < \frac{1}{2^k}$  e  $d_N(j(x_k), \hat{j}(a)) < \frac{1}{2^k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Similarmente podemos fixar  $(y_k : k \in \mathbb{N})$  é tal que  $d_M(b, i(y_k)) < \frac{1}{2^k}$  e  $d_N(j(y_k), \hat{j}(b)) < \frac{1}{2^k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Então  $d_M(a, b) \leq d_M(a, i(x_k)) + d_M(i(x_k), i(y_k)) + d_M(i(y_k), b) < \frac{1}{2^k} + d_M(i(x_k), i(y_k)) + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} + d_M(i(x_k), i(y_k)) = \frac{2}{2^k} + d_N(j(x_k), j(y_k)) \leq \frac{2}{2^k} + d_N(j(x_k), \hat{j}(a)) + d_N(\hat{j}(a), \hat{j}(b)) + d_N(\hat{j}(b), j(y_k)) < \frac{4}{2^k} + d_N(\hat{j}(a), \hat{j}(b))$ . Como isto vale para todo  $k$ , segue que  $d_M(a, b) \leq d_N(\hat{j}(a), \hat{j}(b))$ .

Fazendo uma conta similar começando com  $d_N(\hat{j}(a), \hat{j}(b))$ , podemos concluir que  $d_N(\hat{j}(a), \hat{j}(b)) \leq d_M(a, b)$

Assim  $\hat{j}$  é uma isometria. Em particular, isto implica que  $\hat{j}$  é uma função injetora.

Para verificar que  $\hat{j}$  é sobrejetora, tome  $r \in N$ . Como  $j[X]$  é denso em  $N$ , existe uma sequência  $(j(x_k) : k \in \mathbb{N})$  que converge para  $r$ . Assim, pela imersão isométrica  $(x_k : k \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy em  $X$  e pela imersão isométrica em  $M$ , temos que  $(i(x_k) : k \in \mathbb{N})$  é sequências de Cauchy em  $M$ . Como  $M$  é completo, existe  $a \in M$  tal que  $(i(x_k) : k \in \mathbb{N})$  converge para  $a$ . Assim,  $(j(x_k) : k \in \mathbb{N})$  converge para  $\hat{j}(a)$ . Pela unicidade do limite da sequência  $(j(x_k) : k \in \mathbb{N})$ , segue que  $\hat{j}(a) = r$ . Logo  $\hat{j}$  é sobre.

Podemos de forma similar, definir  $\hat{i} : N \rightarrow M$ .

Então temos que  $\hat{j} \circ \hat{i} : N \rightarrow N$  é uma função contínua tal que  $\hat{j} \circ \hat{i}(j(x)) = j(x)$  para todo  $x \in X$ .

Assim  $id_N(r) = \hat{j} \circ \hat{i}(r)$  para todo  $r \in j[X]$ . Como  $j[X]$  é denso em  $N$  e  $N$  é Hausdorff, segue que  $id_N = \hat{j} \circ \hat{i}$ .

Usando argumentos similares também iremos concluir que  $id_M = \hat{i} \circ \hat{j}$ .

Assim  $M$  e  $N$  são isométricos. □

**Teorema 18.18.** Existe um completamento para todo espaço métrico  $\langle X, d_X \rangle$ .

*Demonstração.* Para cada  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  sequência de Cauchy em  $d_X$ , denote por  $[(x_n : n \in \mathbb{N})]$  a classe de equivalência de  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ , onde  $(x_n : n \in \mathbb{N}) \sim (x'_n : n \in \mathbb{N})$  se para todo  $N, K$  existe  $n > N$  tal que  $d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{K}$ .

**Passo 1. Definir o conjunto e o candidato à métrica.** Seja  $M = \{[(x_n : n \in \mathbb{N})] : (x_n : n \in \mathbb{N}) \text{ é sequência de Cauchy em } \langle X, d_X \rangle\}$ .

Defina  $d_M : M \times M \rightarrow [0, +\infty[$ , por  $d_M([(x_n : n \in \mathbb{N})], [(y_n : n \in \mathbb{N})]) = \lim_{n \in \mathbb{N}} d_X(x_n, y_n)$ .

Denote por  $(x)$  a sequência constantemente  $x$ . Esta é uma sequência de Cauchy.

Seja  $i : X \rightarrow M$  tal que  $i[x] = [(x)]$ .

**Passo 2. Verificar que o candidato a distância é um número real.** A primeira verificação é que  $\lim_{n \in \mathbb{N}} d_X(x_n, y_n)$  existe. De fato,

$d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x_m) + d_X(x_m, y_m) + d_X(y_m, y_n)$  implica que

$d_X(x_n, y_n) - d_X(x_m, y_m) \leq d_X(x_n, x_m) + d_X(y_m, y_n)$  e

$d_X(x_m, y_m) \leq d_X(x_m, x_n) + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y_m)$  implica que

$d_X(x_m, y_m) - d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_m, x_n) + d_X(y_n, y_m) = d_X(x_n, x_m) + d_X(y_m, y_n)$ .

Assim,  $|d_X(x_n, y_n) - d_X(x_m, y_m)| \leq d_X(x_n, x_m) + d_X(y_m, y_n)$ . Como  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  são de Cauchy, segue que  $(d_X(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy no espaço completo  $\mathbb{R}$  e portanto a sequência  $(d_X(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N})$  converge.

**Passo 3. O candidato a distância está bem definido.** será mostrar que a distância independe do representante escolhido. Fixe  $K$  inteiro positivo. Então existe  $N_1$  tal que  $d_X(x_k, x_t)$ ,  $d_X(x'_k, x'_t)$ ,  $d_X(y_k, y_t)$  e  $d_X(y'_k, y'_t)$  são todos menores que  $\frac{1}{K}$  para cada  $k, t \geq N_1$ . Fixe  $m, l > N_1$  tal que  $d_X(x_m, x'_m) < \frac{1}{K}$  e  $d_X(y'_m, y'_l) < \frac{1}{K}$ . Então para cada  $n > N_1$  temos que

$d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x_m) + d_X(x_m, x'_m) + d_X(x'_m, x'_n) + d_X(x'_n, y'_n) + d_X(y'_n, y'_l) + d_X(y'_l, y_l) + d_X(y_l, y_n) < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + d_X(x'_n, y'_n) + \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K}$ .

$d_X(x'_n, y'_n) \leq d_X(x'_n, x'_m) + d_X(x'_m, x_m) + d_X(x_m, x_n) + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y_l) + d_X(y_l, y'_l) + d_X(y'_l, y'_n) < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + d_X(x_n, y_n) + \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K}$ .

Assim,  $|d_X(x_n, y_n) - d_X(x'_n, y'_n)| \leq \frac{6}{K}$  para todo  $n > N_1$ . Assim,  $(d_X(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}) \sim (d_X(x'_n, y'_n) : n \in \mathbb{N})$ . Logo essas sequências tem o mesmo limite em  $\mathbb{R}$ .

**Passo 4. A distância é de fato uma métrica.**  $d_M$  é uma métrica.

Claramente  $d_M(a, b) \geq 0$  para todo  $a, b \in M$  pela definição de  $d_M$ .

Também é claro que  $d_M(a, a) = 0$ . Se  $d_M(a, b) = 0$  então dado um representante  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  para  $a$  e um representante  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  de  $b$  tal que  $(d_X(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para 0. Assim,  $(x_n : n \in \mathbb{N}) \sim (y_n : n \in \mathbb{N})$  e  $a = b$ .

Pela definição de  $d_M$  e o fato de  $d_X(x, y) = d_X(y, x)$  para cada  $x, y \in X$ , segue que  $d_M(a, b) = d_M(b, a)$  para cada  $a, b \in M$ .

Dado  $a, b, c \in M$ , tomemos representantes  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ ,  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  e  $(z_n : n \in \mathbb{N})$  para  $a, b$  e  $c$  respectivamente.

Então  $d_X(x_n, z_n) \leq d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, z_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, tomando os limites temos  $\lim_{n \in \mathbb{N}} d_X(x_n, z_n) \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} d_X(x_n, y_n) + \lim_{n \in \mathbb{N}} d_X(y_n, z_n)$ . Logo  $d_M(a, c) \leq d_M(a, b) + d_M(b, c)$ .

Assim  $d_M$  é uma métrica.

**Passo 5.  $i$  é uma imersão isométrica.** Para ver que  $d_M(i(x), i(y)) = d_X(x, y)$ , note que  $(x)$  e  $(y)$  são sequências de Cauchy, assim  $d_M(i(x), i(y))$  é o limite da sequência  $(d_X(x, y))$  que converge para  $d_X(x, y)$ .

**Passo 6. A métrica é completa.**  $d_M$  é uma métrica completa.

Dada uma subsequência de Cauchy podemos fixar uma subsequência  $(a_{n_k} : k \in \mathbb{N})$  tal que  $d_M(a_{n_m}, a_{n_l}) < \frac{1}{2^k}$  para todo  $m, l \geq k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . (Este tipo de conta foi feita anteriormente).

Para cada  $k$ , começando com um representante arbitrário, podemos tomar uma subsequência de Cauchy e esta é também um representante da classe. Assim, para cada  $k$  podemos tomar uma sequência de Cauchy  $(x_{k,m} : m \in \mathbb{N})$  tal que  $d_X(x_{k,m}, x_{k,l}) < \frac{1}{2^k}$  para todo  $l, m \in \mathbb{N}$  e  $[(x_{k,m} : m \in \mathbb{N})] = a_{n_k}$ . Tome  $y_k = x_{k,k}$ . Vamos verificar primeiro que  $(y_k : k \in \mathbb{N})$  é uma sequência de Cauchy. Vamos supor sem perda de generalidade que  $k \leq k'$ . Então (vamos escrever os elementos de  $X$  como se fossem elementos de  $M$ )

$d_M(y_k, y_{k'}) = d_M(x_{k,k}, x_{k',k'}) \leq d_X(x_{k,k}, x_{k,m}) + d_M(x_{k,m}, a_{n_k}) + d_M(a_{n_k}, a_{n_{k'}}) + d_M(a_{n_{k'}}, x_{k',t}) + d_M(x_{k',t}, x_{k',k'}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 5 \cdot \frac{1}{2^k}$ . Assim, temos que  $|y_m - y_l| < 5 \cdot \frac{1}{2^k}$  para todo  $m, l \geq k$ . Logo a sequência  $(y_k : k \in \mathbb{N})$  é de Cauchy.

Seja  $a = [(y_k : k \in \mathbb{N})]$ . Vamos provar que  $a$  é o limite de  $(a_{n_k} : k \in \mathbb{N})$ . Tomando  $k > m$  temos

$d_M(a, a_{n_m}) \leq d_M(a, y_k) + d_M(y_k, x_{k,t}) + d_M(x_{k,t}, a_{n_k}) + d_M(a_{n_k}, a_{n_m}) = d_M(a, y_k) + d_M(x_{k,k}, x_{k,t}) + d_M(x_{k,t}, a_{n_k}) + d_M(a_{n_k}, a_{n_m}) < d_M(a, y_k) + \frac{1}{2^k} + d_M(x_{k,t}, a_{n_k}) + \frac{1}{2^m} \leq d_M(a, y_k) + d_M(x_{k,t}, a_{n_k}) + 2 \cdot \frac{1}{2^m}$ . Podemos então escolher  $k > m$  tal que  $d_M(a, y_k) < \frac{1}{2^m}$  e  $t > m$  tal que  $|x_{k,t} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^m}$ .

Assim, temos que  $d_M(a, a_{n_m}) < 4 \cdot \frac{1}{2^m}$ . Portanto, para todo  $l \geq m$  teremos  $d_M(a, a_{n_l}) < 4 \cdot \frac{1}{2^m}$ . Logo, a sequência  $(a_{n_k} : k \in \mathbb{N})$  converge para  $a$ . Como  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  é de Cauchy, segue que  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $a$ .  $\square$

## Capítulo 19

# Compactos métricos. Teorema de Baire. Teorema de Tietze.

### 19.1 ‘As múltiplas personalidades de um compacto métrico’.

#### 19.1.1 Propriedades relacionadas a compacidade que se equivalem para espaços métricos.

Vamos provar algumas equivalências de compacidade para espaços métricos. Mais tarde iremos trabalhar com estas propriedades num contexto mais geral.

**Teorema 19.1.** Se  $X$  um espaço metrizable. São equivalentes:

- 1)  $X$  é compacto.
- 2) Todo subconjunto infinito enumerável possui um ponto de acumulação completo.
- 3) Toda conjunto infinito de  $X$  possui um ponto de acumulação.
- 4) Todo conjunto infinito enumerável possui ponto de acumulação.
- 5) Toda sequência possui ponto de acumulação.
- 6) Toda sequência de  $X$  possui uma subsequência convergente.
- 7) Toda função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tem imagem limitada.

*Demonstração.* 1)  $\rightarrow$  2). Já vimos que compacto implica que todo conjunto infinito possui ponto de acumulação completo.

2)  $\rightarrow$  3). Dado um conjunto infinito  $A$ , tome um subconjunto infinito enumerável  $B \subseteq A$ . Por hipótese,  $B$  possui um ponto de acumulação completo  $x$ . Então  $x$  é um ponto de acumulação de  $B$  e portanto um ponto de acumulação de  $A$ .

3)  $\rightarrow$  4). Imediato.

4)  $\rightarrow$  5). Seja  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  uma sequência em  $X$ . Então existe uma subsequência constante  $(x_n : n \in I)$  ou uma subsequência injetora de  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ . A subsequência constante tem ponto de acumulação. Se a subsequência é injetora, então o conjunto  $\{x_n : n \in I\}$  tem um ponto de acumulação  $x$ . Como a enumeração restrita a  $I$  é injetora, podemos remover um ponto de  $I$  se necessário e assumir que  $x \notin \{x_n : n \in I\}$ . Como o espaço é  $T_1$ , segue que para toda vizinhança  $U$  de  $x$ ,  $U \setminus \{x_n : n \in I \text{ e } n \leq N\}$  é vizinhança aberta de  $x$ .

Assim,  $U \setminus \{x_n : n \in I \text{ e } n \leq N\} \neq \emptyset$ . Assim, como  $\{x_n : n \in I\}$  é injetora, segue que  $\{x_n : n \in I\} \cap (U \setminus \{x_n : n \in I \text{ e } n \leq N\}) \neq \emptyset$ . Portanto existe  $m \in I$ ,  $m > N$  tal que  $x_m \in U$ . Logo,  $\{n \in I : x_n \in U\}$  é infinito e  $x$  é ponto de acumulação de  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ .

5)  $\rightarrow$  6). Seja  $x$  o ponto de acumulação de uma sequência. Como  $X$  é métrico,  $x$  tem base local enumerável. Assim, a sequência possui uma subsequência convergente para  $x$ .

6)  $\rightarrow$  7). Vamos provar pela contrapositiva. Seja  $f$  uma função contínua de  $X$  em  $\mathbb{R}$ . Suponhamos que a imagem de  $f$  seja ilimitada. Então podemos indutivamente escolher  $x_n \in X$  tal que  $|f(x_n)| > n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, para toda subsequência  $(x_n : n \in I)$  temos que  $|f(x_n)| > n$  para todo  $n \in I$ . Assim,  $(x_n : n \in I)$  não converge (se convergisse teríamos que  $(f(x_n) : n \in I)$  converge e a imagem da subsequência é limitada).

7)  $\rightarrow$  1). Seja  $d$  uma métrica que gera a topologia de  $X$ . Primeiro, vamos verificar que  $d$  é totalmente limitada. Suponhamos que não seja. Então existe  $\epsilon > 0$  tal que nenhum subconjunto finito de  $X$  é  $\epsilon$ -denso. Escolha  $x_0 \in X$  e indutivamente escolha  $x_{n+1} \in X$  tal que  $x_{n+1} \notin \bigcup_{m \leq n} B_d(x_m, \epsilon)$ . Note que  $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ .

Seja  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  uma função tal que  $f_n(x_n) = 1$  e  $f_n[X \setminus B_d(x_n, \frac{\epsilon}{4})] = \{0\}$  para cada  $n > 0$ .

Seja  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x)$ . Vamos verificar que esta função está bem definida e é contínua.

Para cada  $x \in X$ , existe no máximo um  $n$  tal que  $B_d(x, \frac{\epsilon}{4}) \cap B_d(x_n, \frac{\epsilon}{4}) \neq \emptyset$ . De fato, se  $m$  é tal que  $B_d(x, \frac{\epsilon}{4}) \cap B_d(x_m, \frac{\epsilon}{4}) \neq \emptyset$  então usando um ponto da intersecção temos  $d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{4}$  e  $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{4}$ . Assim,  $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ , uma contradição.

Assim, fixe  $n_x$  tal que  $B_d(x, \frac{\epsilon}{4}) \subseteq X \setminus B_d(x_n, \frac{\epsilon}{4})$  para todo  $n \neq n_x$ .

Assim, para todo  $y \in B(x, \frac{\epsilon}{4})$  temos  $f(y) = n_x f_{n_x}(y) + \sum_{n \neq n_x} n f_n(y) = f_{n_x}(y)$ . Como  $f_{n_x}$  é contínua em  $B(x, \frac{\epsilon}{4})$ , segue que  $f$  é contínua em  $B(x, \frac{\epsilon}{4})$ . Como  $B(x, \frac{\epsilon}{4})$  é aberto, segue que  $f$  é contínua em  $x$  no espaço  $X$ . Como  $f(x_n) = n$ , para cada  $n$  inteiro positivo, segue que  $f$  é contínua e ilimitada, contradizendo 7). Assim,  $d$  é totalmente limitada.

Vamos agora provar que  $d$  é completa. Caso contrário, podemos supor que  $X$  é um subespaço completo  $M$  com a métrica  $d_M$ . Vamos provar que  $d_M$  é totalmente limitada. De fato, fixado  $\epsilon > 0$ , seja  $D \subseteq X$  finito tal que  $D$  é  $\frac{\epsilon}{2}$ -denso em  $X$ . Vamos verificar  $D$  é  $\epsilon$ -denso em  $M$ . De fato, se  $z \in M$ , pela densidade de  $X$ , existe  $y \in X$  tal que  $d_M(y, z) < \frac{\epsilon}{2}$ . Como  $D$  é  $\frac{\epsilon}{2}$ -denso em  $X$ , existe  $x \in D$  tal que  $d_M(x, y) = d_X(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ . Assim,  $d_M(x, z) \leq d_M(x, y) + d_M(y, z) < \epsilon$ . Assim  $d_M$  é completo e totalmente limitado. Logo,  $M$  é compacto. Se  $X \neq M$ , tome  $z \in M \setminus X$ . Então a função  $f(x) = \frac{1}{d_M(x, z)}$  é uma função contínua em  $X$ . Existe  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $X$  que converge para  $z$ , assim  $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $\infty$  e  $f$  é ilimitada, contradizendo 7). Assim,  $d$  é uma métrica completa.

Como  $d$  é completa e totalmente limitada, segue que  $X$  é compacto.  $\square$

**Corolário 19.2.** (Da 7) implica 1). Um espaço métrizável  $X$  pode ser imerso num compacto métrico se e somente se  $X$  possui uma métrica totalmente limitada que gera a sua topologia.

*Demonstração.* Se  $d$  é uma métrica totalmente limitada e completa então  $X$  é compacto. Se  $d$  é totalmente limitada e não é completo então seu completamento é compacto métrico, como visto anteriormente. Assim,  $X$  é imerso num compacto métrico.

Se  $X$  é imerso num compacto métrico  $M$ , então qualquer métrica  $d_M$  em  $M$  é totalmente limitada. Assim, a métrica  $d_M$  restrita a  $X \times X$  é uma métrica totalmente limitada que gera a topologia de  $X$  (o totalmente limitado segue de um argumento similar ao usado anteriormente).  $\square$

Para usar a propriedade em 7) para normais ao invés de num métrico, iremos provar o Teorema de Tietze.

Vamos apenas dar os nomes das propriedades que apareceram nas equivalências acima:

**Teorema 19.3.** São equivalentes para um espaço métrico  $X$  (as definições serão dadas mais tarde):

- 1)  $X$  é compacto.
- 2)  $X$  é sequencialmente compacto.
- 3)  $X$  é enumeravelmente compacto.
- 4)  $X$  é pseudocompacto.

## 19.2 Teorema de Baire para espaços métricos completos.

Pode-se pensar em abertos densos como um objeto grande, já que a intersecção finita de abertos densos é um aberto denso. Espaços métricos completos garantem que a intersecção enumerável de abertos densos é densa (já não vai ser aberta).

Primeiro vamos ver uma equivalência sobre sequências de Cauchy que será útil na demonstração do Teorema de Baire. Dado uma métrica  $d$  e um conjunto não vazio  $A$  vamos denotar  $\delta_d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$  o diâmetro de  $A$  na métrica  $d$ . Na métrica Euclidiana, o diâmetro da bola é o diâmetro da bola. Para qualquer espaço métrico, pela desigualdade triangular, o diâmetro da bola vai ser menor ou igual o dobro do raio, mas pode ser estritamente menor. Usando a desigualdade triangular, podemos notar que  $\delta_d(A) = \delta_d(\overline{A})$ .



**Teorema 19.4.** Seja  $d$  uma métrica que gera a topologia de  $X$ . São equivalentes:

- 1) Toda seqüência de Cauchy converge.
- 2) Para todo  $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$  família decrescente de fechados com  $(\delta_d(F_n) : n \in \mathbb{N})$  convergindo a 0 temos  $\bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$  (Como o diâmetro vai a 0, isto implica que a intersecção é um ponto).

*Demonstração.* Seja  $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$  uma família decrescente de fechados com diâmetro indo a 0. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , fixe  $x_n \in F_n$ . Então dado um  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $\delta_d(F_{n_0}) < \epsilon$ . Assim, para todo  $m, n > n_0$  temos  $x_n, x_m \in F_{n_0}$  (a seqüência de fechados é decrescente). Logo  $d(x_n, x_m) \leq \delta_d(F_{n_0}) < \epsilon$ . Assim,  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma seqüência de Cauchy e portanto converge para algum ponto  $x \in X$ . Como  $x \in \{x_m : m \geq n\} \subseteq \overline{F_n} = F_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , segue que  $x \in \bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Reciprocamente, se  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma seqüência de Cauchy então para cada  $K$  existe  $N_K$  (podemos escolher  $(N_K : K \in \mathbb{N})$  de forma indutiva para que seja crescente) tal que  $d(x_n, x_m) < \frac{1}{K}$  para todo  $n, m \geq N_K$ . Defina  $F_k = \overline{\{x_n : n \geq N_k\}}$ . Como  $(N_K : K \in \mathbb{N})$  é crescente, temos que  $(\{x_n : n \geq N_k\} : k \in \mathbb{N})$  é decrescente e portanto  $(F_k : k \in \mathbb{N})$  é decrescente. Temos  $\delta_d(F_k) = \delta_d(\{x_n : n \geq N_k\}) \leq \frac{1}{K}$ . Assim, por hipótese, existe  $x \in \bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $K$  tal que  $\frac{1}{K} < \epsilon$ . Como  $x \in F_K$ , segue que  $d(x, x_n) \leq \delta_d(F_k) \leq \frac{1}{K} < \epsilon$  para todo  $n \geq N_K$ . Assim a seqüência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $x$ .  $\square$

**Teorema 19.5.** (Teorema de Baire para espaços completamente metrizáveis). Seja  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  uma família de abertos densos de  $X$ . Então  $\bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  é densa em  $X$ .

*Demonstração.* Primeiro note que a intersecção de dois abertos densos são abertos. De fato, se  $U$  e  $V$  são abertos densos e  $W$  é um aberto não vazio de  $X$  então  $W \cap U$  é um aberto não vazio, pela densidade de  $U$ . Como  $W \cap U \neq \emptyset$  e  $V$  é denso, segue que  $\emptyset \neq (W \cap U) \cap V = W \cap (U \cap V)$ . Assim,  $U \cap V$  é denso. A intersecção de dois abertos é um aberto. Assim,  $U \cap V$  é aberto denso.

Assim, a intersecção finita de abertos densos é aberta. Seja  $W$  um aberto não vazio.

Fixe uma métrica completa  $d$  que gera a topologia de  $X$ . Vamos construir indutivamente uma família de abertos  $(V_n : n \in \mathbb{N})$  tal que  $W \supseteq \overline{V_0} \supseteq V_0 \supseteq \dots \supseteq V_k \supseteq \overline{V_{k+1}}$  tal que  $\overline{V_k} \subseteq \bigcap_{i \leq k} U_i$  e  $\delta_d(V_n) \leq \frac{1}{2^n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Temos que  $U_0 \cap W$  é um aberto não vazio. Assim, podemos fixar um ponto  $x_0$  tal que  $x_0 \in U_0 \cap W$ . Usando a regularidade do espaço métrico existe uma bola aberta  $V_0$  contendo  $x_0$  tal que  $\overline{V_0} \subseteq U_0 \cap W$  e  $\delta_d(\overline{V_0}) < \frac{1}{2^0}$ . Assumindo definidos até  $k$ , temos que  $V_k$  é um aberto não vazio. Como  $U_{k+1}$  é denso, temos que  $\overline{V_k} \cap U_{k+1}$  é aberto não vazio.

Assim, podemos fixar um ponto  $x_{k+1}$  tal que  $x_{k+1} \in \overline{V_k} \cap U_{k+1}$ . Usando a regularidade do espaço métrico existe uma bola aberta  $V_{k+1}$  contendo  $x_{k+1}$  tal que  $\overline{V_{k+1}} \subseteq \overline{V_k} \cap U_{k+1}$  e  $\delta_d(\overline{V_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ .

Então temos  $\overline{V_{k+1}} \subseteq V_k \subseteq \bigcap_{i \leq k} U_i$  e  $\overline{V_{k+1}} \subseteq U_{k+1}$ . Segue então que  $\overline{V_{k+1}} \subseteq \bigcap_{i \leq k+1} U_i$  e a propriedade indutiva está satisfeita.

Como  $d$  é completo e a família de fechados decresce e os diâmetros convergem para 0, temos que  $\emptyset \neq \bigcap\{\overline{V_k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq W \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_n$ . Como  $W$  é aberto arbitrário, segue que  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_n$  é denso em  $X$ .  $\square$

**Exemplo 19.6.** O conjunto  $\mathbb{Q}$  não é a intersecção enumerável de abertos de  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Como  $\mathbb{Q}$  é denso,  $\mathbb{Q}$  seria uma intersecção de abertos densos  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Logo,  $\emptyset = \bigcap(\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \{q\} : q \in \mathbb{Q}\})$ , contradizendo o Teorema de Baire no espaço completamente metrizável  $\mathbb{R}$ .  $\square$

## 19.3 ‘A escada está quebrada ou consertada?’

### 19.3.1 Teorema de Tietze.

Poderíamos ter feito esta demonstração logo após a prova do Lema de Urysohn, mas adiamos até termos uma aplicação deste teorema que ocorrerá em breve quando falarmos de pseudocompactos normais.

Geralmente o Teorema de Tietze é enunciado para funções com domínio  $[-1, 1]$ , mas iremos fazer a demonstração para  $[0, 1]$ , o que na prática dá na mesma:

**Proposição 19.7.** Se toda função contínua  $f : F \rightarrow [0, 1]$ , com  $F$  fechado por ser estendida para uma função contínua de  $X$  em  $[0, 1]$ , então para todo  $a < b$  números reais e toda função contínua  $g : F \rightarrow [a, b]$  pode ser estendida para um função contínua de  $X$  em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Seja  $\phi$  um homeomorfismo entre  $[0, 1]$  e  $[a, b]$  (neste caso há lineares). Dada  $g : F \rightarrow [a, b]$ , seja  $f = \phi^{-1} \circ g : F \rightarrow [0, 1]$ . Então tome  $\hat{f} : X \rightarrow [0, 1]$  a extensão contínua de  $f$ . Então temos que  $\phi \circ \hat{f} : X \rightarrow [a, b]$  é uma função contínua. Além disso, para cada  $x \in F$  temos  $\phi \circ \hat{f}(x) = \phi \circ f(x) = \phi \circ (\phi^{-1} \circ g)(x) = (\phi \circ \phi^{-1}) \circ g(x) = g(x)$ . Assim,  $g$  possui uma extensão contínua para  $X$ .  $\square$

Iremos aplicar o Lema de Urysohn para provar o Teorema de Tietze. Podemos pensar no Teorema de Tietze como uma generalização do Lema de Urysohn. De fato, dados dois fechados disjuntos  $A$  e  $B$ , o conjunto  $A \cup B$  é um fechado e a função  $f$  tal que  $f[A] = \{0\}$  e  $f[B] = \{1\}$  é uma função contínua em  $A \cup B$ . Então o Lema de Urysohn garante a extensão desse tipo de funções contínuas.

**Teorema 19.8.** (Teorema de Tietze - intervalo limitado). Seja  $X$  um espaço normal. Então se  $f : F \rightarrow [0, 1]$  é uma função contínua com  $F \subseteq X$  fechado, então existe  $\hat{f} : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $\hat{f}|_F = f$  (isto é  $\hat{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in F$ ).

**Spoiler da Demonstração.** A idéia principal da construção é aproximar a função por baixo, usando uma função escada em uma parte de  $F$  para aproximar da função  $f$  e o resto ser contínua. Uma parte em  $F$  não tem muito espaço para subir e uma parte tem que subir bastante para chegar próximo do valor de  $f$ . Como é preciso uma brecha para ligar continuamente os dois degraus, o domínio da  $f$  (ou seja  $F$ ) é dividido em três partes. A função vai ser obtida por uma série que vai corrigindo o que falta para termos  $f$  no final. Isto é feito como nas séries usando funções escada em Teoria da Medida.

*Demonstração.* Para facilitar a visualização do processo de indução vamos chamar  $f_0 := f$  e  $a_0 = 1$ . Então seja  $A_0 = f_0^{-1}[[0, \frac{a_0}{3}]]$  e  $B_0 = f_0^{-1}[[\frac{2a_0}{3}, a_0]]$ . Como  $A_0$  e  $B_0$  são fechados no fechado  $F$ , segue que  $A_0$  e  $B_0$  são fechados em  $X$ . Assim podemos aplicar o Lema de Urysohn para encontrar uma função  $g_0 : X \rightarrow [0, \frac{a_0}{3}]$  tal que  $g_0[A_0] = \{0\}$  e  $g_0[B_0] = \{\frac{a_0}{3}\}$ . Temos então que

se  $x \in A_0$  então  $g_0(x) = 0 \leq f_0(x) \leq \frac{a_0}{3}$ . Assim,  $0 \leq f_0(x) - g_0(x) = f_0(x) \leq \frac{a_0}{3} \leq \frac{2a_0}{3}$ .

se  $x \in B_0$  então  $g_0(x) = \frac{a_0}{3} \leq f_0(x)$ . Assim,  $0 \leq f_0(x) - g_0(x) \leq a_0 - \frac{a_0}{3} = \frac{2a_0}{3}$ .

se  $x \in F \setminus (A_0 \cup B_0)$  então  $0 \leq g_0(x) \leq \frac{a_0}{3} \leq f_0(x) \leq \frac{2a_0}{3}$ . Assim,  $0 \leq f_0(x) - g_0(x) \leq \frac{2a_0}{3} - 0 = \frac{2a_0}{3}$ .

Vamos chamar  $f_1 = f_0 - g_0|_F$  e  $a_1 = \frac{2a_0}{3}$ . Então temos que  $f_1 : F \rightarrow [0, a_1]$  contínua em  $F$ .

Trocando o índice 0 por 1 na demonstração acima teremos

Então seja  $A_1 = f_1^{-1}[[0, \frac{a_1}{3}]]$  e  $B_1 = f_1^{-1}[[\frac{2a_1}{3}, a_1]]$ . Como  $A_1$  e  $B_1$  são fechados no fechado  $F$ , segue que  $A_1$  e  $B_1$  são fechados em  $X$ . Assim podemos aplicar o Lema de Urysohn para encontrar uma função  $g_1 : X \rightarrow [0, \frac{a_1}{3}]$  tal que  $g_1[A_1] = \{0\}$  e  $g_1[B_1] = \{\frac{a_1}{3}\}$ . Temos então que

se  $x \in A_1$  então  $g_1(x) = 0 \leq f_1(x) \leq \frac{a_1}{3}$ . Assim,  $0 \leq f_1(x) - g_1(x) = f_1(x) \leq \frac{a_1}{3} \leq \frac{2a_1}{3}$ .

se  $x \in B_1$  então  $g_1(x) = \frac{a_1}{3} \leq f_1(x)$ . Assim,  $0 \leq f_1(x) - g_1(x) \leq a_1 - \frac{a_1}{3} = \frac{2a_1}{3}$ .

se  $x \in F \setminus (A_1 \cup B_1)$  então  $0 \leq g_1(x) \leq \frac{a_1}{3} \leq f_1(x) \leq \frac{2a_1}{3}$ . Assim,  $0 \leq f_1(x) - g_1(x) \leq \frac{2a_1}{3} - 0 = \frac{2a_1}{3}$ .

Podemos então tomar  $a_2 = \frac{2a_1}{3}$  e  $f_2 = f_1 - g_1|_F : F \rightarrow [0, a_2]$  e prosseguir o processo indutivamente.

Temos que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3}$  é uma série geométrica com primeiro termo  $\frac{1}{3}$  e razão  $\frac{2}{3}$ .

Assim, teremos  $g_n : X \rightarrow [0, \frac{a_n}{3}]$  são funções contínuas cujos valores são restritos por uma série convergente. Portanto, temos que  $\hat{f} := \sum_{n=0}^{\infty} g_n$  é uma função contínua de  $X$  em  $[0, 1]$  (a soma da série geométrica é 1).

Além disso,  $f(x) - \sum_{n=0}^k g_n(x) = f_0(x) - \sum_{n=0}^k g_n(x) = f_1(x) - \sum_{n=1}^k g_n(x) = f_k(x) - g_k(x) = f_{k+1}(x) \in [0, a_{k+1}]$  para cada  $x \in F$ .

Como  $(a_k : k \in \mathbb{N})$  converge para 0, segue que  $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \hat{f}(x)$  para cada  $x \in F$ .

Assim,  $\hat{f}$  é a extensão desejada.  $\square$

**Teorema 19.9.** (Teorema de Tietze). Seja  $X$  um espaço normal. Então se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua com  $F \subseteq X$  fechado, então existe  $\hat{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $\hat{f}|_F = f$  (isto é  $\hat{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in F$ ).

*Demonstração.* Seja  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  um homeomorfismo. Dada a função  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ , considere a função  $\psi \circ f : F \rightarrow ]-1, 1[ \subseteq [-1, 1]$ .

Pelo que vimos acima, existe  $g : X \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $g(x) = \psi \circ f(x)$  para todo  $x \in F$ . Seja  $A = g^{-1}\{-1, 1\}$ . Note que  $A$  é um fechado disjunto de  $F$ , pois  $g[F] \subseteq ]-1, 1[$ . Então pelo Lema de Urysohn, existe  $h : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $h[A] = \{0\}$  e  $h[F] = \{1\}$ .

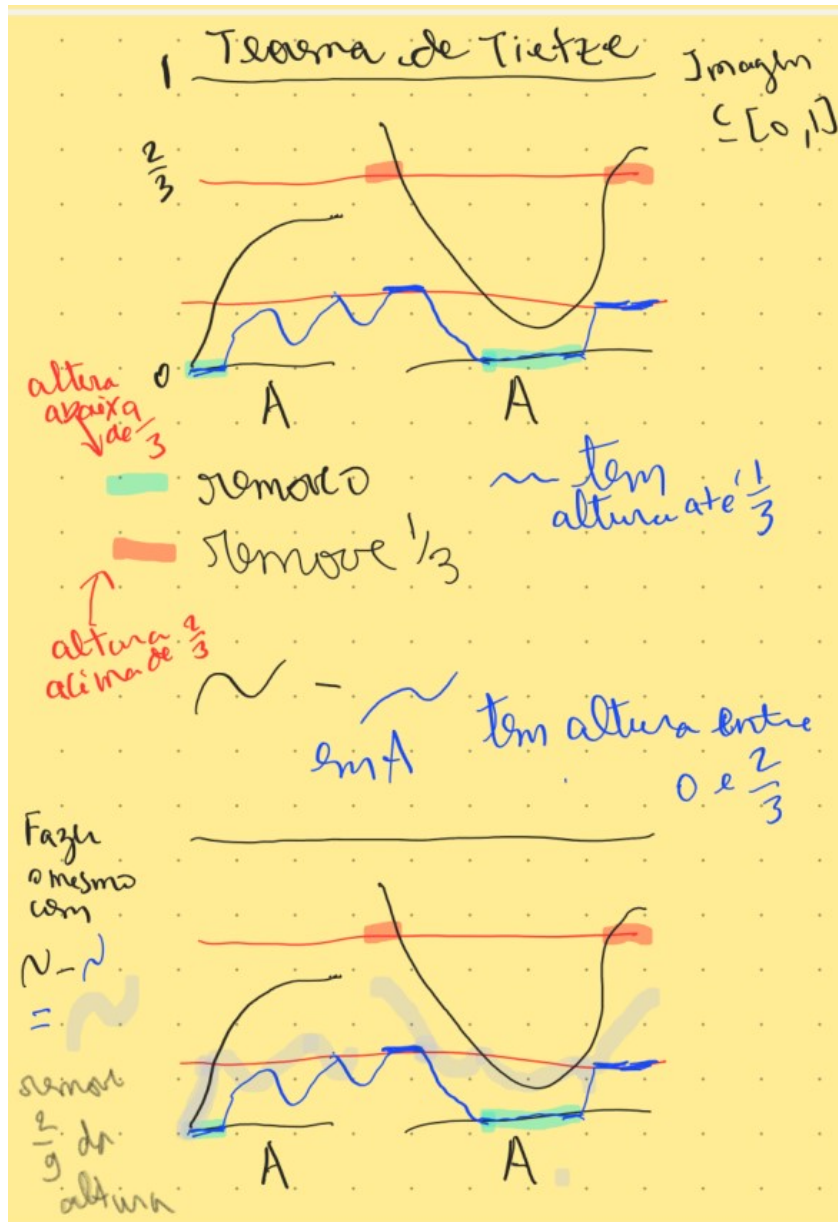


Figura 19.1: As escadas no Teorema de Tietze.

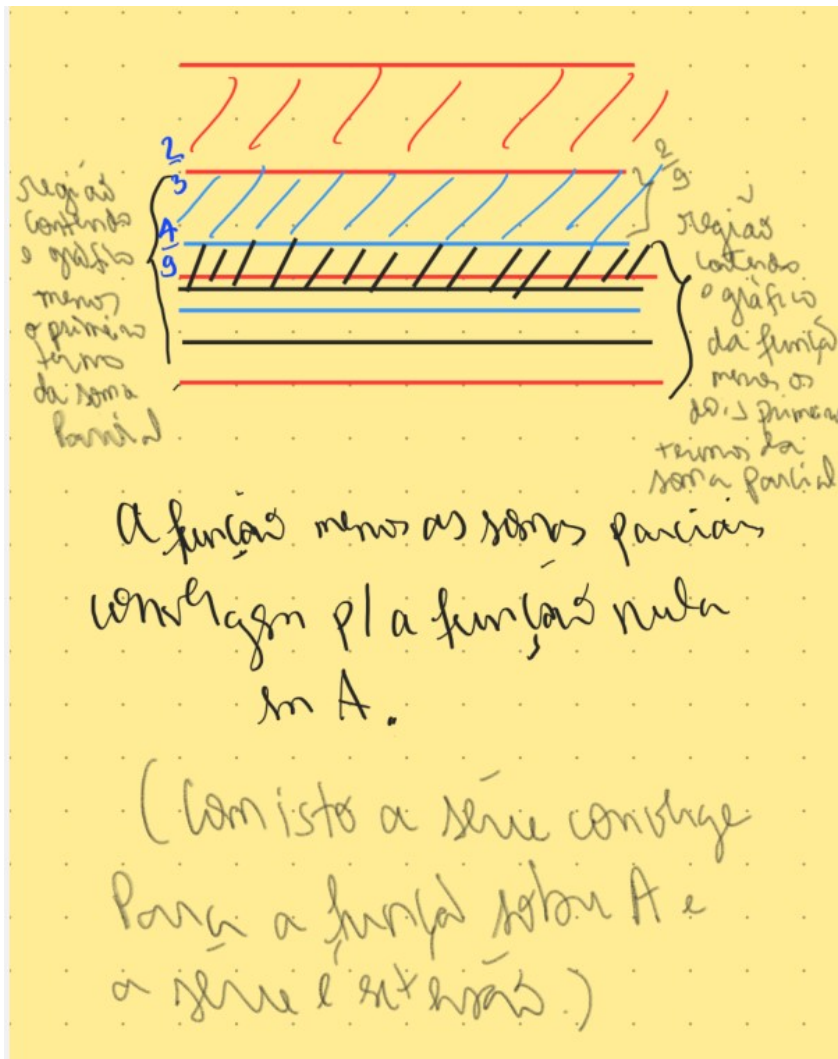


Figura 19.2: A convergência da série no fechado.

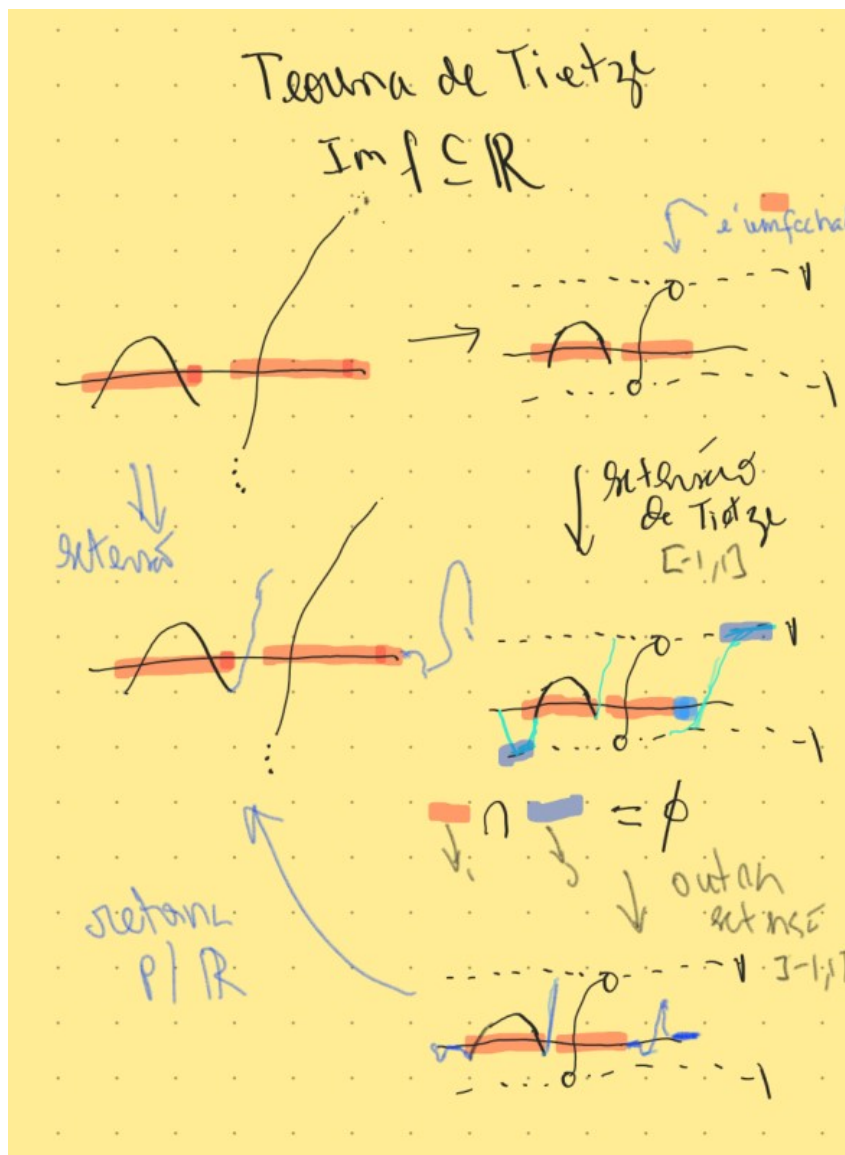


Figura 19.3: Extensão de Tietze quando a função não é limitada.

Então  $h.g$  definida por  $(h.g)(x) = h(x).g(x)$  é uma função contínua tal que  $(h.g)[X] \subseteq ]-1,1[$  e  $(h.g)(x) = g(x)$  para todo  $x \in F$ .

Então  $\psi^{-1} \circ (h.g) : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e  $\psi^{-1} \circ (h.g)(x) = \psi^{-1}((h.g)(x)) = \psi^{-1}(g(x)) = \psi^{-1}(\psi(f(x))) = f(x)$  para todo  $x \in F$ . Assim  $\psi^{-1} \circ (h.g)$  é a extensão desejada.  $\square$

# Capítulo 20

## Propriedades relacionadas a compacidade.

### 20.1 Uma seqüência de propriedades relacionadas à compacidade.

#### 20.1.1 Sequencialmente compacto.

**Definição 20.1.** Um espaço é sequencialmente compacto se toda seqüência de  $X$  possui uma subseqüência convergente.

**Proposição 20.2.** Compacidade sequencial é hereditária para fechados.

*Demonstração.* Basta notar que se a seqüência está num fechado então seus limites também estão no fechado.  $\square$

**Proposição 20.3.** A imagem contínua de sequencialmente compactos é sequencialmente compacta.

*Demonstração.* Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua, onde  $X$  é sequencialmente compacta. Tome  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  uma seqüência em  $f[X]$ . Então existe uma seqüência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  tal que  $f(x_n) = y_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  é sequencialmente compacto, existe  $x \in X$  e  $I \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que  $(x_n : n \in I)$  converge para  $x$ . Segue da continuidade de  $f$  que  $(f(x_n) : n \in I) = (y_n : n \in I)$  converge para  $f(x)$ . Assim  $f[X]$  é sequencialmente compacto.  $\square$

**Teorema 20.4.** O produto enumerável de espaços sequencialmente compactos é sequencialmente compacto.

*Demonstração.* Seja  $(x_{j,n} : n \in \mathbb{N})$  uma seqüência em um espaço sequencialmente compacto  $X_j$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Temos que existe  $I_0$  infinito e  $a_0 \in X_0$  tal que  $(x_{0,n} : n \in I_0)$  converge para  $a_0$ . Suponhamos definidos  $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_k$  subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$  e  $a_j \in X_j$  para  $0 \leq j \leq k$  tal que  $(x_{j,n} : n \in I_j)$  converge para  $a_j$ . Como  $X_{k+1}$  é sequencialmente compacto, existe  $I_{k+1} \subseteq I_k$  infinito e  $a_{k+1} \in X_{k+1}$  tal que  $(x_{k+1,n} : n \in I_{k+1})$  converge para  $a_{k+1}$ .

Tome  $I$  tal que  $I \setminus I_j$  é finito para todo  $j \in \mathbb{N}$  (pseudo-intersecção). Então  $(x_{j,n} : n \in I \cap I_j)$  converge para  $a_j$  por ser subseqüência de  $(x_{j,n} : n \in I_j)$ . Como  $I$  difere de  $I \cap I_j$  apenas numa quantidade finita de pontos, segue que  $(x_{j,n} : n \in I)$  converge para  $a_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Assim,  $((x_{j,n} : j \in \mathbb{N}) : n \in \mathbb{N})$  converge para  $(a_n : j \in \mathbb{N})$  (pois todas as projeções convergem).  $\square$

*Já fizemos o argumento anteriormente para encontrar uma pseudo-intersecção (sem chamar de pseudo-intersecção). No caso, basta tomar indutivamente  $(i_j : j \in \mathbb{N})$  crescente tal que  $i_j \in I_j$  e tomar  $I = \{i_j : j \in \mathbb{N}\}$ . Temos que  $I \setminus I_m \subseteq \{i_0, \dots, i_{m-1}\}$ .*

**Corolário 20.5.** O produto enumerável de  $[0, 1]$ 's é sequencialmente compacto.

**Exemplo 20.6.**  $\{0, 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$  não é sequencialmente compacto com  $\{0, 1\}$  com a topologia discreta.

*Demonstração.* Para cada  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  seja  $x_{A,n} = 0$  se  $n \notin A$  e  $x_{A,n} = 1$  se  $n \in A$ . Para cada  $I \subseteq \mathbb{N}$  infinito, tome  $A \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $A \cap I$  e  $I \setminus A$  é infinito. Então  $\{n \in I : x_{A,n} = 0\} \supseteq I \setminus A$  e  $\{n \in I : x_{A,n} = 1\} \supseteq I \cap A$ . Assim,  $(x_{A,n} : n \in I)$  não é uma sequência convergente. Portanto, para qualquer  $I \subseteq \mathbb{N}$  infinito, temos que  $((x_{A,n} : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})) : n \in I)$  não converge. Portanto  $\{0, 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$  não é sequencialmente compacto.  $\square$

**Corolário 20.7.** Todo produto de  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  (ou mais) espaços  $T_1$  com pelo menos dois pontos não é sequencialmente compacto.

*Demonstração.* Tal espaço contém uma cópia fechada de  $\{0, 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ . Como sequencialmente compacto é preservado por fechados, essa cópia não sequencialmente compacta mostra que o espaço produto não é sequencialmente compacto.  $\square$

**Corolário 20.8.** Compacidade não implica sequencialmente compacto.

**Exemplo 20.9.** Um espaço sequencialmente compacto que não é compacto.

Seja  $I$  não enumerável e  $\{0, 1\}$  com a topologia discreta. Seja  $Y = \{(x_i : i \in I) \in \{0, 1\}^I : \{i \in I : x_i \neq 0\} \text{ é enumerável}\}$ . Então  $Y$  denso em  $\{0, 1\}^I$ , pois para cada aberto básico de  $\prod_{j \in J} U_j \times \{0, 1\}^{I \setminus J}$  podemos escolher  $x_j \in U_j$  para cada  $j \in J$  e  $x_i = 0$  para cada  $i \in I \setminus J$ . Assim,  $(x_i : i \in I)$  é um ponto em  $Y \cap \prod_{j \in J} U_j \times \{0, 1\}^{I \setminus J}$ . Como  $\{0, 1\}^I$  é Hausdorff, um conjunto compacto de  $\{0, 1\}^I$  deve ser fechado. Como  $Y$  é denso em  $\{0, 1\}^I$  e não é  $\{0, 1\}^I$ , segue que  $Y$  não é compacto.

Vamos agora mostrar que  $Y$  é sequencialmente compacto. Seja  $((y_{i,n} : i \in I) : n \in \mathbb{N})$  uma sequência em  $Y$ . Então para cada  $n$ , existe  $J_n$  enumerável tal que  $\{i \in I : y_{i,n} \neq 0\} = J_n$  (pois  $(y_{i,n} : i \in I) \in Y$ ). Então  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$  é enumerável. Então  $((y_{i,n} : i \in J) : n \in \mathbb{N}) \in \{0, 1\}^J$  e  $\{0, 1\}^J$  é sequencialmente compacto. Assim, existe  $B$  tal que  $((y_{i,n} : i \in J) : n \in B)$  converge para  $(a_i : i \in J)$  em  $\{0, 1\}^J$ . Como  $(y_{i,n} : n \in B)$  é constante para cada  $i \in I \setminus J$ , segue que tomando  $a_i = 0$  para cada  $i \in I \setminus J$ . Então teremos que  $(y_{i,n} : n \in B)$  converge para  $a_i$  para cada  $i \in I$ . Assim,  $((y_{i,n} : i \in I) : n \in B)$  converge para  $(a_i : i \in I)$ .

## 20.1.2 Enumeravelmente compacto.

**Definição 20.10.** Um espaço é enumeravelmente compacto se toda cobertura enumerável possui subcobertura finita.

**Contra-indicações.** Pela definição, todo espaço compacto é enumeravelmente compacto. Lembramos que no caso de espaços compactos, podemos usar cobertura abertas de uma base. No caso de enumeravelmente compacto, isto não pode ser feito, pois ao trocar os abertos de uma cobertura arbitrária por uma por abertos da base, podemos deixar de ter uma cobertura enumerável.

**Proposição 20.11.** Um subespaço  $F$  de  $X$  é enumeravelmente compacto se e somente se toda família enumerável de abertos de  $X$  cuja união contém  $F$  possui uma subfamília finita cuja união contém  $F$ .

*Demonstração.* A prova é a mesma de compacidade, pois basta associar a cada aberto do subespaço um único aberto do espaço. Assim, para cada cobertura enumerável, temos uma família enumerável de abertos de  $X$ .  $\square$

**Proposição 20.12.** Se  $X$  é enumeravelmente compacto e  $F \subseteq X$  é fechado então  $F$  é enumeravelmente compacto.

*Demonstração.* Dada uma família enumerável  $\mathcal{U}$  de abertos de  $X$  cuja união contém  $F$ , temos que  $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$  é cobertura aberta enumerável de  $X$ . Assim, a mesma prova para compacidade funciona.  $\square$

**Teorema 20.13.** A imagem contínua de um enumeravelmente compacto é enumeravelmente compacto.

*Demonstração.* A imagem inversa de uma família enumerável de abertos é uma família enumerável de abertos, Assim, a mesma prova para compacidade funciona.  $\square$

Pela contra-indicação dada acima, a prova utilizada para o produto de dois compactos não funciona para o produto de dois enumeravelmente compactos. *Ainda não temos as ferramentas para mostrar que compacidade enumerável não é uma propriedade produtiva.*

O produto de um espaço compacto e um enumeravelmente compacto é enumeravelmente compacto. *A prova será feita daqui a alguns capítulos. Para provar que o produto de um compacto e um enumeravelmente compacto, precisamos também introduzir  $p$ -limites (a rigor, podemos disfarçar e usar maximalidade para fazer, mas isto fica menos intuitivo).*

**Teorema 20.14.** Seja  $X$  um espaço topológico. São equivalentes:

- 1)  $X$  é enumeravelmente compacto.
  - 2) Toda família enumerável de fechados com PIF tem intersecção não-vazia.
  - 3) Toda sequência possui um ponto de acumulação.
  - 4) Todo subconjunto infinito enumerável possui um ponto de acumulação completo.
- Caso  $X$  seja  $T_1$  então também equivalente a
- 3') Todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação.

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)). Faremos pela contrapositiva. Suponha que exista  $\mathcal{F}$  uma família enumerável de fechados com PIF cuja intersecção é vazia. Então  $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$  é uma cobertura enumerável de abertos de  $X$ . Como  $\mathcal{F}$  tem PIF, segue que  $\mathcal{U}$  não tem subcobertura finita.

(2)  $\rightarrow$  3)). Suponhamos que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência em  $X$ . Seja  $F_m = \overline{\{x_n : n \geq m, n \in \mathbb{N}\}}$ . Então temos que  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência decrescente de fechados. Portanto, por 2), temos que  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$  é um conjunto não vazio. Seja  $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$ . Vamos mostrar que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  acumula em  $x$ . De fato, dado uma vizinhança  $U$  de  $x$  e  $N \in \mathbb{N}$ , temos que  $x \in F_m$  e portanto  $U \cap \{x_n : n \geq N, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ . Assim, existe  $k \geq N$  tal que  $x_k \in U$ . Logo  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$  é infinito e  $x$  é ponto de acumulação.

(3)  $\rightarrow$  4)). Seja  $A$  um conjunto infinito enumerável. Podemos então enumerar  $A$  como  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  de forma biunívoca. Assim, por hipótese a sequência possui um ponto de acumulação  $x$ . Ou seja, para todo  $U$  vizinhança de  $x$  temos que  $I = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$  é infinito. Então temos que  $A \cap U = \{x_n : n \in I\}$  é infinito e portanto  $A$  possui um ponto de acumulação completo.

(4)  $\rightarrow$  1)). Faremos pela contrapositiva. Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura enumerável aberta sem subcobertura finita. Seja  $(U_n : n \in \mathbb{N})$  uma enumeração de  $\mathcal{U}$ .

Vamos indutivamente encontrar  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  e  $(n_k : k \in \mathbb{N})$  tais que

- a)  $x_k \in \bigcup_{i < n_k} U_i$ .
- b)  $x_{k+1} \notin \bigcup_{i \leq n_k} U_i$ .
- c)  $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ .

Comece com  $x_0$  arbitrário e  $n_0$  tal que  $x_0 \in \bigcup_{i \leq n_0} U_i$ .

Suponhamos definidos  $x_i$  e  $n_i$  para  $i \leq k$ . Vamos definir  $x_{k+1}$  e  $n_{k+1}$ .

Por hipótese, temos que  $\mathcal{U}$  não tem subcobertura finita, assim  $X \setminus \bigcup_{i \leq n_k} U_i \neq \emptyset$ . Fixe  $x_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i \leq n_k} U_i \neq \emptyset$ . Tome agora o menor  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{k+1} \in U_m$  (tal  $m$  existe por que  $\mathcal{U}$  é cobertura). Como  $x_{k+1} \notin \bigcup_{i \leq n_k} U_i \neq \emptyset$ , segue que  $m > n_k$ . Defina  $n_{k+1} := m$ .

Seja  $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Devido as escolhas feitas em  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  a sequência é injetora e  $A$  é infinito. Vamos verificar que  $X$  não possui ponto de acumulação completo. De fato, se  $x \in X$  então existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in U_i$ . Tome  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $i < n_k$ . Então  $x \in \bigcup_{i \leq n_k} U_i$ . Para todo  $m > n_k$ , temos que  $x_m \notin \bigcup_{i \leq n_k} U_i$ . Assim,  $A \cap \bigcup_{i \leq n_k} U_i \subseteq \{x_i : i \leq n_k\}$ . Logo  $x$  não é ponto de acumulação completo de  $A$ .

Já vimos anteriormente que se  $X$  é  $T_1$  então 3) e 3') são equivalentes. □

### 20.1.3 Teorema de Baire para enumeravelmente compactos regulares.

**Teorema 20.15.** (Teorema de Baire para espaços regulares enumeravelmente compactos). Seja  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  uma família de abertos densos de  $X$ . Então  $\bigcap \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  é densa em  $X$ .

*Demonstração.* Como visto anteriormente, a intersecção finita de abertos densos é um aberto denso.

Seja  $W$  um aberto não vazio.

Vamos construir indutivamente uma família de abertos  $(V_n : n \in \mathbb{N})$  tal que  $W \supseteq \overline{V_0} \supseteq V_0 \supseteq \dots \supseteq V_k \supseteq \overline{V_{k+1}}$  tal que  $\overline{V_k} \subseteq \bigcap_{i < k} U_i$ .

Temos que  $U_0 \cap W$  é um aberto não vazio. Assim, podemos fixar um ponto  $x_0$  tal que  $x_0 \in U_0 \cap W$ . Usando a regularidade do espaço  $X$  existe uma vizinhança aberta  $V_0$  de  $x_0$  tal que  $\overline{V_0} \subseteq U_0 \cap W$ . Assumindo definidos até  $k$ , temos que  $V_k$  é um aberto não vazio. Como  $U_{k+1}$  é denso, temos que  $V_k \cap U_{k+1}$  é aberto não vazio.

Assim, podemos fixar um ponto  $x_{k+1}$  tal que  $x_{k+1} \in U_{k+1} \cap V_k$ . Usando a regularidade do espaço  $X$  existe uma vizinhança aberta  $V_{k+1}$  de  $x_{k+1}$  tal que  $\overline{V_{k+1}} \subseteq U_{k+1} \cap V_k$ .



Então, pela compacidade enumerável, uma família enumerável com PIF tem intersecção não vazia. Assim, temos  $\overline{V_{k+1}} \subseteq V_k \subseteq \bigcap_{i \leq k} U_i$  e  $\overline{V_{k+1}} \subseteq U_{k+1}$ . Assim, segue que  $\overline{V_{k+1}} \subseteq \bigcap_{i \leq k+1} U_i$  e a propriedade indutiva está satisfeita.

Então  $\emptyset \neq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{V_k} \subseteq W \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_n$ . Como  $W$  é aberto arbitrário, segue que  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_n$  é denso em  $X$ .  $\square$

**Corolário 20.16.** Se  $X$  é compacto Hausdorff, compacto e regular ou sequencialmente compacto e regular então a intersecção enumerável de abertos densos de  $X$  é densa em  $X$ .

### 20.1.4 Pseudocompacto.

**Definição 20.17.** Um espaço  $X$  é pseudocompacto se toda função contínua de  $X$  em  $\mathbb{R}$  é limitada.

Por falar de funções contínuas a efetividade da propriedade depende da regularidade completa e alguns autores já incluem esse axioma da separação na definição da propriedade.

**Proposição 20.18.** Todo espaço enumeravelmente compacto é pseudocompacto.

*Demonstração.* Se  $X$  é enumeravelmente compacto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f[X]$  é enumeravelmente compacto. Como  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico, segue que  $f[X]$  é um subespaço compacto de  $\mathbb{R}$ , assim  $f[X]$  é um subconjunto limitado.  $\square$

A imagem ser compacta, na verdade ocorre apenas por  $X$  ser pseudocompacto:

**Proposição 20.19.** Suponha que  $X$  é pseudocompacto. Então  $f[X]$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$  para toda função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Basta mostrarmos que  $f[X]$  é fechado. Suponha que  $y \in \overline{f[X]}$  e  $y \notin f[X]$ . Seja  $g(x) = \frac{1}{|y-f(x)|}$ . Como  $y \notin f[X]$ , segue que  $|y-f(x)| \neq 0$  para todo  $x \in X$ . Assim,  $g$  é contínua em  $X$ . Como  $y \in f[X]$ , temos que  $g$  é ilimitada. Assim,  $g$  testemunha que  $X$  não é pseudocompacto.  $\square$

**Teorema 20.20.** Suponha que  $X$  é  $T_4$  e pseudocompacto. Então  $X$  é enumeravelmente compacto.

*Demonstração.* Suponha que  $X$  é  $T_4$  e que  $X$  não é enumeravelmente compacto. Por ser  $T_1$ ,  $X$  possui um conjunto enumerável  $A$  sem pontos de acumulação. Como  $A$  não tem pontos de acumulação segue que seu complementar é aberto. Portanto  $A$  é fechado. Como os pontos de  $A$  não são pontos de acumulação de  $A$ , temos que todos os pontos de  $A$  são isolados em  $A$ . Agora, enumeremos  $A$  de forma biunívoca como  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  e defina  $f$  tal que  $f(x_n) = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $f$  é uma função contínua de  $A$  em  $\mathbb{R}$ . Pelo Teorema de Tietze, esta função pode ser estendida para  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Portanto,  $g$  é uma função contínua e ilimitada, e assim,  $X$  não é pseudocompacto.  $\square$

**Proposição 20.21.** A imagem contínua de um pseudocompacto é um pseudocompacto.

*Demonstração.* Seja  $h : X \rightarrow Y$  uma função contínua e  $f : h[X] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Então  $f \circ h : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e pela pseudocompacidade de  $X$ , segue que  $f \circ h[X]$  é um conjunto limitado. Mas,  $f \circ h[X] = f[h[X]]$ . Assim,  $f$  é limitada.  $\square$

Existem exemplos de um espaço enumeravelmente compacto cujo quadrado não é pseudocompacto. Ainda não desenvolvemos as ferramentas para exibir este exemplo.

**Teorema 20.22.** Se  $X$  é compacto e  $Y$  é pseudocompacto então  $X \times Y$  é pseudocompacto.

*Demonstração.* Como  $f$  contínua implica que  $|f|$  é contínua e  $f$  é limitada se e somente se  $|f|$  é superiormente limitada, basta provarmos que toda função não negativa é superiormente limitada.

Seja  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e não-negativa. Para cada  $y \in Y$ , temos que  $X \times \{y\}$  é compacto e  $f$  é contínua. Assim  $f[X \times \{y\}]$  é um compacto de  $\mathbb{R}$ . Seja  $g(y)$  o valor máximo de  $f[X \times \{y\}]$ . Então  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida.

Vamos verificar que  $g$  é uma função contínua. Seja  $\epsilon > 0$  e  $y \in Y$ . Para cada  $x \in X$ , pela continuidade de  $f$ , existe  $U_x$  vizinhança de  $x$  e  $V_x$  vizinhança de  $y$  tal que se  $(x', y') \in U_x \times V_x$  então  $|f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\epsilon}{4}$ .

Como  $\{U_x : x \in X\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ , segue que existe  $X_0 \subseteq X$  finito tal que  $\{U_x : x \in X_0\}$  cobre  $X$ . Seja  $V = \bigcap \{V_x : x \in X_0\}$ . O aberto  $V$  é uma vizinhança de  $y$ . Temos então que para cada  $y' \in V$ ,  $g(y') = \max\{\sup f[U_x \times \{y'\}] : x \in X_0\}$ .

Agora,  $f(x, y) - \frac{\epsilon}{4} < f(x', y') < f(x, y) + \frac{\epsilon}{4}$  para todo  $(x', y') \in U_x \times V$ .

Assim,  $f(x, y) - \frac{\epsilon}{4} \leq \sup f[U_x \times \{y'\}] \leq f(x, y) + \frac{\epsilon}{4}$  para cada  $x \in X_0$ .

Logo,  $\max\{f(x, y) : x \in X_0\} - \frac{\epsilon}{4} \leq \max\{\sup f[U_x \times \{y'\}] : x \in X_0\} \leq \max\{f(x, y) : x \in X_0\} + \frac{\epsilon}{4}$ . Portanto  $\max\{f(x, y) : x \in X_0\} - \frac{\epsilon}{4} \leq g(y') \leq \max\{f(x, y) : x \in X_0\} + \frac{\epsilon}{4}$  para todo  $y' \in V$ . Assim,  $|g(y) - g(y')| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ . Logo,  $g$  é contínua.

Como  $Y$  é pseudocompacto, segue que  $g$  é limitada. Logo, existe  $N$  inteiro positivo que limita  $g[X]$ . Para cada  $(x, y) \in X \times Y$  temos  $f(x, y) \leq g(y) \leq N$ . Assim  $f$  é limitada superiormente e  $X \times Y$  é pseudocompacto.  $\square$

**Teorema 20.23.** Seja  $X$  um espaço completamente regular.

São equivalentes:

1) O espaço  $X$  é pseudocompacto.

2) Para toda família decrescente de abertos não vazios  $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \dots$  a intersecção  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} \neq \emptyset$ .

3) Para toda família enumerável de abertos  $\mathcal{V}$  com PIF temos  $\bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\} \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)). Faremos pela contrapositiva. Suponha que existe uma família decrescente de abertos não-vazios  $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \dots$  tal que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \emptyset$ . Tome  $x_n \in U_n$  e seja  $f : X \rightarrow [0, 2^n]$  tal que  $f(x_n) = 2^n$  tal que  $f[X \setminus U_n] = \{0\}$ . Para cada  $x \in X$ , existe  $m_x \in \mathbb{N}$  tal que  $x \notin \overline{U_{m_x}}$ . Então  $W_x = X \setminus \overline{U_{m_x}}$  é uma vizinhança de  $x$ . Para todo  $n \geq m_x$ , temos que  $W_x = X \setminus \overline{U_{m_x}} \subseteq X \setminus U_{m_x} \subseteq X \setminus U_n$ . Assim,  $f_n[W_x] \subseteq f_n[X \setminus U_n] = \{0\}$ . Portanto  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n|_{W_x} = \sum_{n=0}^{m_x} f_n|_{W_x}$ , assim  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  está bem definida para cada ponto de  $W_x$ . Como  $x$  arbitrário, segue que  $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  está bem definida. Vamos checar que  $f$  é contínua.

Como  $\sum_{n=0}^{m_x} f_n$  é uma soma finita de funções contínuas é uma função contínua e em particular é uma função contínua em  $W_x$ . Logo  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n|_{W_x}$  é contínua no aberto  $W_x$ . Como  $W_x$  é aberto contendo  $x$ , a função é contínua no ponto  $x$  em  $X$ . Como  $x$  é arbitrário, temos que  $f$  é contínua em  $x$ . Claramente  $f(x_n) \geq 2^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , assim  $f$  é ilimitada.

(2)  $\rightarrow$  1)). Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua ilimitada. Seja  $U_n = f^{-1}[-\infty, -n] \cup [n, +\infty]$  e  $\overline{U_n} \subseteq f^{-1}[-\infty, -n] \cup [n, +\infty]$ . Então  $(U_n : n \in \mathbb{N})$  é uma família decrescente de abertos não vazios tais que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \emptyset$ . Portanto 2) não está satisfeita.

(3)  $\rightarrow$  2)). É imediata, pois a família em 2) tem PIF.

(2)  $\rightarrow$  3)). Enumere  $\mathcal{V}$  como  $(V_n : n \in \mathbb{N})$ . Seja  $U_n = \bigcap_{i \leq n} V_i$ . Como  $\mathcal{V}$  tem PIF, segue que  $(U_n : n \in \mathbb{N})$  é uma seqüência decrescente de abertos. Por 2, segue que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} \neq \emptyset$ . Como  $U_n \subseteq V_n$ , temos que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$ . Assim, condição 3) está satisfeita.  $\square$

**Corolário 20.24.** Se  $X$  é completamente regular e pseudocompacto então  $X$  satisfaz o teorema de Baire.

*Demonstração.* A prova usada para espaços enumeravelmente compactos, utiliza fechos de abertos, assim a prova serve também para pseudocompactos completamente regulares.  $\square$

Iremos retornar a pseudocompacidade mais tarde, quando definiremos outras propriedades equivalentes a pseudocompacidade para espaços  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

## Capítulo 21

# Compactificações de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ . Compacidade local.

### 21.1 Compactificações.

**Definição 21.1.** Dado um espaço  $X$   $T_{3\frac{1}{2}}$ , dizemos que  $cX$  é uma compactificação de  $X$  se  $cX$  é um compacto- $T_2$  e existe uma imersão  $c : X \rightarrow cX$  tal que  $c[X]$  é denso em  $cX$ .

**Exemplo 21.2.** Todo espaço métrico que admite uma métrica totalmente limitada possui uma compactificação métrica.

Todo espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  admite uma compactificação.

**Definição 21.3.** Dada duas compactificações  $c_1$  e  $c_2$  de  $X$ , dizemos que  $c_1X \leq c_2X$  se existe  $\hat{c}_1 : c_2X \rightarrow c_1X$  contínua tal que  $\hat{c}_1 \circ c_2(x) = c_1(x)$  para cada  $x \in X$ .

**Proposição 21.4.** Se  $c \leq d$  e  $d \leq c$  então  $cX$  e  $dX$  são homeomorfos.

*Demonstração.* Seja  $\hat{c} : dX \rightarrow cX$  tal que  $\hat{c}(d(x)) = c(x)$  e  $\hat{d} : cX \rightarrow dX$  tal que  $\hat{d}(c(x)) = d(x)$ . Temos que  $\hat{c}$  é sobrejetora pois  $\hat{c}[dX]$  é um compacto (logo fechado de  $cX$ , pois  $cX$  é Hausdorff) que contém  $c[X]$ , onde  $c[X]$  é denso em  $cX$ . Analogamente, temos que  $\hat{d}$  é sobrejetora.

Então temos que  $\hat{c} \circ \hat{d} : cX \rightarrow cX$  é uma função contínua tal que  $\hat{c} \circ \hat{d}(c(x)) = \hat{c} \circ d(x) = c(x)$ .

Assim,  $\hat{c} \circ \hat{d}(y) = y$  no subconjunto denso  $c[X]$ . Como  $cX$  é Hausdorff, segue que  $\hat{c} \circ \hat{d}(y) = y$  para todo  $y \in cX$ . Portanto  $\hat{c} \circ \hat{d}$  é a função identidade em  $cX$ . Analogamente, temos que  $\hat{d} \circ \hat{c}$  é a identidade em  $dX$ . Assim  $\hat{c}$  é injetora (como  $\hat{d}$  é sobrejetora, se  $\hat{c}$  não é injetora então  $\hat{c} \circ \hat{d}$  não é injetora). Portanto  $\hat{c}$  é uma função bijetora contínua e sua inversa é a função contínua  $\hat{d}$ . Assim,  $cX$  e  $dX$  são homeomorfos.  $\square$

**Proposição 21.5.** Sejam  $\mathcal{C} = \{c : X \rightarrow cX\}$  uma família de compactificações de  $X$ . Então existe uma compactificação  $bX$  tal que  $b \geq c$  para todo  $c \in \mathcal{C}$  e é a menor entre os majorantes de  $\mathcal{C}$ , isto é se  $d \geq c$  para todo  $c \in \mathcal{C}$  então  $d \geq b$ .

*Demonstração.* Considere  $\Delta\mathcal{C} : X \rightarrow \prod_{c \in \mathcal{C}} cX$ . Então  $\Delta\mathcal{C}$  é uma imersão contínua no compacto  $\prod_{c \in \mathcal{C}} cX$ . Seja  $bX := \overline{\Delta\mathcal{C}[X]}^{\prod_{c \in \mathcal{C}} cX}$  e defina  $b : X \rightarrow bX$  tal que  $b(x) = \Delta\mathcal{C}(x)$  para cada  $x \in X$  (a mesma função só que com contra domínio diferente). Note que  $b$  continua sendo imersão contínua em um compacto Hausdorff, e que  $b[X]$  é denso em  $bX$  por definição. Para cada  $c \in \mathcal{C}$ , considere  $\hat{c} = \pi_c|_{bX}$ . Vejamos que essa função atesta que  $b \geq c$ . De fato, é contínua em  $bX$ . Dados  $x \in X$ ,  $\hat{c}(b(x)) = \hat{c}(\Delta\mathcal{C}(x)) = \pi_c|_{bX}((c(x) : c \in \mathcal{C})) = \pi_c((c(x) : c \in \mathcal{C})) = c(x)$ . Assim,  $b \geq c$ .

Se  $d \geq c$  para cada  $c \in \mathcal{C}$ , seja  $\phi_c : dX \rightarrow cX$  contínua tal que  $\phi_c(d(x)) = c(x)$  para cada  $x \in X$ . Então  $\Delta\{\phi_c : c \in \mathcal{C}\} : dX \rightarrow \prod_{c \in \mathcal{C}} cX$  é contínua. Denote por  $\phi[\mathcal{C}]$  o conjunto  $\{\phi_c : c \in \mathcal{C}\}$ .

Vejamos que  $\Delta\phi[\mathcal{C}] \circ d(x) = b(x)$  para todo  $x \in X$ . De fato,  $\Delta\phi[\mathcal{C}] \circ d(x) = \Delta\phi[\mathcal{C}](d(x)) = (\phi_c(d(x)) : c \in \mathcal{C}) = (c(x) : c \in \mathcal{C}) = \Delta\mathcal{C}(x) = b(x)$ .

Assim,  $\Delta\phi[\mathcal{C}][d[X]] = b[X]$  e portanto  $\Delta\phi[\mathcal{C}][dX] = \Delta\phi[\mathcal{C}][\overline{d[X]}] \subseteq \overline{\Delta\phi[\mathcal{C}][d[X]]} = \overline{b[X]} = bX$ .

Desta forma,  $\hat{b} : dX \rightarrow bX$  dada por  $\hat{b} = \Delta\phi[\mathcal{C}]$  é bem-definida, contínua e tal que  $\hat{b}(d(x)) = b(x)$  para todo  $x \in X$ , atestando que  $d \geq b$ .  $\square$

**Teorema 21.6.** Seja  $X$  um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$ . Temos que  $cX$  é uma compactificação de  $X$  se e somente se  $cX$  é homeomorfo a  $\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}}$ , onde  $\mathcal{F}$  é uma família de funções contínuas de  $X$  em  $[0, 1]$  que separa pontos de fechados de  $X$  ( $X$  é  $T_1$ , então  $\mathcal{F}$  também separa pontos) e  $\Delta\mathcal{F} : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$  é definida por  $x \mapsto (f(x) : f \in \mathcal{F})$  para cada  $x \in X$ .

*Demonstração.* A recíproca segue do fato que  $\Delta\mathcal{F}$  é uma imersão num compacto e  $\Delta\mathcal{F}[X]$  é um cópia homeomorfa de  $X$  que é densa em  $\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}}$ .

Se  $cX$  é uma compactificação de  $X$  então seja  $\mathcal{G}$  o conjunto das funções de  $cX$  em  $[0, 1]$ . Como  $cX$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$ , segue que  $\Delta\mathcal{G} : cX \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{G}}$  é uma imersão.

Como  $\Delta\mathcal{G}[cX]$  é compacto e  $[0, 1]^{\mathcal{G}}$  é  $T_2$ , segue que  $\Delta\mathcal{G}[cX]$  é fechado em  $[0, 1]^{\mathcal{G}}$ .

Como  $c[X]$  é denso em  $cX$ , temos que  $\Delta\mathcal{G}[c[X]]$  é denso em  $\Delta\mathcal{G}[cX]$ . Assim  $\overline{\Delta\mathcal{G}[c[X]]}^{[0,1]^{\mathcal{G}}} = \Delta\mathcal{G}[cX]$ ,

Assim  $cX$  é homeomorfo a  $\overline{\Delta\mathcal{G}[c[X]]}^{[0,1]^{\mathcal{G}}}$ .

Seja  $\mathcal{F} = \{g \circ c : g \in \mathcal{G}\}$ . Então temos que  $\mathcal{F}$  separa pontos de fechados de  $X$  e  $\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}} = \Delta\mathcal{G}[cX]$ .  $\square$

Deste modo, toda compactificação de  $X$  pode ser associada a uma família de funções contínuas de  $X$  em  $[0, 1]$  que separam pontos de fechados.

**Teorema 21.7.** Se  $X$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$  então existe uma compactificação  $\beta X$  tal que  $\beta \geq c$  para toda compactificação  $cX$  de  $X$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F}$  todas as funções contínuas de  $X$  em  $[0, 1]$ . Se  $cX$  é uma compactificação de  $X$ , podemos assumir que  $cX$  é um subespaço de  $[0, 1]^{\mathcal{F}'}$ , onde  $cX = \overline{\Delta\mathcal{F}'[X]}^{[0,1]^{\mathcal{F}'}}$ . Assim, tome o conjunto das compactificações  $cX$  tal que existe  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}'$  separa pontos de fechados de  $X$ .

Então este conjunto possui um elemento maior ou igual a todos eles que chamaremos de  $\beta X$ . Por termos listado homeomorfos a todas as compactificações de  $X$ , podemos ver que  $\beta X$  é homeomorfo à compactificação associada a  $\mathcal{F}$ , pois dada uma compactificação associada a  $\mathcal{F}'$ , a restrição da projeção de  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$  a  $[0, 1]^{\mathcal{F}'}$  será a sobrejeção do compacto associada a  $\mathcal{F}$  ao compacto associado a  $\mathcal{F}'$ .  $\square$

**Definição 21.8.** Dado um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$ ,  $\beta X$  é chamado de Compactificação de Stone-Čech de  $X$ .

**Teorema 21.9.** Seja  $cX$  uma compactificação de  $X$ . Então são equivalentes:

- 1)  $cX$  é  $\beta X$ , a compactificação de Stone-Čech.
- 2) para toda  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua, existe  $\hat{f} : cX \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\hat{f} \circ c(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .
- 3) para toda  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada, existe  $\hat{f} : cX \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\hat{f} \circ c(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .
- 4) para todo compacto Hausdorff  $K$  e toda  $f : X \rightarrow K$  contínua, existe  $\hat{f} : cX \rightarrow K$  tal que  $\hat{f} \circ c(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

*Demonstração.* Já vimos que 1) e 2) são equivalentes.

De 3) para 2) basta notar que a extensão encontrada em 3) é tal que  $\hat{f}[cX] = \overline{f[c[X]]} \subseteq [0, 1]$ .

De 2) para 3), dada uma função contínua e limitada, tome  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $f[c[X]] \subseteq [a, b]$ . Tome  $\phi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  e aplique 2) na função  $\phi \circ f$  para encontrar uma extensão  $g : cX \rightarrow [0, 1]$ . A extensão procurada é  $\phi^{-1} \circ g : cX \rightarrow [a, b]$  (o argumento é similar ao que já foi feito anteriormente).

Assim, 1), 2) e 3) são equivalentes. Claramente, 4) implica 2). Então basta provarmos que 2) implica 4). O argumento é similar ao que usamos para provar que toda compactificação de  $X$  é homeomorfa a um subespaço fechado de um produto de intervalos.

Seja  $Z = f[X] \subseteq K$ . Então  $\overline{Z}^K$  é um compacto que pode ser imerso em  $[0, 1]^{\mathcal{G}}$  usando  $\Delta\mathcal{G}$ , onde  $\mathcal{G}$  são todas as funções contínuas de  $\overline{Z}^K$  em  $[0, 1]$  (O compacto  $\overline{Z}^K$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$ ).

Temos por hipótese que  $g \circ f : X \rightarrow [0, 1]$  pode ser estendido para  $\phi_g : cX \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\phi_g(c(x)) = g \circ f(x)$  para todo  $x \in X$ .

Defina  $\Phi : cX \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{G}}$  tal que  $\Phi(y) = (\phi_g(y) : g \in \mathcal{G})$ . Temos que  $\Phi$  é uma função contínua. Vamos verificar que  $\Phi[cX] = \Delta\mathcal{G}[\overline{Z}^K]$ . De fato  $\Phi(c(x)) = (\phi_g(c(x)) : g \in \mathcal{G}) = (g \circ f(x) : g \in \mathcal{G}) = \Delta\mathcal{G}(f(x))$ .

Portanto  $\Phi[c[X]] = \Delta\mathcal{G}[f[X]]$ . Pela compacidade de  $cX$  e  $\overline{Z}^K$  e do fato que  $c[X]$  é denso em  $cX$  e  $f[X] = Z$  é denso em  $\overline{Z}^K$  segue que  $\Phi[cX] = \Delta\mathcal{G}[\overline{Z}^K]$ .

Assim, podemos definir  $\hat{f} := (\Delta\mathcal{G})^{-1} \circ \Phi : cX \rightarrow \overline{Z}^K \subseteq Z$ . Vamos verificar que  $\hat{f} \circ c(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ . Dado  $x \in X$  temos que  $\hat{f}(c(x)) = (\Delta\mathcal{G})^{-1} \circ \Phi(c(x)) = (\Delta\mathcal{G})^{-1}((\phi_g(c(x)) : g \in \mathcal{G})) = (\Delta\mathcal{G})^{-1}((g \circ f(x) : g \in \mathcal{G})) = (\Delta\mathcal{G})^{-1}(\Delta\mathcal{G}(f(x))) = f(x)$ . Assim,  $\hat{f}$  é a extensão procurada em 4).  $\square$

Iremos depois usar  $\beta\omega$  (o compactificado de Stone-Čech do conjunto discreto infinito enumerável) para produzir contra-exemplos.

## 21.2 Localmente compacto.

### 21.2.1 Definição. Subespaços e produtos de localmente compactos.

**Definição 21.10.** Dizemos que um espaço  $X$  é localmente compacto se todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças compactas. Ou seja, para todo  $x$  e toda vizinhança  $U$  de  $x$  existe  $V$  vizinhança compacta tal que  $x \in V \subseteq U$ .

Note que, como não estamos assumindo axiomas de separação, uma vizinhança compacta não precisar ser um fechado.

**Exemplo 21.11.** Seja  $X$  um conjunto infinito com a topologia co-finita. Então dado um ponto  $x$ , todas as vizinhanças são compactas, mas as vizinhanças de  $x$  distintas de  $X$  não são conjuntos fechados.

**Teorema 21.12.** Se  $X$  é compacto regular e  $U$  é um aberto de  $X$  então  $U$  é subespaço localmente compacto.

*Demonstração.* Seja  $x \in U$ . Tome  $W$  uma vizinhança de  $x$  em  $U$ . Como  $U$  é aberto em  $X$ , segue que  $W$  é aberto em  $X$ . Assim, pela regularidade, existe  $V$  aberto em  $X$  tal que  $x \in V \subseteq \overline{V}^X \subseteq W$ . Como  $\overline{V}^X \subseteq W \subseteq U$  segue que  $\overline{V}^X = \overline{V}^U$ .

O conjunto  $\overline{V}^X$  é fechado em  $X$  portanto é um compacto. Logo  $x$  possui uma vizinhança compacta contida em  $W$ .  $\square$

**Corolário 21.13.** Se  $X$  é compacto Hausdorff e  $U$  é um aberto de  $X$  então  $U$  é subespaço localmente compacto.

*Demonstração.* Compactos Hausdorff são regulares.  $\square$

**Corolário 21.14.** Se  $X$  é um compacto regular,  $F$  é um fechado de  $X$  e  $U$  um aberto de  $X$  com  $U \cap F \neq \emptyset$  então  $U \cap F$  é localmente compacto.

*Demonstração.* Como  $F$  é fechado em  $X$ , temos que  $F$  é um espaço compacto. A regularidade é hereditária, portanto  $F$  é regular. Temos que  $F \cap U$  é um subespaço aberto do compacto regular  $F$ , assim  $F \cap U$  é um espaço localmente compacto.  $\square$

**Proposição 21.15.** Seja  $X$  Hausdorff. Então  $X$  é localmente compacto se e somente se para todo  $x \in X$ ,  $x$  possui uma vizinhança compacta.

*Demonstração.* A ida é imediata. Para a recíproca, tome  $x \in X$  e  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Seja  $V$  uma vizinhança compacta de  $x$  em  $X$ . Como  $X$  é  $T_2$  e  $V$  é compacta, segue que  $V$  é  $T_3$  e  $\overline{V} = V$ .

Temos que  $U \cap \text{Int}_X(V)$  é aberto em  $X$ . Como  $U \cap \text{Int}_X(V) = U \cap \text{Int}_X(V) \cap V$ , segue que  $U \cap \text{Int}_X(V)$  é uma vizinhança de  $x$  em  $V$ . Assim, existe  $O$  aberto em  $V$  tal que  $x \in O \subseteq \overline{O}^V \subseteq U \cap \text{Int}_X(V)$ . Como  $O$  é aberto em  $V$ , existe  $W$  aberto em  $X$  tal que  $O = W \cap V$ . Como  $O \subseteq \text{Int}_X(V)$ , segue que  $O = W \cap V = W \cap V \cap \text{Int}_X(V) = W \cap \text{Int}_X(V)$  e o último termo é intersecção de dois abertos de  $X$ . Assim,  $O$  é aberto em  $X$ . Finalmente, como  $O \subseteq V$ , segue que  $\overline{O}^X \subseteq \overline{V}^X = V$ . Assim,  $\overline{O}^V = \overline{O}^X$  é um compacto. Portanto  $\overline{O}^V$  é uma vizinhança compacta de  $x$  contida em  $U$ . Logo,  $X$  é localmente compacto.  $\square$

**Corolário 21.16.** Se  $X$  é Hausdorff e localmente compacta então  $X$  é  $T_3$ .

**Teorema 21.17.** Um produto de espaços  $\prod_{i \in I} X_i$  é localmente compacto se e somente se  $X_i$  é localmente compacto para todo  $i \in I$  e  $\{i \in I : X_i \text{ não é compacto}\}$  é um subconjunto finito de  $I$ .

*Demonstração.* (Ida). Dado um ponto  $x = (x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$  e uma vizinhança compacta  $V$  de  $x$ . Tome um aberto básico  $U := \prod_{i \in I} U_i \subseteq V$  contendo  $x$ . Seja  $J = \{i \in I : U_i \neq X_i\}$ . Então  $J$  é finito. Então para todo  $i \in I \setminus J$  temos que  $X_i = \pi_i[U] \subseteq \pi_i[V]$  é compacto.

Fixe  $j \in I$ . Vamos verificar que  $X_j$  é localmente compacta. Seja  $x_j \in X_j$  e tome  $U_j$  uma vizinhança aberta de  $x_j$  em  $X_j$ . Para cada  $i \neq j$  fixe um ponto  $x_i \in X_i$  arbitrário. Assim,  $(x_i : i \in I) \in U_j \times \prod_{i \neq j} X_i$ . Como  $\prod_{i \in I} X_i$  é localmente compacto, existe uma vizinhança compacta  $V$  de  $(x_i : i \in I)$  tal que  $V \subseteq U_j \times \prod_{i \neq j} X_i$ . Como  $\pi_j$  é uma função aberta, segue que  $\pi_j[V]$  é uma vizinhança de  $x_j$ . Como  $V$  é compacta, segue então que  $\pi_j[V]$  é uma vizinhança compacta de  $x_j$ . Além disso,  $\pi_j[V] \subseteq \pi_j[U_j \times \prod_{i \neq j} X_i] = U_j$ . Assim,  $X_j$  é localmente compacta.

(Volta). Seja  $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$  e  $V$  uma vizinhança de  $(x_i : i \in I)$  em  $\prod_{i \in I} X_i$ . Então  $V$  contém uma vizinhança básica  $U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$  tal que  $(x_i : i \in I) \in U \subseteq V$ , em que  $J \subseteq I$  é finito e tal que  $\{i \in I : X_i \text{ não é compacto}\} \subseteq J$ . Como  $X_j$  é localmente compacto, existe  $W_j$  vizinhança compacta de  $x_j$  tal que  $W_j \subseteq U_j$ . Então  $W := \prod_{j \in J} W_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$  é uma vizinhança de  $(x_i : i \in I)$  contida em  $U$  (pois  $W_i \subseteq U_i$  para cada  $i \in I$ ). Além disso,  $W$  é um produto de compactos, portanto é um conjunto compacto. Assim,  $W$  é uma vizinhança compacta de  $(x_i : i \in I)$  contida em  $V$ . Assim  $\prod_{i \in I} X_i$  é um espaço localmente compacto.  $\square$

### 21.2.2 Compactificação por um ponto.

**Teorema 21.18.** Seja  $X$  um subespaço denso de um compacto Hausdorff  $Y$ . Então  $X$  é localmente compacto se e somente se  $X$  é aberto.

*Demonstração.* A volta já foi vista e não é necessário ser denso.

Seja  $x \in X$ . Por hipótese, existe uma vizinhança compacta  $V$  de  $x$  em  $X$ . Seja  $W$  uma vizinhança aberta de  $x$  em  $Y$  tal que  $W \cap X \subseteq V$ . Então temos que  $W \subseteq \overline{W}^Y = \overline{W} \cap \overline{X}^Y \subseteq \overline{V}^Y = V \subseteq X$ , pois  $V$  é fechado em  $Y$  por ser um subespaço compacto de um espaço Hausdorff. Assim,  $X$  é aberto em  $Y$ .  $\square$

**Exemplo 21.19.** (A compactificação de um ponto de Alexandroff). Seja  $X$  um espaço Hausdorff localmente compacto que não é compacto. Seja  $Y = X \cup \{\infty\}$ , onde  $\infty \notin X$ . Para cada  $x \in X$  seja  $\mathcal{V}_x$  uma base local de  $x$  em  $X$  (em particular  $X$  é aberto em  $Y$ ). Para o ponto  $\infty$ ,  $\mathcal{V}_\infty$  é a família dos conjuntos da forma  $Y \setminus F$ , onde  $F$  é compacto em  $X$ .

Vamos verificar que  $\{\mathcal{V}_y : y \in Y\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia em  $Y$ .

De fato, se  $BL1$ ) e  $BL2$ ) para todo  $x \in X$  por serem as vizinhanças de  $x$  em  $X$ . A condição  $BL1$ ) está satisfeita para  $\infty$  pela definição e  $BL2$ ) segue do fato que a união de dois compactos é um compacto.

Para  $BL3$ ), se  $x \in X$  e  $U \in \mathcal{V}_x$  então para  $y \in X$  segue das vizinhanças de  $\mathcal{V}_y$  ser uma base local de  $y$  em  $X$ . Temos que  $y \neq \infty$  por que  $\infty \notin U$ .

Se  $x = \infty$ , então  $U = Y \setminus F$ , onde  $F$  é compacto em  $X$ . Assim,  $X$  é fechado em  $X$ , pois  $X$  é  $T_2$ . Assim,  $X \setminus F$  é aberto em  $X$ , logo existe  $V \in \mathcal{V}_y$  tal que  $V \subseteq X \setminus F \subseteq U$ .

Como  $X$  com a topologia original é um subespaço aberto de  $Y$ .

Vamos agora verificar que  $Y$  é  $T_2$ .

Se  $x, y \in X$ , então existem vizinhanças disjuntas de  $X$  pois  $X$  é  $T_2$  e aberto em  $Y$ . Se  $x \in X$  e  $y = \infty$ , como  $X$  é localmente compacto, existe  $V$  vizinhança compacta de  $x$  em  $X$  tal que  $V \subseteq X$ . Como  $V$  é um compacto de  $X$ , segue que  $Y \setminus V$  é uma vizinhança de  $\infty$ . Como  $V$  e  $Y \setminus V$  são disjuntos, temos as testemunham para  $T_2$  também neste caso. Assim  $Y$  é  $T_2$ .

**Teorema 21.20.** Um espaço localmente compacto Hausdorff é  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

*Demonstração.*  $X$  é um subespaço de um compacto- $T_2$  e compacto- $T_2$  são  $T_{3\frac{1}{2}}$ . Como  $T_{3\frac{1}{2}}$  é uma propriedade hereditária, segue em particular que  $X$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$ .  $\square$

**Teorema 21.21.** Para espaços localmente Hausdorff que não é compacto, o compactificado de Alexandroff é a menor compactificação de  $X$ .

*Demonstração.* Dado  $cX$  uma compactificação de  $X$  considere  $f : cX \rightarrow X \cup \{\infty\}$  dada por  $f(c(x)) = x$  para todo  $x \in X$  e  $f(y) = \infty$  para todo  $y \in cX \setminus c[X]$ .

Claramente  $cX$  é uma função sobrejetora que fixa  $X$ . Falta verificarmos que  $f$  é contínua.

Basta mostrarmos que  $f^{-1}[U]$  é aberto para todo aberto que esteja nas vizinhanças fundamentais utilizadas para definir a topologia do compactificado de Alexandroff. Se  $U$  é um aberto em  $\mathcal{V}_x$  para  $x \in X$  então  $U \subseteq X$  e  $f^{-1}[U] = c[U]$  que é aberto em  $c[X]$ . Como  $c[X]$  é aberto em  $cX$ , segue que  $c[U]$  é aberto em  $cX$ . Se  $U$  é um elemento de  $\mathcal{V}_\infty$  então  $X \setminus U$  é um compacto de  $X$ . Assim  $f^{-1}[X \setminus U] = c[X \setminus U]$  que é compacto em  $cX$  e portanto um fechado de  $cX$  pela propriedade  $T_2$  em  $cX$ . Logo  $cX \setminus f^{-1}[X \setminus U]$  é um aberto de  $cX$ . Basta agora notar que  $f^{-1}[U] = f^{-1}[\{\infty\}] \cup f^{-1}[U \cap X] = (cX \setminus c[X]) \cup (c[X] \cap f^{-1}[U \cap X]) = (cX \setminus c[X]) \cup (c[X] \setminus f^{-1}[X \setminus U]) = cX \setminus f^{-1}[X \setminus U]$  (as últimas igualdades seguem de  $f^{-1}[X \setminus U] \cup f^{-1}[X \cap U] = c[X]$ ).  $\square$

**Teorema 21.22.** Um espaço localmente compacto e  $T_2$  satisfaz o teorema de Baire.

*Demonstração.* Se o espaço é compacto segue da compacidade. Se o espaço é localmente compacto e não compacto, pode-se fazer a mesma prova de compactos, ou simplesmente aplicar o teorema de Baire na compactificação por um ponto, usando que o subespaço localmente compacto é aberto denso na compactificação por um ponto.  $\square$

## Capítulo 22

# Famílias localmente finitas. Paracompacidade.

### 22.1 ‘Sem aglomeração’.

#### 22.1.1 Famílias localmente finitas.

Já vimos que é possível criar uma série de funções cuja soma é uma função contínua e ilimitada quando para cada ponto, existe um aberto em que a soma se torna uma soma finita (a maioria das funções restritas ao aberto dão 0). Assim, em torno dos pontos, não se percebe que estamos somando infinitas funções.

**Definição 22.1.** Denotamos por suporte de  $f$ ,  $\text{spte } f$ , conjunto  $\{x \in \text{dom } f : f(x) \neq 0\}$ .

Assim no exemplo que vimos anteriormente, os suportes das funções não se aglomeram, já que cada ponto apenas ‘enxerga’, dentro de alguma vizinhança, um número finito de suportes.

**Definição 22.2.** Seja  $\mathcal{C}$  uma família de conjuntos não vazios. Dizemos que  $\mathcal{C}$  é localmente finita se para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  tal que  $\{C \in \mathcal{C} : V \cap C \neq \emptyset\}$  é um conjunto finito.

A idéia é ter a finitude localmente. Podemos também pensar em ter uma condição de finitude no ponto.

**Definição 22.3.** Seja  $\mathcal{C}$  uma família de conjuntos não vazios. Dizemos que  $\mathcal{C}$  é ponto finita se para todo  $x \in X$  o conjunto  $\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$  é finito.

Note que se a família de suportes é ponto finita, então a soma em cada ponto vai estar definida, porém isso não seria suficiente para garantir continuidade.

**Teorema 22.4.** Seja  $\mathcal{C}$  uma família localmente finita. Então  $\overline{\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}} = \bigcup\{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\}$ .

*Demonstração.* Claramente  $C \subseteq \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}$ , assim  $\supseteq$  está satisfeita.

Para ver  $\subseteq$ , tome  $x \in \overline{\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}}$ . Seja  $W$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} : W \cap C \neq \emptyset\}$  é finita. Então para toda vizinhança  $U$  de  $x$ , temos que  $\emptyset \neq W \cap U \cap (\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}) = U \cap (\bigcup\{C \cap W : C \in \mathcal{C}\}) = U \cap (\bigcup\{C \cap W : C \in \mathcal{C}'\}) \subseteq U \cap (\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}'\})$ .

Portanto,  $x \in \overline{\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}'\}} = \bigcup\{\overline{C} : C \in \mathcal{C}'\} \subseteq \bigcup\{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\}$ . □

**Teorema 22.5.** Seja  $\mathcal{F}$  uma família de funções contínuas de  $X$  em  $\mathbb{R}$ . Se  $\{\text{spte } f : f \in \mathcal{F}\}$  é localmente finita então  $\sum_{f \in \mathcal{F}} f$ ,  $\min_{f \in \mathcal{F}} f$  e  $\max_{f \in \mathcal{F}} f$  estão bem definidas e são contínuas.

*Demonstração.* Como  $\{\text{spte } f : f \in \mathcal{F}\}$  é localmente finita, ela é também ponto finita. Assim as funções estão bem definidas. Para verificar a continuidade, para cada  $x \in X$  tome  $W$  vizinhança aberta tal que  $\mathcal{F}' = \{f \in \mathcal{F} : \text{spte } f \cap W \neq \emptyset\}$  é finito.

Então dentro de  $W$ ,  $\sum_{f \in \mathcal{F}} f|_W = \sum_{f \in \mathcal{F}'} f|_W$ ,  $\min_{f \in \mathcal{F}} f|_W = \min_{f \in \mathcal{F}'} f|_W$  e  $\max_{f \in \mathcal{F}} f|_W = \max_{f \in \mathcal{F}'} f|_W$ . As funções à direita na igualdade (sem restringir a  $W$ ) são contínuas em  $X$  pois  $\mathcal{F}'$  é finito e portanto são contínuas em  $W$ . As funções à esquerda são contínuas em  $x$  em  $W$  e como  $W$  é aberto em  $X$  segue que as funções à esquerda (sem restringir a  $W$ ) são contínuas em  $x$  em  $X$ . Como  $x \in X$  é arbitrário, as funções  $\sum_{f \in \mathcal{F}} f$ ,  $\min_{f \in \mathcal{F}} f$  e  $\max_{f \in \mathcal{F}} f$  são contínuas em  $X$ . □



### 22.1.2 Pseudocompacidade e famílias localmente finitas.

**Teorema 22.6.** Seja  $X$  um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$ . São equivalentes:

- 1)  $X$  é pseudocompacto.
- 2) Toda família localmente finita de abertos não vazios de  $X$  é finita.
- 3) Toda cobertura aberta localmente finita de  $X$  consistindo de abertos não vazios é finita.
- 4) Toda cobertura aberta localmente finita de  $X$  possui uma subcobertura finita.

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)). Vamos fazer pela contrapositiva. Suponha que exista uma família localmente finita de  $X$  consistindo de abertos não vazios que é infinita. Enumere um subconjunto enumerável infinito dessa família como  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Usando que  $X$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$ , tome  $x_n \in U_n$  e fixe uma função  $f_n : X \rightarrow [0, 2^n]$  contínua tal que  $f(x_n) = 2^n$  e  $f[X \setminus U_n] = \{0\}$ . Assim,  $f_n \subseteq U_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Temos então que  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  é localmente finita. Assim  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  é uma função contínua e ilimitada. Assim,  $X$  não é pseudocompacto.

(2)  $\rightarrow$  3)). Uma cobertura localmente finita é em particular uma família localmente finita, portanto é finita.

(3)  $\rightarrow$  4)). Uma cobertura localmente finita por 3) é finita, portanto é uma subcobertura finita dela mesma.

(4)  $\rightarrow$  1)). Faremos pela contrapositiva. Suponhamos que  $f$  é uma função contínua e ilimitada. Seja  $\mathcal{U} = \{f^{-1}[n, n + \frac{3}{2}] \neq \emptyset : n \in \mathbb{Z}\}$ . Como  $\{[n, n + \frac{3}{2}] : n \in \mathbb{Z}\}$  cobre  $\mathbb{R}$ , temos que  $\mathcal{U}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Para ver que  $\mathcal{U}$  é localmente finita, fixe  $x \in X$ . Então tome  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $x \in f^{-1}[n, n + \frac{3}{2}]$ . Então  $f^{-1}[n, n + \frac{3}{2}] \cap f^{-1}[m, m + \frac{3}{2}] = \emptyset$  se  $[n, n + \frac{3}{2}] \cap [m, m + \frac{3}{2}] = \emptyset$ . Assim  $f^{-1}[n, n + \frac{3}{2}] \cap f^{-1}[m, m + \frac{3}{2}] \neq \emptyset$  para no máximo  $m \in \{n - 1, n, n + 1\}$ . Assim,  $\mathcal{U}$  é localmente finita. A imagem de um número finito de elementos de  $\mathcal{U}$  é limitada. Assim,  $\mathcal{U}$  não possui subcobertura finita.  $\square$

## 22.2 Paracompacidade.

**Definição 22.7.** Dada uma cobertura  $\mathcal{C}$  (de qualquer tipo de conjuntos) dizemos que  $\mathcal{D}$  é um refinamento de  $\mathcal{C}$  se  $\mathcal{D}$  é uma cobertura e para cada  $D \in \mathcal{D}$ , existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $D \subseteq C$ . Assim, os elementos de  $\mathcal{D}$  são menores que algum elemento de  $\mathcal{C}$ .

Claramente subcoberturas são refinamentos.

**Definição 22.8.** Um espaço é paracompacto se toda cobertura aberta possui um refinamento aberto localmente finito.

Claramente todo espaço compacto é paracompacto.

**Teorema 22.9.** Um espaço fechado de um paracompacto é paracompacto.

*Demonstração.* Seja  $F$  um subconjunto fechado de um espaço paracompacto  $X$ . Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $F$ . Para cada  $U \in \mathcal{U}$ , fixe  $W_U$  aberto em tal que  $W_U \cap F = U$ . Então  $\mathcal{W} = \{X \setminus F\} \cup \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Seja  $\mathcal{V}$  um refinamento aberto localmente finito de  $\mathcal{W}$ . Considere  $\mathcal{V}_F = \{V \cap F : V \in \mathcal{V}, V \cap F \neq \emptyset\}$ .

Afirmamos que  $\mathcal{V}_F$  é um refinamento aberto de  $\mathcal{U}$ . Claramente todos os elementos  $V \in \mathcal{V}_F$  são abertos em  $F$ . Se  $x \in F$  existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $x \in V$ . Como  $x \in V \cap F$ , segue que  $V \cap F \neq \emptyset$ , logo  $V \cap F \in \mathcal{V}_F$ . Assim,  $\mathcal{V}_F$  recobre  $F$ .

Se  $V \cap F \in \mathcal{V}_F$  com  $V \in \mathcal{V}$  então existe  $W \in \mathcal{W}$  tal que  $V \subseteq W$  e  $V \cap F \neq \emptyset$ . Assim, temos que  $V \not\subseteq X \setminus F$ . Portanto, temos que  $V \subseteq W_U$  para algum  $U \in \mathcal{U}$ . Assim,  $V \cap F \subseteq W_U \cap F = U$ . Logo  $\mathcal{V}_F$  refina  $\mathcal{U}$ .

Falta verificar que  $\mathcal{V}_F$  é localmente finita. Para isto, seja  $x \in F$ . Como  $\mathcal{V}$  é localmente finita em  $X$ , existe  $O$  uma vizinhança aberta de  $x$  em  $X$  tal que  $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} : O \cap V \neq \emptyset\}$  é finito. Assim,  $\{V \cap F \in \mathcal{V}_F : (O \cap F) \cap (V \cap F) \neq \emptyset\} \subseteq \{V \cap F : V \in \mathcal{V}'\}$ . Portanto  $\{V \cap F \in \mathcal{V}_F : (O \cap F) \cap (V \cap F) \neq \emptyset\}$  é finito. Assim,  $O \cap F$  testemunha a finitude local em  $x$ .  $\square$

**Teorema 22.10.** Um espaço paracompacto Hausdorff é normal (logo  $T_4$ ).

*Demonstração.* Primeiro vamos verificar que  $X$  é regular. Seja  $x \in X$  e  $F$  um fechado tal que  $x \notin F$ . Usando a propriedade de Hausdorff, para cada  $y \in F$ , existe  $V_y$  vizinhança aberta de  $y$  tal que  $x \notin \overline{V_y}$ . Temos que  $\mathcal{V} = \{X \setminus F\} \cup \{V_y : y \in F\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Seja  $\mathcal{W}$  um refinamento aberto de  $\mathcal{V}$  e seja  $\mathcal{W}' = \{W \in \mathcal{W} : W \cap F \neq \emptyset\}$ . Como  $\mathcal{W}$  recobre  $X$ , pelo argumento visto anteriormente temos que  $O := \bigcup \mathcal{W}' \supseteq F$  e se  $W \in \mathcal{W}'$  então existe  $y \in Y$  tal que  $W \subseteq V_y$ . Assim,  $x \notin \overline{W}$  (já que  $x \notin \overline{V_y}$ ), para todo  $W \in \mathcal{W}'$ . Assim,  $x \notin \bigcup \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}'\} = \bigcup \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}'\} = \overline{O}$ . Portanto  $O$  testemunha a regularidade para  $x$  e  $F$ .

Dados  $F$  e  $G$  fechados disjuntos, podemos usar a regularidade para encontrar para cada  $x \in F$  um  $V_x$  vizinhança aberta de  $x$  tal que  $\overline{V_x} \cap G = \emptyset$ . Tome então a cobertura aberta  $\{V_x : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ . Podemos assim usar o mesmo argumento acima com refinamento aberto para encontrar um aberto  $O$  que contém  $F$  e tal que  $\overline{O} \cap G = \emptyset$ . O aberto  $O$  testemunha a normalidade para o par de fechados  $F$  e  $G$ .  $\square$

**Corolário 22.11.** Um espaço regular paracompacto é normal.

**Corolário 22.12.** Paracompacidade não é uma propriedade hereditária.

*Demonstração.* Já vimos que existem compactos Hausdorff que contém subespaços que não são normais. O resultado segue da observação que espaços compactos Hausdorff são paracompactos Hausdorff e espaços paracompactos Hausdorff são normais.  $\square$

**Teorema 22.13.** O produto de um compacto e um paracompacto é um paracompacto.

*Demonstração.* Note que o refinamento de um refinamento é um refinamento. Assim dada uma cobertura aberta, podemos refiná-la usando abertos básicos e então refinar esta cobertura de abertos básico para encontrar um refinamento localmente finito. Seja  $X$  compacto e  $Y$  paracompacto.

Seja  $\mathcal{W}$  uma cobertura de  $X \times Y$  por abertos básicos.

Para cada  $y \in Y$  temos que  $X \times \{y\}$  é compacto. Assim, existe uma família finita  $\mathcal{W}_y \subseteq \mathcal{W}$  tal que  $X \times \{y\} \subseteq \bigcup \mathcal{W}_y$ . Seja  $\mathcal{V}_y = \{V : \text{existe } U \text{ aberto de } X \text{ tal que } U \times V \in \mathcal{W}_y\}$  (é o conjunto das segundas coordenadas do par  $(U, V)$  tais que  $U \times V \in \mathcal{W}_y$ ). Então  $V_y := \bigcap \mathcal{V}_y$  é uma intersecção finita de abertos de  $Y$  e  $X \times V_y \subseteq \bigcup \mathcal{W}_y$ .

Então  $\{V_y : y \in Y\}$  é uma cobertura aberta de  $Y$  portanto existe um refinamento localmente finito  $\mathcal{O}$  de  $\{V_y : y \in Y\}$ .

Para cada  $O \in \mathcal{O}$ , existe  $y \in Y$  tal que  $O \subseteq V_y$ . Vamos fixar para cada  $O$  um  $y_O$  como acima.

Vamos considerar um "tubo" de altura  $O$  usando  $\mathcal{W}_{y_O}$ . Seja  $\mathcal{T}_O = \{(U \times V) \cap (X \times O) : U \times V \in \mathcal{W}_{y_O}\}$ . Claramente temos que  $X \times O \supseteq \bigcup \mathcal{T}_O = \bigcup \mathcal{W}_O \cap (X \times O) \supseteq (X \times V_{y_O}) \cap (X \times O) = X \times O$ . Note que como  $\mathcal{W}_y$  é finito,  $\mathcal{T}_O$  também é.

Como  $\mathcal{O}$  recobre  $Y$ , segue que  $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{T}_O$  recobre  $X \times Y$ .

Para ver que  $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{T}_O$  é um refinamento de  $\mathcal{W}$ , note que um elemento de  $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{T}_O$  é da forma  $U \times O = (U \times O) = (U \times V) \cap (X \times O)$  com  $U \times V \in \mathcal{W}_{y_O}$  para algum  $O \in \mathcal{O}$  e algum  $U \times V \in \mathcal{W}_{y_O}$ . Então segue que  $U \times O \subseteq U \times V_{y_O} \subseteq U \times V \in \mathcal{W}_{y_O} \subseteq \mathcal{W}$ . Assim, todo elemento de  $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{T}_O$  está contido em algum elemento de  $\mathcal{W}$  e é um refinamento.

Falta verificar que  $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{T}_O$  é localmente finito. Para cada  $(x, y) \in X \times Y$ , tome  $R$  vizinhança aberta de  $y$  tal que  $\mathcal{O}^* = \{O \in \mathcal{O} : O \cap R \neq \emptyset\}$  é um conjunto finito. Afirmamos que  $X \times R$  é uma vizinhança de  $(x, y)$  que testemunha a finitude local em  $(x, y)$ . De fato, se  $U' \times O' \in \bigcup_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{T}_O$  é tal que  $(U' \times O') \cap (X \times R) \neq \emptyset$  então  $O' \cap R \neq \emptyset$ . Assim,  $O' \in \mathcal{O}^*$ . Logo,  $U' \times O' \in \mathcal{T}_{O'}$ . Assim  $\{U' \times O' \in \bigcup_{O \in \mathcal{O}} \mathcal{T}_O : (X \times R) \cap (U' \times O') \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}^*} \mathcal{T}_O$  que é finito. Assim, provamos a finitude local em  $(x, y)$ .  $\square$

Antes de prosseguirmos com paracompacidade, iremos falar sobre a propriedade de Lindelöf.

## 22.3 A propriedade de Lindelöf.

### 22.3.1 Definição e propriedades básicas.

**Definição 22.14.** Um espaço  $X$  é Lindelöf se toda cobertura aberta possui uma subcobertura aberta enumerável.

Claramente todo espaço compacto é Lindelöf.

Os resultados a seguir são provados da mesma forma que para compactos:

**Teorema 22.15.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base de abertos. Um espaço  $X$  é Lindelöf se e somente se toda cobertura de abertos por elementos de  $\mathcal{B}$  possui uma subcobertura enumerável.

**Teorema 22.16.** Um espaço é Lindelöf se e somente se toda família de fechados com a propriedade da intersecção enumerável possui intersecção não vazia.

**Teorema 22.17.** Seja  $Y \subseteq X$  e  $\mathcal{B}$  uma base de abertos de  $X$ . Então  $Y$  é Lindelöf se e somente se para toda família de abertos  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $\bigcup \mathcal{U} \supseteq Y$  então existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  enumerável tal que  $\bigcup \mathcal{U}' \supseteq Y$ .

**Teorema 22.18.** O produto de um compacto e um Lindelöf é Lindelöf.

*Demonstração.* Basta mostrarmos que toda cobertura aberta por abertos básicos possui uma subcobertura enumerável. Seja  $X$  um espaço compacto e  $Y$  um espaço Lindelöf e  $\mathcal{W}$  uma cobertura por abertos básicos do produto.

Para cada  $y \in Y$  temos que  $X \times \{y\}$  é compacto. Assim, existe uma família finita  $\mathcal{W}_y \subseteq \mathcal{W}$  tal que  $X \times \{y\} \subseteq \bigcup \mathcal{W}_y$ . Seja  $\mathcal{V}_y = \{V : V \text{ é aberto de } Y, y \in V \text{ e existe } U \text{ aberto de } X \text{ tal que } U \times V \in \mathcal{W}_y\}$ . Então  $V_y := \bigcap \mathcal{V}_y$  é uma intersecção finita de abertos de  $Y$  e  $X \times V_y \subseteq \bigcup \mathcal{W}_y$ .

Então  $\{V_y : y \in Y\}$  é uma cobertura aberta de  $Y$  portanto existe  $Y'$  enumerável tal que  $Y \subseteq \bigcup \{V_y : y \in Y'\}$ .

Assim  $X \times Y \subseteq X \times \bigcup \{V_y : y \in Y'\} = \bigcup \{X \times V_y : y \in Y'\} \subseteq \bigcup_{y \in Y'} \bigcup \mathcal{W}_y = \bigcup \{ \mathcal{W}_y : y \in Y'\}$ . Assim  $\bigcup \{ \mathcal{W}_y : y \in Y'\}$  é uma subcobertura enumerável de  $\mathcal{W}$ . Como  $\mathcal{W}$  é uma cobertura arbitrária de elementos de abertos básicos, segue que  $X \times Y$  é Lindelöf.  $\square$

**Teorema 22.19.** Um espaço Lindelöf regular é normal.

*Demonstração.* Sejam  $F$  e  $G$  fechados disjuntos. Para cada  $x \in F$  tome  $V_x$  tal que  $\overline{V_x} \cap G = \emptyset$  e para cada  $y \in G$  seja  $W_y$  tal que  $\overline{W_y} \cap F = \emptyset$ .

Como  $F$  e  $G$  são Lindelöf, e  $\mathcal{V} = \{V_x : x \in F\}$  e  $\mathcal{W} = \{W_y : y \in G\}$  possuem uma subfamília enumerável  $\mathcal{V}'$  e  $\mathcal{W}'$  tais que  $F \subseteq \bigcup \mathcal{V}'$  e  $G = \bigcup \mathcal{W}'$  com  $\overline{V} \cap G = \emptyset$  para cada  $V \in \mathcal{V}'$  e  $\overline{W} \cap F = \emptyset$  para cada  $W \in \mathcal{W}'$ . Assim, pelo ‘shoe-lacing’, existem abertos disjuntos que contém  $F$  e  $G$ .  $\square$

### 22.3.2 Lindelöf e paracompacidade.

**Teorema 22.20.** Um espaço Lindelöf regular é paracompacto.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{B}$  o conjunto de todos os abertos de  $U$  de  $X$  tal que  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$ , onde cada  $n$  com  $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$ . Afirmamos que  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos de  $X$ . De fato, se  $x \in X$  e  $V$  é um aberto contendo  $x$  então existe  $U_0$  tal que  $x \in U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq V$ . Como o espaço é normal, podemos construir indutivamente  $U_n, n \geq 1$  tal que  $\overline{U_0} \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_2 \dots \subseteq V$ .

Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $X$  por elementos de  $\mathcal{B}$ . Pela propriedade de Lindelöf, podemos tomar uma subcobertura enumerável  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathcal{U}$ . Como  $U_n \in \mathcal{B}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  uma sequência  $U_{n,0} \subseteq \overline{U_{n,1}} \subseteq U_{n,2}$  tal que  $U_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{n,k} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{U_{n,k}}$ .

Vamos agora definir indutivamente  $V_0 = U_0$  e  $V_{n+1} = U_{n+1} \setminus \overline{U_{0,n} \cup U_{1,n} \cup \dots \cup U_{n-1,n} \cup U_{n,n}}$ . Claramente cada  $V_n$  é um aberto. Vamos verificar que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = X$ . Dado  $x \in X$ , seja  $n \in \mathbb{N}$  mínimo tal que  $x \in U_n$ . Se  $n = 0$  então  $x \in U_0 = V_0$ . Se  $n > 0$  então  $x \notin U_0 \cup \dots \cup U_{n-1} \supseteq \overline{U_{0,n-1} \cup U_{1,n-1} \cup \dots \cup U_{n-1,n-1}}$ . Assim,  $x \in V_n$ .

Para ver que  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  é localmente finita, seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in U_k$ . Por hipótese, existe  $m$  tal que  $x \in U_{k,m}$ . Seja  $n > \max\{k, m\}$ . Então temos que  $x \in U_{k,m} \subseteq U_{k,n-1}$ , pois  $m \leq n-1$ . Assim,  $U_{k,m} \subseteq \overline{U_{0,n-1} \cup U_{1,n-1} \cup \dots \cup U_{n-1,n-1}}$ . Logo,  $V_n \cap U_{k,m} = \emptyset$ . Portanto  $U_{k,m}$  testemunha a finitude local de  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  em  $x$ .  $\square$

**Exemplo 22.21.** A reta de Sorgenfrey é Lindelöf.

*Demonstração.* Seja  $X$  a reta de Sorgenfrey e  $\mathcal{B}$  a base de abertos da topologia de Sorgenfrey da forma  $[a, b[$  para  $a < b$  números reais.

Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura da reta de Sorgenfrey por elementos de  $\mathcal{B}$ . Seja  $\mathcal{V} = \{]a, b[: [a, b[ \in \mathcal{U}\}$ . Seja  $O = \bigcup \mathcal{V}$ . Como os elementos de  $\mathcal{V}$  são abertos na topologia de  $\mathbb{R}$ , segue que  $O$  é um aberto

de  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  possui base enumerável, segue que existe  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  enumerável tal que  $O = \bigcup \mathcal{V}'$ . Seja  $\mathcal{U}' = \{[a, b[ : a, b \in \mathcal{V}'\}$ .

Afirmamos que  $X \setminus O$  é enumerável. Suponhamos por contradição que  $X \setminus O$  é não enumerável. Para cada  $x \in X \setminus O$ , existe  $n_x$  natural positivo tal que  $[x, x + \frac{1}{n_x}[ \subseteq [x, y[$  para algum  $[x, y[ \in \mathcal{U}$ . Como os naturais são enumeráveis e estamos assumindo que  $X \setminus O$  é não enumerável, existe  $m$  natural e  $A \subseteq X \setminus O$  não enumerável tal que  $n_x = m$  para todo  $x \in A$ .

Como  $A$  é não enumerável, existe um intervalo fechado e limitado  $I$  de  $\mathbb{R}$  tal que  $A \cap I$  é não enumerável. Assim existe uma sequência estritamente crescente ou decrescente  $(a_n : n \in \mathbb{N})$  contida em  $A \cap I$  que converge para algum  $a \in I$ . Se a sequência é crescente, temos que existe  $n$  tal que  $a_n < a < a_n + \frac{1}{m}$ . Assim  $a_{n+1} \in ]a_n, a_n + \frac{1}{m}[ \subseteq O$ , contradizendo que  $a_{n+1} \in A \subseteq X \setminus O$ . Se a sequência é decrescente, temos que existe  $n$  tal que  $a < a_n < a + \frac{1}{m}$ . Assim,  $a < a_{n+1} < a_n < a_{n+1} + \frac{1}{m}$  e portanto  $a_n \in ]a_{n+1}, a_{n+1} + \frac{1}{m}[ \subseteq O$ , contradizendo que  $a_n \in A \subseteq X \setminus O$ .

Como  $X \setminus O$  é enumerável, podemos fixar  $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}$  enumerável tal que  $X \setminus O \subseteq \bigcup \mathcal{U}''$ . Como  $\mathcal{U}'$  cobre  $O$ , segue que  $\mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$  é uma subcobertura enumerável de  $\mathcal{U}$ .

Como  $\mathcal{U}$  é um cobertura arbitrária com elementos da base  $\mathcal{B}$ , segue que a reta de Sorgenfrey é Lindelöf.  $\square$

**Corolário 22.22.** Paracompacidade não é preservada por produtos.

*Demonstração.* Vimos que a reta de Sorgenfrey é Lindelöf e  $T_{3\frac{1}{2}}$ , portanto paracompacto. O quadrado da reta de Sorgenfrey não é normal. Assim o quadrado da reta de Sorgenfrey não pode ser paracompacto (paracompacto  $T_3$  são normais).  $\square$

## Capítulo 23

# Teorema de Stone. Partição da unidade.

### 23.1 Todo espaço pseudométrico é paracompacto.

#### 23.1.1 Discussão preliminar sobre o Teorema de Stone

**Definição 23.1.** Dizemos que uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  é discreta se para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $\{C \in \mathcal{C} : C \cap U \neq \emptyset\}$  tem no máximo um elemento.

Dizemos que uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  é  $\sigma$ -discreta se existe  $(\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N})$  tal que  $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ , onde  $\mathcal{C}_n$  é discreto para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 23.2.** (Teorema de Stone) Seja  $X$  um espaço pseudometrizable. Então toda cobertura aberta possui um refinamento aberto localmente finito e  $\sigma$ -discreto.

**Discussão preliminar.** Se revermos a prova de que Lindelöf regular é pseudocompacto, vemos que podemos ir removendo um pedaço fechado cujo interior cresce. Daí, de um aberto enumerado por  $n$  removemos um miolo fechado cada vez maior dos abertos indexados por índice menor que  $n$ . Como os índices menores do que  $n$  é um número finito, o fecho da união dos miolos é igual a união dos miolos fechados. Era importante que a união dos interiores dos miolos era o aberto todo para garantirmos localmente finito e aqui o argumento será similar. Porém o aberto utilizado vai ser modificado durante a construção, então precisamos que qualquer aberto possa ser escrito como uma reunião de miolos.

**Proposição 23.3.** Seja  $U$  um aberto de um espaço pseudométrico. Então  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$ .

*Demonstração.* Fixe uma métrica  $\rho$  que gera a topologia. Considere  $f(x) = \rho(x, X \setminus U)$  e tome  $U_n = f^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]$ . Então  $\overline{U_n} \subseteq f^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]$ . Como  $f(x) = 0$  se e somente se  $x \in \overline{X \setminus U} = X \setminus U$ , temos que  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ .  $\square$

Vamos dividir a demonstração em duas partes, o que deve simplificar um pouco a compreensão da ideia da construção. As duas partes lembram uma parte da prova de que Lindelöf regular é pseudocompacto. Vamos ao invés de usar um aberto, usar uma família discreta, note que isso garante que a união do fecho é o fecho da união como naquela demonstração. Isso será feito no lema abaixo.

A parte de encontrar uma família  $\sigma$ -discreta será feita como aparece usualmente nos livros de topologia geral (ver Figura 23.1). Só que deixamos de remover pedaços do aberto para que o refinamento se torne localmente finita. Na demonstração com uma cobertura enumerável, tínhamos apenas um aberto em cada nível então bastava remover uma parte fechada desse aberto que já estava coberta por um aberto num estágio anterior. Aqui podemos ter uma grande quantidade de abertos que precisamos tornar discreta, para isso, precisamos remover a intersecção. A ideia básica para eliminar a intersecção é remover um pedaço da intersecção de um dos dois abertos e deixar uma distância entre eles, com isto vamos deixando uma ‘bordinha’ dos abertos de fora, antes de eliminarmos o que sobrar da intersecção. Assim, garantiremos uma família discreta, mas que já não cobre o espaço. Como queremos uma cobertura, isto não pode ser feito em um único passo, vamos crescendo o aberto (aproximando cada vez mais do

bordo) e removendo a intersecção deixando a distância entre estes abertos cada vez menor, proporcional ao tamanho da bordinha removida.

Vamos sempre tentar preservar um pedaço do aberto com índice menor então o ponto na intersecção de abertos tende a ser removido do aberto de índice maior (ver Figura 23.2). Com isto, é importante que exista para cada  $x$  um índice mínimo  $\alpha$  para o qual  $x \in U_\alpha$ . Dado  $\alpha$ , chamaremos de  $J_\alpha$  um pedaço do ‘miolo’ que aparece pela ‘primeira vez’ em  $U_\alpha$  e estão suficientemente dentro de  $U_\alpha$  (ou seja suficientemente longe do bordo de  $U_\alpha$ ).

*Aqui você pode imaginar que há três zonas separadas por trincheiras dentro de  $U_\alpha$  e o invasor vem de  $U_\beta$  com  $\beta > \alpha$ . Quem está em  $J_\alpha$  pode avançar uma zona, que vem de fora (está em  $J_\beta$ ) pode no máximo avançar uma zona então há uma zona intermediária separando ambos.*

Isso será feito na próxima proposição.

### 23.1.2 A prova do Teorema de Stone.

**Lema 23.4.** *Seja  $X$  um espaço gerado por uma pseudométrica. Seja  $\mathcal{V}$  uma cobertura  $\sigma$ -discreta de abertos. Então existe um refinamento  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{V}$  que é  $\sigma$ -discreta e localmente finita.*

*Demonstração.* Escreva  $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ , onde cada  $\mathcal{V}_n$  é discreto. Seja  $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0$ . Para cada  $W \in \mathcal{W}_0$ , defina  $\{O[W, k] : k \geq 1\}$  uma família crescente de abertos tais que  $W = \bigcup_{k \geq 1} O[W, k] = \bigcup_{k \geq 1} \overline{O[W, k]}$ .

Defina  $\mathcal{W}_1 = \{V \setminus (\bigcup \{\overline{O[W, 1]} : W \in \mathcal{W}_0\}) : V \in \mathcal{V}_1\}$ . Como  $\mathcal{W}_0$  é discreto segue que  $\{\overline{O[W, 1]} : W \in \mathcal{W}_0\}$  é um fechado. Temos que  $\mathcal{W}_1$  é discreto, pois  $\mathcal{V}_1$  é discreto. Para cada  $W \in \mathcal{W}_1$ , defina  $\{O[W, k] : k \geq 1\}$  uma família crescente de abertos tais que  $W = \bigcup_{k \geq 2} O[W, k] = \bigcup_{k \geq 2} \overline{O[W, k]}$ .

Podemos prosseguir indutivamente e definir  $\mathcal{W}_j$  discreta e  $\{O[W, k] : k \geq j+1\}$  uma família crescente de abertos para cada  $W \in \mathcal{W}_j$  tais que

$$\mathcal{W}_j = \{V \setminus (\bigcup \{\overline{O[W, j]} : W \in \bigcup_{i \leq j} \mathcal{W}_i\}) : V \in \mathcal{V}_j\}$$
 é uma família discreta de abertos e

Defina

$W = \bigcup_{k \geq j+1} O[W, k] = \bigcup_{k \geq j+1} \overline{O[W, k]}$  para cada  $W \in \mathcal{W}_j$ . Como cada  $\mathcal{W}_i$  é discreto, segue que  $\bigcup_{i \leq n} \mathcal{W}_i$  é localmente finita, assim  $\{\overline{O[W, j]} : W \in \bigcup_{i \leq j} \mathcal{W}_i\}$  é uma família localmente finita (cada fechado está indexada por um elemento da família localmente finita que o contém). Temos então que  $\bigcup \{\overline{O[W, j]} : W \in \bigcup_{i \leq j} \mathcal{W}_i\}$  é um fechado.

Logo, os elementos de  $\mathcal{W}_n$  são abertos e como cada um deles está indexado por  $V \in \mathcal{V}_n$  que o contém então  $\mathcal{W}_n$  é discreto.

Para  $n$ , temos que  $\{O[W, k] : n\}$  já está definida para cada  $j < n$  e  $W \in \mathcal{W}_j$ .

$$\mathcal{W}_n = \{V \setminus (\bigcup \{\overline{O[W, n]} : W \in \bigcup_{i \leq n} \mathcal{W}_i\}) : V \in \mathcal{V}_n\}.$$

Para cada  $W \in \mathcal{W}_n$ , podemos fixar  $\{O[W, k] : k \geq n+1\}$  uma família crescente de abertos tais que  $W = \bigcup_{k \geq n+1} O[W, k] = \bigcup_{k \geq n+1} \overline{O[W, k]}$ .

Temos por indução que  $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$  é  $\sigma$ -discreta e cada elemento de  $\mathcal{W}$  está contida num elemento de  $\mathcal{V}$ . Falta verificarmos que  $\mathcal{W}$  é uma cobertura aberta e que é localmente finita.

Para verificar que é uma cobertura, tome  $x \in X$  e seja  $n \in \mathbb{N}$  mínimo tal que existe  $V \in \mathcal{V}_n$  com  $x \in V$ . Se  $n = 0$  então  $V \in \mathcal{W}_0$ . Se  $n > 0$  então  $x \in V \setminus (\bigcup \{\overline{O[W, n]} : W \in \bigcup_{i \leq n-1} \mathcal{W}_i\})$ , pois  $\overline{O[W, n]} \subseteq W \in \bigcup_{i \leq n-1} \mathcal{W}_i$ .

Para verificar que  $\mathcal{W}$  é localmente finita, dado  $x \in X$  e  $m \in \mathbb{N}$  com  $x \in W$ , onde  $W \in \mathcal{W}_m$ . Seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in O[W, k]$ . Então para todo  $W \in \mathcal{W}_l$  com  $l \geq k$ , temos que  $U \subseteq X \setminus O[W, l] \subseteq X \setminus O[W, k]$ . Como  $\mathcal{W}_j$  é discreto para cada  $j < k$ , segue que existe  $O_j$  vizinhança de  $x$  que intercepta no máximo um elemento de  $\mathcal{W}_j$ . Assim,  $O[W, k] \cap O_0 \cap \dots \cap O_{k-1}$  interceptam no máximo  $k$  elementos de  $\mathcal{W}$ . Assim  $\mathcal{W}$  é localmente finita.  $\square$

**Proposição 23.5.** *Seja  $X$  um espaço gerado por uma pseudométrica e  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Então  $\mathcal{U}$  possui um refinamento aberto  $\sigma$ -discreto.*

*Demonstração.* Fixe uma pseudométrica  $\rho$  que gera a topologia e seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta. Usando o Axioma da Escolha, podemos bem ordenar a cobertura como  $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ .

Fixe  $\epsilon > 0$ . Defina indutivamente  $J_\alpha = \{x \in U_\alpha : \alpha = \min\{\gamma : x \in U_\gamma\} \text{ e } B_\rho(x, 3\epsilon) \subseteq U_\alpha\}$ .

Seja  $V_{\alpha, \epsilon} = \bigcup_{x \in J_\alpha} B_\rho(x, \epsilon)$ .

Afirmção: a distância entre  $V_{\alpha, \epsilon}$  e  $V_{\beta, \epsilon}$  é maior ou igual a  $\epsilon$  para  $\alpha < \beta < \kappa$  (o que implica que  $\{V_{\alpha, \epsilon} : \alpha < \kappa\}$  é discreto).

De fato, seja  $a \in V_{\alpha,\epsilon}$  e  $b \in V_{\beta,\epsilon}$ . Então existe  $x \in J_\alpha$  e  $y \in J_\beta$  tais que  $a \in B_\rho(x, \epsilon)$  e  $b \in B_\rho(y, \epsilon)$ . Como  $\alpha < \beta$  e  $y \in J_\beta$ , segue que  $y \notin U_\alpha$ . Assim,  $3\epsilon \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) < \epsilon + \rho(a, b) + \epsilon$ . Logo,  $\epsilon < \rho(a, b)$ . Assim, a distância entre  $V_{\alpha,\epsilon}$  e  $V_{\beta,\epsilon}$  tem que ser maior ou igual a  $\epsilon$ .

Fixe uma sequência  $(\epsilon_n : n \in \mathbb{N})$  de reais positivos que decresce para 0. Seja  $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,\epsilon_n} : \alpha < \kappa\}$ . Temos que  $V_{\alpha,\epsilon_n} \subseteq U_\alpha$  para cada  $\alpha < \kappa$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Assim resta mostrar que  $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$  cobre  $X$ .

Seja  $x \in X$ . Tome  $\alpha$  mínimo tal que  $x \in U_\alpha$ . Seja  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $B(x, 3\epsilon_n) \subseteq U_\alpha$ . Então  $x \in V_{\alpha,\epsilon_n} \in \mathcal{V}$ . Assim,  $X = \bigcup \mathcal{V}$ .  $\square$

*Prova do Teorema de Stone.* Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta. Então existe um refinamento aberto  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  que é  $\sigma$ -discreto. O refinamento aberto  $\sigma$ -discreto possui um refinamento aberto  $\sigma$ -discreto e localmente finito. Refinamento de refinamento é refinamento e isto conclui a prova.  $\square$

## 23.2 Partiu Unidade.

### 23.2.1 A partição da unidade e paracompacidade.

**Definição 23.6.** Dizemos que  $\{f_i : i \in I\}$  é uma partição da unidade de  $X$  se  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$  são funções contínuas tais que  $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$  para todo  $x \in X$ .

Dizemos que a partição da unidade  $\{f_i : i \in I\}$  é localmente finita se  $\{\text{spte } f_i : i \in I\}$  é uma família localmente finita.

**Definição 23.7.** Dada uma cobertura  $\mathcal{U}$ , dizemos que a partição da unidade  $\{f_i : i \in I\}$  é subordinada a  $\mathcal{U}$  se  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$  são funções contínuas tais que  $\{\text{spte } f_i : i \in I\}$  refina  $\mathcal{U}$  e  $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$  para todo  $x \in X$ .

Queremos mostrar equivalência de paracompacidade com a existência de partições da unidade subordinadas à recobrimentos.

Para isto iremos mostrar dois resultados auxiliares:

**Lema 23.8.** Seja  $X$  um espaço regular. Se toda cobertura aberta possui um refinamento localmente finito então toda cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{U : i \in I\}$  possui um refinamento fechados  $\{F_i : i \in I\}$  tal que  $F_i \subseteq U_i$  para cada  $i \in I$ .

*Demonstração.* Para cada  $x \in X$ , existe  $U_i \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U_i$ . Usando a regularidade, fixe  $W_{x,i}$  aberto tal que  $x \in W_{x,i} \subseteq \overline{W_{x,i}} \subseteq U_i$ . Seja  $\mathcal{W}$  a cobertura obtida por estes  $W_{x,i}$ 's e tome  $\mathcal{A}$  um refinamento de  $\mathcal{W}$ .

Para cada  $A \in \mathcal{A}$ , fixe  $(x_A, i_A)$  tal que  $A \subseteq W_{x_A, i_A}$ . Seja  $\mathcal{F}_i = \{A \in \mathcal{A} : i_A = i\}$ . Temos que  $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$  são dois a dois disjuntos e sua reunião é  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{A}$ .

Como  $\mathcal{A}$  é localmente finita, temos que  $\mathcal{F}_i$  é localmente finita. Assim,  $F_i := \overline{\bigcup \mathcal{F}_i} = \bigcup \{\overline{A} : A \in \mathcal{F}_i\} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{F}_i} \overline{W_{x_A, i_A}} \subseteq U_i$ . Assim,  $F_i$  é um fechado contido em  $U_i$  para todo  $i \in I$ .

Vamos verificar que  $\{F_i : i \in I\}$  é uma cobertura de  $X$ . Dado  $x \in X$ , existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $x \in A$ . Tome  $i \in I$  tal que  $A \in \mathcal{F}_i$ . Então  $x \in A \subseteq \bigcup \mathcal{F}_i \subseteq F_i$ .

Resta agora verificar que  $\{F_i : i \in I\}$  é localmente finita. De fato, dado  $x \in X$  existe  $U$  vizinhança aberta de  $x$  tal que  $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}$  é finito. Seja  $I_0 = \{i \in I : \exists A \in \mathcal{A}_0\}$ . Como  $\mathcal{F}_i$  são dois a dois disjuntos, segue que  $I_0$  é finito. Para cada  $j \in I \setminus I_0$ , temos que  $A \cap U = \emptyset$  para cada  $A \in \mathcal{F}_j$ . Assim,  $U \cap \overline{A} = \emptyset$  para cada  $A \in \mathcal{F}_j$ . Logo  $U \cap F_j = U \cap \bigcup \{\overline{A} : A \in \mathcal{F}_j\} = \bigcup \{U \cap \overline{A} : A \in \mathcal{F}_j\} = \emptyset$ . Assim,  $\{i \in I : U \cap F_i \neq \emptyset\} \subseteq I_0$  é finito.  $\square$

**Lema 23.9.** Se toda cobertura aberta possui uma partição da unidade associada a ela então toda cobertura aberta possui um recobrimento aberto localmente finito.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta e  $\{f_i : i \in I\}$  uma partição unidade associada a  $\mathcal{U}$ . Dada uma função  $g : X \rightarrow [0, 1]$  e  $x \in X$  tal que  $g(x) > 0$  então existe  $U_x$  vizinhança de  $x$  e  $I_x \subseteq I$  finito tal que  $f_j(x) < g(x)$  para todo  $x \in U_x$  e  $j \in I \setminus I_x$ . De fato,  $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$  por ser partição da unidade. Então tome qualquer  $I_x$  finito tal que  $1 - \sum_{i \in I_x} f_i(x) < g(x)$ . Pela continuidade das funções, segue que existe uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  onde a desigualdade  $1 - \sum_{i \in I_x} f_i(y) < g(y)$  vale para todo  $y \in U_x$ . Assim, para cada  $j \in I \setminus I_0$ , temos que  $f_j(y) \leq 1 - \sum_{i \in I_0} f_i(y) < g(y)$  para cada  $y \in U_x$ .

Para cada  $x \in X$ , existe  $i_x \in I$  tal que  $f_{i_x}(x) > 0$ . Aplicando a afirmação anterior para  $g = f_{i_x}$  temos uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  e  $I_x \subseteq I$  finito tal que  $f_j(y) < f_{i_x}(y)$  para todo  $y \in U_x$  e  $j \in I \setminus I_x$ .

Assim  $\max\{f_i(y) : i \in I_x\} \leq \sup\{f_i(y) : i \in I\} = \max\{\sup\{f_i(y) : i \in I \setminus I_x\}, \max\{f_i(y) : i \in I_x\}\} \leq \max\{f_{i_x}(y), \max\{f_i(y) : i \in I_x\}\} = \max\{f_i(y) : i \in I_x\}$  (note que  $i_x \in I_x$ ).

Assim  $f$  definida por  $f(x) = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$  é uma função contínua, pois para todo ponto existe uma vizinhança que coincide com o máximo de um número de funções contínuas e portanto é contínua.

Seja  $V_i = \{x \in X : f_i(x) > \frac{f(x)}{2}\}$ . Temos que o conjunto  $V_i \subseteq \text{spte } f_i$ . Como  $f_i$  é subordinada a  $\mathcal{U}$ , existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $V_i \subseteq \text{spte } f_i \subseteq U$ . Assim, se mostrarmos que  $\{V_i : i \in I\}$  é cobertura então é um refinamento de  $\mathcal{U}$ .

Para vermos que  $\{V_i : i \in I\}$  é uma cobertura, dada  $x \in X$  tal que  $f_i(x) = f(x)$  (tal  $i$  existe por que vimos que o máximo existe). Assim  $f_i(x) = f(x) > \frac{f(x)}{2}$  e portanto  $x \in V_i$ .

Para verificar que  $\{V_i : i \in I\}$  é localmente finita, dada  $x \in X$ , seja  $W$  vizinhança de  $x$  e  $I_0 \subseteq I$  finito tal que  $f_j(y) < \frac{f(y)}{2}$  para todo  $y \in W$  e  $j \in I \setminus I_0$ . Então temos que  $y \notin V_j$ , para todo  $j \in I \setminus I_0$  e  $y \in W$ . Assim,  $W \cap V_j = \emptyset$  para todo  $j \in I \setminus I_0$ . Assim  $W$  testemunha que  $\{V_i : i \in I\}$  é localmente finita em  $x$ .  $\square$

**Teorema 23.10.** São equivalentes para um espaço regular:

- 1) O espaço  $X$  é paracompacto.
- 2) Toda cobertura aberta do espaço  $X$  possui um partição da unidade localmente finita subordinada a esta cobertura.
- 3) Toda cobertura aberta possui uma partição da unidade subordinada a esta cobertura.

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2). Como o espaço é paracompacto e regular, o espaço é normal. Dada uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$ , pela paracompacidade, existe um refinamento localmente finito  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$ . Pelo Lema, existe um refinamento fechado  $\{F_V : V \in \mathcal{V}\}$  tal que  $F_V \subseteq V$  para cada  $V \in \mathcal{V}$ . Pela normalidade,  $g_V : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $g_V[F_V] = \{1\}$  e  $g_V[X \setminus V] = \{0\}$ .

Temos que  $\text{spte } g_V \subseteq V$ , assim, para cada  $x \in X$  existe  $O_x$  vizinhança de  $X$  tal que  $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : O_x \cap V \neq \emptyset\}$  é finito. Assim  $\sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(y) = \sum_{V \in \mathcal{V}_x} g_V(y)$  para todo  $y \in O_x$ . Assim,  $g(x) = \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V(x)$  está definida para todo  $x \in X$  e é contínua. Temos que para todo  $x \in X$ , existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $x \in F_V$  assim  $g(x) \geq g_V(x) = 1$ . Assim, temos que  $g(x) \geq 1$  para todo  $x \in X$ . Seja  $f_V$  definida por  $f_V(x) = \frac{g_V(x)}{g(x)}$ . Assim,  $\sum_{V \in \mathcal{V}} f_V(x) = \frac{g(x)}{g(x)} = 1$  para todo  $x \in X$  e portanto  $\{f_V : V \in \mathcal{V}\}$  é uma partição da unidade.

Temos que  $\text{spte } f_V = \text{spte } g_V$  para todo  $V \in \mathcal{V}$ . Assim,  $\{f_V : V \in \mathcal{V}\}$  é localmente finita e subordinada a  $\mathcal{U}$  pois  $\{\text{spte } f_V : V \in \mathcal{V}\}$  é um refinamento de  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}$  é um refinamento de  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{W}$  é refinamento de  $\mathcal{U}$ .

(2)  $\rightarrow$  3). É imediato.

(3)  $\rightarrow$  1). A paracompacidade segue do Lema acima.  $\square$

**Corolário 23.11.** São equivalentes para um espaço  $T_1$ :

- 1) O espaço  $X$  é paracompacto e Hausdorff.
- 2) Toda cobertura aberta do espaço  $X$  possui um partição da unidade localmente finita subordinada a esta cobertura.
- 3) Toda cobertura aberta possui uma partição da unidade subordinada a esta cobertura.

*Demonstração.* Temos que 1)  $\rightarrow$  2) vale pois espaços paracompactos Hausdorff são regulares e normais.

2)  $\rightarrow$  3) é imediato como antes.

3)  $\rightarrow$  1) basta mostrarmos que o espaço é regular. Para isto, vamos usar que os unitários de  $x$  são conjuntos fechados. Dado  $x \in X$  e  $U$  uma aberto contendo  $x$ , tome a cobertura  $\mathcal{U} = \{U, X \setminus \{x\}\}$ . Tomando uma partição da unidade  $\{f_i : i \in I\}$  subordinada a  $\mathcal{U}$ , temos que existe  $f_i$  tal que  $x \in \text{spte } f_i$ . Como a partição é subordinada a  $\mathcal{U}$ , temos que  $\text{spte } f_i \subseteq U$  ou  $\text{spte } f_i \subseteq X \setminus \{x\}$ . Como  $x \in \text{spte } f_i$  e  $x \notin X \setminus \{x\}$ , segue que  $\text{spte } f_i \subseteq U$ . Assim  $f_i^{-1}[[1, \frac{f_i(x)}{2}]]$  é um aberto que testemunha a regularidade de  $x$  em relação a  $U$ , pois  $x \in f_i^{-1}[[1, \frac{f_i(x)}{2}]] \subseteq f_i^{-1}[[1, \frac{f_i(x)}{2}]] \subseteq f_i^{-1}[[1, \frac{f_i(x)}{2}]] \subseteq \text{spte } f_i \subseteq U$ .  $\square$



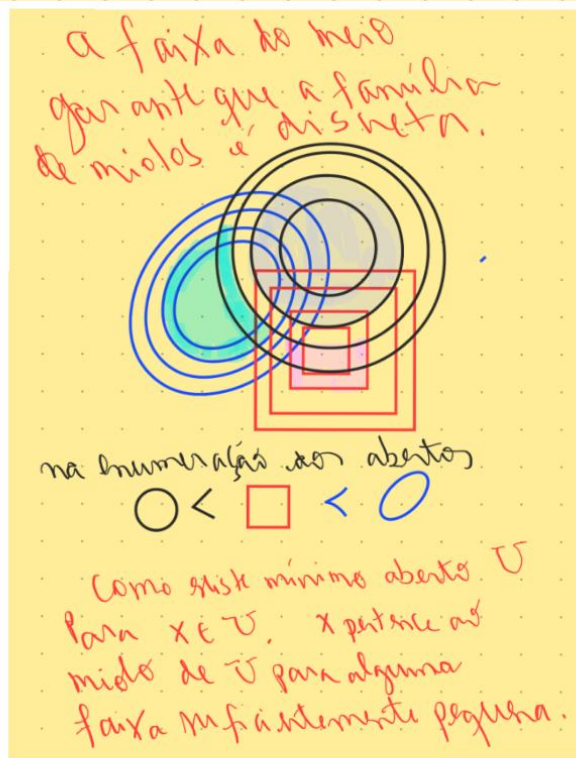
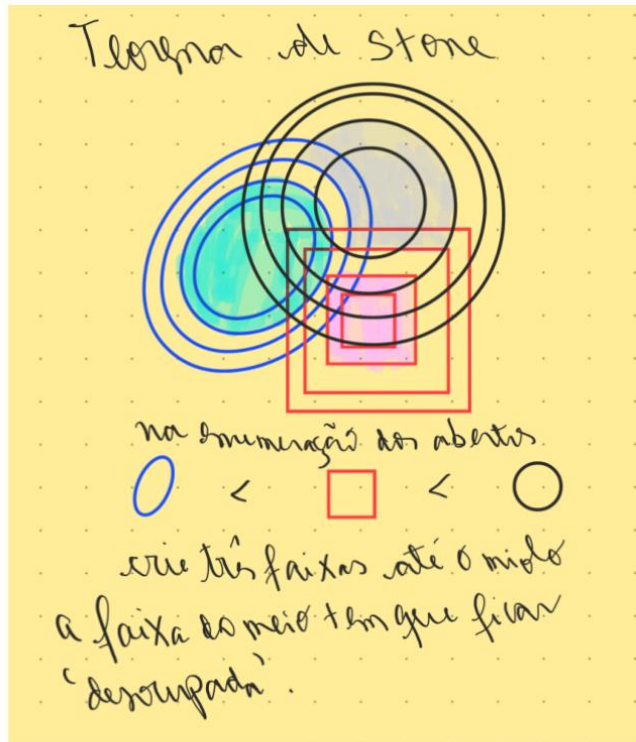


Figura 23.1: Os miolos que formam uma família discreta

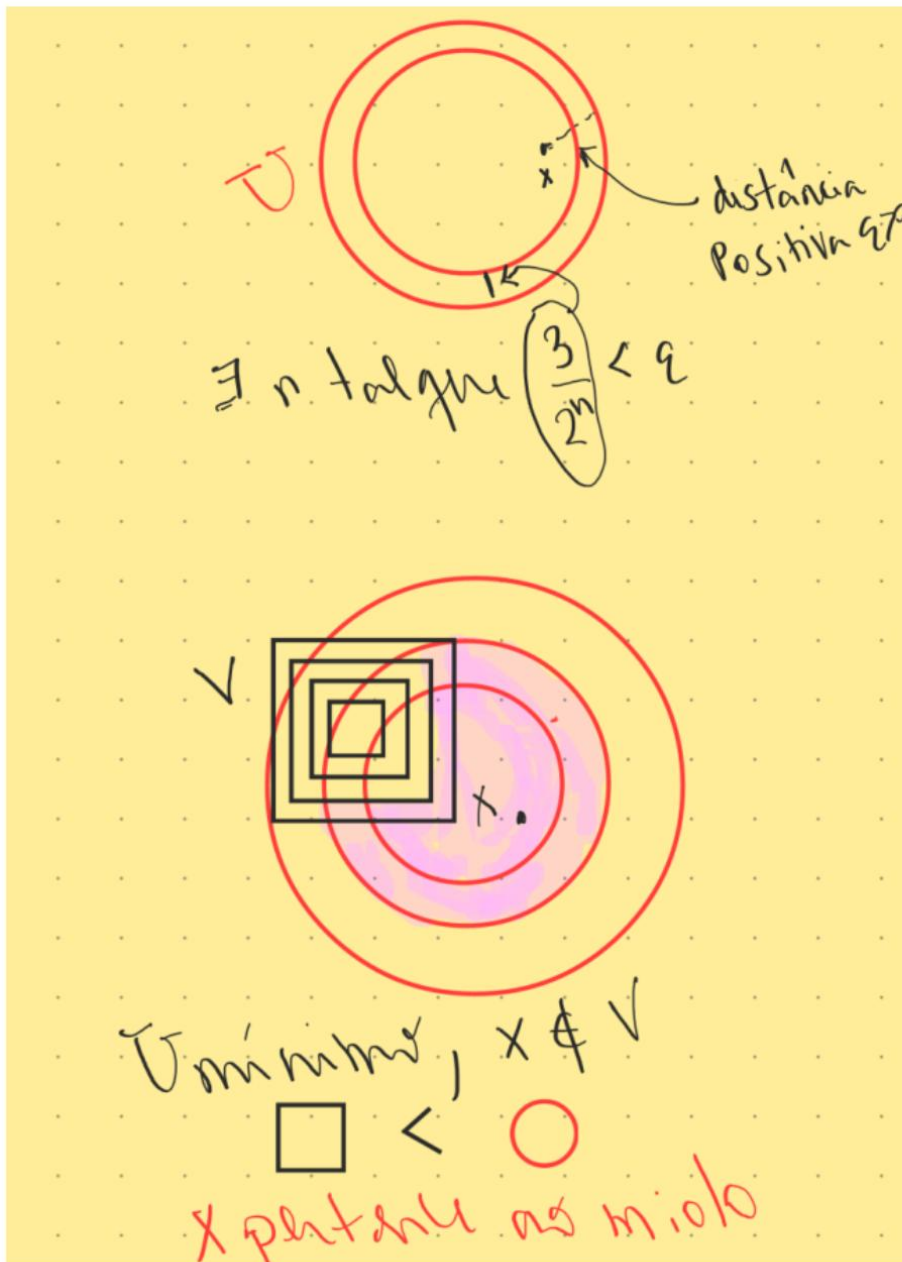


Figura 23.2: A boa ordem garante que os miolos recobrem o espaço.

## Capítulo 24

# Usando a cofinalidade de um cardinal. $\beta\omega$ .

### 24.1 Um pouco de cofinalidade.

#### 24.1.1 Definição de cofinalidade e algumas propriedades.

**Definição 24.1.** Um subconjunto  $A$  num conjunto  $X$  com uma ordem é cofinal se para todo  $x \in X$ , existe  $a \in A$  tal que  $x \leq a$ . Quando temos uma ordem linear, isto é equivalente a dizer  $A$  é ilimitado.

Dado um ordinal  $\alpha$ , a cofinalidade de  $\alpha$ ,  $\text{cof}(\alpha)$  é o menor ordinal  $\beta$  tal que existe uma função  $f : \beta \rightarrow \alpha$  tal que  $f[\beta]$  é cofinal em  $\alpha$ .

**Exemplo 24.2.** O ordinal  $\beta = \text{cof}(\alpha)$  é o menor ordinal tal que existe uma função crescente  $f : \beta \rightarrow \alpha$  tal que  $f[\beta]$  é cofinal em  $\alpha$ .

A cofinalidade de um ordinal sucessor é 1. De fato, se  $\alpha = \gamma + 1$  então  $f : 1 \rightarrow \alpha$  tal que  $f(0) = \gamma$  é cofinal em  $\alpha$ .

Se  $\alpha$  é um ordinal infinito então a cofinalidade de  $\alpha$  é um ordinal infinito.

**Proposição 24.3.** A cofinalidade de um ordinal é um ordinal inicial, ou seja, um cardinal.

A cofinalidade de  $\alpha = \min\{|X| : X \subseteq \alpha \text{ é cofinal}\}$ .

Para todo  $\alpha$  temos que  $\text{cof}(\alpha) = \text{cof}(\text{cof}(\alpha))$ .

$\beta = \text{cof}(\alpha)$  é o menor ordinal tal que existe uma função crescente  $f : \beta \rightarrow \alpha$  tal que  $f[\beta]$  é cofinal em  $\alpha$ .

Se  $\gamma < \text{cof}(\kappa)$  e  $X_\xi \subseteq \kappa$  com  $|X_\xi| < \kappa$  para todo  $\xi < \gamma$  então  $|\bigcup_{\xi < \gamma} X_\xi| < \kappa$ .

**Definição 24.4.** Um cardinal  $\kappa$  é regular se  $\text{cof}(\kappa) = \kappa$ .

Um cardinal  $\kappa$  é singular se  $\text{cof}(\kappa) < \kappa$ .

**Exemplo 24.5.** O cardinal  $\omega$  é um cardinal regular. Em muitas construções, o interessante é trabalhar com cardinais regulares não enumeráveis.

**Teorema 24.6.** (usa Axioma da Escolha) Todo cardinal sucessor é um cardinal regular.

### 24.2 Exemplos usando cardinais regulares não enumeráveis.

**Teorema 24.7.** Seja  $\kappa$  um ordinal de cofinalidade não enumerável. Então  $\kappa$  na topologia da ordem é sequencialmente compacto (logo enumeravelmente compacto).

Um ordinal  $\kappa$  com a topologia da ordem é compacto se e somente se  $\kappa$  é ordinal sucessor.

*Demonstração.* Tome uma seqüência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$ . Se  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  é finito, então existe uma subsequência constante. Se  $A$  é infinito considere  $(n_k : k \in \mathbb{N})$  crescente tal que  $A = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ . Defina  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_{k_0}} = \min\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$  e defina indutivamente  $(k_l : l \in \mathbb{N})$  crescente tal que  $x_{n_{k_{l+1}}} = \min\{x_{n_k} : k > l\}$ . Seja  $\alpha = \sup\{x_{n_{k_l}} : l \in \mathbb{N}\}$ . Como  $\kappa$  é um ordinal de cofinalidade não

enumerável, temos que  $\alpha < \kappa$ . Então  $(x_{n_{k_l}} : l \in \mathbb{N})$  converge para  $\alpha$ . Assim,  $\kappa$  é sequencialmente compacto.

Se  $\alpha$  é limite então  $\{[0, \beta[ : \beta < \alpha\}$  é uma cobertura por abertos crescentes. Então, uma subfamília finita está contida em algum  $[0, \beta[$  com  $\beta < \alpha$ . Assim, a subfamília  $\mathcal{p}$  não cobre  $\kappa$ .

Vamos provar por indução que todo ordinal sucessor é compacto. Claramente, temos que  $[0, 1[$  é compacto por ser finito. Suponha que  $[0, \beta[$  é compacto para todo  $\beta < \alpha$  sucessor, onde  $\alpha = \gamma + 1$ . Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura de  $[0, \alpha[$ . Se  $\gamma$  é sucessor então existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  finito tal que  $[0, \gamma[ \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ . Tome  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $\gamma \in U$ . Então  $\mathcal{U}' \cup \{U\}$  é uma subcobertura finita de  $\mathcal{U}$ .

Se  $\gamma$  é limite, tome  $W \in \mathcal{U}$  tal que  $\gamma \in W$ . Então pela topologia da ordem, existe  $\mu < \gamma$  tal que  $] \mu, \gamma [ = ] \mu, \alpha [ \subseteq W$ . Tome  $\beta \in ] \mu, \gamma [$ . Como  $\gamma$  é limite, temos que  $\beta + 1 \in ] \mu, \gamma [$ . Por hipótese  $[0, \beta + 1[$  é compacto e existe  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{U}$  finito tal que  $[0, \beta + 1[ \subseteq \bigcup \mathcal{W}'$ . Logo  $[0, \alpha[ = [0, \beta + 1[ \cup ] \beta, \alpha [ \subseteq \bigcup \mathcal{W}' \cup W$ . Assim,  $\mathcal{W}' \cup \{W\}$  é uma subcobertura finita de  $\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{U}$  é uma cobertura arbitrária, segue que  $[0, \alpha[$  é compacto.  $\square$

**Definição 24.8.** Denotamos por  $\omega_1$  o menor ordinal não enumerável. Note que  $\omega_1$  é um ordinal inicial, portanto um cardinal. A existência de  $\omega_1$  segue do Teorema de Hartog (sem usar o Axioma da Escolha).

### 24.2.1 $[0, \omega_1[$ tem apenas uma compactificação apenas.

**Teorema 24.9.** Se  $f : [0, \omega_1[ \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então existe  $\beta < \omega_1$  e  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha) = r$  para todo  $\alpha > \beta$ .

*Demonstração.* Como  $\omega_1$  tem cofinalidade não enumerável, segue que  $[0, \omega_1[$  é enumeravelmente compacto. Assim,  $f[[0, \omega_1[$  é enumeravelmente compacto em  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico, segue que  $f[[0, \omega_1[$  é compacto. Assim, similarmente à prova de que ponto conjunto infinito de um compacto possui um ponto de acumulação completo, podemos provar que existe um ponto  $r$  de  $\mathbb{R}$  tal que para toda vizinhança  $U$  de  $r$  o conjunto  $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) \in U\}$  é não enumerável. Vamos agora mostrar que existe  $\beta < \omega_1$  tal que  $f(\alpha) = r$  para todo  $\alpha > \beta$ . Se tal  $\beta$  não existe, então seja  $I = \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) \neq r\}$ . Então  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ , onde  $I_n = \{\alpha \in I : |f(\alpha) - r| > \frac{1}{2^n}\}$ .

Suponhamos por contradição que  $I$  é não enumerável, então existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $I_m$  é não enumerável. Usando o mesmo argumento da compacidade em  $f[I_m]$ , temos que existiria  $s \in f[[0, \omega_1[$  tal que para toda a vizinhança  $W$  de  $s$  temos  $\{\alpha \in I_m : f(\alpha) \in W\}$  é não enumerável. Como  $I_m \subseteq \bigcap ( -\infty, r - \frac{1}{2^m} ] \cup [ r + \frac{1}{2^m}, +\infty [$ , segue que  $s \in ] -\infty, r - \frac{1}{2^m} ] \cup [ r + \frac{1}{2^m}, +\infty [$ . Logo  $|s - r| \geq \frac{1}{2^m}$ .

Podemos indutivamente escolher  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  tais que  $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < \dots$  tais que

$$|f_{\alpha_n} - r| < \frac{1}{2^n} \text{ e } |f_{\beta_n} - s| < \frac{1}{2^n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Temos que  $\zeta = \lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ . Devido a cofinalidade de  $\omega_1$  não ser enumerável, segue que  $\zeta < \omega_1$ . Como  $f$  é uma função contínua, temos que  $r = \lim_{n \in \mathbb{N}} f(\alpha_n) = f(\zeta) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f(\beta_n) = s$ . Assim,  $r = s$ , uma contradição. Com isto, temos que  $I$  é enumerável e tomando  $\beta = \sup I$  (novamente usando a cofinalidade de  $\omega_1$ , temos que  $\beta < \omega_1$ ) temos que para todo  $\alpha > \beta$ ,  $\alpha \notin I$  e portanto,  $f(\alpha) = r$ .  $\square$

**Teorema 24.10.** A compactificação de Stone-Čech de  $[0, \omega_1[$  é homeomorfa a  $[0, \omega_1]$  (a compactificação de um ponto).

*Demonstração.* Basta verificar que toda função contínua de  $[0, \omega_1[$  em  $[0, 1]$  pode ser estendida para a compactificação  $[0, \omega_1]$ , onde  $i : [0, \omega_1[ \rightarrow [0, \omega_1]$  é a inclusão.

De fato, dada  $f : [0, \omega_1[ \rightarrow [0, 1]$  existe  $r \in [0, 1]$  e  $\beta < \omega_1$  tal que  $f(\alpha) = r$  para todo  $\alpha > \beta$ . Seja  $\hat{f}$  a extensão de  $f$  tal que  $\hat{f}(\omega_1) = r$ . Fica a cargo do leitor notar que  $\hat{f}$  é uma função contínua. Claramente  $f = \hat{f} \circ i$ .  $\square$

### 24.2.2 Uma tábua com a quina quebrada (Tychonoff Plank)

**Exemplo 24.11.** (A tábua de Tychonoff). Sejam  $[0, \omega_1 + 1[$  e  $[0, \omega + 1[$  com a topologia da ordem. Então  $X = ([0, \omega_1 + 1[ \times [0, \omega + 1[ \setminus \{(\omega_1, \omega)\})$  é um espaço não normal contido no compacto Hausdorff  $[0, \omega_1 + 1[ \times [0, \omega + 1[$ .

*Demonstração.* Seja  $A = \{\omega_1\} \times [0, \omega[$  e  $B = [0, \omega_1[ \times \{\omega\}$ . Temos que  $A = X \cap \{\omega_1\} \times [0, \omega + 1[$  e  $B = X \cap [0, \omega_1 + 1[ \times \{\omega\}$ . Assim,  $A$  e  $B$  são dois fechados disjuntos de  $X$ . Seja  $U$  um aberto que contém  $B$ . Vamos provar que  $\overline{U} \cap A \neq \emptyset$  para concluir que  $X$  não é normal.

Para cada  $\xi < \omega_1$ , temos que  $(\xi, \omega) \in B \subseteq U$ , assim, existe  $n_\xi < \omega$  tal que  $\{\xi\} \times [n_\xi, \omega + 1[ \subseteq U$ . Como  $[0, \omega_1[ = \bigcup_{n < \omega} \{\xi < \omega_1 : n_\xi = n\}$ , existe  $m < \omega$  tal que  $I := \{\xi < \omega_1 : n_\xi = m\}$  é não enumerável. Como  $\omega_1$  é o primeiro ordinal não enumerável, segue que  $I$  é ilimitado em  $\omega_1$ .

Agora, o ponto  $(\omega_1, m) \in A$ . Seja  $W$  uma vizinhança aberta de  $(\omega_1, m)$ . Então existe  $\gamma < \omega_1$  tal que  $] \gamma, \omega_1 + 1[ \times \{m\} \subseteq W$ . Como  $I$  é ilimitado em  $\omega_1$ , existe  $\rho > \gamma$  tal que  $\rho \in I$ . Assim,  $(\rho, m) \in U \cap W$ . Como  $W$  é uma vizinhança arbitrária de  $(\omega_1, m)$ , segue que  $(\omega_1, m) \in \bar{U}$ . Portanto  $\bar{U} \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

**Corolário 24.12.** Existem espaços localmente compactos Hausdorff que não são paracompactos.

*Demonstração.* O exemplo acima é localmente compacto e  $T_{3\frac{1}{2}}$ . Assim, se fosse paracompacto, então seria normal.  $\square$

**Exercício 24.13.** Mostre a tábua de Tychonoff possui apenas uma compactificação a menos de homeomorfismo.

## 24.3 Propriedades de $\beta\omega$ .

### 24.3.1 O tamanho de $\beta\omega$ .

Vamos utilizar  $\omega$  para falar sobre o espaço discreto enumerável e  $\beta\omega$  sua compactificação de Stone-Čech. O  $\beta\mathbb{N}$  geralmente denota a compactificação dos naturais com a operação aditiva.

**Teorema 24.14.**  $|\beta\omega| = 2^{2^\omega}$ .

*Demonstração.* Já vimos anteriormente que  $K = \{0, 1\}^{2^\omega}$  possui um subconjunto enumerável denso, onde  $\{0, 1\}$  está com a topologia discreta e tomamos a topologia produto (logo  $K$  é compacto  $T_2$ ). Seja  $D \subseteq K$  um subconjunto enumerável denso e tome  $(d_n : n \in \omega)$  uma sequência tal que  $D = \{d_n : n \in \omega\}$ . Como  $\omega$  é discreto, segue que  $f : \omega \rightarrow K, n \mapsto d_n$  para cada  $n \in \omega$ , é contínua. Pela propriedade da compactificação de Stone-Čech, existe  $\hat{f} : \beta\omega \rightarrow K$  que estende  $f$ . Assim  $\hat{f}[\beta\omega] \supseteq \bar{D} = K$ . Com isto,  $2^{2^\omega} \leq |\beta\omega|$ . Por outro lado, seja  $\mathcal{G}$  a família de funções contínuas  $g : \beta\omega \rightarrow [0, 1]$ . Como  $\beta\omega$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$ , segue que  $\beta\omega$  pode ser imerso em  $[0, 1]^\mathcal{G}$ . Logo  $|\beta\omega| \leq |[0, 1]^\mathcal{G}| = (2^\omega)^{|\mathcal{G}|} = 2^{|\mathcal{G}|}$ , pois  $\mathcal{G}$  é infinito.

Agora, como  $[0, 1]$  é Hausdorff e  $\omega$  é denso em  $\beta\omega$ , segue que  $g \in \mathcal{G} \mapsto g|_\omega \in [0, 1]^\omega$  é uma função injetora. Portanto,  $|\mathcal{G}| \leq |[0, 1]^\omega| = (2^\omega)^\omega = 2^{2^\omega}$ .

Segue então que  $|\beta\omega| \leq 2^{|\mathcal{G}|} \leq 2^{2^{2^\omega}}$ .  $\square$

### 24.3.2 Base de $\beta\omega$ . $\beta\omega$ não possui sequências não triviais convergentes.

**Proposição 24.15.** Seja  $A$  um subconjunto de  $\omega$  então  $\overline{A}^{\beta\omega} \cap \overline{\omega \setminus A}^{\beta\omega} = \emptyset$ .

*Demonstração.* Se  $A = \emptyset$  ou  $\omega \setminus A = \emptyset$  então o resultado é imediato. Seja  $f : \omega \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $f(n) = 1$  se  $n \in A$  e  $f(n) = 0$  se  $n \in \omega \setminus A$ . Esta função é contínua pois  $\omega$  é discreto. Usando a propriedade da compactificação de Stone-Čech, existe  $\hat{f}$  que estende  $f$ . Assim,  $\hat{f}[\overline{A}^{\beta\omega}] \subseteq \overline{f[A]}^{\{0,1\}} = \{1\}$  e  $\hat{f}[\overline{\omega \setminus A}^{\beta\omega}] \subseteq \overline{f[\omega \setminus A]}^{\{0,1\}} = \{0\}$ . Logo,  $\overline{A}^{\beta\omega} \cap \overline{\omega \setminus A}^{\beta\omega} = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 24.16.** O conjunto  $\mathcal{B} = \{\overline{A}^{\beta\omega} : \emptyset \neq A \subseteq \omega\}$  é uma base de clopens de  $\beta\omega$ .

*Demonstração.* Pela proposição anterior,  $\overline{\omega \setminus A}^{\beta\omega}$  é o complementar de  $\overline{A}^{\beta\omega}$ , pois são disjuntos e  $\beta\omega = \overline{\omega}^{\beta\omega} = \overline{A \cup (\omega \setminus A)}^{\beta\omega} = \overline{A}^{\beta\omega} \cup \overline{\omega \setminus A}^{\beta\omega}$ .

Dado  $x \in \beta\omega$  e  $W$  vizinhança aberta de  $x$  em  $\beta\omega$ , pela regularidade de  $\beta\omega$ , existe  $V$  aberto em  $\beta\omega$  tal que  $x \in V \subseteq \overline{V}^{\beta\omega} \subseteq W$ .

Como  $\omega$  é denso e  $V$  é aberto em  $\beta\omega$ , segue que  $\overline{V}^{\beta\omega} = \overline{V \cap \omega}^{\beta\omega} \in \mathcal{B}$ , pois  $V \cap \omega \subseteq \omega$ . Assim,  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos.  $\square$

**Lema 24.17.** Seja  $X$  um espaço  $T_3$ . Se  $\{x_n : n \in \omega\}$  é fechado e discreto em  $X$  então existe  $\{U_n : n \in \omega\}$  abertos dois a dois disjuntos de  $X$  tais que  $x_n \in U_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* A construção é feita por indução. Temos que  $x_0 \notin \overline{\{x_n : n \geq 1\}}$ . Assim, pela regularidade de  $X$  existe  $U_0$  aberto tal que  $x_0 \in U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq X \setminus \overline{\{x_n : n \geq 1\}}$ . Supondo definidos

$U_0, \dots, U_k$  tais que  $x_i \in U_k$  e  $\{\overline{U_i} : i \leq k\} \cup \{x_n : n \geq k+1\}$  dois a dois disjuntos, temos que  $x_{k+1} \notin F_{k+1} := \bigcup(\{\overline{U_i} : i \leq k\} \cup \{x_n : n \geq k+2\})$ . Como à direita temos uma reunião finita de fechados, o conjunto  $F_{k+1}$  é um fechado. Usando regularidade, existe  $U_{k+1}$  aberto contendo  $x_{k+1}$  tal que  $x_{k+1} \subseteq U_{k+1} \subseteq \overline{U_{k+1}} \subseteq X \setminus F_{k+1}$ . Isso conclui a indução.  $\square$

**Corolário 24.18.** Não existem seqüências não triviais convergentes em  $\beta\omega$ .

*Demonstração.* Suponha que exista uma seqüência não trivial convergente em  $\beta\omega$ . Então existe  $(x_n : n \in \omega)$  uma seqüência injetora que converge para  $x$ . Podemos assumir (removendo um ponto e reenumerando a seqüência se necessário) que  $x \notin \{x_n : n \in \omega\}$ .

Então  $X = \beta\omega \setminus \{x\}$  é um espaço regular e  $\{x_n : n \in \omega\}$  fechado e discreto em  $X$ . Então existem abertos dois a dois disjuntos  $\{U_n : n \in \omega\}$  abertos em  $X$  tais que  $x_n \in U_n$  para cada  $n \in \omega$ . Como  $X$  é aberto em  $\beta\omega$ , segue que  $\{U_n : n \in \omega\}$  são abertos em  $\beta\omega$ . Usando a base de clopens vista anteriormente, temos que existe  $A_n \subseteq \omega$  tais que  $x_n \in \overline{A_n}^{\beta\omega} \subseteq U_n$ .

Seja  $f : \omega \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $f(m) = 1$  se existe  $n$  par tal que  $m \in A_n$  e  $f(m) = 0$  caso contrário. Seja  $\hat{f}$  a extensão contínua de  $f$  para  $\beta\omega$ . Então  $\hat{f}(x_{2n}) \in \overline{f[A_{2n}]}^{\{0,1\}} = \{1\}$  e  $\hat{f}(x_{2n+1}) \in \overline{f[A_{2n+1}]}^{\{0,1\}} = \{0\}$ . Porém como  $(x_n : n \in \omega)$  converge e  $\hat{f}$  é contínua, segue que  $(\hat{f}(x_n) : n \in \omega)$  converge, o que é uma contradição.  $\square$

Veremos na próxima secção veremos que uma seqüência não trivial tem  $2^{2^\omega}$  pontos de acumulação.

### 24.3.3 O tamanho do fecho de um subconjunto de $\beta\omega$ .

**Proposição 24.19.** Seja  $X$  um espaço regular sem seqüências não triviais convergentes. Então se  $(x_n : n \in \omega)$  é uma enumeração injetora, existe  $I \subseteq \omega$  infinito e abertos  $(U_i : i \in I)$  dois a dois disjuntos tais que  $x_i \in U_i$  para cada  $i \in I$ .

*Demonstração.* Vamos construir  $(J_k : k \in \omega)$  uma seqüência subconjuntos infinitos de  $\omega$ ,  $(n_k : k \in \omega)$  uma seqüência em  $\omega$  e  $(U_{n_k} : k \in \omega)$  uma seqüência de abertos tais que

- a)  $J_{k+1} \subseteq J_k$  para todo  $k < l$ ;
- b)  $n_{k+1} > n_k$  para todo  $k < l$
- c)  $n_{k+1} \in J_k$  para todo  $k < l$ ;
- d)  $x_{n_k} \in U_{n_k}$  para cada  $k \leq l$  e
- e)  $\{\overline{U_{n_k}} : k \leq l\} \cup \{\overline{\{x_j : j \in J_l\}}\}$  são dois a dois disjuntos para cada  $l \in \omega$ .

Comece com  $n_0 = 0$ . Como  $\{x_n : n \geq 1 = n_0 + 1\}$  não converge para  $x_{n_0}$ , existe uma vizinhança aberta  $V_{n_0}$  de  $x_{n_0}$  tal que  $J_0 = \{n \geq 1 : x_n \notin V_{n_0}\}$  é infinito. Pela regularidade, tome  $U_{n_0}$  uma vizinhança aberta de  $x_{n_0}$  tal que  $\overline{U_{n_0}} \subseteq V_{n_0}$ . Então a) está satisfeita por vacuidade, b) está satisfeita pela escolha de  $U_{n_0}$  e c) segue de  $\{x_j : j \in J_l\} \subseteq X \setminus V$  e  $\overline{U_{n_0}} \cap X \setminus V = \emptyset$ .

Suponhamos que  $n_k, J_k$  e  $U_{n_k}$  estão definidos para cada  $k \leq l$ . Fixe  $n_{l+1} \in J_l$  com  $n_{l+1} > n_l$  (condições b) e c) estão satisfeitas). Por hipótese, temos que  $x_{n_{l+1}}$  não é limite de  $\{x_j : j \in J_l, j \geq n_{l+1} + 1\}$ . Então existe uma vizinhança aberta  $V_{n_{l+1}}$  de  $x_{n_{l+1}}$  tal que  $J_{l+1} = \{n \in J_l : n > n_{l+1}, x_n \notin V_{n_{l+1}}\}$  é infinito (condição a) está satisfeita). Usando a regularidade, existe  $U_{n_{l+1}}$  vizinhança aberta de  $x_{n_{l+1}}$  tal que  $U_{n_{l+1}} \subseteq \overline{U_{n_{l+1}}} \subseteq V_{n_{l+1}} \cap \bigcap_{k \leq l} (X \setminus \overline{U_{n_k}})$  (condição d) está satisfeita).

Resta apenas verificar a condição e). Pela definição, fica claro que  $\overline{U_{n_{l+1}}}$  é disjunto de  $\overline{U_{n_k}}$  para cada  $k \leq l$ . Como  $J_{l+1} \subseteq J_k$  para  $k \leq l$ , temos  $\overline{U_{n_k}} \cap \overline{\{x_j : j \in J_{l+1}\}} \subseteq \overline{U_{n_k}} \cap \overline{\{x_j : j \in J_k\}} = \emptyset$ . Assim, resta verificar que  $\overline{U_{n_{l+1}}} \cap \overline{\{x_j : j \in J_{l+1}\}} = \emptyset$ . Isto segue do fato que  $\overline{U_{n_{l+1}}} \subseteq V_{n_{l+1}}$  e  $\{x_j : j \in J_{l+1}\} \subseteq X \setminus V_{l+1}$ .  $\square$

**Teorema 24.20.** Seja  $X \subseteq \beta\omega$  infinito. Então existe  $A \subseteq X$  tal que  $\overline{A}^{\beta\omega}$  é a compactificação de Stone-Čech de  $A$ . Em particular, todo conjunto infinito enumerável em  $\beta\omega$  possui  $2^{2^\omega}$  pontos de acumulação e  $\overline{X}^{\beta\omega}$  tem cardinalidade  $2^{2^\omega}$ .

*Demonstração.* Dado  $X$  infinito, existe  $A = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ , enumeração injetora e abertos  $\{U_n : n \in \omega\}$  dois a dois disjuntos tais que  $x_n \in U_n$  para cada  $n \in \omega$  (podemos tomar uma seqüência injetora em

$X$ , achar uma subsequência com imagem  $A$  como na proposição anterior e reenumerar a subsequência para obter  $\{x_n : n \in \omega\}$ .

Seja  $f : A \rightarrow [0, 1]$  uma função contínua. Para cada  $n \in \omega$ , seja  $B_n = \omega \cap U_n$ .

Defina  $h(m) = f(x_n)$  se  $m \in B_n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$  (o  $n$  se existir, é único) e  $f(m) = 0$  se  $m \notin \bigcup_{n \in \omega} B_n$ .

Seja  $\hat{h}$  a extensão contínua de  $h$  em  $\beta\omega$ . Para cada  $n \in \omega$  temos que  $x_n \in U_n \subseteq \overline{U_n} = \overline{U_n} \cap \omega$ . Pela continuidade de  $\hat{h}$ , temos que  $\hat{h}(x_n) \in \overline{h[U_n \cap \omega]} = \overline{h[B_n]} = \overline{\{f(x_n)\}}$ .

Assim,  $\hat{h}(x_n) = f(x_n)$  para todo  $n \in \omega$ . Portanto,  $\hat{h}$  estende  $f$  para  $\overline{A}^{\beta\omega}$ . Logo,  $\overline{A}^{\beta\omega}$  é a compactificação de Stone-Čech de  $A$ . Como  $A$  é discreto, segue que  $\beta A$  é homeomorfo a  $\beta\omega$ .

Assim,  $\overline{A}^{\beta\omega}$  tem cardinalidade  $2^{2^\omega}$ . Note que todo ponto de  $\overline{A}^{\beta\omega} \setminus A$  é ponto de acumulação de  $A$ . Portanto,  $A$  possui  $2^{2^\omega}$  pontos de acumulação.  $\square$

**Proposição 24.21.** Seja  $X$  um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  e vamos assumir que  $X$  é um subespaço de  $\beta X$ . Se  $Y$  é tal que  $X \subseteq Y \subseteq \beta X$  então  $\beta Y$  é homeomorfo a  $\beta X$ .

*Demonstração.* Dada  $f : Y \rightarrow [0, 1]$ , temos que  $g = f|_X : X \rightarrow [0, 1]$  possui uma extensão contínua  $\hat{g} : \beta X \rightarrow [0, 1]$ . Assim  $\hat{g}|_X = f|_X$ . Como  $X$  é denso em  $\beta X$  e  $\beta X$  é Hausdorff, segue que  $\hat{g}|_Y = f$ . Logo  $\hat{g}$  é extensão contínua de  $f$ . Como  $f$  é arbitrário, segue que  $\beta X$  é o compactificado de Stone-Čech de  $Y$ .  $\square$

**Teorema 24.22.** Vamos assumir que  $\omega$  é um subespaço de  $\beta\omega$ . Seja  $F \subseteq \beta\omega$  fechado em  $\beta\omega$ . Se  $f : F \rightarrow [0, 1]$  é contínua então existe  $h : \omega \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\hat{h}$  estende  $f$ .

*Demonstração.* Como  $F$  é fechado e  $\beta\omega$  é normal, existe  $g : \beta\omega \rightarrow [0, 1]$  que estende  $f$ . Seja  $h := g|_\omega$ . Pela propriedade de Stone-Čech, segue que  $\hat{h}$  estende  $h$  para  $\beta\omega$ . Como  $g$  e  $\hat{h}$  coincidem em  $\omega$  e  $\omega$  é denso no espaço Hausdorff  $\beta\omega$ , segue que  $g = \hat{h}$ . Assim,  $\hat{h} = g$  estende  $f$ .  $\square$

# Capítulo 25

## Aplicação de $\beta\omega$ . $p$ -limites.

### 25.1 Um espaço enumeravelmente compacto cujo quadrado não é pseudocompacto.

#### 25.1.1 O Teorema de König. Enumerando sequências em $2^\omega$ .

A demonstração deste teorema pode ser visto num livro de Teoria dos Conjuntos. A demonstração usa um argumento diagonal.

**Teorema 25.1.** Se  $\kappa$  é um cardinal então  $\text{cof}(2^\kappa) > \kappa$ . Em particular,  $2^\omega$  tem cofinalidade não enumerável.

Vamos construir um subconjunto de  $\beta\omega$  de cardinalidade  $2^\omega$  tal que todo subconjunto enumerável infinito possui ponto de acumulação. Para isto o subconjunto vai ser indutivamente listado como  $(x_\alpha : \alpha < 2^\omega)$ . Vamos enumerar todos os possíveis subconjuntos enumeráveis usando essa enumeração. Ou seja, vamos enumerar todas os subconjuntos enumeráveis de  $2^\omega$  como  $I_\alpha$  e associar ao conjunto listado. Para isto, quando formos usar a lista, os pontos  $x_\alpha$  já devem estar definidos. Com isto temos que usar uma lista tal que  $I_\alpha \subseteq [0, \alpha[$ .

Para isto vamos apelar para mais uma equivalência do Axioma da Escolha.

**Teorema 25.2.** São equivalentes:

- 1) O Axioma da Escolha
- 2)  $X \times X$  e  $X$  tem a mesma cardinalidade, para todo conjunto infinito  $X$ ,

**Definição 25.3.** O conjunto de todos os subconjuntos de cardinalidade  $\lambda$  de um conjunto  $X$  é denotado por  $[X]^\lambda$ . O conjunto dos subconjuntos de cardinalidade estritamente menor (menor ou igual) a  $\lambda$  é denotado por  $[X]^{<\lambda}$  (resp.  $[X]^{\leq\lambda}$ ).

**Proposição 25.4.** Existe uma enumeração  $(I_\alpha : \omega \leq \alpha < 2^\omega)$  de  $[2^\omega]^\omega$  tal que  $I_\alpha \subseteq \alpha$  para todo  $\alpha \in [\omega, 2^\omega[$ .

*Demonstração.* Temos que o conjunto de todos os subconjunto enumeráveis infinitos de  $2^\omega$ , denotado por  $[2^\omega]^\omega$ , tem cardinalidade  $(2^\omega)^\omega = |2^{\omega \times \omega}| = 2^\omega$ .

Seja  $\phi : 2^\omega \rightarrow 2^\omega \times [2^\omega]^\omega$  uma sobrejeção.

Para cada  $\alpha$  ordinal com  $\omega \leq \alpha < 2^\omega$ , seja  $I_\alpha = \pi_2(\phi(\alpha))$  se  $\pi_2(\phi(\alpha)) \subseteq [0, \alpha[$  e  $I_\alpha = [0, \omega[$  caso contrário. Claramente,  $I_\alpha \subseteq [0, \alpha[$  para todo  $\alpha < 2^\omega$ .

Para ver que todos os elementos de  $[2^\omega]^\omega$  estão listados como  $I_\alpha$  para algum  $\alpha \in [\omega, 2^\omega[$ , dado  $A \in [2^\omega]^\omega$ , considere  $J = \{\alpha < 2^\omega : (\exists \xi < 2^\omega) \phi(\alpha) = (\xi, A)\}$ . Assim,  $J$  tem cardinalidade  $2^\omega$ , logo  $J$  é ilimitado em  $2^\omega$ . Como a cofinalidade de  $2^\omega$  é não enumerável, temos que  $\sup A < 2^\omega$ . Assim, existe  $\beta \in J$ , com  $\beta > \sup A$ . Então temos que  $\pi_2(\phi(\beta)) = A \subseteq [0, \beta[$ . Portanto,  $I_\beta = A$ .  $\square$

#### 25.1.2 Compacidade enumerável e pseudocompacidade não são propriedades produtivas.

**Exemplo 25.5.** Existem  $X$  e  $Y$  subespaços enumeravelmente compactos de  $\beta\omega$  tais que  $X \times Y$  não é pseudocompacto.



*Demonstração.* Tome  $x_n = y_n = n$  para todo  $n \in \omega$ . Iremos definir  $(x_\alpha : \omega \leq \alpha < 2^\omega)$  e  $(y_\alpha : \omega \leq \alpha < 2^\omega)$  tais que:

- 1)  $(x_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\omega)$  e  $(y_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\omega)$  são enumerações injetoras;
- 2)  $x_\alpha$  é ponto de acumulação de  $\{x_\beta : \beta \in I_\alpha\}$  e  $y_\alpha$  é ponto de acumulação de  $\{y_\beta : \beta \in I_\alpha\}$ ;
- 3)  $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\omega\} \cap \{y_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\omega\} = [0, \omega[$ .

Vamos supor que  $X = \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\omega\}$  e  $Y = \{y_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\omega\}$  estão definidos e veremos que elas satisfazem as propriedades desejadas.

Vamos verificar que  $X$  é enumeravelmente compacto. Dado  $A \subseteq X$  enumerável infinito, seja  $I = \{\alpha \in 2^\omega : (\exists x \in A)x = x_\alpha\}$ . Por 1),  $I$  é enumerável, e portanto existe  $\eta < 2^\omega$  tal que  $I_\eta = I$ . Assim,  $x_\eta$  é ponto de acumulação de  $\{x_\beta : \beta \in I_\eta\} = A$ . Logo  $X$  é enumeravelmente compacto. O mesmo argumento pode ser usado para provar que  $Y$  é enumeravelmente compacto.

Por 2), temos que  $X$  e  $Y$  são enumeravelmente compactos.

Como  $\beta\omega$  é Hausdorff, temos que  $\Delta(\beta\omega) = \{(x, x) : x \in \beta\omega\}$  é um subconjunto fechado de  $\beta\omega \times \beta\omega$ . Por 3) temos que  $\Delta(\omega) := \{(n, n) : n < \omega\} = \Delta(\beta\omega) \cap (X \times Y) \setminus \{(n, n) : n < \omega\}$  é um fechado de  $X \times Y$ . Como  $\{m\}$  é aberto para todo  $n < \omega$ , segue que  $\Delta(\omega)$  é aberto e fechado em  $X \times Y$ . Assim, a função  $f(x, y) = 0$  se  $(x, y) \notin \Delta(\omega)$  e  $f(n, n) = n$  para cada  $n < \omega$  é contínua e ilimitada de  $X \times Y$  em  $\mathbb{R}$ . Logo  $X \times Y$  não é pseudocompacto.

Vamos agora definir indutivamente  $x_\alpha$  e  $y_\alpha$ .

Temos  $x_n$  e  $y_n$  definidos para todo  $n \in \omega$  e elas satisfazem as condições 1) – 3). Suponhamos que  $x_\beta$  e  $y_\beta$  estão definidos para todo  $\beta < \alpha$ , satisfazendo 1) – 3) e vamos definir  $x_\alpha$  e  $y_\alpha$  (nesta construção não separaremos em caso sucessor e limite). Temos que  $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$  já está definida e como  $I_\alpha \subseteq \alpha$ , temos que o conjunto  $\{x_\beta : \beta \in I_\alpha\}$  já está definida. Temos  $\{x_\beta : \beta \in I_\alpha\}$  tem  $2^{2^\omega}$  pontos de acumulação, assim seja  $x_\alpha$  um ponto de acumulação de  $\{x_\beta : \beta \in I_\alpha\}$  que não pertence ao conjunto  $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ .

Temos que  $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$  já está definida e como  $I_\alpha \subseteq \alpha$ , temos que o conjunto  $\{y_\beta : \beta \in I_\alpha\}$  já está definida. Temos  $\{y_\beta : \beta \in I_\alpha\}$  tem  $2^{2^\omega}$  pontos de acumulação, assim seja  $y_\alpha$  um ponto de acumulação de  $\{y_\beta : \beta \in I_\alpha\}$  que não pertence ao conjunto  $\{x_\beta : \beta \leq \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ .

Fica a cargo do leitor notar que as condições indutivas até  $\alpha$  estão satisfeitas. Isto termina a construção indutiva.  $\square$

Para obter um exemplo de espaço enumeravelmente compacto cujo quadrado não é pseudocompacto, vamos usar a soma topológica.

**Exemplo 25.6.** Existe um espaço enumeravelmente compacto cujo quadrado não é pseudocompacto.

*Demonstração.* Seja  $X'$  e  $Y'$  espaços homeomorfos a  $X$  e  $Y$  respectivamente tais que  $X' \cap Y' = \emptyset$ .

Seja  $Z = X' \cup Y'$ . Seja  $\mathcal{B}_{X'}$  uma base de abertos de  $X'$  e  $\mathcal{B}_{Y'}$  uma base de abertos de  $Y'$  e seja  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{X'} \cup \mathcal{B}_{Y'}$ . Fica a cargo do leitor verificar que  $\mathcal{B}$  satisfaz as propriedades para ser uma base para uma topologia de  $Z$ ,  $X'$  e  $Y'$  são subespaços abertos e fechados de  $Z$ .

Primeiro vamos verificar que  $Z$  é enumeravelmente compacto. De fato, se  $A \subseteq Z$  então  $A \cap X'$  ou  $A \cap Y'$  são infinitos. No primeiro caso,  $A \cap X'$  tem um ponto de acumulação em  $X'$ . Como  $X'$  é um subespaço de  $Z$ , segue que  $A \cap X'$  tem um ponto de acumulação em  $Z$  e assim,  $A$  tem um ponto de acumulação em  $Z$ . Se  $A \cap Y'$  é infinito então por um argumento similar também iremos concluir que  $A \cap Y'$  possui um ponto de acumulação em  $Y'$ , assim  $A$  possui um ponto de acumulação em  $Z$ . Logo  $Z$  é enumeravelmente compacto.

Como  $X'$  e  $Y'$  são abertos e fechados em  $Z$ , segue que  $X' \times Y'$  é aberto e fechado em  $Z \times Z$ . Como  $X' \times Y'$  é homeomorfo a  $X \times Y$ , então  $X' \times Y'$  não é pseudocompacto. Seja  $f : X' \times Y' \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e ilimitada. Seja  $g : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x, y) = f(x, y)$  se  $(x, y) \in X' \times Y'$  e  $g(x, y) = 0$  se  $(x, y) \in (Z \times Z) \setminus (X' \times Y')$ . Como  $X' \times Y'$  é aberto e fechado, segue que  $g$  é contínua. Como  $g$  é ilimitada por estender  $f$ , segue que  $Z \times Z$  não é pseudocompacto.  $\square$

## 25.2 $p$ -limites.

### 25.2.1 Definição e propriedades básicas.

**Definição 25.7.** Dado um espaço topológico  $X$  e um ultrafiltro livre  $p$  sobre  $\omega$ , dizemos que  $x \in X$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$  se  $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$  para toda vizinhança  $U$  de  $x$ .

**Proposição 25.8.** Seja  $p$  um ultrafiltro livre sobre  $\omega$ . Se  $x$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$  então  $x$  é um ponto de acumulação da sequência  $(x_n : n < \omega)$ .

*Demonstração.* Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Então temos que  $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$ . Como  $p$  é ultrafiltro livre, segue que  $\{n \in \omega : x_n \in U\}$  é infinito. Portanto  $x$  é ponto de acumulação de  $x$ .  $\square$

**Proposição 25.9.** Se  $x$  é um ponto de acumulação da sequência  $(x_n : n < \omega)$  então existe  $p$  ultrafiltro livre tal que  $x$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$ .

*Demonstração.* O conjunto  $\{\{n \in \omega : x_n \in U\} : U \text{ vizinhança aberta de } x\} \cup \{\{m, \omega\} : m \in \omega\}$  tem PIF. Seja  $p$  um ultrafiltro que contém essa família. Então  $p$  é livre por conter  $\{\{m, \omega\} : m \in \omega\}$ .

Como  $p$  contém  $\{\{n \in \omega : x_n \in U\} : U \text{ vizinhança aberta de } x\}$ , segue que  $x$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$ .  $\square$

**Definição 25.10.** Seja  $p$  um ultrafiltro livre sobre  $\omega$ . Então  $X$  é  $p$ -compacto se toda sequência possui  $p$ -limite.

**Proposição 25.11.** Um espaço compacto é  $p$ -compacto para todo  $p$  ultrafiltro seletivo.

*Demonstração.* Dado um ultrafiltro  $p$  e uma sequência  $(x_n : n < \omega)$ , temos que  $\{\{x_n : n \in A\} : A \in p\}$  tem PIF. Assim,  $\{\{x_n : n \in A\} : A \in p\}$  tem PIF. Pela compacidade de  $X$ , segue que  $\bigcap \{\{x_n : n \in A\} : A \in p\}$  é um conjunto não vazio. Tome  $x \in \bigcap \{\{x_n : n \in A\} : A \in p\}$ . Dado uma vizinhança  $U$  de  $x$ , seja  $B = \{n \in \omega : x_n \in U\}$ . Para cada  $A \in p$ , temos que  $x \in \{x_n : n \in A\}$ . Assim,  $\{x_n : n \in B \cap A\} = U \cap \{x_n : n \in A\} \neq \emptyset$ . Portanto, temos que  $B \cap A \neq \emptyset$  para todo  $A \in p$ . Como  $p$  é ultrafiltro, segue que  $B \in p$ . Logo  $\{n \in \omega : x_n \in U\} = B \in p$  e portanto  $x$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$ .  $\square$

**Proposição 25.12.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua e  $x$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$  com  $p$  ultrafiltro livre sobre  $\omega$  então  $f(x)$  é  $p$ -limite de  $(f(x_n) : n < \omega)$ .

*Demonstração.* Seja  $W$  uma vizinhança aberta de  $f(x)$ . Então  $U := f^{-1}[W]$  é uma vizinhança aberta de  $x$ . Temos então que  $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$ . Como  $x_n \in U \rightarrow x_n \in f[U]$ , segue que  $\{n \in \omega : x_n \in U\} \subseteq \{n \in \omega : f(x_n) \in W\}$ . Como  $p$  é filtro, segue que  $\{n \in \omega : f(x_n) \in W\} \in p$ . Logo,  $f(x)$  é  $p$ -limite de  $(f(x_n) : n < \omega)$ .  $\square$

**Proposição 25.13.** Dado um produto de espaços e  $p$  um ultrafiltro livre sobre  $\omega$ ,  $(x_i : i \in I)$  é  $p$ -limite de  $((x_{i,n} : i \in I) : n \in \omega)$  se e somente se  $x_i$  é  $p$ -limite de  $(x_{i,n} : n \in \omega)$  para cada  $i \in I$ .

*Demonstração.* A ida sai da proposição anterior, já que as projeções são contínuas.

Para a volta, dado  $U$  uma vizinhança de  $(x_i : i \in I)$ , existe uma vizinhança básica  $\prod_{i \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \subseteq U$  com  $U_j$  de  $(x_i : i \in I)$ , para cada  $j \in J$ . Temos que  $\{n \in \omega : x_n \in U_j\} \in p$ . Assim,  $p \ni \bigcap_{j \in J} \{n \in \omega : x_n \in U_j\} \subseteq \{n \in \omega : (x_i : i \in I) \in U\}$ . Como  $p$  é filtro, segue que  $\{n \in \omega : (x_i : i \in I) \in U\} \in p$ . Assim,  $(x_i : i \in I)$  é  $p$ -limite de  $((x_{i,n} : i \in I) : n \in \omega)$ .  $\square$

**Corolário 25.14.** Dado um ultrafiltro livre  $p$ , a  $p$ -compacidade é uma propriedade produtiva (tem que ser o mesmo ultrafiltro para todos os espaços.)

**Definição 25.15.** Um espaço  $X$  é  $\omega$ -limitado se  $\bar{A}$  é compacto para todo  $A \subseteq X$  infinito enumerável.

**Teorema 25.16.** Um espaço  $X$  é  $\omega$ -limitado é  $p$ -compacto para todo ultrafiltro livre  $p$  sobre  $\omega$ .

Reciprocamente, se  $X$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$  e  $p$ -compacto para todo ultrafiltro livre  $p$  sobre  $\omega$  então  $X$  é  $\omega$ -limitado.

*Demonstração.* Suponha que  $X$  é  $\omega$ -limitado. Seja  $p$  um ultrafiltro livre sobre  $\omega$  e  $(x_n : n < \omega)$  uma sequência em  $X$ . Por hipótese  $F = \{x_n : n < \omega\}$  é compacto, portanto existe  $x \in \{x_n : n < \omega\}$  que é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$  em  $F$ . Como  $F$  é subespaço de  $X$ , segue que  $x$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$  em  $X$ .

Para a recíproca, suponha que  $X$  não é  $\omega$ -limitado. Então existe  $A \subseteq X$  enumerável tal que  $F = \bar{A}^X$  não é compacto. Seja  $y \in \beta F \setminus F$ . Enumere  $A$  como  $\{x_n : n \in \omega\}$ . Como  $A$  é denso em  $F$  e  $F$  é denso em  $\beta F$ , segue que  $A$  é denso em  $\beta F$ . Assim,  $y$  é ponto de acumulação de  $(x_n : n \in \omega)$ . Logo existe  $p$  ultrafiltro livre sobre  $\omega$  tal que  $y$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n \in \omega)$  em  $\beta F$ . Pela unicidade do  $p$ -limite (o espaço  $\beta F$  é Hausdorff), segue que não existe  $p$ -limite para  $(x_n : n \in \omega)$  em  $F$ . Como  $F$  é fechado em  $X$ , segue que não existe  $p$ -limite para  $(x_n : n \in \omega)$  em  $X$ .  $\square$

### 25.2.2 O produto de um compacto e um enumeravelmente compacto.

**Teorema 25.17.** Seja  $X$  um espaço  $\omega$ -limitado e  $Y$  um espaço enumeravelmente compacto. Então  $X \times Y$  é enumeravelmente compacto.

*Demonstração.* Seja  $((x_n, y_n) : n < \omega)$  uma sequência em  $X \times Y$ . Como  $Y$  é enumeravelmente compacto, existe  $y \in Y$  e um ultrafiltro livre  $p$  tal que  $y$  é  $p$ -limite de  $(y_n : n < \omega)$ .

Como  $X$  é  $\omega$ -limitado, existe  $x \in X$  tal que  $x$  é  $p$ -limite de  $(x_n : n < \omega)$ .

Portanto  $(x, y) \in X \times Y$  é  $p$ -limite de  $((x_n, y_n) : n < \omega)$ . Logo  $(x, y) \in X \times Y$  é ponto de acumulação de  $((x_n, y_n) : n < \omega)$  e  $X \times Y$  é enumeravelmente compacto.  $\square$

## 25.3 Caracterização de $\beta\omega$ usando ultrafiltros.

Para o estudo específico da compactificação de Stone-Čech de  $\omega$ , é interessante tratar os pontos do espaço como ultrafiltros.

**Exemplo 25.18.** ( $\beta\omega$  como espaço de ultrafiltros.) Iremos denotar por  $\beta\omega$  o conjunto dos ultrafiltros de  $\omega$  (em breve veremos por que é uma compactificação de Stone-Čech de  $\omega$ ).

*Demonstração. Uma base para a topologia.* Para cada  $A \subseteq \omega$ , denote por  $\tilde{A} = \{p \in \beta\omega : A \in p\}$ .

Vamos mostrar que se  $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \widetilde{A \cap B}$ . De fato,  $p \in \tilde{A} \cap \tilde{B}$  se e somente se  $p \in \tilde{A}$  e  $p \in \tilde{B}$  se e somente se  $A \in p$  e  $B \in p$  se e somente se  $A \cap B \in p$  se e somente se  $p \in \widetilde{A \cap B}$ .

Para todo  $A, B$  subconjuntos de  $\omega$ , temos que  $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \widetilde{A \cup B}$ . De fato,  $p \in \tilde{A} \cup \tilde{B}$  se e somente se  $p \in \tilde{A}$  ou  $p \in \tilde{B}$  se e somente se  $A \in p$  ou  $B \in p$  se e somente se  $A \cup B \in p$  se e somente se  $p \in \widetilde{A \cup B}$ .

Vamos mostrar que  $\mathcal{B} = \{\tilde{A} : \emptyset \subseteq A \subseteq \omega\}$  é base para uma topologia. De fato,  $\beta\omega = \tilde{\omega}$  então primeira condição de base de abertos está satisfeita. Para a segunda condição temos que a intersecção de dois elementos de  $\mathcal{B}$  é um elemento de  $\mathcal{B}$ . Assim,  $\mathcal{B}$  gera uma topologia em  $\beta\omega$ .

**A topologia é Hausdorff.** De fato, se  $p, q \in \beta\omega$  são distintos, então existe  $A \in p$  tal que  $A \notin q$  (caso contrário,  $p \subseteq q$ , que não pode ocorrer por que  $q$  é maximal). Como  $A \notin q$ , segue que  $\omega \setminus A \in q$ , pois  $q$  é ultrafiltro. Assim,  $p \in \tilde{A}$ ,  $q \in \widetilde{\omega \setminus A}$ . Como  $\tilde{A} \cap \widetilde{\omega \setminus A} = \emptyset$ , segue que  $\beta\omega$  é Hausdorff.

**A topologia é compacta.** Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura por abertos de  $\mathcal{B}$ . Suponhamos por absurdo que para todo  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  finita não cobre  $\beta\omega$ . Pela propriedade das uniões de elementos de  $\mathcal{B}$ , temos que o complementar de  $\bigcup \mathcal{V}$  é um conjunto da forma  $\widetilde{A_{\mathcal{V}}}$  para algum  $A_{\mathcal{V}} \subseteq \omega$ . Por hipótese, temos que  $\{\widetilde{A_{\mathcal{V}}} : \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \text{ finito}\}$  tem PIF ( $\widetilde{A_{\mathcal{V}}} \subseteq \widetilde{A_{\mathcal{W}}}$  se  $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{W}$ ), assim,  $\mathcal{A} = \{A_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \text{ finito}\}$  tem PIF. Seja  $p$  um ultrafiltro que estende  $\mathcal{A}$ . Então  $p \notin U$  para todo  $U \in \mathcal{U}$  ( $\{U\} \subseteq \mathcal{U}$  finito e  $A_{\{U\}} \in p$  com  $U \cap \widetilde{A_{\{U\}}} = \emptyset$ ). Assim  $\mathcal{U}$  não cobre  $\beta\omega$ , uma contradição.

**A imersão.** Para cada  $n \in \omega$ , seja  $[n]$  o filtro gerado por  $\{n\}$ . Temos que  $\{[n]\}$  é aberto em  $\beta\omega$ . Assim  $i : \omega \rightarrow \beta\omega$  tal que  $n \mapsto [n]$  é uma imersão contínua. Claramente o conjunto dos ultrafiltros  $\{[n] : n \in \omega\}$  é denso em  $\beta\omega$ . Assim,  $\beta\omega$  é uma compactificação de  $\omega$ .

**A extensão de  $f$ .** Seja  $f : \omega \rightarrow [0, 1]$  uma função contínua. Dado  $p \in \beta\omega$  considere  $\overline{\{f[A]\}^{[0,1]}} : A \in p$ . Como  $p$  é filtro, segue que  $\overline{\{f[A]\}^{[0,1]}} : A \in p$  tem PIF, assim, pela compacidade de  $[0, 1]$  segue que  $\bigcap \overline{\{f[A]\}^{[0,1]}} : A \in p \neq \emptyset$ . Vamos verificar que  $\bigcap \overline{\{f[A]\}^{[0,1]}} : A \in p$  é um conjunto unitário. De fato, se  $r, s \in \bigcap \overline{\{f[A]\}^{[0,1]}} : A \in p$  distintos, tome  $W_r$  e  $W_s$  abertos disjuntos contendo  $r$  e  $s$  respectivamente. Então  $W_r \cap f[A] \neq \emptyset$  para cada  $A \in p$ . Assim,  $f^{-1}[W_r] \cap A \neq \emptyset$  para cada  $A \in p$ . Como  $p$  é ultrafiltro, segue que  $f^{-1}[W_r] \in p$ . De forma análoga, temos que  $f^{-1}[W_s] \in p$ , mas isto é uma contradição, pois  $f^{-1}[W_r] \cap f^{-1}[W_s] = \emptyset \notin p$ . Assim, seja  $\hat{f}(p)$  o único ponto em  $\bigcap \overline{\{f[A]\}^{[0,1]}} : A \in p$ . Temos que para  $\hat{f}([n]) \in \overline{\{f[A]\}^{[0,1]}} : A \in [n] = \overline{\{f[\{n\}]\}^{[0,1]}} = \{f(n)\}$ . Assim,  $\hat{f} \circ i(n) = f(n)$ .

**A extensão  $\hat{f}$  é contínua.** Tome  $p \in \beta\omega$  e  $W$  uma vizinhança aberta de  $\hat{f}(p)$ . Seja  $V$  uma vizinhança aberta de  $\hat{f}(p)$  tal que  $\overline{V}^{[0,1]} \subseteq W$ . Como visto acima,  $f^{-1}[V] \in p$ . Assim,  $p \in \overline{f^{-1}[V]}^{[0,1]}$ . Vamos verificar que  $\hat{f}[\overline{f^{-1}[V]}^{[0,1]}] \subseteq W$ . De fato, se  $q \in \overline{f^{-1}[V]}^{[0,1]}$  então  $f^{-1}[V] \in q$  implica que  $\hat{f}(q) \in \overline{f[f^{-1}[V]]}^{[0,1]} \subseteq \overline{V}^{[0,1]} \subseteq W$ .  $\square$

## Capítulo 26

# Caracterização de propriedades usando a compactificação de Stone-Čech.

Já vimos que um espaço  $X$   $T_{3\frac{1}{2}}$  é localmente compacto se e somente se  $X$  é aberto em alguma (toda) compactificação Hausdorff de  $X$ . Em particular,  $X$  é localmente compacta se e somente se é um aberto na sua compactificação de Stone-Čech. Isto é chamado de uma caracterização externa, pois usamos a propriedade fora do espaço  $X$ .

### 26.1 Pseudocompacidade e compactificações.

#### 26.1.1 $G_\delta$ -denso.

**Definição 26.1.** Um conjunto  $A$  é  $G_\delta$  se existe uma família enumerável  $\{U_n : n < \omega\}$  de abertos tais que  $A = \bigcap_{n < \omega} U_n$ .

Um conjunto  $D$  é  $G_\delta$ -denso se  $D \cap A \neq \emptyset$  para todo subconjunto  $A$  que seja  $G_\delta$  e não vazio.

**Teorema 26.2.** Seja  $X$  um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$ . São equivalentes:

- 1)  $X$  é pseudocompacto.
- 2)  $X$  é  $G_\delta$ -denso em toda compactificação Hausdorff de  $X$  (onde  $X$  é visto como subespaço da compactificação).
- 3)  $X$  é  $G_\delta$ -denso em  $\beta X$  (assumindo que  $X$  é subespaço de  $\beta X$ ).

*Demonstração.* (1)  $\rightarrow$  2)). Faremos pela contrapositiva. Suponha que  $X$  não é  $G_\delta$ -denso em  $cX$ . Então existe  $(V_n : n < \omega)$  abertos em  $cX$  tais que  $\bigcap_{n < \omega} V_n$  é não vazio e  $X \cap \bigcap_{n < \omega} V_n = \emptyset$ . Fixe um ponto  $y \in \bigcap_{n < \omega} V_n$ . Usando a regularidade de  $cX$ , podemos definir  $U_n$  indutivamente tal que

$$y \in U_0 \subseteq V_0 \text{ e}$$

$$y \in U_{n+1} \subseteq \overline{U_{n+1}}^{cX} \subseteq U_n \cap V_{n+1} \text{ para cada } n < \omega.$$

Então  $\{U_n \cap X : n < \omega\}$  é uma família decrescente de abertos não vazios (note que  $y \in U_n \subseteq \overline{U_n \cap X}^{cX}$ ) e  $\bigcap_{n < \omega} \overline{U_n \cap X}^{cX} \subseteq X \cap (\bigcap_{n < \omega} \overline{U_n \cap X}^{cX}) \subseteq X \cap (\bigcap_{n < \omega} \overline{U_n}^{cX}) \subseteq X \cap (\bigcap_{n < \omega} V_n) = \emptyset$ .

Portanto  $\{U_n \cap X : n < \omega\}$  testemunha que  $X$  não é pseudocompacto (*uma das equivalências vistas para espaços  $T_{3\frac{1}{2}}$* ).

(2)  $\rightarrow$  3)). É imediato, pois  $\beta X$  é uma das compactificações.

(3)  $\rightarrow$  1)). Faremos pela contrapositiva. Suponha que  $X$  não é pseudocompacto. Então existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ilimitada. Seja  $g(x) = \frac{1}{1+|f(x)|}$ . Temos então que  $g$  é uma função contínua, tal que  $0 < g(x) \leq 1$  para todo  $x \in X$ , mas  $0 \in \{g(x) : x \in X\}$ . Como  $g$  é limitada e contínua, segue da compactificação de Stone-Čech que existe  $\hat{g}$  extensão de  $g$  em  $\beta X$ . Tome os abertos  $U_n = \hat{g}^{-1}[[0, \frac{1}{2^n}]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  é um  $G_\delta$  não vazio de  $\beta X$  (*pois  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{g}^{-1}[[0, \frac{1}{2^n}]$  e o termo a direita é uma intersecção decrescente de fechados e portanto um fechado não vazio do compacto  $\beta X$* ).

Então  $A \cap X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g^{-1}[[0, \frac{1}{2^n}] = g^{-1}[\{0\}] = \emptyset$ . Assim,  $A$  testemunha a negação de 3).  $\square$

## 26.2 Paracompacidade e compactificações.

### 26.2.1 O Teorema de Tamano.

**Teorema 26.3.** Seja  $X$  um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$ . São equivalentes:

- 1)  $X$  é paracompacto.
- 2) Para toda compactificação Hausdorff  $cX$  de  $X$  temos que  $cX \times X$  é normal.
- 3) O produto  $\beta X \times X$  é normal.
- 4) Existe uma compactificação Hausdorff  $cX$  de  $X$  tal que  $cX \times X$  é normal.

*Demonstração.* Já vimos que o produto de um paracompacto por um compacto é paracompacto. Espaços paracompactos Hausdorff são normais. Assim, 1)  $\rightarrow$  2). As implicações 2)  $\rightarrow$  3) e 3)  $\rightarrow$  4) são imediatas.

Assim, resta verificar 4)  $\rightarrow$  1). Seja  $cX$  uma compactificação tal que  $cX \times X$  é normal. Iremos assumir sem perda de generalidade que  $X$  é um subespaço de  $cX$ .

Seja  $\{U_i : i \in I\}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Como  $X$  é um subespaço de  $cX$ , existe  $V_i$  aberto de  $cX$  tal que  $V_i \cap X = U_i$  para cada  $i \in I$ . Como  $cX$  é Hausdorff, temos que  $\{(y, y) : y \in cX\}$  é fechado em  $cX \times cX$ . Assim  $\Delta := \{(x, x) : x \in X\} = \{(y, y) : y \in cX\} \cap (cX \times X)$  é fechado em  $cX \times X$ . Seja  $F = cX \setminus (\bigcup_{i \in I} V_i)$  (note que  $F$  pode ser um fechado vazio). Então  $F \times X$  e  $\Delta$  são fechados disjuntos de  $cX \times X$  e pela normalidade de  $cX \times X$  existe uma função contínua  $f : cX \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f[F \times X] = \{1\}$  e  $f[\Delta] = \{0\}$  (note que se  $F \times X = \emptyset$  então a função constantemente 0 satisfaz as condições).

Seja  $\rho(x, y) = \sup_{a \in cX} |f(a, x) - f(a, y)|$ . Afirmamos que  $\rho$  é uma pseudométrica contínua em  $X$ .

$\rho$  é **pseudométrica**. Como usamos o módulo, temos que  $\rho(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in X \times X$ . Para cada  $x \in X$ , temos  $\rho(x, x) = \sup_{a \in cX} |f(a, x) - f(a, x)| = 0$ .

$$\rho(x, y) = \sup_{a \in cX} |f(a, x) - f(a, y)| = \sup_{a \in cX} |f(a, y) - f(a, x)| = \rho(y, x).$$

Resta verificarmos a desigualdade triangular. Temos

$$|f(a, x) - f(a, z)| \leq |f(a, x) - f(a, y)| + |f(a, y) - f(a, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \text{ para todo } a \in cX. \text{ Assim } \rho(x, z) = \sup_{a \in cX} |f(a, x) - f(a, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z). \quad \square$$

$\rho$  é **uma pseudométrica contínua**. Isto é equivalente a mostrar que a topologia gerada pela pseudométrica é menos fina que a topologia de  $X$ . Fixe  $x_0 \in X$  e  $\epsilon > 0$ . Para isto, basta mostrarmos que  $B_\rho(x_0, \epsilon)$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ . Tome  $\delta < \epsilon$ . Para cada  $y \in cX$  seja  $O_{y,1} \times O_{y,2}$  uma vizinhança básica de  $(y, x_0)$  tal que a oscilação  $\delta(f|_{O_{y,1} \times O_{y,2}}) < \delta$ . Como  $\{O_{y,1} : y \in cX\}$  é uma cobertura aberta do compacto  $cX$ , existe  $Y_0 \subseteq cX$  finito tal que  $cX \subseteq \bigcup_{y \in Y_0} O_{y,1}$ . Tome  $O_2 = \bigcap_{y \in Y_0} O_{y,2}$ . Então para todo  $a \in cX$  e  $x \in O_2$  temos que existe  $y \in Y_0$  tal que  $(a, x), (a, x_0) \in O_{y,1} \times O_{y,2}$  e portanto  $|f(a, x) - f(a, x_0)| < \delta$ . Portanto, temos que  $\rho(x, x_0) = \sup_{a \in cX} |f(a, x) - f(a, x_0)| \leq \delta < \epsilon$ . Portanto, temos que  $O_2$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $X$  tal que  $O_2 \subseteq B_\rho(x_0, \epsilon)$ .  $\square$

Considere a cobertura  $\{B_\rho(x, \frac{1}{2}) : x \in V\}$ . Como é uma cobertura por  $\rho$ -abertos e a topologia gerada por  $\rho$  é pseudocompacta (por  $\rho$  ser pseudométrica), segue que existe  $\mathcal{W}$  um refinamento  $\rho$ -aberto de  $\{B_\rho(x, \frac{1}{2}) : x \in V\}$ . Temos que para cada  $W \in \mathcal{W}$  existe  $x \in X$  tal que  $W \subseteq B_\rho(x, \frac{1}{2})$ . Assim,  $\overline{W}^{cX} \subseteq \overline{B_\rho(x, \frac{1}{2})}^{cX}$ .

Temos para todo  $x, y \in X$  que  $f(y, x) = |f(y, x) - f(y, y)| \leq \rho(y, x)$ . Assim, temos que  $f(y, x) \leq \frac{1}{2}$  para todo  $y \in B_\rho(x, \frac{1}{2})$ . Portanto, temos que se  $z \in \overline{B(x, \frac{1}{2})}^{cX}$  então  $f(z, x) \leq \frac{1}{2}$ . Assim,  $\overline{B(x, \frac{1}{2})}^{cX} \cap F = \emptyset$ . Logo,  $\overline{W}^{cX} \cap F = \emptyset$  para todo  $W \in \mathcal{W}$ .

Assim, temos que  $\overline{W}^{cX}$  é um compacto coberto por  $\{V_i : i \in I\}$ . Fixe  $I_W \subseteq I$  finito tal que  $\overline{W}^{cX} \subseteq \bigcup \{V_i : i \in I_W\}$ . Note que  $W \subseteq \bigcup \{V_i \cap X : i \in I_W\} = \bigcup \{U_i : i \in I_W\}$ .

Afirmamos que  $\mathcal{O} = \{W \cap U_i : W \in \mathcal{W}, i \in I_W\}$  é um refinamento aberto localmente finito de  $\{U_i : i \in I\}$ .

**A família  $\mathcal{O}$  é uma cobertura aberta de  $X$ .** De fato, se  $x \in X$  então existe  $W \in \mathcal{W}$  tal que  $x \in W$ . Como  $W \subseteq \bigcup_{i \in I_W} U_i$ , segue que existe  $i \in I_W$  tal que  $x \in W \cap U_i$ .

**A família  $\mathcal{O}$  é refinamento de  $\{U_i : i \in I\}$ .** É claro, pois dado  $W \in \mathcal{W}$  e  $i \in I_W$ , temos que  $W \cap U_i \subseteq U_i$ , onde  $i \in I$  (pois  $I_W \subseteq I$ ).

**A família  $\mathcal{O}$  é localmente finita.** Seja  $x \in X$  um ponto arbitrário de  $X$ . Como  $\mathcal{W}$  é localmente finita, existe  $V$  uma vizinhança aberta de  $x$  tal que  $\mathcal{W}_x = \{W \in \mathcal{W} : W \cap V \neq \emptyset\}$  é finita. Então temos que  $\{O \in \mathcal{O} : O \cap V \neq \emptyset\} \subseteq \{W \cap U_i : W \in \mathcal{W}_x, i \in I_W\}$ . Como  $\mathcal{W}_x$  é finito e  $I_W$  é finito para cada  $W \in \mathcal{W}_x$ , segue que  $\{O \in \mathcal{O} : O \cap V \neq \emptyset\}$  é finito. Logo,  $\mathcal{O}$  é localmente finita.  $\square$

### 26.3 Čech-completos e compactificações.

**Definição 26.4.** Um subconjunto  $A$  de  $X$  é  $F_\sigma$  se existem fechados  $F_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

A definição de Čech-completo virá de uma caracterização externa usando compactificações. Primeiro iremos provar uma relação entre os remainders de compactificações.

**Lema 26.5.** Seja  $A$  é um conjunto denso de um espaço Hausdorff  $X$  e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua para um espaço arbitrário  $Y$ . Se  $f|_A : A \rightarrow f[A]$  é um homeomorfismo então  $f[X \setminus A] \cap f[A] = \emptyset$ .

*Demonstração.* Suponha que  $x \in X \setminus A$  e  $a \in A$ . Suponhamos por absurdo que  $f(x) = f(a)$ . Como  $X$  é Hausdorff, podemos tomar  $U$  e  $V$  vizinhanças abertas disjuntas de  $x$  e  $a$  em  $X$  respectivamente. Como  $x \in U \subseteq \overline{U}^X = \overline{A \cap U}^X$  (a última igualdade segue de  $A$  denso e  $U$  aberto), segue que  $f(a) = f(x) \in \overline{f[A \cap U]}^{f[X]}$ .

Então podemos fixar uma rede contida em  $f[A \cap U]$  que converge para  $f(a)$ . Seja  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  uma rede em  $A \cap U$  tal que  $(f(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $f(a) \in f[X]$ . Como  $f^{-1} : f[X] \rightarrow A$  é homeomorfismo, segue que  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $a$ , mas isto contradiz o fato que  $a \notin \overline{U}$ .  $\square$

**Teorema 26.6.** Se  $f : c_1X \rightarrow c_2X$   $f[c_1[X]] = c_2[X]$  satisfazendo  $f \circ c_1 = c_2$  então  $f[c_1[X]] = c_2[X]$ .

Então  $f[c_1[X]] = c_2[X]$  e  $f[c_1X \setminus c_1[X]] = c_2X \setminus c_2[X]$ . Note que também temos  $c_1X \setminus c_1[X] = f^{-1}[c_2X \setminus c_2[X]]$

*Demonstração.* A primeira igualdade segue de  $f \circ c_1(x) = c_2(x)$  para cada  $x \in X$ .

Para ver a segunda parte, primeiro note que  $\emptyset = f[c_1X \setminus c_1[X]] \cap f[c_1[x]] = f[c_1X \setminus c_1[X]] \cap c_2[X]$  (a primeira igualdade sai do lema anterior). Assim,  $f[c_1X \setminus c_1[X]] \subseteq c_2X \setminus c_2[X]$ .

Vamos agora ver a inclusão reversa. Como  $c_2$  é compacto e  $c_2[X]$  é denso em  $X$ , segue que  $f[c_1X] = c_2X$ . Como  $f[c_1[X]] = c_2[X]$ , segue que  $f[c_1X \setminus c_1[X]] \supseteq c_2X \setminus c_2[X]$ .

Então temos  $f[c_1X \setminus c_1[X]] = c_2X \setminus c_2[X]$ .  $\square$

**Teorema 26.7.** Seja  $X$  um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  São equivalentes:

- 1) Para cada compactificação  $cX$  do espaço  $X$ , o remainder  $cX \setminus c[X]$  é um subconjunto  $F_\sigma$  de  $cX$ .
- 2) Para alguma compactificação  $cX$  do espaço  $X$ , o remainder  $cX \setminus c[X]$  é um subconjunto  $F_\sigma$  de  $cX$ .
- 3) O remainder  $\beta X \setminus \beta[X]$  é um subconjunto  $F_\sigma$  de  $\beta X$ .

*Demonstração.* A implicação 1)  $\rightarrow$  2) é imediata.

Vamos mostrar que 2)  $\rightarrow$  3). Seja  $cX$  uma compactificação tal que  $cX \setminus c[X]$  é um  $F_\sigma$  de  $cX$ . Seja  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  fechados tais que  $cX \setminus c[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

Como  $\beta X \geq cX$ , existe  $f : \beta X \rightarrow cX$  tal que  $f \circ \beta(x) = c(x)$  para todo  $x \in X$ . Temos então pelo teorema anterior que  $\beta X \setminus \beta[X] = f^{-1}[cX \setminus c[X]] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[F_n]$ . Como  $f$  é contínua, temos que  $f^{-1}[F_n]$  são fechados em  $\beta X$ . Assim,  $\beta X \setminus \beta[X]$  é um  $F_\sigma$  em  $\beta X$ .

3)  $\rightarrow$  1). Suponhamos que  $\beta X \setminus \beta[X]$  é um  $F_\sigma$  em  $\beta X$  e seja  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  fechados tais que  $\beta X \setminus \beta[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Seja  $cX$  uma compactificação de  $X$ . Então temos  $cX \leq \beta X$ . Seja  $f$  uma testemunha dessa desigualdade de compactificações. Temos então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f[F_n] = f[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n] = f[\beta X \setminus \beta[X]] = cX \setminus c[X]$ , onde a última igualdade segue do teorema anterior. Como  $F_n$  é um fechado dentro do compacto  $\beta X$ , segue que  $f[F_n]$  é compacto no Hausdorff  $cX$ . Assim,  $cX \setminus c[X]$  é um  $F_\sigma$  em  $cX$ .  $\square$

**Definição 26.8.** Um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  é chamado de Čech-completo se  $cX \setminus c[X]$  é um  $F_\sigma$  de  $cX$  para alguma compactificação Hausdorff de  $X$ . (ou qualquer uma das outras duas equivalências acima).

Note que um espaço  $X$   $T_{3\frac{1}{2}}$  é localmente compacto se e somente se  $\beta[X]$  é aberto em  $\beta X$  se e somente se  $\beta X \setminus \beta[X]$  é fechado em  $\beta X$ . Portanto espaços localmente compacto Hausdorff são Čech-completos.

A definição de Čech-completo é externa. Vamos dar uma definição interna. Antes é preciso introduzir um novo conceito auxiliar.

**Definição 26.9.** Dizemos que um conjunto  $A$  tem diâmetro menor que uma cobertura  $\mathcal{C}$  (denotando isto por  $\delta(A) < \mathcal{C}$ ) se existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $A \subseteq C$ . Note que esta definição se relaciona a diâmetro em espaços métricos se tomarmos uma cobertura por bolas abertas de raio fixado.

**Teorema 26.10.** Um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  é Čech-completo se e somente se existe uma família enumerável  $\{\mathcal{C}_i : i \in \mathbb{N}\}$  de coberturas abertas de  $X$  tais que para toda família de fechados  $\mathcal{F}$  de  $X$  com PIF tais que existem elementos de  $\mathcal{F}$  com diâmetro menor que  $\mathcal{C}_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  então  $\bigcap \mathcal{F}$  é um conjunto não vazio.

*Demonstração.* Suponhamos que  $X$  é Čech-completo. Seja  $cX$  uma compactificação de  $X$ . Para facilitar a notação vamos assumir que a compactificação é tal que  $c(x) = x$  para cada  $x \in X$ . Como  $cX \setminus c[X]$  é  $F_\sigma$ , existe  $(F_i : i \in \mathbb{N})$  fechados em  $cX$  tal que  $cX \setminus c[X] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ . Tome  $U_i = cX \setminus F_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

Então  $X = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ . Para cada  $x \in X$  e  $i \in \mathbb{N}$  seja  $V_{x,i}$  aberto em  $cX$  tal que  $x \in V_{x,i} \subseteq \overline{V_{x,i}}^{cX} \subseteq U_i$ . Tal  $V_{x,i}$  existe pela regularidade de  $cX$ . Seja  $B_{x,i} = V_{x,i} \cap X$  e tome  $\mathcal{C}_i = \{B_{x,i} : x \in X\}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Claramente cada  $\mathcal{C}_i$  é uma cobertura de  $X$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma família de fechados de  $X$  com PIF que possui elementos de diâmetro menor que  $\mathcal{C}_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Temos que  $\{\overline{F}^{cX} : F \in \mathcal{F}\}$  tem PIF. Portanto existe  $y \in \bigcap \{\overline{F}^{cX} : F \in \mathcal{F}\}$ . Basta mostrarmos que  $y \in X$ . De fato, para cada  $i \in \mathbb{N}$  existe  $F_i \in \mathcal{F}$  e  $x_i \in X$  tal que  $F_i \subseteq B_{x_i,i} \in \mathcal{C}_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Então  $y \in \overline{F_i}^{cX} \subseteq \overline{B_{x_i,i}}^{cX} = \overline{V_{x_i,i}}^{cX} \subseteq U_i$ . Assim,  $y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = X$  e  $y \in X$ .

Para a recíproca, seja  $\{\mathcal{C}_i : i \in \mathbb{N}\}$  uma família de coberturas abertas de  $X$  como no enunciado.

Seja  $cX$  uma compactificação de  $cX$  em que iremos assumir que  $c(x) = x$  para todo  $x \in X$ .

Para cada  $U \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$ , seja  $V_U$  aberto em  $cX$  tal que  $V_U \cap X = U$ . Temos que  $X \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}_i\} \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup \{V_U : U \in \mathcal{U}_i\}$ . Como  $\bigcup \{V_U : U \in \mathcal{U}_i\}$  é aberto em  $cX$  para cada  $i$ , basta mostrar que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup \{V_U : U \in \mathcal{U}_i\} \subseteq X$  para termos que  $X$  é um  $G_\delta$  de  $cX$ . Tome  $y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup \{V_U : U \in \mathcal{U}_i\}$  e seja  $\mathcal{V}_y$  as vizinhanças abertas de  $y$ .

**Afirmção:**  $y \in X$ . Tome  $\mathcal{F} = \{X \cap \overline{W}^{cX} : W \in \mathcal{V}_y\}$ . Claramente  $\mathcal{F}$  tem PIF, pois a intersecção finita de elementos de  $\mathcal{F}$  contém uma vizinhança aberta de  $y$  intersectada com  $X$ , onde  $X$  é denso em  $cX$ . Fixe  $i \in \mathbb{N}$ . Por hipótese, existe  $U \in \mathcal{U}_i$  tal que  $y \in V_U$ . Seja  $O \in \mathcal{V}_y$  tal que  $y \in O \subseteq \overline{O}^{cX} \subseteq V_U$ . Então  $X \cap \overline{O}^{cX} \subseteq X \cap V_U = U$  e portanto o diâmetro de  $O \subseteq \overline{O}^{cX} \in \mathcal{F}$  é menor que  $\mathcal{C}_i$ .

Como  $\mathcal{F}$  satisfaz as hipóteses, temos então que  $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} = X \cap \bigcap \{\overline{W}^{cX} : W \in \mathcal{V}_y\} = X \cap \{y\}$ . Assim,  $y \in X$ .  $\square$

**Proposição 26.11.** Todo espaço completamente metrizável é Čech-completo.

*Demonstração.* Fixe uma métrica completa e tome  $\mathcal{C}_i$  o conjunto das bolas de raio  $\frac{1}{2^i}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Dada uma família de fechados  $\mathcal{F}$  tais que existam conjuntos de diâmetro  $\mathcal{C}_i$ , então tome  $F_i \in \mathcal{F}$  com  $F_i$  de diâmetro  $\mathcal{C}_i$ . Como o diâmetro de  $\bigcap_{i=0}^j F_i$  na métrica completa é  $\leq \frac{1}{2^{j-1}}$ , segue que existe  $x \in X$  tal que  $\bigcap \{F_i : i \in \mathbb{N}\} = \bigcap \{\bigcap_{i=0}^j F_i : j \in \mathbb{N}\} = \{x\}$ . Falta verificarmos que  $x \in \bigcap \mathcal{F}$ . Supondo por absurdo que  $x \notin F$  com  $F \in \mathcal{F}$ , como  $F$  é fechado, segue que  $d(x, F) > 0$ . Tome  $j \in \mathbb{N}$  tal que a distância entre  $x$  e  $F$  é estritamente maior que  $\frac{1}{2^{j-1}}$ . Temos que  $x \in F_j$  e o diâmetro de  $F_j \leq \frac{1}{2^{j-1}}$ . Assim, se  $y \in F_j \cap F$  satisfaria  $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{j-1}}$  devido ao diâmetro de  $F_j$  e  $d(x, y) \geq d(x, F) > \frac{1}{2^{j-1}}$  o que é uma contradição. Assim,  $d(x, F) = 0$  e  $x \in F$ .  $\square$

**Teorema 26.12.** (Teorema de Baire para espaços Čech-completos) Seja  $X$  um espaço  $T_{3\frac{1}{2}}$  e  $U_n$  é um aberto denso de  $X$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  então  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  é denso em  $X$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{C}_i$  uma família de coberturas abertas de  $X$  que testemunham que  $X$  satisfaz a equivalência para ser Čech-completo. Dado  $W$  um aberto não vazio de  $X$ , fixe  $x_0 \in W \cap U_0$  e  $V_0 \in \mathcal{C}_0$  tal que  $x_0 \in V_0$ . Usando regularidade, tome  $W_0$  aberto tal que  $x_0 \in W_0 \subseteq \overline{W_0} \subseteq W \cap U_0 \cap V_0$ . Supondo  $W_j$  abertos não vazios definidos tais que

- 1)  $\overline{W_0} \subseteq W \cap U_0$ .
- 2)  $\overline{W_i}$  tem diâmetro menor que  $\mathcal{C}_i$  para todo  $i \leq j$ .
- 3)  $\overline{W_{i+1}} \subseteq W_i \cap U_{i+1}$

Temos que  $W_0$  foi definida para satisfazer 1) e 2). A condição 3) está trivialmente satisfeita para  $j = 0$ .

Supondo definido até  $j$ , iremos definir para  $j + 1$ .

Tome  $x_{j+1} \in W_j \cap U_{j+1}$ . Como  $\mathcal{C}_{j+1}$  é uma cobertura, existe  $V_{j+1} \in \mathcal{C}_{j+1}$  tal que  $x_{j+1} \in V_{j+1}$ . Usando a regularidade, existe um aberto  $W_{j+1}$  tal que  $x \in W_{j+1} \subseteq \overline{W_{j+1}} \subseteq W_j \cap U_{j+1} \cap V_{j+1}$ . Claramente condições 2) e 3) estão satisfeitas.

O conjunto  $\{\overline{W}_i : i \in \mathbb{N}\}$  é uma família de fechados tal que cada  $\overline{W}_i$  tem diâmetro menor que  $\mathcal{C}_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Assim,  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{W}_i \neq \emptyset$ . Como  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{W}_i \subseteq W \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$  e  $W$  é um aberto arbitrário, segue que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$  é denso.  $\square$

**Exercício 26.13.** Discuta se existe um espaço  $X \subseteq \beta\omega$  que seja:

pseudocompacto e não seja Čech-completo,

enumeravelmente compacto e não seja Čech-completo.

(note que  $\omega$  é localmente compacto, assim, existem Čech-completos que não são pseudocompactos nem enumeravelmente compactos.)



## Capítulo 27

# Conexidade. Conexidade local.

### 27.1 Conexidade

#### 27.1.1 Definição

Um espaço é desconexo se ele pode ser dividido em dois clopens não vazios. Assim, um espaço é conexo quando ele não é desconexo.

**Definição 27.1.** Um espaço é conexo se os únicos conjuntos abertos e fechados (clopen) são  $\emptyset$  e  $X$ .

**Proposição 27.2.** Um espaço  $X$  é conexo se e somente se  $A, B$  são subespaços abertos de  $X$  tal que  $X = A \cup B$  e  $A \cap B = \emptyset$  então  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ .

*Demonstração.* Suponha que  $X$  é conexo. Suponha que  $X = A \cup B$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Então  $A$  e  $B$  são clopen, assim  $A = \emptyset$  ou  $A = X$  (e assim, respect.  $B = X$  ou  $B = \emptyset$ ).

Suponha que  $X$  é desconexo. Então existe  $U$  clopen com  $\emptyset \neq U \neq X$ . Assim,  $A = U$  e  $B = X \setminus U$  são abertos tais que  $X = A \cup B$  e  $A \cap B = \emptyset$ , mas  $A \neq \emptyset \neq B$  e assim, a recíproca está provada pela contrapositiva.  $\square$

**Teorema 27.3.** Um subespaço  $Y$  de  $X$  é conexo se e somente se não existem  $A, B$  subespaços abertos de  $X$  tais que  $Y \subseteq A \cup B$  e  $Y \cap A \cap B = \emptyset$  e  $Y \cap A \neq \emptyset \neq Y \cap B$ .

*Demonstração.* Faremos a ida pela contrapositiva. Suponha que existem  $A$  e  $B$  abertos em  $X$  tais que  $Y \subseteq A \cup B$  e  $Y \cap A \cap B = \emptyset$  e  $Y \cap A \neq \emptyset \neq Y \cap B$ . Então  $Y \cap A$  e  $Y \cap B$  são clopens não vazios de  $Y$  e assim  $Y$  é desconexo.

Faremos a volta também pela contrapositiva. Suponhamos que  $Y$  não seja conexa. Então existe  $U$  clopen em  $Y$  com  $\emptyset \neq U \neq Y$ . Seja  $A$  um aberto de  $X$  tal que  $A \cap Y = U$ . Seja  $B$  um aberto de  $X$  tal que  $B \cap Y = Y \setminus U$  ( $Y \setminus U$  é aberto pois  $U$  é fechado em  $Y$ ). Então  $Y = U \cup (Y \setminus U) \subseteq A \cup B$ ,  $Y \cap A \cap B = (Y \cap A) \cap (Y \cap B) = U \cap (Y \setminus U) = \emptyset$ ,  $Y \cap A = U \neq \emptyset$  e  $Y \cap B = Y \setminus U \neq \emptyset$ .  $\square$

#### 27.1.2 Ordens lineares.

**Proposição 27.4.** Seja  $X$  é linearmente ordenado. Então  $X$  é conexo se e somente se  $X$  denso em si mesmo e todo subconjunto não vazio limitado superiormente possui supremo.

*Demonstração. Ida.* Faremos pela contrapositiva. Se  $X$  não é denso em si mesmo, então existe  $a, b \in X$  tais que não existe  $c \in X$  tal que  $a < c < b$ . Assim,  $A = \{x \in X : x \leq a\} = \{x \in X : x < b\}$  é um aberto e fechado distinto de  $\emptyset$  e  $X$ .

Seja  $Y \subseteq X$  não vazio, limitado superiormente por  $b \in X$  tal que  $Y$  não possui supremo. Seja  $A = \{x \in X : (\exists y \in Y)x < y\}$ . Como  $Y$  não possui máximo, segue que  $Y \subseteq A$ . Além disso, temos que  $\{x \in X : x < y\}$  é um aberto de  $X$  e  $A = \bigcup_{y \in Y} \{x \in X : x < y\}$ . Assim,  $A$  é aberto.

Temos que  $\emptyset \neq A \neq X$  ( $Y \subseteq A \subseteq X \setminus \{b\}$ ). Assim, falta apenas mostramos que  $A$  é fechado. Para isto vamos mostrar que  $X \setminus A$  é aberto.

Seja  $z \in X \setminus A$ . Pela definição de  $A$ , segue que  $z \geq y$  para todo  $y \in Y$ . Como  $z$  não é supremo de  $Y$ , segue que existe  $t \geq y$  para todo  $y \in Y$  tal que  $t < z$ . Para todo  $u \in \{x \in X : x > y\}$ , temos que  $u > y$

para todo  $y \in Y$ . Assim,  $u \notin A$ . Logo,  $z \in \{x \in X : x > y\} \subseteq X \setminus A$ . Assim, todo ponto de  $X \setminus A$  contém um aberto contido em  $X \setminus A$ . Logo  $X \setminus A$  é aberto.

**Volta.** Sejam  $A$  um aberto e fechado não vazio de  $X$ . Suponhamos por absurdo que  $A \neq X$  e tome  $b \in B := X \setminus A$ . Vamos primeiro supor que existe  $a \in A$  tal que  $a < b$ . Tome  $y = \sup\{x \in A : x < b\}$ . O supremo existe por que  $\{x \in A : x < b\}$  é um conjunto não vazio e limitado superiormente. Se  $y$  é máximo então  $y \in A$ . Se  $y$  não fosse máximo então  $y$  é um ponto de acumulação de  $A$ , como  $A$  é fechado, segue que  $y \in A$ . Por outro lado, como  $y$  não é máximo de  $X$  e  $A$  é aberto, existe  $c \in X$  tal que  $[y, c] \subseteq A$ . Como  $c \leq b$ , temos então que  $[y, c] \subseteq \{x \in A : x < b\}$ . Como  $X$  é denso em si mesmo, existe  $z \in ]y, c[$ . Por hipótese,  $z \in [y, c] \subseteq A$ . Assim,  $y < z \leq \sup\{x \in A : x < b\} = y$ , uma contradição.

No outro caso, temos que existe  $a \in A$  tal que  $b < a$ . Tome  $y = \sup\{x \in B : x < a\}$ . O supremo existe por que  $\{x \in B : x < a\}$  é um conjunto não vazio e limitado superiormente. Usando o fato que  $B$  é aberto e fechado, iremos concluir similarmente ao caso anterior que  $y$  não é supremo de  $\{x \in B : x < a\}$  e teremos uma contradição.

Assim, concluímos que  $X = A$ , logo  $X$  é conexo.  $\square$

**Corolário 27.5.** Um subconjunto de  $\mathbb{R}$  é conexo se e somente se é um intervalo.

### 27.1.3 Imagem e produtos de conexos.

**Teorema 27.6.** A imagem contínua de conexo é conexa.

*Demonstração.* Suponha que  $f : X \rightarrow Y$  é contínua e  $f[X]$  não é um conexo. Então existe  $A \subseteq f[X]$  aberto e fechado em  $f[X]$  tal que  $\emptyset \neq A \neq f[X]$ . Como  $f$  é contínua e sobrejetora sobre  $f[X]$ , segue que  $f^{-1}[A]$  é um aberto e fechado e  $\emptyset \neq f^{-1}[A] \neq X$ . Assim,  $X$  não é conexo.  $\square$

**Teorema 27.7.** Se  $X$  é conexo e infinito e  $T_{3\frac{1}{2}}$  então  $|X| \geq 2^\omega$ .

*Demonstração.* Seja  $x, y \in X$  distintos. Como  $X$  é  $T_1$ , temos que  $\{y\}$  é um conjunto fechado. Como  $X$  é completamente regular, existe uma função contínua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  e  $f(y) = 1$ . Assim,  $f[X]$  é um conjunto conexo contendo  $[0, 1]$ . Logo,  $|X| \geq |f[X]| = |[0, 1]| = 2^\omega$ .  $\square$

**Teorema 27.8.** Se  $Y$  é um subespaço conexo de  $X$  e  $Y \subseteq Z = \overline{Y}^Z \subseteq X$  então  $Z$  é conexo.

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que  $Z$  não é conexo. Então existe  $A$  aberto e fechado em  $Z$  tal que  $\emptyset \neq A \neq Z$ . Então  $A$  e  $Z \setminus A$  são abertos não vazios de  $Z$ , logo,  $A \cap Y$  e  $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (Z \setminus A)$  são abertos e fechados não vazios de  $Y$ . Assim,  $Y$  não é conexo.  $\square$

**Teorema 27.9.** Se  $\{C_i : i \in I\}$  são conexos e  $C_i \cap C_j$  são não vazios, para todo  $i, j \in I$  então  $\bigcup_{i \in I} C_i$  é conexo.

*Demonstração. Primeiro caso.* Vamos supor que existe  $x \in X$  tal que  $x \in \bigcap_{i \in I} D_i$  e  $D_i$  é conexo para cada  $i \in I$  então  $D = \bigcup_{i \in I} D_i$  é conexo.

Seja  $A$  um aberto e fechado em  $D$ . Então  $B = D \setminus A$  é um aberto e fechado em  $D$ . Vamos assumir primeiro que  $x \in A$ .

Como  $A$  é aberto e fechado em  $D$  então  $A \cap D_i$  é aberto e fechado não vazio de  $D_i$ . Assim, pela conexidade de  $D_i$ , segue que  $A \cap D_i = D_i$ . Como  $x \in D_i$  para todo  $i \in I$ , segue que  $D_i \subseteq A$  para todo  $i \in I$ . Assim,  $D = \bigcup_{i \in I} D_i \subseteq A$ . Logo  $A = D$ .

Caso  $x \notin A$ , então temos  $x \in B$  e assim, concluiremos que  $D = B$  e assim,  $X = \emptyset$ . Logo os únicos abertos e fechados de  $D$  são  $\emptyset$  e  $D$  e portanto  $D$  é conexo.

**Caso geral.** Fixe  $k \in I$ . Se  $\{C_i : i \in I\}$  são conexos e  $C_i \cap C_j$  são não vazios, para todo  $i, j \in I$ , então tomemos  $D_i = C_k \cup C_i$ . Como  $C_k \cap C_i \neq \emptyset$ , segue do primeiro caso que  $D_i = C_k \cap C_i$  é um conexo. Fixe  $x \in C_k$ . Então  $x \in D_i$  para cada  $i \in I$ . Assim, pelo primeiro caso, temos que  $\bigcup_{i \in I} C_i = C_k \cup (\bigcup_{i \in I} C_i) = \bigcup_{i \in I} (C_k \cup C_i) = \bigcup_{i \in I} D_i$  é conexo.  $\square$

**Proposição 27.10.** O produto finito de espaços conexos é conexo.

*Demonstração.* Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços conexos não vazios. Dado  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ , temos que  $X \times \{y_0\}$  e  $\{x_0\} \times Y$  são conexos por serem homeomorfos a  $X$  e  $Y$  respectivamente. Assim,  $Z_{(x_0, y_0)} := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$  são conexos de  $X \times Y$  com  $(x_0, y_0) \in (X \times \{y_0\}) \cap (\{x_0\} \times Y)$ . Assim,  $Z_{(x_0, y_0)}$  é

conexo. Temos que  $\{Z_{(x,y)} : (x,y) \in X \times Y\}$  é uma família de conexos tais que a intersecção dois a dois é não vazia (de fato,  $(x,y')$  e  $(x',y)$  pertencem a  $Z_{(x,y)} \cap Z_{(x',y')}$ ). Assim,

$$X \times Y = \bigcup \{Z_{(x,y)} : (x,y) \in X \times Y\} \text{ é conexo.}$$

Por indução finita, podemos então concluir que o produto finito de conexos é conexo.  $\square$

**Teorema 27.11.** O produto de Tychonoff de espaços conexos é conexo.

*Demonstração.* Dada uma família de espaços conexos  $\{X_i : i \in I\}$ , fixe  $a_i \in X_i$  para cada  $i \in I$ . Seja  $Z = \bigcup_{J \subseteq I, \text{ finito}} \prod_{j \in J} X_j \times \prod_{i \in I \setminus J} \{a_i\}$ . Cada elemento da família cuja união é  $Z$  é um conexo pela proposição anterior e  $(x_i : i \in I) \in \bigcap_{J \subseteq I, \text{ finito}} \prod_{j \in J} X_j \times \prod_{i \in I \setminus J} \{a_i\}$ . Assim  $Z$  é conexo.

Dado um aberto básico  $\prod_{i \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$ , temos que  $\prod_{i \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \cap Z \supseteq \prod_{i \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \cap \prod_{j \in J} X_j \times \prod_{i \in I \setminus J} \{a_i\} \neq \emptyset$ . Assim,  $Z$  é um conexo denso de  $\prod_{i \in I} X_i$ . Logo, o fecho de  $Z$  que é  $\prod_{i \in I} X_i$ , é conexo.  $\square$

### 27.1.4 Um espaço conexo enumerável.

**Exemplo 27.12.** Existe um espaço Hausdorff enumerável e conexo. Em particular, toda função contínua real é constante.

*Demonstração.* Vamos usar triângulos equiláteros para definir a topologia. O importante aqui é que as retas em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cuja inclinação é irracional contém no máximo um elemento de  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

Seja  $X$  o conjunto dos pares  $(a,b)$  de racionais tais que  $b \geq 0$ . Vamos definir um sistema fundamental de vizinhanças para a topologia de  $X$ .

Para  $b = 0$ , considere  $\mathcal{V}_{(a,0)} = \{(\lfloor a - \frac{1}{2^n}, a + \frac{1}{2^n} \rfloor \times \{0\}) \cap X : n \in \mathbb{N}\}$ .

Para  $b > 0$ , dado  $x = (a,b) \in X$ , seja  $u_x \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{b-0}{a-u_x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $v_x \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{b-0}{a-v_x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  (no caso,  $x, (u_x, 0)$  e  $(v_x, 0)$  formam um triângulo equilátero). Considere  $\mathcal{V}_x = \{\{x\} \cup ((\lfloor u_x - \frac{1}{2^n}, u_x + \frac{1}{2^n} \rfloor \times \{0\}) \cup (\lfloor v_x - \frac{1}{2^n}, v_x + \frac{1}{2^n} \rfloor \times \{0\})) \cap X : n \in \mathbb{N}\}$ .

Vamos primeiro verificar que é um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia. A condição *BL1*) está satisfeita, pois  $\mathcal{V}_x$  é não vazio e  $x \in U$  para todo  $U \in \mathcal{V}_x$ . A condição *BL2*) também está satisfeita, pois os conjuntos em  $\mathcal{V}_x$  são  $\subseteq$ -decrecentes em relação  $an \in \mathbb{N}$ .

Para *BL3*), se  $x = (a, 0)$  e  $U \in \mathcal{V}_{(a,0)}$  então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $U = (\lfloor a - \frac{1}{2^n}, a + \frac{1}{2^n} \rfloor \times \{0\}) \cap X$ . Se  $y \in U$  então  $y = (c, 0)$  para algum  $c$  racional. Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\lfloor c - \frac{1}{2^m}, c + \frac{1}{2^m} \rfloor \subseteq \lfloor a - \frac{1}{2^n}, a + \frac{1}{2^n} \rfloor$ . Assim,  $\mathcal{V}_y \ni (\lfloor c - \frac{1}{2^m}, c + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\}) \cap X \subseteq U$ .

Se  $x = (a,b)$  com  $b > 0$ ,  $U \in \mathcal{V}_x$  e  $y \in U$  com  $y \neq x$  então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $y \in ((\lfloor u_x - \frac{1}{2^n}, u_x + \frac{1}{2^n} \rfloor \times \{0\}) \cup (\lfloor v_x - \frac{1}{2^n}, v_x + \frac{1}{2^n} \rfloor \times \{0\})) \cap X \subseteq U$ . Então temos que  $y = (c, 0)$  para algum  $c$  racional. Então  $c \in \lfloor u_x - \frac{1}{2^n}, u_x + \frac{1}{2^n} \rfloor$  ou  $c \in \lfloor v_x - \frac{1}{2^n}, v_x + \frac{1}{2^n} \rfloor$ . Usando um argumento similar ao já feito acima, temos que existe  $W \in \mathcal{V}_y$  tal que  $W \subseteq \lfloor u_x - \frac{1}{2^n}, u_x + \frac{1}{2^n} \rfloor$  ou  $W \subseteq \lfloor v_x - \frac{1}{2^n}, v_x + \frac{1}{2^n} \rfloor$ . Portanto  $W \subseteq U$  e *BL3*) está satisfeita.

Agora iremos verificar que a topologia é Hausdorff. Primeiro considere  $x = (a,b)$  e  $y = (c,d)$  dois pontos distintos de  $X$  com  $b > 0$  e  $d > 0$ . Note que  $u_x$  e  $u_y$  não podem ser iguais, pois  $u_x = u_y$  implicaria que  $(a,b)$  e  $(c,d)$  estariam na mesma reta e sua inclinação seria um racional. Similarmente temos que  $v_x \neq v_y$ . Vamos verificar que  $u_x \neq v_y$ . De fato, se  $u_x = v_y$  então  $\frac{b}{a-u_x} = -\frac{d}{c-v_y} = \frac{-d}{c-u_x}$ . Assim,

$bc - bu_x = -da + du_x$ , logo  $bc + da = (d+b)u_x$ . Do lado esquerdo da igualdade, temos um número racional positivo e do lado direito,  $b+d$  é um racional positivo e  $u_x$  é irracional. Assim, teríamos que um racional é igual a um irracional, contradição. De forma similar, temos que  $v_x \neq u_y$ .

Dado  $x = (a,b)$  e  $y = (c,d)$  dois pontos distintos de  $X$  com  $b > 0$  e  $d > 0$ , temos que  $u_x, v_x, u_y$  e  $v_y$  são dois a dois distintos. Podemos então fixar  $m \in \mathbb{N}$  tal que a distância entre quaisquer dois destes pontos seja  $> \frac{1}{2^{m-1}}$ . Assim,

$\{x\} \cup ((\lfloor u_x - \frac{1}{2^m}, u_x + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\}) \cup (\lfloor v_x - \frac{1}{2^m}, v_x + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\})) \cap X$  e  $\{y\} \cup ((\lfloor u_y - \frac{1}{2^m}, u_y + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\}) \cup (\lfloor v_y - \frac{1}{2^m}, v_y + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\})) \cap X$  são disjuntas e a primeira está em  $\mathcal{V}_x$  e a segunda em  $\mathcal{V}_y$ .

Dado  $x = (a, 0)$  e  $y = (c, d)$  dois pontos distintos de  $X$  com  $d > 0$ , temos que  $u_y$  e  $v_y$  são irracionais, assim  $a, u_y$  e  $v_y$  são pontos distintos e podemos encontrar  $m \in \mathbb{N}$  tal que a distância entre dois quaisquer deles seja maior que  $\frac{1}{2^{m-1}}$ .

Assim,  $((\lfloor a - \frac{1}{2^m}, a + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\})) \cap X \in \mathcal{V}_x$  e  $\{y\} \cup ((\lfloor u_y - \frac{1}{2^m}, u_y + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\}) \cup (\lfloor v_y - \frac{1}{2^m}, v_y + \frac{1}{2^m} \rfloor \times \{0\})) \cap X \in \mathcal{V}_y$  são disjuntas.

Se  $x = (a,b)$  e  $y = (c, 0)$  dois pontos distintos de  $X$  com  $b > 0$  então basta fazer a mesma conta acima trocando a ordem de  $x$  e  $y$ .

Se  $x = (a, 0)$  e  $y = (c, 0)$  dois pontos distintos de  $X$  então seja  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|a - c| > \frac{1}{2^{m-1}}$ . Então  $(]a - \frac{1}{2^m}, a + \frac{1}{2^m}[\times\{0\}) \cap X \in \mathcal{V}_x$  e  $(]c - \frac{1}{2^m}, c + \frac{1}{2^m}[\times\{0\}) \cap X \in \mathcal{V}_y$  são disjuntas.

Logo  $X$  é Hausdorff.

Note que, pela definição da topologia, o conjunto  $Z = \{(a, 0) : a \text{ racional}\}$  é denso em  $X$ .

Resta agora mostrarmos que  $X$  é conexo. Como  $Z$  é denso em  $X$ , basta mostrarmos que um aberto e fechado  $U$  não vazio de  $X$  contém  $Z$ . Como  $U$  é fechado, basta provarmos que  $U \cap Z$  é denso em  $Z$ .

Seja  $]a_1, a_2[$  intervalo em  $\mathbb{R}$  tais que  $(]a_1, a_2[\times\{0\}) \cap X \subseteq U$  (tal intervalo existe, pois todo aberto no sistema fundamental de vizinhanças contém um ponto de  $Z$ ). Seja  $]c_1, c_2[$  um intervalo em  $\mathbb{R}$ . Vamos mostrar que  $U \cap (]c_1, c_2[\times\{0\}) \cap X \neq \emptyset$  (os conjuntos da forma  $(]c_1, c_2[\times\{0\}) \cap X$  formam uma base de abertos de  $Z$ ).

Se  $]a_1, a_2[\cap]c_1, c_2[\neq \emptyset$  então dado  $a$  racional em  $]a_1, a_2[\cap]c_1, c_2[$ , temos que  $(a, 0) \in U \cap (]c_1, c_2[\times\{0\}) \cap X$ . Assim podemos assumir que  $a_2 < c_1$  ou  $c_2 < a_1$ .

No caso em que  $a_2 < c_1$ , considere as faixas  $S = \{(a, 0) + t(2, \sqrt{3}) : a_1 < a < a_2, t \geq 0\}$  e  $T = \{(c, 0) + t(-2, \sqrt{3}) : c_1 < c < c_2, t \geq 0\}$ . Temos que  $S \cap T$  é um aberto não vazio de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Tome  $x \in S \cap T \cap X$ . Então temos que  $a_1 < u_x < a_2$  e  $c_1 < v_x < c_2$ . De  $a_1 < u_x < a_2$ , segue então que toda vizinhança de  $x$  intercepta  $(]a_1, a_2[\times\{0\}) \cap X \subseteq U$ . Assim,  $x \in \overline{U}^X = U$ . Como  $x \in U$  e  $v_x \in ]c_1, c_2[$ , segue que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $(]v_x - \frac{1}{2^m}, v_x + \frac{1}{2^m}[\times\{0\}) \cap X \subseteq U$ . Logo  $\emptyset \neq ((]v_x - \frac{1}{2^m}, v_x + \frac{1}{2^m}[\times\{0\}) \cap X) \cap ((]c_1, c_2[\times\{0\}) \cap X) \subseteq U \cap ((]c_1, c_2[\times\{0\}) \cap X)$ . Assim,  $U \cap Z$  é denso em  $Z$ . Logo  $U = \overline{U}^X = \overline{U \cap Z}^X = \overline{Z}^X = X$ . Portanto  $X$  possui apenas  $\emptyset$  e  $X$  como clopens e  $X$  é conexo.

No caso em que  $c_2 < a_1$ , considere as faixas  $S = \{(c, 0) + t(2, \sqrt{3}) : c_1 < c < c_2, t \geq 0\}$  e  $T = \{(a, 0) + t(-2, \sqrt{3}) : a_1 < a < a_2, t \geq 0\}$ . Temos que  $S \cap T$  é um aberto não vazio de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Tome  $x \in S \cap T \cap X$ . Então temos que  $c_1 < u_x < c_2$  e  $a_1 < v_x < a_2$ . De  $a_1 < v_x < a_2$ , segue então que toda vizinhança de  $x$  intercepta  $(]a_1, a_2[\times\{0\}) \cap X \subseteq U$ . Assim,  $x \in \overline{U}^X = U$ . Como  $x \in U$  e  $u_x \in ]c_1, c_2[$ , segue que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $(]u_x - \frac{1}{2^m}, u_x + \frac{1}{2^m}[\times\{0\}) \cap X \subseteq U$ . Logo  $\emptyset \neq ((]u_x - \frac{1}{2^m}, u_x + \frac{1}{2^m}[\times\{0\}) \cap X) \cap ((]c_1, c_2[\times\{0\}) \cap X) \subseteq U \cap ((]c_1, c_2[\times\{0\}) \cap X)$ . Assim,  $U \cap Z$  é denso em  $Z$ . Logo  $U = \overline{U}^X = \overline{U \cap Z}^X = \overline{Z}^X = X$ .

Portanto  $X$  possui apenas  $\emptyset$  e  $X$  como clopens e  $X$  é conexo.  $\square$

Note que este exemplo não é  $T_3$ . Se fosse  $T_3$  e enumerável, seria  $T_4$  e portanto  $T_{3\frac{1}{2}}$ , mas conexos  $T_{3\frac{1}{2}}$  tem cardinalidade não enumerável.

## 27.2 Conexidade local.

**Definição 27.13.** Dizemos que  $X$  é localmente conexo em  $x$  se  $x$  possui um sistema fundamental de vizinhanças conexas.

Dizemos que  $X$  é localmente conexo se todo ponto de  $X$  possui um sistema fundamental de vizinhanças conexas.

**Proposição 27.14.** Se  $X$  é localmente conexo então todo ponto de  $X$  possui um sistema de vizinhanças abertas conexas.

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e  $U$  uma vizinhança de  $x$ .

A vizinhança aberta conexa contida em  $U$  é construído por indução. Como  $X$  é localmente conexa em  $x$ , existe  $V_0 \subseteq U$  vizinhança conexa de  $x$ . Para cada  $y \in V_0$ , exist  $V_y$  vizinhança conexa de  $y$  tal que  $V_y \subseteq U$ . Seja  $V_1 = \bigcup\{V_y : y \in V_0\} = \bigcup\{V_0 \cup V_y : y \in V_0\}$ . Como  $\{V_0 \cup V_y : y \in V_0\}$  são conexos dois a dois não disjuntos, segue que  $V_1$  é conexo. Podemos então prosseguir por indução de forma que

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_k \subseteq V_{k+1} \dots \subseteq U \text{ são conjuntos conexos}$$

Todo ponto de  $V_{n+1}$  é um vizinhança de todo ponto de  $V_n$ .

Então  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subseteq U$  é um aberto ( $V$  é vizinhança de todos os seus pontos) e conexo ( $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = V_0 \neq \emptyset$  e cada  $V_n$  é conexo).  $\square$

**Exemplo 27.15.** Existe um subespaço compacto de  $\mathbb{R}^2$  que é conexo mas não é localmente conexo.

*Demonstração.* Seja  $X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$  com a topologia de subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Note que  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : \frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{2}{\pi}\}$  é conjunto compacto. Assim,  $F_n = ([0, \frac{1}{2^n}] \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : \frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{2}{\pi}\}$  é um subconjunto compacto para todo natural positivo  $n$  e assim  $X = \bigcap_{n > 0} F_n$  é um

compacto. O conjunto  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$  é imagem contínua de um intervalo que é conexo, assim, é conexo. Além disso,  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$  é denso em  $X$ . De fato, se  $t \in [-1, 1]$  então  $(0, t)$  é limite de  $(x_n, \sin \frac{1}{x_n})$ , onde  $x_n = \frac{1}{\arcsin t + 2(n+1)\pi}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Para ver que  $X$  não é localmente conexo, tome por exemplo  $(0, 1)$  e a bola aberta de raio  $\frac{1}{2}$  em torno de  $(0, 1)$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$  contida em  $B((0, 1), \frac{1}{2}) \cap X$ . Temos que a distância de  $(0, 1)$  a  $\mathbb{R}$  é 1. Tome  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $z_k = \frac{1}{2k\pi} < \frac{1}{4}$ . Então  $(z_k, 0)$  é único ponto de  $X \cap \{z_k\} \times [-1, 1]$ . Assim tome  $(x, \sin \frac{1}{x}) \in X \cap U$ . Fixe  $k$  tal que  $z_k < x$ .

Então  $U = (U \cap ([0, x_k] \times [-1, 1])) \cup (U \cap (]x_k, 1] \times [-1, 1]))$ . Então  $U$  pode ser escrito como reunião de dois abertos fechados disjuntos de  $U$ , assim  $U$  não é conexo. Logo nenhuma vizinhança de  $U$  contida em  $B((0, 1), \frac{1}{2}) \cap X$  é conexa. Portanto  $X$  não é localmente conexa em  $(0, 1)$   $\square$

**Teorema 27.16.** Se  $\{X_i : i \in I\}$  é uma família de espaços topológicos então  $\prod_{i \in I} X_i$  é localmente conexa se e somente se  $X_i$  é localmente conexa para todo  $x \in I$  e  $\{i \in I : X_i \text{ não é conexa}\}$  é um conjunto finito.

*Demonstração. Volta.* Seja  $K = \{i \in I : X_i \text{ não é conexo}\}$ . Dada uma vizinhança básica  $U := \prod_{i \in I} U_i$  de um ponto  $(x_i : i \in I)$  com suporte  $J$ , para cada  $j \in J \cup K$  tome uma vizinhança conexa  $V_j$  tal que  $V_j \subseteq U_j$ . Então  $\prod_{j \in J \cup K} V_j \times \prod_{i \in I} X_i$  é uma vizinhança de  $(x_i : i \in I)$  contida em  $U$ . Logo  $\prod_{i \in I} X_i$  é localmente conexa.

**Ida.** Fixe  $j \in I$ . Tome  $W_j$  uma vizinhança de  $X_j$  em  $X_j$ . Para cada  $i \neq j$  fixe um  $x_i \in X_i$ .

Então  $\pi_j^{-1}[W_j]$  é uma vizinhança aberta de  $(x_i : i \in I)$ . Como  $\prod_{i \in I} X_i$  é localmente conexo, existe  $U$  vizinhança aberta conexa de  $(x_i : i \in I)$  tal que  $U \subseteq \pi_j^{-1}[W_j]$  (note que não podemos assumir que  $U$  é uma vizinhança básica do produto). Como  $\pi_j$  é aberta, segue que  $\pi_j[U] \subseteq W_j$  é uma vizinhança aberta de  $x_j$ . Assim  $X_j$  é localmente conexo.

Seja  $V = \prod_{i \in I} V_i$  um aberto básico contido em uma vizinhança conexa  $U$ . Seja  $J$  o suporte (finito) de  $V$ . Então para cada  $i \in I \setminus J$  temos que  $X_i = \pi_i[V] \subseteq \pi_i[U] \subseteq X_i$ . Logo  $\pi_i[U] \subseteq X_i$  para todo  $i \in I \setminus J$ . Como  $U$  é conexo e  $\pi_i$  é contínua, segue que  $X_i$  é conexa para todo  $i \in I \setminus J$ .  $\square$

# Capítulo 28

## Conexos por caminhos. Contínua.

### 28.1 ‘No meio do conexo havia um caminho’.

#### 28.1.1 Conexos por caminhos.

**Definição 28.1.** Dizemos que uma função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  é um caminho de  $x$  para  $y$  se  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$ .

**Proposição 28.2.** A relação ‘existe um caminho de  $x$  a  $y$ ’ é uma relação de equivalência em  $X$ .

*Demonstração.* Vamos denotar a relação por  $\approx$ .

Para verificar que  $x \approx x$ , basta usar a função que vale  $x$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Se  $f$  testemunha que  $x \approx y$  então  $g$  definida por  $g(t) = f(1 - t)$  é uma função contínua de  $[0, 1]$  em  $X$  tal que  $g(0) = y$  e  $g(1) = x$ . Assim,  $y \approx x$ .

Se  $f$  testemunha  $x \approx y$  e  $g$  testemunha  $y \approx z$  então defina  $h : [0, 1] \rightarrow X$  tal que

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Então  $h$  é contínua,  $h(0) = x$  e  $h(1) = z$ . Assim,  $x \approx z$ . □

**Definição 28.3.** Dizemos que  $f$  é conexo por caminhos se existe um caminho de  $x$  a  $y$  para todo  $x$  e  $y$  em  $X$ .

**Proposição 28.4.** Se  $X$  é conexo por caminhos então  $X$  é conexo.

*Demonstração.* Fixe um ponto  $a \in X$ . Para cada  $x$  em  $X$ , fixe  $C_x$  a imagem de um caminho de  $a$  a  $x$ . Como  $[0, 1]$  é conexo, segue que  $C_x$  é conexo. Assim,  $X = \bigcup_{x \in X} C_x$ , onde  $a \in \bigcap_{x \in X} C_x$ . Logo,  $X$  é conexo. □

**Exemplo 28.5.** Existe um subespaço de  $\mathbb{R}^2$  que é conexo, mas que não é conexo por caminhos.

*Demonstração.* Seja  $X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$  com a topologia de subespaço de  $\mathbb{R}^2$ .

Já vimos que é um espaço conexo que não é localmente conexo.

Suponhamos que  $X$  é conexo por caminhos. Então existe um função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $f(0) = (\frac{2}{\pi}, 1)$  e  $f(1) = (0, 0)$ . Como  $\{0\} \times [-1, 1]$  é fechado em  $X$ , temos que  $f^{-1}[\{0\} \times [-1, 1]]$  é fechado não vazio em  $[0, 1]$ . Seja  $s$  o mínimo de  $f^{-1}[\{0\} \times [-1, 1]]$ . Então segue que  $f(s) \in \{0\} \times [-1, 1]$  e pela propriedade de mínimo, segue que  $f(t) \in \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$ . Como  $[0, s[$  é um conexo, segue que  $f[[0, s[$  é um subconjunto conexo de  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$  que contém  $(\frac{2}{\pi}, 1)$ . Como a projeção do gráfico na primeira coordenada é contínua temos que a projeção na primeira coordenada é um intervalo que contém  $\frac{1}{2}$ . Portanto, temos que

- 1)  $f[[0, s[ = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$  ou
- 2)  $f[[0, s[ = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in J, \text{ onde } J \text{ é um intervalo } [b, \frac{2}{\pi}] \text{ ou } ]b, \frac{1}{2}] \text{ com } b > 0$ . Assim,  $f[[0, s[ \subseteq \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in [b, \frac{2}{\pi}]\}$ .

No primeiro caso, temos que  $f[[0, s]]$  é denso em  $X$ , assim,  $f[[0, s]] = X$  que é uma contradição pois,  $X \setminus f[[0, s]]$  é infinito e com isto,  $X \setminus f[[0, s]]$  é não vazio.

No segundo caso,  $f[[0, s]] \subseteq \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in [b, \frac{2}{\pi}]\}$ . Como  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in [b, \frac{2}{\pi}]\}$  é fechado, segue que  $f(s) \in \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in [b, \frac{2}{\pi}]\}$  que contradiz que  $f(s) \in \{0\} \times [-1, 1]$ .  $\square$

### 28.1.2 A reta longa.

A ideia é encaixar um segmento da reta atrás do outro e obter um intervalo.

**Exemplo 28.6. (Semi-reta longa).** Seja  $Z = \omega_1 \times [0, 1[$  dada pela ordem  $(\alpha, x) <_Z (\beta, y)$  se  $\alpha < \beta$  ou  $(\alpha = \beta \text{ e } x < y)$  (ou seja, a ordem lexicográfica).

O ponto  $(0, 0)$  é mínimo.

(**reta longa.**) Tome  $Y = Z \setminus \{(0, 0)\}$  com a ordem reversa a  $Z \setminus \{(0, 0)\}$  (ou seja  $(\alpha, x) <_Y (\beta, y)$  sse  $(\alpha, x) >_Z (\beta, y)$ ).

Seja  $X = Y \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$ , onde a ordem em  $Y \times \{0\}$  'coincide' com  $Y$ , a ordem em  $Z \times \{1\}$  'coincide' com  $Z$  e  $(y, 0) <_X (z, 1)$  para cada  $y \in Y$  e  $z \in Z$ .

Devido a ordem lexicográfica de duas ordens lineares, temos que  $Z$  é linearmente ordenado. Como  $X$  é o 'encaixe' de duas ordens lineares seguidas, temos que  $X$  é linearmente ordenado.

**Todo subconjunto não vazio de  $Z$  possui ínfimo.**

Dado  $A \subseteq Z$  não vazio, seja  $\alpha < \omega_1$  mínimo tal que  $A \cap (\{\alpha\} \times [0, 1]) \neq \emptyset$  e seja  $t = \inf\{s \in [0, 1[: (\alpha, s) \in A\}$ . Então  $(\alpha, t)$  é o ínfimo de  $A$ . Segue então que todo subconjunto não vazio limitado de  $Z$  possui supremo.

Como todo subconjunto limitado superiormente de  $Z$  possui supremo, segue que todo subconjunto limitado inferiormente de  $Y$  possui ínfimo.

**Todo subconjunto não vazio de  $X$  limitado inferiormente possui ínfimo.**

Seja  $A$  um subconjunto não vazio de  $X$ .

*Caso 1.* Se  $X \cap (Y \times \{0\}) \neq \emptyset$  então  $A \cap Y \times \{0\}$  é um subconjunto não vazio limitado inferiormente em  $Y \times \{0\}$ . O ínfimo de  $A \cap Y \times \{0\}$  existe e coincide com o ínfimo de  $A$  neste caso, pois os elementos de  $A \setminus (Y \times \{0\})$  são maiores que qualquer elemento de  $A \cap (Y \times \{0\})$ .

*Caso 2.* Se  $X \cap (Y \times \{0\}) = \emptyset$  então  $A \subseteq Z \times \{1\}$ . Como vimos acima, todo subconjunto não vazio de  $Z$  possui ínfimo. Assim,  $A$  possui ínfimo em  $Z \times \{1\}$ . Este é também o ínfimo em  $X$ , pois os elementos de  $Y \times \{0\}$  são menores que qualquer elemento de  $Z \times \{1\}$ .

**$Z$  é denso em si mesmo.** Dado  $(\alpha, t) < (\beta, s)$  se  $\alpha < \beta$  então  $(\alpha, t) <_Z (\alpha, \frac{t+1}{2}) <_Z (\beta, s)$ . Se  $\alpha = \beta$  então  $t < s$  e  $(\alpha, t) <_Z (\alpha, \frac{t+s}{2}) <_Z (\alpha, s) = (\beta, s)$

**$X$  é denso em si mesmo.** Como  $Z$  é denso em si mesmo, segue que  $Y$  é denso em si mesmo. Dado um intervalo em  $X$ , se as duas extremidades estão em  $Y \times \{0\}$  ou em  $Z \times \{1\}$  então temos um ponto entre ambas. Resta apenas o caso em que a extremidade esquerda (chamaremos de  $y$ ) está em  $Y \times \{0\}$  e a extremidade direita (chamaremos de  $z$ ) em  $Z \times \{1\}$ . Como  $Z$  é denso em si mesmo e  $(0, 0)$  é mínimo de  $Z$ , segue que  $Z \setminus \{(0, 0)\}$  não possui ínfimo. Assim,  $Y$  não possui supremo em  $Y$ . Assim, existe um elemento em  $y_1 \in Y \times \{0\}$  com  $y_1 > y$ . Como  $z \in Z \times \{1\}$ , segue que  $y_1 < z$ . Assim,  $X$  é denso em si mesmo.

**Os intervalos abertos limitados de  $Z \setminus \{(0, 0)\}$  são separáveis.**

De fato, se  $(\alpha, t) <_Z (\beta, s)$  então

$\{(\alpha, p) : p \in \mathbb{Q} \cap ]s, 1]\} \cup \{(\gamma, p) : \alpha < \gamma < \beta, p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\} \cup \{(\beta, p) : p \in \mathbb{Q} \cap [0, s]\}$  é denso no intervalo de  $Z$  de extremidades  $(\alpha, t)$  e  $(\beta, s)$ .

Como existe apenas uma quantidade enumerável de ordinais entre  $\alpha$  e  $\beta$  e  $\mathbb{Q}$  é enumerável, segue que o conjunto acima é denso enumerável.

**Os intervalos abertos limitados de  $X$  são homeomorfos a  $\mathbb{R}$ .** Usando a ordem reversa, temos que os intervalos abertos limitados de  $Y$  são separáveis.

Dado um intervalo limitado em  $X$ , se as duas extremidades estão em  $Y \times \{0\}$  ou em  $Z \times \{1\}$  então elas são separáveis. Resta apenas o caso em que a extremidade esquerda (chamaremos de  $y$ ) está em  $Y \times \{0\}$  e a extremidade direita (chamaremos de  $z$ ) em  $Z \times \{1\}$ . Podemos escrever o  $\{x \in Y \times \{0\} : y <_X x\}$  como uma reunião enumerável de intervalos em  $Y \times \{0\}$  e  $\{x \in Z \times \{1\} : (0, 0) <_X x <_X z\}$  é denso em  $\{x \in Z \times \{1\} : (0, 0) <_X x <_X z\}$ . Assim, o intervalo em  $X$  de extremidades  $y$  e  $z$  é separável. Portanto o intervalo aberto limitado de  $X$  não possui máximo ou mínimo, é denso em si mesmo, é separável e todo subconjunto não vazio limitado possui supremo. Assim, o intervalo é isomorfo a  $\mathbb{R}$  e portanto é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

**A reta longa é conexa por caminhos e localmente conexa por caminhos.** Segue diretamente do que foi feito acima.

**A semi-reta longa (e portanto a reta longa) não é separável.** Seja  $D$  um conjunto enumerável de  $Z$ . Então  $B = \{\alpha < \omega_1 : \exists t \in [0, 1][(\alpha, t) \in D]\}$  é um subconjunto enumerável de  $\omega_1$ . Então existe  $\gamma \in \omega_1$  tal que  $\gamma > \sup B$ . Então  $U = \{z \in Z : z > (\gamma, 0)\}$  é um conjunto aberto de  $Z$  tal que  $D \cap U = \emptyset$ . Portanto  $D$  não é denso.

**A reta longa é sequencialmente compacta e enumeravelmente compacta.** Toda sequência está contida em algum intervalo limitado de  $X$  que é homeomorfo a  $[0, 1]$ . Assim toda sequência possui um limite.

## 28.2 Localmente conexos por caminhos.

**Definição 28.7.** Um espaço é localmente conexo por caminhos se todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças conexas por caminho.

**Proposição 28.8.** Se  $X$  é localmente conexo por caminhos então todo ponto de  $X$  possui um sistema de vizinhanças abertas conexas por caminhos.

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e  $U$  uma vizinhança de  $x$ .

A vizinhança aberta conexa por caminhos contida em  $U$  é construído por indução. Como  $X$  é localmente conexa em  $x$ , existe  $V_0 \subseteq U$  vizinhança conexa por caminhos de  $x$ . Para cada  $y \in V_0$ , exist  $V_y$  vizinhança conexa por caminhos de  $y$  tal que  $V_y \subseteq U$ . Seja  $V_1 = \bigcup\{V_y : y \in V_0\}$ . Dado pontos  $a, b \in V_1$  existem  $y_1, y_2 \in V_0$  tais que  $a \in V_{y_1}$  e  $b \in V_{y_2}$ . Então existe um caminho em  $V_{y_1}$  de  $a$  a  $y_1$ , um caminho em  $V_0$  de  $y_1$  a  $x$ , um caminho em  $V_0$  de  $x$  a  $y_2$  e um caminho em  $V_{y_2}$  de  $y_2$  a  $b$ . Assim, existe um caminho em  $V_1$  de  $a$  a  $b$ . Portanto  $V_1$  é conexo por caminhos. Podemos então prosseguir por indução de forma que

$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_k \subseteq V_{k+1} \dots \subseteq U$  são conjuntos conexas por caminhos.

Todo ponto de  $V_{n+1}$  é um vizinhança de todo ponto de  $V_n$ .

Então  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subseteq U$  é um aberto ( $V$  é vizinhança de todos os seus pontos) e conexo por caminhos (dados  $a, b \in V$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a, b \in V_n$  e  $V_n$  é conexo por caminhos).  $\square$

**Teorema 28.9.** Se  $X$  é localmente conexo por caminhos e conexo então  $X$  é conexo por caminhos.

*Demonstração.* Fixe  $a \in X$ . Seja  $U = \{x \in X : \text{existe um caminho de } a \text{ a } x\}$ .

$U$  é aberto. Dado  $x \in U$ , fixe uma vizinhança aberta conexa por caminhos  $W_x$ . Então para cada  $y \in W_x$  existe um caminho em  $W_x$  de  $y$  a  $x$ . Como  $x \in U$ , existe um caminho de  $x$  a  $a$ . Logo, existe um caminho de  $y$  a  $a$ . Assim,  $W_y \subseteq U$ . Logo  $U$  é um conjunto aberto.

$U$  é fechado. Suponha que  $z \notin U$ . Seja  $W_z$  uma vizinhança aberta conexa de  $z$ . Afirmamos que  $U \cap W_z = \emptyset$ . De fato, se  $y \in U \cap W_z$ , então temos um caminho de  $a$  a  $y$  ( $y \in U$ ) e temos um caminho de  $y$  a  $z$  ( $y \in W_z$ ). Assim, temos um caminho de  $a$  a  $z$  que implica que  $z \in U$ , uma contradição. Logo  $X \setminus U$  é aberto e  $U$  é fechado.

Como  $U \neq \emptyset$  é aberto e fechado em  $X$ , segue da conexidade de  $X$  que  $U = X$ . Assim, existe um caminho de  $a$  a  $x$  para todo  $x \in X$ . Como  $a \in X$  é arbitrário, segue que  $X$  é conexo por caminhos.  $\square$

**Exemplo 28.10.** Existe um subespaço de  $\mathbb{R}^2$  conexo por caminhos que não é localmente conexo por caminhos.

Seja  $X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$  com a topologia de subespaço de  $\mathbb{R}^2$ .

Como  $X$  é um reunião de dois conjuntos conexas por caminhos, vamos adicionar mais pontos a  $X$  para obtermos um conexo por caminho. Para isto vamos adicionar um conexo por caminhos de  $(0, 1)$  a  $(\frac{2}{\pi}, 1)$ .

Seja  $Z = X \cup (\{0\} \times ]1, 2]) \cup ([0, \frac{2}{\pi}] \times \{2\}) \cup (\{\frac{2}{\pi}\} \times ]1, 2])$ . Claramente os pontos adicionais são conexas por caminhos e adicionam um caminho que liga as duas partes de  $X$ . Assim,  $Z$  não é conexo por caminhos.

Para ver que  $Z$  não é localmente conexa por caminhos, o mesmo argumento utilizado anteriormente para  $X$  em  $(0, 1)$  pode ser usado para mostrar que  $X$  não é localmente conexo em  $(0, -1)$ . Como  $B((0, -1), \frac{1}{2}) \cap X = B((0, -1), \frac{1}{2}) \cap Z$  e  $X$  não é localmente conexo em  $(0, -1)$ , segue que  $Z$  não é localmente conexo em  $(0, -1)$  e portanto  $Z$  não é localmente conexo por caminhos.



## 28.3 Contínua.

**Definição 28.11.** Um espaço compacto Haudorff e conexo é chamado de contínua.

**Teorema 28.12.** Seja  $X$  um espaço Hausdorff e  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de  $X$  tal que  $\bigcap \mathcal{F}'$  é um compacto conexo não vazio, para todo  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  finito não vazio. Então  $\bigcap \mathcal{F}$  é compacto e conexo não vazio.

*Demonstração.* Fixe  $F' \in \mathcal{F}$ . Como  $\{F' \cap F : F \in \mathcal{F}\}$  tem PIF e  $F'$  é compacto, segue que  $\bigcap \mathcal{F}$  é um compacto não vazio.

Suponhamos por absurdo que  $\bigcap \mathcal{F}$  não é conexo. Então existem  $A$  e  $B$  abertos de  $X$  tais que  $\bigcap \mathcal{F} \subseteq A \cup B$ ,  $\bigcap \mathcal{F} \cap A \neq \emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} \cap B$  e  $\bigcap \mathcal{F} \cap A \cap B = \emptyset$ . Assim,  $\bigcap \mathcal{F} \cap A$  e  $\bigcap \mathcal{F} \cap B$  são clopens de  $\bigcap \mathcal{F}$ . Segue de serem fechados no subespaço  $\bigcap \mathcal{F}$  que  $\bigcap \mathcal{F} \cap A = \bigcap \mathcal{F} \cap \overline{A}^X$  e  $\bigcap \mathcal{F} \cap B = \bigcap \mathcal{F} \cap \overline{B}^X$ .

Em particular, segue que  $\bigcap \mathcal{F} \cap \overline{A}^X \cap \overline{B}^X = \emptyset$ . Como  $\bigcap \mathcal{F} \cap \overline{A}^X \cap \overline{B}^X = \bigcap \{F \cap \overline{A}^X \cap \overline{B}^X : F \in \mathcal{F}\}$ , segue da compacidade que  $\{F \cap \overline{A}^X \cap \overline{B}^X : F \in \mathcal{F}\}$  não tem PIF. Tome  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  finito tal que  $\bigcap \{F \cap \overline{A}^X \cap \overline{B}^X : F \in \mathcal{F}'\} = \emptyset$ . Temos também que  $\bigcap \{F \setminus (A \cup B) : F \in \mathcal{F}\} = \bigcap \mathcal{F} \cap (X \setminus (A \cup B)) = \emptyset$ . Pela compacidade, existe  $\mathcal{F}''$  tal que  $\bigcap \{F \setminus (A \cup B) : F \in \mathcal{F}''\} = \emptyset$ .

Temos então que  $\bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'') \subseteq A \cup B$  e  $\bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'') \cap \overline{A}^X \cap \overline{B}^X = \emptyset$ . Como  $\bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'')$ , segue que  $\bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'') \cap A$  e  $\bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'') \cap B$  são não vazios. Além disso,  $\bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'') \cap A \cap B \subseteq \bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'') \cap \overline{A}^X \cap \overline{B}^X$ , assim  $\bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'') \cap A \cap B = \emptyset$ . Logo  $\bigcap (\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'')$  é desconexo, que contradiz o fato de  $\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}$  ser finito.  $\square$

O exemplo abaixo mostra que a compacidade é necessária:

**Exemplo 28.13.** Seja  $F_n = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R}) \cup ([0, 1] \times \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\})$ . O desenho vai lembrar uma escada que vai perdendo os degraus.

Então temos que  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência decrescente de fechados conexos, mas  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R})$  que é desconexo.

Podemos obter um exemplo similar com subconjuntos limitados, mas obviamente neste caso, os subconjuntos não podem ser fechados por serem subconjuntos do  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 28.14.** Seja  $G_n = (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{\frac{1}{m} \in \mathbb{N} : m > n\})$ .

Então temos que  $(G_n : n \in \mathbb{N})$  é uma sequência decrescente de conexos limitados, mas  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1])$  que é desconexo.

## Capítulo 29

# Soma topológica. $k$ -espaços. Quociente. Colagem.

### 29.1 Topologias finais.

Vimos anteriormente que a topologia de subespaço e a topologia produtos eram topologias iniciais.

**Definição 29.1.** Seja  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  uma família de funções  $f_i : X_i \rightarrow Y$ , onde  $X_i$  é um espaço topológico para cada  $i \in I$ . A topologia final em  $Y$  gerada por  $\{f_i : i \in I\}$  é a topologia mais fina que torna cada  $f_i$  contínua. Note que a topologia caótica torna todas as funções em  $\mathcal{F}$  contínuas.

**Teorema 29.2.**  $U \subseteq Y$  é aberto na topologia final se e somente se  $f_i^{-1}[U]$  é aberto em  $X_i$  para todo  $i \in I$ .

*Demonstração.* Primeiro vamos verificar que  $\tau = \{U \subseteq Y : f^{-1}[U] \text{ é aberto em } X_i \text{ para todo } i \in I\}$  é uma topologia. Claramente  $\emptyset$  e  $Y$  pertencem a  $\tau$ . Se  $\mathcal{U} \subseteq \tau$  então  $f^{-1}[\bigcup \mathcal{U}] = \bigcup \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$  é aberto em  $X_i$  para cada  $i \in I$  e portanto  $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$ . Se  $U, V \in \tau$  então  $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$  é aberto em  $X_i$  para cada  $i \in I$ . Assim,  $U \cap V \in \tau$ .

Portanto  $\tau$  é uma topologia. Claramente cada  $f_i$  é contínua com a topologia  $\tau$ , assim, a topologia final contém  $\tau$ . Por outro lado, se  $U$  é aberto na topologia final, então  $f_i$  é contínua, portanto  $f^{-1}[U]$  é aberto em  $X_i$  para cada  $i \in I$ . Assim,  $U \in \tau$ .  $\square$

**Teorema 29.3.** Seja  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  uma família de funções  $f_i : X_i \rightarrow Y$ , onde  $X_i$  é um espaço topológico para cada  $i \in I$ . Seja  $Y$  munido com a topologia final. Então  $g : Y \rightarrow Z$  é contínua se e somente se  $g \circ f_i$  é contínua para cada  $i \in I$ .

*Demonstração.* A ida é clara, pois a composta de funções contínuas é contínua.

Seja  $U$  um aberto de  $Z$ . Temos que verificar que  $g^{-1}[U]$  é aberto em  $Y$ . Como  $f_i \circ g$  é contínua por hipótese, temos que  $f_i^{-1}[g^{-1}[U]] = (g \circ f_i)^{-1}[U]$  é aberto em  $X_i$  para cada  $i \in I$ . Assim,  $g^{-1}[U]$  é aberto em  $Y$ . Assim,  $g$  é uma função contínua.  $\square$

### 29.2 Soma topológica.

**Definição 29.4.** Dada um família de espaços  $\{X_i : i \in I\}$ , tomamos cópias disjuntas,  $X_i \times \{i\}$  com o homomorfismo  $x \mapsto (x, i)$  e a topologia  $\bigoplus_{i \in I} X_i$  é sobre a união disjunta  $\bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$ .

Um conjunto é aberto em  $\bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$  se e somente se  $U \cap (X_i \times \{i\})$  é aberto em  $X_i \times \{i\}$ .

Para evitar essa notação extra, é comum assumir que os  $X_i$ 's são disjuntos e tomar  $\bigcup_{i \in I} X_i$ . Assim,  $U$  é aberto na soma topológica se e somente se  $U \cap X_i$  é aberto para todo  $i \in I$ .

**Teorema 29.5.** A topologia da soma topológica coincide com a topologia final de  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  sobre  $\bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$ , onde  $f_i : X \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$  é dada por  $x \mapsto (x, i)$ .

**Exemplo 29.6.** A soma topológica de espaços discretos é um espaço discreto.

**Exemplo 29.7.** Se  $X, Y$  são enumeravelmente compactos e  $X \times Y$  não é pseudocompacto então  $Z = X \oplus Y$  é enumeravelmente compacto, mas  $Z^2$  não é enumeravelmente compacto.

Vamos assumir que  $X$  e  $Y$  são disjuntos e considerar que a topologia está definida sobre  $X \cup Y$ . Se  $A$  é um subconjunto infinito enumerável de  $Z$  então  $A \cap X$  ou  $A \cap Y$  são infinitos. Como  $X$  e  $Y$  são fechados em  $Z$  segue que  $A \cap X$  ou  $A \cap Y$  possuem um ponto de acumulação completo. Assim,  $A$  possui um ponto de acumulação completo em  $Z$ .

Suponhamos que  $(X \cup Y) \times (X \cup Y)$  é a reunião disjunta de  $X \times X, X \times Y, Y \times X$  e  $Y \times Y$ . Como  $X \times Y$  não é pseudocompacto, admite  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua ilimitada. Como  $X \times Y$  é um fechado e aberto de  $Z$ , a função pode ser estendida para  $z$  e a extensão é ilimitada.

**Proposição 29.8.** A soma topológica de espaços  $T_i$  é um espaço  $T_i$ .

## 29.3 Vagamente lembra soma topológica.

### 29.3.1 Soma direta de grupos topológicos.

No caso de grupos topológicos, a soma topológica não gera um grupo topológico.

**Definição 29.9.** A soma direta de grupos topológicos  $\{G_i : i \in I\}$  denotada por  $\bigoplus_{i \in I} G_i$  é o subespaço  $\{(g_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} G_i : \text{spte } g_i \text{ é finito}\}$  de  $\prod_{i \in I} G_i$  com a topologia produto.

Note que a soma direta de grupos coincide com o produto topológico para famílias finitas.

### 29.3.2 $k$ -espaços.

Quando pensamos na soma topológica como uma reunião disjunta, temos que um conjunto é aberto se e somente se sua intersecção com um dos subespaços disjuntos é um aberto do subespaço.

Vamos ver uma definição em que aparece esta situação.

**Definição 29.10.** Dizemos que um espaço  $X$  é um  $k$ -espaço se um conjunto  $F \subseteq X$  é fechado se e somente se  $F \cap K$  é fechado em  $K$  para todo subconjunto compacto  $K$  de  $X$ .

**Proposição 29.11.** São equivalente para um espaço  $X$  :

$X$  é  $k$ -espaço.

$U \subseteq X$  é aberto se e somente  $U \cap K$  é aberto em  $K$  para todo  $K$  compacto.

*Demonstração.* Para a ida: Se  $U$  é aberto então  $U \cap K$  é aberto no subespaço  $K$ . seja  $U$  um conjunto tal que  $U \cap K$  é aberto em  $K$  para todo compacto  $K$ . Então  $(X \setminus U) \cap K = K \setminus U$  é fechado em  $K$  para todo  $K$  compacto. Como  $X$  é  $k$ -espaço, segue que  $X \setminus U$  é um fechado de  $X$ . Assim,  $U$  é aberto em  $X$ .

A recíproca é similar.  $\square$

**Teorema 29.12.** Espaços sequenciais Hausdorff são  $k$ -espaços. Em particular, espaços métricos são  $k$ -espaços.

Espaços localmente compactos são  $k$ -espaços.

*Demonstração.* Seja  $F$  um conjunto não fechado de  $X$ . Então existe  $x \in \overline{F}$  e  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  tal que  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  converge para  $x$ . Como  $X$  é Hausdorff, temos que  $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  é compacta. Assim,  $F \cap K$  não é fechado em  $K$ . Assim, um espaço sequencial é um  $k$ -espaço.

Suponhamos que  $X$  é localmente compacto. Seja  $F$  um conjunto não fechado de  $X$ . Tome  $x \in \overline{F} \setminus F$  e  $K$  uma vizinhança compacta de  $x$ . Basta mostrar que  $F \cap K$  não é fechado em  $K$ . De fato, seja  $W$  um vizinhança de  $x$  em  $X$ . Como  $K$  é uma vizinhança de  $x$  em  $X$ , segue que  $W \cap K$  é uma vizinhança de  $x$  em  $X$ . Assim,  $(F \cap K) \cap W = F \cap W \cap K \neq \emptyset$ . Portanto  $x \in \overline{F \cap K}^K$ . Logo  $F \cap K$  não é fechado.  $\square$

**Teorema 29.13.** O produto de um espaço enumeravelmente compacto e um  $k$ -espaço enumeravelmente compacto  $T_3$  é enumeravelmente compacto.

*Demonstração.* Seja  $X$  enumeravelmente compacto e  $Y$  um  $k$ -espaço enumeravelmente compacto. Tome  $((x_n, y_n) : n \in \mathbb{N})$  uma seqüência em  $X \times Y$ . Se existe uma subsequência convergente de  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  então  $((x_n, y_n) : n \in \mathbb{N})$  possui um ponto de acumulação como no caso do produto de um enumeravelmente compacto por um sequencialmente compacto.

Se nenhuma subsequência converge então pela compacidade enumerável  $T_3$ , vamos concluir que  $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  não é um fechado. Podemos encontrar  $U_n$  vizinhança de  $y_n$  e  $(A_n : n \in \mathbb{N})$  uma família de subconjuntos decrescentes de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  tal que  $y_n \notin \overline{\{y_m : m \in A_n\}}$ . Supondo definido  $A_n$ , como  $y_{n+1}$  não é limite da sequência  $(y_m : m \in A_n)$ , existe  $U_{n+1}$  vizinhança de  $y_{n+1}$  tal que  $\{m \in A_n : y_m \notin U_{n+1}\}$  é infinito. Assim,  $y_{n+1} \notin \overline{\{y_m : m \in A_{n+1}\}}$ .

Seja  $A$  na pseudointersecção de  $(A_n : n \in \mathbb{N})$ . Como  $y_n \notin \overline{\{y_m : m \in A_n \cap A\}}$  e  $A \setminus A_n$  é finito, segue que  $y_n$  não é ponto de acumulação de  $\{y_m : m \in A\}$ . Como  $Y$  é enumeravelmente compacto, temos que  $\{y_m : m \in A\}$  tem um ponto de acumulação  $y \in Y$ . Como  $y \notin \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ , segue que  $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  não é um subconjunto fechado. Seja  $K$  um compacto de  $Y$  tal que  $Y \cap K$  não é fechado em  $K$ . Seja  $B = \{n \in \mathbb{N} : y_n \in K\}$ . Temos que  $B$  é infinito. Seja  $p$  um ultrafiltro livre sobre  $B$  tal que  $(x_n : n \in B)$  possui um  $p$ -limite (tal  $p$  existe pois  $(x_n : n \in B)$  possui ponto de acumulação). Como  $K$  é compacto, temos que  $(y_n : n \in B)$  possui  $p$ -limite em  $K \subseteq Y$ . Assim,  $((x_n, y_n) : n \in B)$  possui  $p$ -limite em  $X \times Y$ , logo  $((x_n, y_n) : n \in B)$  possui um ponto de acumulação.  $\square$

## 29.4 Quociente.

### 29.4.1 Quociente, partições e relações de equivalência.

A ideia de quociente é ‘agrupar pontos como um único ponto’. Isso seria usar uma partição ou as classes de uma relação de equivalência.

**Definição 29.14.** Dizemos que  $\mathcal{P}$  é uma partição de  $X$  se os elementos de  $\mathcal{P}$  são não vazios, dois a dois disjuntos e  $\bigcup \mathcal{P} = X$ .

**Exemplo 29.15.** Dada uma função sobrejetora  $f : X \rightarrow Y$  com  $X$  um espaço topológico, temos que  $\{f^{-1}[\{y\}] : y \in Y\}$  é uma partição de  $X$ .

**Definição 29.16.** Dada uma função sobrejetora  $f : X \rightarrow Y$  com  $X$  um espaço topológico. A topologia quociente sobre  $Y$  é a topologia final.

**Teorema 29.17.** Seja  $X$   $T_3$  e  $F \subseteq X$ . Considere a partição  $\mathcal{P} = \{\{x\} : x \notin F\} \cup \{F\}$ . Então  $\mathcal{P}$  com a topologia quociente é Hausdorff.

*Demonstração.* Dados dois pontos  $x, y \notin F$  tome abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $x \in U$  e  $y \in V$ . Então  $q[U]$  e  $q[V]$  são abertos disjuntos no quociente que contém  $\{x\}$  e  $\{y\}$  respectivamente. Se  $x \notin F$  tome  $U$  e  $V$  abertos disjuntos tais que  $x \in U$  e  $F \subseteq V$  então  $q[U]$  e  $q[V]$  são abertos no quociente que contém  $\{x\}$  e  $F$  respectivamente. A imagem direta não precisa ser sempre aberta, mas neste caso elas são, pois  $q^{-1}[q[U]] = U$  e  $q^{-1}[q[V]] = V$ .  $\square$

**Exemplo 29.18.** Considere a bola fechada unitária  $B[(0,0), 1]$  no  $\mathbb{R}^2$ . Considere a partição  $\mathcal{P} = \{\{x\} : \|x\| < 1\} \cup \{\{x\} : \|x\| = 1\}$ . Considere a função  $q : B[(0,0), 1] \rightarrow \mathcal{P}$  tal que  $q(x)$  é o elemento da partição  $\mathcal{P}$  tal que  $x \in q(x)$ . Então  $\mathcal{P}$  com a topologia quociente é homeomorfo à casca esférica.

Um detalhe importante aqui é que é preciso usar a compacidade de  $F := \{x : \|x\| = 1\}$  para que a topologia no ponto  $F$  no quociente seja homeomorfa a de um ponto no  $\mathbb{R}^2$ . Para isto, basta mostrar que  $\mathcal{B} = \{q[\{x : \|x\| > 1 - \frac{1}{n+1}\}] : n \in \mathbb{N}\}$  é uma base local de  $F$ . Uma vizinhança  $V$  de  $F$  no quociente é tal que existe  $x \in V_x \subseteq U$  para cada  $x \in F$ . Podemos escolher  $V_x = \{x : \|x\| > 1 - \frac{1}{n_x}\} \cap R_x$ , onde  $R_x$  é um setor circular aberto contendo o ponto  $x$ .

Então  $F \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x$ . Pela compacidade, existe  $F' \subseteq F$  finito tal que  $F \subseteq \bigcup_{x \in F'} V_x$ . Tome  $N = \max\{n_x : x \in F'\}$ . Então  $\{x : \|x\| > 1 - \frac{1}{N}\} \subseteq U$ . Assim  $\mathcal{B}$  é uma base local de  $F$ .

**Exercício 29.19.** Seja  $X = B[(0,0), 1] \setminus \{(0,1)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ . Considere a partição  $\mathcal{P} = \{\{x\} : \|x\| < 1\} \cup \{\{x \in X : \|x\| = 1\}\}$ . Considere a função  $q : X \rightarrow \mathcal{P}$  tal que  $q(x)$  é o elemento da partição  $\mathcal{P}$  tal que  $x \in q(x)$ .

O quociente é compacto?

O quociente satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade?

**Exemplo 29.20.** Seja  $\mathbb{R}$  com a topologia usual e considere a relação de equivalência  $x \equiv y$  se e somente se  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Então  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  com a topologia quociente é homeomorfo ao círculo.

**Exercício 29.21.** Se  $G$  é um grupo topológico e  $H$  é um subgrupo fechado de  $H$  então a topologia quociente em  $G/H$  é uma topologia de grupo  $T_1$ .

**Exemplo 29.22. faixa comum.** Considere o retângulo  $[0, 10] \times ]0, 1[$ . Se  $0 < x < 10$  então considere  $(x, y) \equiv (x', y')$  se e somente se  $(x, y) = (x', y')$  e se  $x \in \{0, 10\}$  então  $(x, y) \equiv (x', y')$  se e somente se  $x' \in \{0, 10\}$  e  $y = y'$ .

**faixa de Moebius** Considere o retângulo  $[0, 10] \times ]0, 1[$ . Se  $0 < x < 10$  então considere  $(x, y) \equiv (x', y')$  se e somente se  $(x, y) = (x', y')$  e se  $x \in \{0, 10\}$  então  $(x, y) \equiv (x', y')$  se e somente se  $(x, y) = (x', y')$  ou  $(x' = 10 - x$  e  $y' = 1 - y)$ .

*Pegue um papel 1cm  $\times$  10cm e visualize os dois quocientes. Note que nos pontos onde quocientamos dois pontos, temos que uma vizinhança de um ponto vai ser um semi-disco aberto referente a  $(x, y)$  e outro semi-disco aberto referente a  $(x', y')$ . A união das duas vai dar uma vizinhança do ponto no quociente, mas essa vizinhança não precisa ser aberta. Tomando dois semi-discos de mesmo raio vemos que ela vai ser aberta na topologia quociente.*

## 29.5 'Vai que cola'.

### 29.5.1 Ideia de colagem.

As colagens são formalmente um quociente de uma soma topológica.

**Exemplo 29.23.** Dado duas cópias de  $B[(0, 0), 1]$ , podemos colar as bordas para obter uma casca esférica. Tome a soma topológica  $(B[(0, 0), 1] \times \{0\}) \oplus (B[(0, 0), 1] \times \{1\})$  e a partição  $\{((x, i)) : \|x\| < 1, i \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, 0), (x, 1) : \|x\| = 1\}$ . Considere a topologia quociente.

**Exemplo 29.24.** Um cubo oco seria a soma direta de seis quadrados e um quociente para 'colar as bordas' (a grande diferença com colar um cubo de papel é poder fazer isso só colando as bordas sem ter uma rebarba).

### 29.5.2 Colando um espaço $T_3$ em que existem pontos que não são separados por funções reais contínuas.

Antes de usarmos a tábua de Tychonoff, vamos revisar o exemplo e deduzir uma propriedade sobre suas funções contínuas reais quando colamos duas cópias.

**Exemplo 29.25.** (Colando duas tábuas de Tychonoff pelo lado mais curto). Sejam  $[0, \omega_1 + 1[$  e  $[0, \omega + 1[$  com a topologia da ordem. Seja  $X = ([0, \omega_1 + 1[ \times ]0, \omega + 1[) \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$ . Seja  $A = \{\omega_1\} \times ]0, \omega[$  e  $B = [0, \omega_1[ \times \{\omega\}$

Seja  $J = \{j_0, j_1\}$  e na soma topológica  $(X \times \{j_0\}) \oplus (X \times \{j_1\})$  tome  $Y$  o espaço quociente a partir da partição  $\{((\alpha, n), j) : \alpha < \omega_1, n \leq \omega, j \in J\} \cup \{((\omega_1, n), j_0), ((\omega_1, n), j_1) : n < \omega\}$ . Seja  $Z_{(j_0, j_1)}$  o espaço quociente obtido a partir da partição.

Se  $f : Z_{(j_0, j_1)} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, existe  $\xi < \omega_1$  tais que  $f$  é constante em  $q[([\xi, \omega_1[ \times \{\omega\}) \times J]$ .

*Demonstração.* Seja  $A = \{\omega_1\} \times ]0, \omega[$  e  $B = [0, \omega_1[ \times \{\omega\}$ .

Seja  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\epsilon > 0$  uma função contínua. Como  $[0, \omega_1[ \times \{n\}$  é homeomorfa a  $[0, \omega_1[$  para cada  $n \leq \omega$ , segue que existe  $\zeta_n < \omega_1$  tal que  $g|_{[\zeta_n, \omega_1[ \times \{n\}}$  é constante para cada  $n \leq \omega$ . Tome  $\zeta = \sup\{\zeta_n : n \leq \omega\} < \omega_1$  (o supremo é menor que  $\omega_1$  devido a cofinalidade de  $\omega_1$  não ser enumerável).

Para cada  $\mu \in ]\zeta, \omega_1[$  temos que  $\{(\mu, n) : n < \omega\}$  converge para  $(\mu, \omega)$ . Assim,  $\{g((\mu, n)) : n < \omega\}$  converge para  $g((\mu, \omega))$ . Como  $g((\omega_1, n)) = g((\mu, n))$  para cada  $n \in \omega$ , segue que  $\{g((\mu, n)) : n \in \omega\}$  é uma sequência de Cauchy que converge para  $g(\mu, \omega)$  para algum (qualquer)  $\mu > \zeta$ .

Dada uma  $f : Z_{(j_0, j_1)} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, temos que  $q|_{X \times \{j\}} : X \times \{j\} \rightarrow q[X \times \{j\}]$  será um homeomorfismo ( $q$  é injetora nesse subespaço e a topologia é a quociente). Assim  $i_j : X \rightarrow q[X \times \{j\}]$  é um homeomorfismo para  $j \in J$ . Então  $g_j := f|_{q[X \times \{j\}]} \circ q|_{X \times \{j\}} \circ i_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Assim, existe  $\zeta_j < \omega_1$  e  $g_j((\omega_1, n))$  converge para  $g_j((\mu, \omega))$  para todo  $\mu > \zeta_j$ . Tomando,  $\mu_j > \xi := \max\{\zeta_0, \zeta_1\}$ , temos que  $f(q(\mu_0, \omega, 0)) = g_0(\mu_0, \omega) = \lim_{n \in \omega} g_0(\omega_1, n) = \lim_{n \in \omega} f(q(\omega_1, n, 0)) = \lim_{n \in \omega} f(q(\omega_1, n, 1)) = \lim_{n \in \omega} g_1(\omega_1, n) = g_1(\mu_1, \omega) = f(q(\mu_1, \omega, 1))$ .

Assim,  $f$  é constante em  $q[[\xi, \omega_1[ \times \{\omega\}) \times J]$ . □

**Exemplo 29.26.** Seja  $X$  a tábua de Tychonoff e considere a soma direta de  $\{X \times \{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ . Sejam  $A$  e  $B$  os fechados de  $X$ ,  $\omega \times \{\omega_1\}$  e  $\{\omega + 1\} \times \omega_1$ . Sejam  $A_n$  e  $B_n$  as cópias de  $A$  e  $B$  em  $X_n$ . A ideia é colar  $B_0$  com  $B_1$ ,  $A_1$  com  $A_2$ ,  $B_2$  com  $B_3$ , etc... e  $A_0$  com  $A_{-1}$ ,  $B_{-1}$  com  $B_{-2}$  etc... Seja  $Z_0$  o espaço quociente gerado.

Após essa colagem seja  $y_0$  e  $y_1$  como se  $y_0$  fosse  $-\infty$  e  $y_1$  como se fosse  $+\infty$  e seja  $Z = Z_0 \cup \{y_0, y_1\}$ . Defina com detalhes e mostre que o espaço  $Z$  é  $T_3$  e se  $f : Z \rightarrow [0, 1]$  é uma função contínua com  $f(y_0) = 0$  então  $f(y_1) = 1$ .

*Demonstração.* Vamos primeiro fazer o quociente. Dada a soma topológica em  $X \times \mathbb{Z}$ , considere o espaço quociente usando a partição

$$\{(x, n) : x \in X \setminus (A \cup B), n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, 2n-1), (x, 2n) : x \in A, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, 2n), (x, 2n+1) : x \in B, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dado esse espaço quociente que chamaremos de  $Z_0$  com  $q : \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} X \times \{n\} \rightarrow Z_0$  a função quociente que gera a topologia.

Cada vizinhança de cada ponto contém a colagem de no máximo duas vizinhanças, e não é difícil verificar que o espaço quociente vai ser Hausdorff e regular.

Dado  $y_0$  e  $y_1$  fora de  $Z_0$ . Defina uma vizinhança básica  $W_n$  de  $y_0$  como

$\{y_0\} \cup q[\bigcup_{m < 2n} X \times \{m\} \cup (X \setminus B) \times \{2n\}]$  (é importante notar que  $q[\bigcup_{m < 2n} X \times \{m\} \cup (X \setminus B) \times \{2n\}]$  é um aberto de  $Z_0$ ) e

$V_n$  vizinhança básica de  $y_1$  como

$\{y_1\} \cup q[\bigcup_{m > 2n} X \times \{m\} \cup (X \setminus A) \times \{2n\}]$  (note que  $q[\bigcup_{m > 2n} X \times \{m\} \cup (X \setminus A) \times \{2n\}]$  é um aberto de  $Z_0$ ). Assim  $Z_0$  é um subespaço aberto de  $Z$ . Note a similaridade com colocar as pontas em  $]0, 1[$ , mas neste caso não temos uma compactificação, pois  $X \times \{m\}$  não é compacto.

Faremos algumas observações sobre a regularidade, mas fica a cargo do leitor se convencer que  $Z$  é  $T_3$ . Note que se  $x \in X \setminus (A \cup B)$  então  $q[(X \setminus (A \cup B)) \times \{m\}]$  é uma vizinhança aberta de  $q((x, m))$ . Se  $x \in A$  então  $q[(X \setminus B) \times \{2n-1, 2n\}]$  é uma vizinhança aberta de  $q((x, 2n-1)) = q(x, 2n)$ . Se  $x \in B$  então  $q[(X \setminus B) \times \{2n, 2n+1\}]$  é uma vizinhança aberta de  $q((x, 2n)) = q(x, 2n+1)$ . O conjunto  $\{y_0\} \cup q[\bigcup_{m \leq 2n} X \times \{m\}]$  e  $\{y_1\} \cup q[\bigcup_{m \geq 2n} X \times \{m\}]$  são fechados.

Por exemplo para ver que  $Z$  é regular em  $y_0$  note que

$$\overline{W_n} = \{y_0\} \cup q[\bigcup_{m < 2n} X \times \{m\} \cup (X \setminus B) \times \{2n\}] \subseteq \{y_0\} \cup q[\overline{\bigcup_{m < 2n} X \times \{m\} \cup (X \times \{2n\})}] = \{y_0\} \cup q[\bigcup_{m < 2n} X \times \{m\} \cup (X \times \{2n\})].$$

Se  $x \in B$  e  $U$  é uma vizinhança de  $q((x, 2n))$ , podemos assumir que  $U \subseteq q[(X \setminus B) \times \{2n, 2n+1\}]$ . Temos que  $q^{-1}[U] \subseteq (X \setminus B) \times \{2n, 2n+1\}$  é aberto na soma topológica e  $\{(x, 2n), (x, 2n+1)\} \subseteq q^{-1}[U]$ . Existe  $V_{2n}$  e  $V_{2n+1}$  vizinhanças de  $(x, 2n)$  em  $X \times \{2n\}$  e  $(x, 2n+1)$  em  $X \times \{2n+1\}$  tais que  $V_{2n} \subseteq \overline{V_{2n}}^{X \times \{2n\}} \subseteq q^{-1}[U] \cap (X \times \{2n\})$  e  $V_{2n+1} \subseteq \overline{V_{2n+1}}^{X \times \{2n+1\}} \subseteq q^{-1}[U] \cap (X \times \{2n+1\})$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $\overline{V}$  é compacta (existe por que  $X$  é localmente compacta) e tal que  $\overline{V} \subseteq V_{2n} \cap V_{2n+1}$ . Então  $W = V \times \{2n, 2n+1\}$  é um aberto tal que  $q((x, 2n)) \in q[W]$  e  $q^{-1}[q[W]] = W$ . Assim,  $q[W]$  é aberto em  $Z_0$  (logo em  $Z$ ) e tal que  $\overline{q[W]} \subseteq q[\overline{W}] \subseteq U$  ( $\overline{W}$  é compacto, assim  $q[\overline{W}]$  é um compacto num Hausdorff e portanto um fechado contendo  $q[W]$ ). Portanto  $q[W]$  testemunha a regularidade para  $q[(x, 2n)]$  e  $U$ .

Para concluir, seja  $f$  uma função contínua em  $Z$ . Podemos ver  $Z_{(2k-1, 2k)}$  como um supespaço de  $Z$ . Assim, pelo que foi visto anteriormente, temos que existe  $\xi_k < \omega_1$  tal que  $q[\{\xi_k, \omega_1\} \times \{\omega\} \times \{(-2k-1, -2k)\}]$  é constante para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . Tomando  $\gamma > \sup\{\xi_k : k \in \mathbb{Z}\}$  temos que  $f(q((\gamma, \omega), 0)) = f(q((\gamma, \omega), -1)) = f(q((\gamma, \omega), -2)) = f(q((\gamma, \omega), -3)) = \text{etc...}$

A primeira igualdade sai da relação vista acima usando  $\gamma > \xi_0$  e o par  $(-1, 0) = (-2.0 - 1, -2.0)$ . A segunda igualdade sai de  $q((\gamma, \omega), -1) = q((\gamma, \omega), -2)$  (cola-se pontos de  $B_{2n}$  com  $B_{2n+1}$ ). A terceira igualdade sai da relação vista acima usando  $\gamma > \xi_1$  e o par  $(-3, -2) = (-2.1 - 1, -2.1)$  e assim sucessivamente.

De modo similar, podemos mostrar que  $f(q((\gamma, \omega), 0)) = f(q((\gamma, \omega), 1)) = f(q((\gamma, \omega), 2)) = f(q((\gamma, \omega), 3)) = \text{etc...}$

Com isto, toda vizinhança de  $y_0$  contém um ponto da forma  $((\gamma, -k))$  com  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $f((\gamma, -k)) = f((\gamma, 0))$ . Similarmente, podemos mostrar que toda vizinhança de  $y_1$  contém um ponto  $(\gamma, l)$  com  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $f((\gamma, l)) = f((\gamma, 0))$ .

Como  $Z$  é Hausdorff, segue que  $f(y_0) = f((\gamma, 0)) = f(y_1)$ . □

# Capítulo 30

## Dois exemplos de espaços topológicos.

### 30.1 Passando cola em mais cópias do mesmo espaço.

#### 30.1.1 Existe um espaço $T_3$ em que toda função contínua real é constante.

Já vimos que existe um espaço  $X$   $T_3$  tal que existem  $x, y \in X$  distintos tais que para todo  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua temos  $f(x) = f(y)$ .

Vamos apresentar esse exemplo depois de enunciar o exemplo a seguir:

**Exemplo 30.1.** Existe um espaço  $T_3$  em que as únicas funções contínuas reais são constantes.

*Ideia vaga da construção.* Seja  $X$  um espaço  $T_3$  tal que existem  $y_0, y_1 \in X$  distintos tais que para todo  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua temos  $f(y_0) = f(y_1)$ .

A ideia será tomar um número suficiente de cópias de  $X$  e tomar um quociente. Vamos pensar que  $X$  é um emaranhado de fios com duas pontas  $y_0$  e  $y_1$ . Então vamos colar todas as pontas com  $y_0$  e todos os pontos  $z$  que não são ponta vão ser colado por uma ponta  $y_1$  de outro fio, mas sem colar duas pontas  $y_1$  no mesmo lugar. Desse modo todo ponto  $z$  que não é ponta está colada a uma cópia do ponto  $y_1$  e assim usamos o  $y_0$  e o  $y_1$  de uma mesma cópia para fazer com que o valor da função na classe de  $z$  bata com o valor da classe de  $y_0$  (se pensarmos que  $X$  é um tipo de caminho, o quociente dos  $y_0$  seria ‘Roma’).  $\square$

*Demonstração.* Seja  $X$  um espaço  $T_3$  tal que existem  $y_0, y_1 \in X$  distintos tais que para todo  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua então temos  $f(y_0) = f(y_1)$ . Considere  $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \{y_0, y_1\})^n =: I$ . Então  $X_{\vec{t}} = X \times \{\vec{t}\}$ . Vamos então tomar a soma topológica  $\bigoplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}$ . A partição para definir a topologia quociente no espaço quociente  $Z$  é dada pela partição  $\{(y_1, \emptyset)\} \cup \{(x, \vec{t}), (y_1, \vec{t} \hat{\ } x)\} : x \in X \setminus \{y_0, y_1\}, \vec{t} \in I\} \cup \{(x_0, \vec{t}) : \vec{t} \in I\}$ . Seja  $q : \bigoplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}} \rightarrow Z$  a função quociente.

**Toda função contínua de  $Z$  em  $[0, 1]$  é constante.**

Vamos usar o fato que os elementos da mesma cópia de  $X_{\vec{t}}$  não são equivalentes e por isso  $q|_{X_{\vec{t}}}$  é injetora sobre  $q[X_{\emptyset}]$ , mas do que isso,  $X_{\vec{t}}$  e  $q|_{X_{\vec{t}}}$  são homeomorfos.

Tome  $f$  uma função contínua de  $Z$  em  $[0, 1]$  com  $f((y_0, \emptyset)) = 0$ . Seja  $z \in Z$ , com  $z \neq q((y_0, \emptyset))$ . Se  $z = \{(y_1, \emptyset)\} = q((y_1, \emptyset))$  então  $q \circ i_{\emptyset} : X \rightarrow q[X_{\emptyset}]$ , onde  $i_{\emptyset} : X \rightarrow \bigoplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}$  é a composta da inclusão de  $X_{\emptyset}$  na soma direta com o homeomorfismo natural entre  $X$  e  $X_{\emptyset}$ . Então  $f \circ q \circ i_{\emptyset} : X \rightarrow [0, 1]$  é uma função contínua com  $f(q(i_{\emptyset}(y_0))) = 0$ , assim,  $f(q(i_{\emptyset}(y_0))) = f(q(i_{\emptyset}(y_1)))$ . Assim,  $0 = f(q((x_0, \emptyset))) = f(z)$ . Se  $z \in Z \setminus \{q((x_0, \emptyset)), q((y_1, \emptyset))\}$  então existe  $x \in X \setminus \{y_0, y_1\}$  e  $\vec{t} \in I$  tal que  $z = \{(x, \vec{t}), (y_1, \vec{t} \hat{\ } x)\}$ . Usando um argumento similar ao acima para  $X_{\vec{t} \hat{\ } x}$ , temos  $f(q((y_0, \emptyset))) = f(q(y_0, \vec{t} \hat{\ } x)) = 0 = f(q(y_1, \vec{t} \hat{\ } x)) = f(q(x, \vec{t})) = f(z)$ .

Suponha por absurdo que existe uma função  $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(q((y_0, \emptyset))) \neq g(z)$ . Tome  $h(x) = \min\{1, \frac{|g(x) - g(q((y_0, \emptyset)))|}{|g(z) - g(q((y_0, \emptyset)))|}\}$ . Como  $h : Z \rightarrow [0, 1]$  é contínua com  $h(q((y_0, \emptyset))) = 0$ , mas  $h$  não é constantemente 0, uma contradição.

$Z$  é  $T_1$ .

Basta notar que  $q^{-1}[\{z\}]$  é um subconjunto fechado de  $\bigoplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}$  para todo  $z \in Z$ .

A seguir vamos verificar que  $Z$  é regular em  $z$ , para todo  $z \in Z$ . Para isso, vamos primeiro encontrar um aberto definido em formato de ‘árvore’.

Para cada  $b \in \bigoplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}$ , vamos denotar por  $i(b) \in I$ , o único índice  $i \in I$  para o qual  $b \in X_i$ .

**Vizinhança  $W$  de  $z = q((y_0, \emptyset))$  dentro de  $q^{-1}[U]$ .**

Seja  $U$  uma vizinhança aberta de  $z \in Z$ . Então neste caso,  $q^{-1}[\{z\}] = \{(y_0, \vec{t}) : \vec{t} \in I\}$ . Vamos definir por indução sobre o comprimento  $l$  de  $\vec{t}$ .

Começamos definindo  $V_{(y_0, \vec{t})}$  aberto em  $X_{\vec{t}}$  tal que  $(y_0, \vec{t}) \in V_{(y_0, \vec{t})} \subseteq q^{-1}[U]$  com  $(y_1, \vec{t}) \notin \overline{V_{(y_0, \vec{t})}}^{X_\emptyset}$ .

Seja  $\mathcal{W}_0 = \{V_\emptyset\}$ .

Para cada  $(x, \emptyset) \in \bigcup \mathcal{W}_0$  com  $x \notin \{y_0, y_1\}$ , fixe  $V_{(y_1, \emptyset \wedge x)}$  vizinhança de  $(y_1, \emptyset \wedge x)$  tal que  $\overline{V_{(y_1, \emptyset \wedge x)}}^{X_{\emptyset \wedge x}} \cap \overline{V_{(y_1, \emptyset \wedge x)}}^{X_{\emptyset \wedge x}} = \emptyset$ .

Seja  $\mathcal{W}_1 = \{V_{(y_0, \vec{t})} : |\vec{t}| = 1\} \cup \{V_{(y_1, \emptyset \wedge x)} : (x, \emptyset) \in \bigcup \mathcal{W}_0 \text{ com } x \notin \{y_0, y_1\}\}$

Temos que os elementos de  $\mathcal{W}_1$  são dois a dois disjuntos e no máximo dois deles estão no mesmo espaço  $X_{\vec{s}}$ .

Suponhamos que  $\mathcal{W}_k$  foi definido para cada  $k \leq m$  de forma que

$\mathcal{W}_{k+1} = \{V_{(y_0, \vec{t})} : |\vec{t}| = k+1\} \cup \{V_{(y_1, \emptyset \wedge x)} : (x, \emptyset) \in \bigcup \mathcal{W}_k \text{ com } x \notin \{y_0, y_1\}\}$  para todo  $k < m$ , e além disso  $\mathcal{W}_k$  são dois a dois disjuntos e no máximo dois deles estão no mesmo espaço  $X_{\vec{s}}$ , para cada  $k \leq m$ .

Vamos então definir  $\mathcal{W}_{m+1}$  satisfazendo as propriedades indutivas.

Para cada  $(x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_m$  com  $x \notin \{y_0, y_1\}$ , fixe  $V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)}$  vizinhança de  $(y_1, \vec{t} \wedge x)$  em  $X_{\vec{t} \wedge x}$  tal que  $\overline{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)}}^{X_{\vec{t} \wedge x}} \subseteq q^{-1}[U]$  e  $\overline{V_{(y_0, \vec{t} \wedge x)}}^{X_{\vec{t} \wedge x}} \cap \overline{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)}}^{X_{\vec{t} \wedge x}} = \emptyset$ .

Como os elementos de  $\mathcal{W}_m$  são dois a dois disjuntos, junto com a propriedade acima, segue que  $\{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)} : (x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_m \text{ com } x \notin \{y_0, y_1\}\}$  são subconjuntos em distintos  $X_{\vec{s}}$ 's. Assim,

$\mathcal{W}_{m+1} = \{V_{(y_0, \vec{t})} : |\vec{t}| = m+1\} \cup \{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)} : (x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_m \text{ com } x \notin \{y_0, y_1\}\}$  são dois a dois disjuntos e há no máximo dois subconjuntos em  $X_{\vec{s}}$ .

Como os índices em cada  $\mathcal{W}_n$  tem tamanho  $n$ , segue que  $\bigcup \{\mathcal{W}_n : n \in \mathbb{N}\}$  são dois a dois disjuntos. Claramente  $\bigcup \mathcal{W}$  é um aberto da soma topológica. Para ver que  $q[W]$  é aberto, basta mostrar que  $q^{-1}[q[U]]$ .

Para isto, basta ver que se  $c \in W$  então  $q^{-1}[\{q(c)\}] \subseteq W$ .

Se  $c \in \{(y_0, \vec{t}) : \vec{t} \in I\}$  então por construção temos  $q(c) = \{(y_0, \vec{t}) : \vec{t} \in I\} \subseteq W$ .

Por construção, temos que  $(y_1, \emptyset) \notin W$ .

Assim se  $c \in W \setminus \{(y_0, \vec{t}) : \vec{t} \in I\}$  então  $q(c) = \{(x, \vec{t}), (y_1, \vec{t} \wedge x)\}$ .

Se  $c = (x, \vec{t}) \in W$ , então existe  $n$  tal que  $(x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_n$  e pela definição de  $\mathcal{W}_{n+1}$ , segue que  $(y_1, \vec{t} \wedge x) \in V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)} \subseteq \bigcup \mathcal{W}_{n+1}$ .

Se  $(y_1, \vec{t} \wedge x)$  então  $m := |\vec{t} \wedge x| \geq 1$ . Assim  $(y_1, \vec{t} \wedge x) \in \bigcup \mathcal{W}_m$ . Logo existe  $(y, \vec{s}) \in \bigcup \mathcal{W}_{m-1}$  tal que  $(y_1, \vec{t} \wedge x) \in V_{(y_1, \vec{s} \wedge y)}$ . Assim,  $\vec{t} \wedge x = \vec{s} \wedge y$ . Logo  $(x, \vec{t}) = (y, \vec{s}) \in W$ .

Portanto, se  $c \in W$  então  $q^{-1}[\{q(c)\}] \subseteq W$ . Logo  $q[W]$  é aberto como queríamos.

**Vizinhança  $W$  de  $z = \{(x_0, \vec{t}_0), (y_1, \vec{t}_0 \wedge x_0)\}$  dentro de  $q^{-1}[U]$ .**

Seja  $U$  uma vizinhança aberta de  $z \in Z$ , onde  $q^{-1}[\{z\}] = \{(x_0, \vec{t}_0), (y_1, \vec{t}_0 \wedge x_0)\}$  com  $x_0 \notin \{y_0, y_1\}$ . Vamos definir por indução sobre o comprimento de  $\vec{t}$ .

Começamos definindo  $V_{(x_0, \vec{t}_0)}$  aberto em  $X_{\vec{t}_0}$  tal que  $(x_0, \vec{t}_0) \in V_{(x_0, \vec{t}_0)} \subseteq q^{-1}[U]$  com  $\{(y_0, \vec{t}_0), (y_1, \vec{t}_0)\} \cap \overline{V_{(x_0, \vec{t}_0)}}^{X_{\vec{t}_0}} = \emptyset$ . Seja  $k_0 = \vec{t}_0$ . Nossa indução começa em  $k_0$ . Seja  $\mathcal{W}_{k_0} = \{V_{(x_0, \vec{t}_0)}\}$ .

Suponhamos que  $\mathcal{W}_k$  foi definido para cada  $k_0 \leq k \leq m$  de forma que

$\mathcal{W}_{k+1} = \{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)} : (x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_k \text{ com } x \notin \{y_0, y_1\}\}$  para todo  $k < m$ , todo elemento em  $\mathcal{W}_k$  está em algum  $X_{\vec{t}}$  tal que  $|\vec{t}| = k$  e além disso  $\mathcal{W}_k$  são dois a dois disjuntos e no máximo um deles está no mesmo espaço  $X_{\vec{s}}$  e

$(y_0, \vec{s}) \notin \bigcup \mathcal{W}_k^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$ , para cada  $\vec{s} \in I$  e  $k \leq m$ .

Vamos então definir  $\mathcal{W}_{m+1}$  satisfazendo as propriedades indutivas.

Para cada  $(x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_m$  com  $x \notin \{y_0, y_1\}$ , fixe  $V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)}$  vizinhança de  $(y_1, \vec{t} \wedge x)$  em  $X_{\vec{t} \wedge x}$  tal que  $\overline{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)}}^{X_{\vec{t} \wedge x}} \subseteq q^{-1}[U]$  e  $(y_0, \vec{t} \wedge x) \notin \overline{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)}}^{X_{\vec{t} \wedge x}}$ .

Como os elementos de  $\mathcal{W}_m$  são dois a dois disjuntos e seus elementos estão em  $X_{\vec{t}}$  para algum  $\vec{t}$  de comprimento  $m$ , segue que

$\mathcal{W}_{m+1} := \{V_{(y_1, \vec{t} \wedge x)} : (x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_m \text{ com } x \notin \{y_0, y_1\}\}$

são subconjuntos em distintos  $X_{\vec{s}}$ 's e os elementos estão em  $X_{\vec{t}}$  para algum  $\vec{t}$  de comprimento  $m+1$ .



Pela escolha dos elementos de  $\mathcal{W}_{m+1}$  e pelo fato que há somente um conjunto de  $\mathcal{W}_{n+1}$ , segue que  $(y_0, \vec{s}) \notin \bigcup \{\bar{V} : V \in \mathcal{W}_{m+1}\} = \overline{\bigcup \mathcal{W}_{m+1}}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$ .

Claramente  $\bigcup \mathcal{W}$  é um aberto da soma topológica. Para ver que  $q[W]$  é aberto, basta mostrar que  $q^{-1}[q[U]]$ .

Para isto, basta ver que se  $c \in W$  então  $q^{-1}\{q(c)\} \subseteq W$ .

Por construção, temos que  $\{(y_0, \vec{t}) : \vec{t} \in I\} \cap W = \emptyset$ .

Por construção, temos que  $(y_1, \emptyset) \notin W$ .

Assim se  $c \in W$  então  $q(c) = \{(x, \vec{t}), (y_1, \vec{t} \hat{x})\}$ .

Se  $c = (x, \vec{t}) \in W$ , então existe  $n \geq k_0$  tal que  $(x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_n$  e pela definição de  $\mathcal{W}_{n+1}$ , segue que  $(y_1, \vec{t} \hat{x}) \in V_{(y_1, \vec{t} \hat{x})} \subseteq \bigcup \mathcal{W}_{n+1}$ .

Se  $(y_1, \vec{t} \hat{x})$  então  $m := |\vec{t} \hat{x}| \geq 1$  com  $m \geq k_0$  (não há pontos com primeira coordenada  $y_1$  no nível  $k_0$ ). Assim  $(y_1, \vec{t} \hat{x}) \in \bigcup \mathcal{W}_m$ . Logo existe  $(y, \vec{s}) \in \bigcup \mathcal{W}_{m-1}$  tal que  $(y_1, \vec{t} \hat{x}) \in V_{(y_1, \vec{s} \hat{y})}$ . Assim,  $\vec{t} \hat{x} = \vec{s} \hat{y}$ . Logo  $(x, \vec{t}) = (y, \vec{s}) \in W$ .

Portanto, se  $c \in W$  então  $q^{-1}\{q(c)\} \subseteq W$ . Logo  $q[W]$  é aberto como queríamos.

**Vizinhança  $W$  de  $z = \{(y_1, \emptyset)\}$  dentro de  $q^{-1}[U]$ .**

Seja  $U$  uma vizinhança aberta de  $z \in Z$ , onde  $q^{-1}\{z\} = z = \{(y_1, \emptyset)\}$ . Vamos definir por indução sobre o comprimento de  $\vec{t}$ .

Começamos definindo  $V_{(y_1, \emptyset)}$  aberto em  $X_\emptyset$  tal que  $(y_1, \emptyset) \in V_{(y_1, \emptyset)} \subseteq q^{-1}[U]$  com  $(y_0, \vec{t}_0) \notin \overline{V_{(y_1, \emptyset)}}^{X_\emptyset}$ . Seja  $\mathcal{W}_0 = \{V_{(y_1, \emptyset)}\}$ .

Suponhamos que  $\mathcal{W}_k$  foi definido para cada  $k \leq m$  de forma que

$\mathcal{W}_{k+1} = \{V_{(y_1, \vec{t} \hat{x})} : (x, \vec{t}) \in \bigcup \mathcal{W}_k \text{ com } x \notin \{y_0, y_1\}\}$  para todo  $k < m$ , todo elemento em  $\mathcal{W}_k$  está em algum  $X_{\vec{t}}$  tal que  $|\vec{t}| = k$  e além disso  $\mathcal{W}_k$  são dois a dois disjuntos e no máximo um deles está no mesmo espaço  $X_{\vec{s}}$  e  $(y_0, \vec{s}) \notin \overline{\bigcup \mathcal{W}_k}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$ , para cada  $\vec{s} \in I$  e  $k \leq m$ .

Comparado ao caso anterior, a única diferença está na definição de  $\mathcal{W}_0$ . O resto da prova é exatamente igual ao caso anterior.

**$X$  é regular.** Resta agora mostrar que  $\overline{q[W]}^Z \subseteq U$ .

Vamos analisar se  $y \in \overline{W}^Z$  analisando  $q^{-1}\{y\}$ :

*Caso 1.* Existe  $c \in q^{-1}\{y\}$  tal que  $c \in \overline{W}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$ . Então  $c \in \overline{W \cap X_{i(c)}}^{X_{i(c)}} \subseteq q^{-1}[U]$ . Assim,  $y = q(c) \in q[q^{-1}[U]] \subseteq U$ .

*Caso 2.* Para cada  $c \in q^{-1}\{y\}$ , temos  $c \notin \overline{W}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$  então  $\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}} \setminus \overline{W}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$  é um aberto contendo  $q^{-1}\{y\}$ .

Usando  $y$  no lugar de  $z$  e  $\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}} \setminus \overline{W}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$  no lugar de  $q^{-1}[U]$ , existe um aberto  $O$  aberto em  $\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}$  tal que  $q^{-1}\{y\} \subseteq O \subseteq \oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}} \setminus \overline{W}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}}$  tal que  $q^{-1}[q[O]] = O$ .

Então  $q[O]$  é uma vizinhança de  $y$  tal que  $q[O] \cap q[W] = \emptyset$  (pois  $q^{-1}[q[O]] \cap q^{-1}[q[W]] = O \cap W \subseteq O \cap \overline{W}^{\oplus_{\vec{t} \in I} X_{\vec{t}}} = \emptyset$ ). Deste modo,  $y \notin \overline{q[W]}^Z$ .

Pelos Caso 1 e 2, vemos que  $\overline{q[W]}^Z \subseteq U$ . □

### 30.1.2 Um exemplo sem colagem de um $T_3$ com pontos que não podem ser separados por funções contínuas reais.

Vamos apresentar outro exemplo de espaço  $T_3$  em que existem pontos que não podem ser separados por uma função contínua real.

**Exemplo 30.2.** Existe um espaço  $X T_3$  e  $y_0, y_1 \in X$  distintos tais que se  $f : X \rightarrow [0, 1]$  é contínua e  $f(y_0) = 0$  então  $f(y_1) = 0$ .

*Demonstração.* Vamos adicionar mais um ponto a um exemplo visto anteriormente. Seja  $X_0 = \mathbb{R} \times [0, 2]$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $X = X_0 \cup \{(-1, -1), (0, -1)\}$ . Podemos pensar visualmente que  $(-1, -1)$  é como  $-\infty$  e  $(0, -1)$  é como  $+\infty$ .

Para cada  $(x, y) \in X$  com  $y > 0$  seja  $\mathcal{V}_{(x, y)} = \{(x, y)\}$ .

Para cada  $(x, 0)$ ,  $S_{x, 0} = \{(x, t) : 0 \leq t \leq 2\} \cup \{(x, 0) + (t, t) : 0 \leq t \leq 2\}$ . Note que  $S_{(x, 0)}$  são dois segmentos de reta saindo de  $(x, 0)$ , um com ângulo de 45 graus com o eixo das abscissas e o outro com ângulo de 90. O sistema de vizinhanças  $\mathcal{V}_{x, 0}$  é dado por  $\{(x, 0) \cup (S_{(x, 0)} \setminus F) : F \subseteq X_0 \text{ é finito}\}$ .

Para  $(0, -1)$ , defina  $\mathcal{V}_{(0, -1)} = \{(0, -1)\} \cup \bigcup \{S_{(x, 0)} : x \geq i\} : i \in \mathbb{N}$ .

Para  $(-1, -1)$ , defina  $\mathcal{V}_{(-1, -1)} = \{(-1, -1)\} \cup \bigcup \{S_{(x, 0)} : x < -i\} : i \in \mathbb{N}\}$ .

Fica a cargo do leitor se convencer que  $\{\mathcal{V}_{(x, y)} : (x, y) \in X\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para uma topologia de  $X$  e que esta topologia é  $T_1$ .

Note que os abertos em  $\mathcal{V}_{(x, y)}$  com  $(x, y) \in X_0$  são clopen. Portanto temos a regularidade para todo  $(x, y) \in X_0$ . Falta verificar apenas a regularidade de  $X$  para os pontos  $(0, -1)$  e  $(-1, -1)$ . Note que se  $i \in \mathbb{N}$  então  $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\} \subseteq \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\}$ . De fato tome  $(x', y') \in X$  com  $x' < i + 1$ . Se  $y' > 0$  então  $\{(x', y')\}$  é aberto e não intersecta  $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\}$ . Se  $y' = 0$  então  $(x'', y'') \in S_{(x', 0)}$  é tal que  $x'' \leq x' + 2 < i + 1 + 2 \leq i + 3$ . Portanto  $S_{(x', 0)} \cap \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\} = \emptyset$ . Assim,  $\overline{\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i + 3\}} \subseteq \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\}$ . Logo  $X$  é regular em  $(0, -1)$ .

Para ver que  $X$  é regular em  $(-1, -1)$  note que

$$\{(-1, -1)\} \cup \bigcup \{S_{(x, 0)} : x < -i - 2\} \subseteq \{(-1, -1)\} \cup \{(x, y) : x \leq -i\} = \overline{\{(-1, -1)\} \cup \{(x, y) : x \leq -i\}}$$

$$\text{e } \{(-1, -1)\} \cup \{(x, y) : x \leq -i\} \subseteq \{(-1, -1)\} \cup \bigcup \{S_{(x, 0)} : x < -i\}.$$

Seja  $f : X \rightarrow [0, 1]$  uma função contínua tal que  $f((-1, -1)) = 0$ . Fixe  $n \in \mathbb{N}$  então existe  $i_n \in \mathbb{N}$  tal que  $f[\{(-1, -1)\} \cup \bigcup \{S_{(x, 0)} : x < -i_n\}] \subseteq [0, 2^{-n}] \subseteq [0, 2^{-n}]$ .

A prova da afirmação abaixo foi feita no outro exemplo para 1), mas é igual para qualquer  $t$ :

**Afirmação.** Se  $f(x, 0) = t$  e  $f$  é contínua então existe  $E_x$  enumerável tal que  $f[S_{(x, 0)} \setminus E_x] = \{t\}$ .

Assim, para cada  $x \in [-i_n - 1, -i_n[$  existe  $E_x$  tal que  $f[S_{(x, 0)} \setminus E_x] = \{f(x, 0)\} \subseteq [0, 2^{-n}]$ . Assim, para todo  $x' \in [-i_n, -i_n + 1[$  temos que uma vizinhança de  $(x', 0)$  intercepta infinitos  $S_{(x, 0)} \setminus E_x$  e com isto,  $f(x', 0) \in [0, 2^{-n}]$ . Por indução teremos que para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se  $x'' \in [-i_n + k, -i_n + k + 1[$  temos  $f(x'', 0) \in [0, 2^{-n}]$ .

Assim, pela continuidade da  $f$  em  $(0, -1)$ , segue que  $f((0, -1)) \in [0, 2^{-n}]$ . Como  $n$  é arbitrário, segue que  $f((0, -1)) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 2^{-n}] = \{0\}$ . Portanto,  $f((0, -1)) = 0$ .  $\square$

## 30.2 A não normalidade de um produto não enumerável de $\mathbb{N}$ 's.

Como  $\mathbb{N}$  é um espaço métrico completo, temos que  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  é um espaço métrico completo. Em particular, é um espaço normal.

**Exemplo 30.3.** Seja  $\mathbb{N}$  com a topologia discreta e  $I$  um conjunto não enumerável. Então  $\mathbb{N}^I$  não é normal.

*Demonstração.* Seja  $A_j = \{f \in \mathbb{N}^I : \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{j\} (|f^{-1}[\{n\}]| \leq 1)\}$ . Note que se  $f \in A_j$  então  $f^{-1}[\{j\}]$  é co-enumerável em  $I$ , assim claramente  $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ .

Afirmamos que  $A_j$  é um conjunto fechado para  $j \in \{0, 1\}$ . De fato, se  $g \notin A_j$  então existe  $n \in \mathbb{N} \setminus \{j\}$  tal que  $g^{-1}[\{n\}]$  tem pelo menos dois elementos que denotaremos por  $i_0$  e  $i_1$ . Então  $U = \{h \in \mathbb{N}^I : h(i_0) = h(i_1) = n\}$  é uma vizinhança aberta de  $g$  tal que  $U \cap A_j = \emptyset$ . Note que  $U = U_{i_0} \times U_{i_1} \times \prod_{i \in I \setminus \{i_0, i_1\}} \mathbb{N}$ , onde  $U_{i_j} = \{n\}$ . Assim,  $A_j$  é um fechado.

Resta verificarmos que  $A_0$  e  $A_1$  testemunham a não-normalidade de  $\mathbb{N}^I$ .

Sejam  $U_0$  e  $U_1$  abertos contendo  $A_0$  e  $A_1$  respectivamente. Vamos mostrar que seus fechos não são disjuntos. Assim,  $\mathbb{N}^I$ , não é normal.

Antes de prosseguirmos vamos utilizar uma notação que é útil quando estamos trabalhando com produtos de espaços discretos.

Dizemos que  $p$  é uma função parcial finita de  $\mathbb{N}^I$  se  $\text{dom } p \subseteq I$  e  $\text{ran } p \subseteq \mathbb{N}$ . Estamos usando a notação de que funções são conjuntos de pares ordenados, ou seja  $p \subseteq f$  equivale a dizer que  $f$  é uma extensão da função  $p$ .

Dada uma função parcial  $p$ , denotaremos por  $[p] = \{f \in \mathbb{N}^I : p \subseteq f\}$ . Quando  $p$  é a função vazia, temos que  $[\emptyset] = \mathbb{N}^I$ . Como estamos numa produto de espaços discretos, temos que  $\{[p] : p \text{ é uma função parcial}\}$  é uma base de  $\mathbb{N}^I$ . Além disso, temos que dada  $f \in \mathbb{N}^I$ ,  $\{[f|_F] : F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\}$  é uma base local para  $f$  (Note que  $f|_F$  são todas as funções parciais finitas que são estendidas pela  $f$ .)

Seja  $f_0 \in A_0$  um elemento arbitrário. Como  $U_0$  é um aberto contendo  $A_0$ , existe  $J_0$  finito tal que  $[f_0|_{J_0}] \subseteq U_0$ . Seja  $K_0 = \{n \in J_0 : f_0(n) \notin \{0, 1\}\}$ . Seja  $p_0 = f_0|_{K_0}$ . Como  $p_0$  é uma função injetora com imagem em  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , podemos estender  $p_0$  para  $q_0$  com domínio  $J_0$  tal que  $q_0$  é uma função injetora com imagem em  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

Fixe  $f_1 \in [q_0] \cap A_1 \neq \emptyset$ . Como  $U_1$  é um aberto existe  $J_1$  tal que  $[f_1|_{J_1}] \subseteq U_1$ . Podemos escolher  $J_1 \supseteq J_0$  (um  $J_1$  maior corresponde a um aberto menor). Seja  $K_1 = \{n \in J_1 : f_1(n) \notin \{0, 1\}\}$  e  $p_1 = f_1|_{K_1}$ . Então  $q_0 \subseteq p_1$  e temos  $J_0 \subseteq K_1 \subseteq J_1$ . Seja  $q_1$  uma extensão de  $q_0$  tal que o domínio de  $q_1$  é  $J_1$ ,  $\text{ran } q_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  e  $q_1$  é injetora.

Suponhamos que temos  $p_0, q_0, \dots, p_m, q_m, f_0, \dots, f_m, K_0, J_0, K_1, \dots, K_m, J_m$  tais que

- 1)  $p_0 \subseteq q_0 \subseteq \dots \subseteq p_m \subseteq q_m$ ;
- 2)  $K_0 \subseteq J_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m \subseteq J_m$ ;
- 3)  $\text{dom } p_n = K_n, p_n : K_n \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  é injetora para cada  $n \leq m$ ;
- 4)  $\text{dom } q_n = J_n, q_n : J_n \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  é injetora para cada  $n \leq m$ ;
- 5)  $f_n|_{K_n} = p_n$  para cada  $n \leq m$ ;
- 6)  $[f_n|_{J_n}] \subseteq U_0$  se  $n$  é par e  $n \leq m$ ;
- 7)  $[f_n|_{J_n}] \subseteq U_1$  se  $n$  é ímpar e  $n \leq m$ ;
- 8)  $f_n \in A_0$  se  $n$  é par e  $n \leq m$ ;
- 9)  $f_n \in A_1$  se  $n$  é ímpar e  $n \leq m$  e
- 10)  $f_{n+1}|_{J_n} = q_n$  para cada  $n < m$ .

Vamos primeiro assumir que  $m + 1$  é par. Devido a 2) para  $q_m$ , existe  $f_{m+1} \in A_0$  estendendo  $q_m$ . Como  $U_0$  é um aberto contendo  $f_{m+1}$  existe  $J_{m+1}$  finito tal que  $[f_{m+1}|_{J_{m+1}}] \subseteq U_0$ , podemos fixar  $J_{m+1} \supseteq J_m$ . Seja  $K_{m+1} = \{n \in J_{m+1} : f_{m+1}(n) \notin \{0, 1\}\}$  e  $p_{m+1} = f_{m+1}|_{K_{m+1}}$ . Como  $q_m \subseteq f_{m+1}$ , segue que  $J_m = \text{dom } q_m \subseteq K_{m+1}$  e  $q_m \subseteq p_{m+1}$ . Assim, condições, 2), 3), 5), 6), 7) (por vacuidade), 8), 9) (por vacuidade) e 10) estão satisfeitas. Estenda  $p_{m+1}$  para  $q_{m+1}$ , onde  $q_{m+1}$  satisfaz 4). Então 1) e 4) estão satisfeitas.

Vamos agora assumir que  $m + 1$  é ímpar. A prova é basicamente como no caso anterior e pode ser pulada por quem já se convenceu que é a ‘mesma coisa’. Devido a 2) para  $q_m$ , existe  $f_{m+1} \in A_1$  estendendo  $q_m$ . Como  $U_1$  é um aberto contendo  $f_{m+1}$  existe  $J_{m+1}$  finito tal que  $[f_{m+1}|_{J_{m+1}}] \subseteq U_1$ , podemos fixar  $J_{m+1} \supseteq J_m$ . Seja  $K_{m+1} = \{n \in J_{m+1} : f_{m+1}(n) \notin \{0, 1\}\}$  e  $p_{m+1} = f_{m+1}|_{K_{m+1}}$ . Como  $q_m \subseteq f_{m+1}$ , segue que  $J_m = \text{dom } q_m \subseteq K_{m+1}$  e  $q_m \subseteq p_{m+1}$ . Assim, condições, 2), 3), 5), 6) (por vacuidade), 7), 8) (por vacuidade), 9) e 10) estão satisfeitas. Estenda  $p_{m+1}$  para  $q_{m+1}$ , onde  $q_{m+1}$  satisfaz 4). Então 1) e 4) estão satisfeitas.

Seja  $g$  uma função arbitrária tal que  $g \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ . Vamos mostrar que  $g \in \overline{U_0} \cap \overline{U_1}$ . Seja  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ .

Tome  $F$  um subconjunto finito de  $I$ . Então existe  $N$  tal que  $J \cap F \subseteq K_N$ . Note que por 2) podemos escolher  $N$  para ser par ou ímpar. Tome  $N$  par. Então  $[f_N|_{J_N}] \subseteq U_0$ . Seja  $g_N = f_N|_J \cup g|_{I \setminus J}$ .

Como  $g_N|_{J_N} = f_N|_{J_N}$ , segue que  $g_N \in [f_N|_{J_N}] \subseteq U_0$

Por outro lado, temos que  $g_N|_{K_N} = f_N|_{K_N} = p_N|_{K_N} = g|_{K_N}$  e  $J \cap F \subseteq K_N$ , assim,  $g_N|_{J \cap F} = g|_{J \cap F}$ . Além disso,  $g_N|_{I \setminus J} = g|_{I \setminus J}$  e portanto  $g_N|_{F \setminus J} = g|_{F \setminus J}$ . Assim, temos que  $g_N|_F = g|_F$ . Logo,  $g_N \in U_0 \cap [g|_F] \neq \emptyset$ . Como  $F$  é arbitrário, segue que  $g \in \overline{U_0}$

De forma análoga, tomando sempre  $N$  ímpar, vamos concluir que  $g \in \overline{U_1}$ . □

**Corolário 30.4.** Se  $X$  é Hausdorff e não é enumeravelmente compacto então  $X^I$  não é normal para  $I$  não enumerável.

*Demonstração.*  $X$  possui uma cópia fechada de  $\mathbb{N}$ , assim,  $X^I$  possui uma cópia fechada de  $\mathbb{N}^I$ . Como normalidade é uma propriedade preservada por fechados, segue que  $X^I$  não é normal. □

# Capítulo 31

## Limites inversos.

### 31.1 ‘De volta para o Limite’.

Buscando imagens da esfera chifruda de Alexander (Alexander’s Horned sphere) ou uma curva de Peano, vemos esboços das primeiras iterações que aproximam-se do exemplo e o resto da construção é apresentada com ‘pontinhos’ para intuir visualmente o que seria a construção final. Algo similar a indução finita feita de forma intuitiva.

Limites inversos é um método para formalizar certos tipos de espaços que estão se ‘modificando’ recursivamente.

Lembramos que um conjunto dirigido  $\Sigma$  é uma ordem parcial em que todo subconjunto finito de  $\Sigma$  é menor ou igual a algum elemento de  $\Sigma$  (vimos conjuntos dirigidos quando falamos de redes).

#### 31.1.1 Sistema inverso e Limite Inverso.

Um sistema inverso  $S = \langle X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma \rangle$  consiste de um conjunto dirigido  $\Sigma$ , para cada  $\sigma \in \Sigma$  teremos um espaço  $X_\sigma$  associado e para cada  $\rho \leq \sigma$  uma função contínua  $\pi_\rho^\sigma : X_\sigma \rightarrow X_\rho$  tal que se  $\xi \leq \rho \leq \sigma$  então  $\pi_\xi^\sigma = \pi_\xi^\rho \circ \pi_\rho^\sigma$ .

As funções  $\pi_\rho^\sigma$  são chamadas de ‘bonding maps’ (*lembre do superbonder, mas não do James- provavelmente a melhor tradução seria vínculo*). A projeção é um dos tipos de ‘bonding maps’ que aparecem nos sistemas inversos e provavelmente o motivo para se usar  $\pi$ .

Um ‘thread’ (fio) é um ponto  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$  tal que  $\pi_\rho^\sigma(x_\sigma) = x_\rho$  para todo  $\rho, \sigma \in \Sigma$  com  $\rho \leq \sigma$ .

O limite inverso de  $S$  é o conjunto de todos os ‘threads’

$\lim_{\leftarrow} S = \{(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma : \pi_\rho^\sigma(x_\sigma) = x_\rho (\forall \rho, \sigma \in \Sigma \text{ com } \rho \leq \sigma)\}$ , também pode ser denotado por  $\lim_{\leftarrow} \langle X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma \rangle$ .

Para que o limite inverso seja de interesse, vai depender do sistema inverso. Há casos em que o limite inverso é o espaço vazio.

Vamos denotar por  $\pi_\rho$  a restrição da projeção de  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma \rightarrow X_\rho$  ao limite inverso  $\lim_{\rightarrow} S$  (ou seja não vamos ficar escrevendo  $\pi_\rho|_{\lim_{\rightarrow} S}$ ).

Pode-se definir sistemas inversos e limites inversos sem associar a uma topologia e neste caso, as bonding maps não são contínuas.

**Proposição 31.1.** O limite inverso de um sistema inverso  $S = \langle X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma \rangle$  de espaços Hausdorff é um subconjunto fechado de  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ .

*Demonstração.* Para isto, basta mostrar que o complementar é aberto.

Seja  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$  tal que  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  não pertence ao limite inverso. Então existe  $\xi \leq \rho$  com  $\xi, \rho \in \Sigma$  tal que  $\pi_\xi^\rho(x_\rho) \neq x_\xi$ . Tome uma vizinhança  $U$  de  $\pi_\xi^\rho(x_\rho)$  em  $X_\xi$  disjunta de uma vizinhança  $V$  de  $x_\xi$  (que existem pela propriedade de Hausdorff em  $X_\xi$ ). Então considere a vizinhança  $W := \prod_{\sigma \in \Sigma} W_\sigma$  tal que  $W_\rho = (\pi_\xi^\rho)^{-1}[U]$ ,  $W_\xi = V$  e  $W_\sigma = X_\sigma$  para  $\sigma \in \Sigma \setminus \{\xi, \rho\}$ . Claramente  $W$  é uma vizinhança aberta de  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ . Para cada  $(y_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in W$  temos que  $y_\xi \in W_\xi = V$  e  $\pi_\xi^\rho(y_\rho) \in \pi_\xi^\rho[W_\rho] = \pi_\xi^\rho[(\pi_\xi^\rho)^{-1}[U]] \subseteq U$ . Como  $U \cap V = \emptyset$ , segue que  $\pi_\xi^\rho(y_\rho) \neq y_\xi$ . Assim, o complementar do limite inverso é aberto no produto e portanto o limite inverso é fechado no produto.  $\square$

**Proposição 31.2.** O limite inverso de espaço  $T_i$  é  $T_i$  para  $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ .

*Demonstração.* Essas propriedades são preservadas por produtos e subespaços.  $\square$

**Proposição 31.3.** O limite inverso de um sistema inverso  $S = \langle X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma \rangle$  de espaços compactos Hausdorff é um subconjunto não vazio de  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ .

*Demonstração.* Para cada  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  finito, temos que  $F_{\Sigma'} = \{(x_\sigma : \sigma \in \Sigma') \in \prod_{\sigma \in \Sigma'} X_\sigma : \pi_\rho^\sigma(x_\sigma) = x_\rho(\forall \rho, \sigma \in \Sigma' \text{ com } \rho \leq \sigma)\}$ , pois  $\Sigma$  é dirigido e existe  $\gamma \in \Sigma$ ,  $\gamma \geq \sigma$  para todo  $\sigma \in \Sigma'$ . Assim, tomando  $y_\gamma \in X_\gamma$  arbitrário e para cada  $\sigma \in \Sigma'$  denotemos  $y_\sigma = \pi_\sigma^\gamma(y_\gamma)$  para  $\xi \in \Sigma \setminus (\Sigma' \cup \{\gamma\})$ , escolha  $y_\xi \in X_\xi$  arbitrariamente. Assim,  $(y_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in M_{\Sigma'}$  e  $M_{\Sigma'}$  é não vazio.

Assim,  $\{M_{\Sigma'} : \emptyset \neq \Sigma' \subseteq \Sigma \text{ finito}\}$  tem PIF, pois  $M_{\Sigma'} \cap M_{\Sigma''} \supseteq M_{\Sigma' \cup \Sigma''}$  para cada  $\Sigma', \Sigma'' \subseteq \Sigma$  finitos não vazios. Assim, pela compacidade de  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ , segue que  $\lim_{\leftarrow} S = \bigcap \{M_{\Sigma'} : \emptyset \neq \Sigma' \subseteq \Sigma \text{ finito}\}$  é não vazio.  $\square$

**Exemplo 31.4.** Seja  $(Z_n : n \in \mathbb{N})$  uma família de espaços topológicos. Seja  $\sigma$  a família de subconjuntos finitos não vazios de  $\mathbb{N}$  ordenados por inclusão. Então  $\Sigma$  é dirigido. Seja  $X_\sigma = \prod_{n \in \sigma} Z_n$  e se  $\rho \leq \sigma$  seja  $\pi_\rho^\sigma$  tal que  $\pi_\rho^\sigma((x_n : n \in \sigma)) = (x_n : n \in \rho)$  para todo  $(x_n : n \in \sigma) \in \prod_{n \in \sigma} Z_n = X_\sigma$ .

Vamos ver que  $\lim_{\leftarrow} S$ , onde  $S = \langle X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma \rangle$  é homeomorfo a  $\prod_{n \in \mathbb{N}} Z_n$  (basicamente neste caso, um thread em  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$  vai ficar repetindo a mesma informação que temos em  $\prod_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ ).

De fato, a função  $f$  dada por  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow} S \mapsto f((x_\sigma : \sigma \in \Sigma)) = (x_{\{n\}} : n \in \mathbb{N}) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} Z_n$  será um homeomorfismo entre  $\lim_{\leftarrow} S$  e  $\prod_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ .

Como  $f$  é a restrição de uma projeção, segue que  $f$  é contínua. Vamos ver que  $f$  é injetora. De fato, se  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma), (y_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow} S$  são distintos, então existe  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $x_\sigma \neq y_\sigma \in \prod_{i \in \sigma} Z_i$ . Então existe  $n \in \sigma$  tal que  $x_{\{n\}} = \pi_{\{n\}}^\sigma(x_\sigma) \neq \pi_{\{n\}}^\sigma(y_\sigma) = y_{\{n\}}$  (a primeira e a última igualdade segue por serem threads, a desigualdade segue do bonding map ser a projeção no produto).

Vamos mostrar que a inversa de  $f$  é contínua, tome  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow} S$ ,  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  finito e  $U$  um aberto básico de  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$  com suporte contido em  $\Sigma'$  tal que  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in U$ . Seja  $I = \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} \sigma$ . Para cada  $n \in I$ , podemos encontrar  $W_n$  aberto contendo  $x_{\{n\}}$  tal que  $\prod_{n \in \sigma} W_n \subseteq U_\sigma$  (para isto, escolha uma vizinhança aberta básica  $\prod_{n \in \sigma} W_{\sigma, n}$  de  $x_\sigma$  dentro de  $U_\sigma$  e tome  $W_n$  como a intersecção finita  $\bigcap_{n \in \sigma \in \Sigma'} W_{\sigma, n}$ ).

Para cada  $n \in I$  seja  $V_{\{n\}} = W_n$ . Seja  $V = \prod_{n \in I} V_{\{n\}} \times \prod_{\sigma \in \Sigma, \sigma \not\subseteq \{n\} : n \in I} X_\sigma$ . Vamos mostrar que  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow} S \in V \cap \lim_{\leftarrow} S \subseteq U \cap \lim_{\leftarrow} S$  e que  $f[V] = \prod_{n \in I} W_n \times \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus I} Z_n$ . Como  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  é um thread, segue que  $x_\sigma = (\pi_{\{n\}}^\sigma(x_\sigma) : n \in \sigma) \in \prod_{n \in \sigma} V_{\{n\}} = \prod_{n \in \sigma} W_n$ , segue que  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in V$ .

Dado  $(y_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in V \cap \lim_{\leftarrow} S$ . Como  $(y_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  é um thread, segue que  $y_\sigma = (\pi_{\{n\}}^\sigma(y_\sigma) : n \in \sigma) \in \prod_{n \in \sigma} V_{\{n\}} = \prod_{n \in \sigma} W_n \subseteq U_\sigma$  para cada  $\sigma \in \Sigma'$ . Assim,  $V \cap \lim_{\leftarrow} S \subseteq U$ . Pelo que vimos acima, temos que  $f((y_\sigma : \sigma \in \Sigma)) = (y_{\{n\}} : n \in \mathbb{N})$  é tal que  $y_{\{n\}} \in W_n$  para todo  $n \in I$ . Assim,  $f[V] \subseteq \prod_{n \in I} W_n \times \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus I} Z_n$ .

Finalmente, para mostrarmos que  $f[V] \supseteq \prod_{n \in I} W_n \times \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus I} Z_n$ , tome  $(z_n : n \in \mathbb{N}) \in \prod_{n \in I} W_n \times \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus I} Z_n$ , temos que  $(y_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  dada por  $y_\sigma = (z_n : n \in \sigma) \in \prod_{n \in \sigma \cap I} W_n \times \prod_{n \in \sigma \setminus I} Z_n$  para cada  $\sigma \in \Sigma$  é um thread,  $(y_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in V$  e  $f((y_\sigma : \sigma \in \Sigma)) = (z_n : n \in \mathbb{N})$ .

*Obviamente que fazer produtos cartesianos de forma mais complicada não é a melhor coisa que se pode fazer com limites inversos.*

### 31.1.2 Cofinal em conjunto dirigido e Base de abertos.

Assim como em redes, as informações relevantes do limite estão num cofinal. Lembramos que  $\Sigma'$  é cofinal em  $\Sigma$  se para todo  $\sigma \in \Sigma$  existe  $\sigma' \in \Sigma'$  tal que  $\sigma \leq \sigma'$ .

**Proposição 31.5.** Seja  $S = \langle X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma \rangle$  um sistema inverso e  $\Sigma'$  um conjunto cofinal de  $\Sigma$ . Para cada  $\sigma \in \Sigma'$  fixe uma base de abertos  $\mathcal{B}_\sigma$  de  $X_\sigma$ .

Então  $\{\pi_\sigma^{-1}[U] : \sigma \in \Sigma', U \in \mathcal{B}_\sigma\}$  é uma base do limite inverso.

*Demonstração.* Seja  $x = (x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow} S$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $x$  em  $\lim_{\leftarrow} S$ . Seja  $W = \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$  uma vizinhança básica de  $x$  em  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$  tal que  $W \cap \lim_{\leftarrow} S \subseteq U$ . Tome  $\sigma' \in \Sigma'$  tal que  $\sigma' \geq \rho$  para cada  $\rho \in \text{spte } W$  (o suporte é finito,  $\Sigma$  é dirigido e  $\Sigma'$  é cofinal). Seja  $O \in \mathcal{B}_{\sigma'}$  uma vizinhança de  $x_{\sigma'}$  contida em  $W_{\sigma'} \cap \bigcap_{\rho \in \text{spte } W} (\pi_\rho^{\sigma'})^{-1}[W_\rho]$ .

Vamos verificar que  $\pi_{\sigma'}^{-1}[O] \cap \lim_{\leftarrow S}$  é uma vizinhança de  $x$  contida em  $W \cap \lim_{\leftarrow S}$ . Primeiro, temos  $x \in \pi_{\sigma'}^{-1}[O]$ , pois  $x_{\sigma'} \in O$ . Se  $y = (y_{\sigma} : \sigma \in \Sigma) \in \pi_{\sigma'}^{-1}[O] \cap \lim_{\leftarrow S}$  então por  $y$  ser um thread, segue que  $y_{\rho} = \pi_{\rho}^{\sigma'}(y_{\sigma'}) = \pi_{\rho}^{\sigma'} \circ \pi_{\sigma'}(y) \in \pi_{\rho}^{\sigma'} \circ \pi_{\sigma'}[(\pi_{\sigma'})^{-1}[O]] \subseteq \pi_{\rho}^{\sigma'}[O] \subseteq W_{\rho}$  para cada  $\rho \in \text{spte } W$ . Portanto, temos que  $y \in W$ . Assim temos que  $\pi_{\sigma'}^{-1}[O] \cap \lim_{\leftarrow S}$  é uma vizinhança de  $y$  contida em  $U$ .  $\square$

## 31.2 Funções entre limites inversos.

Vamos agora como dois sistemas inversos indexados pelo mesmo sistema dirigido e funções contínuas entre elas que se comportam bem levam a uma função contínua entre seus limites inversos.

**Teorema 31.6.** Sejam  $S = \langle X_{\sigma}, \pi^{\sigma} \rho, \Sigma \rangle$  e  $T = \langle Y_{\gamma}, \delta^{\gamma}, \Gamma \rangle$  dois sistemas inversos de espaços Hausdorff. Seja  $i : \Gamma \rightarrow \Sigma$  uma função cofinal que preserva ordem. Para cada  $\gamma \in \Gamma$  suponha que existe uma função contínua  $f_{\gamma} : X_{i(\gamma)} \rightarrow Y_{\gamma}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} X_{i(\gamma)} & \xrightarrow{f_{\gamma}} & Y_{\gamma} \\ \pi_{i(\zeta)}^{i(\gamma)} \downarrow & & \downarrow \delta_{\zeta}^{\gamma} \\ X_{i(\zeta)} & \xrightarrow{f_{\zeta}} & Y_{\zeta} \end{array}$$

comuta, ou seja  $\delta_{\zeta}^{\gamma} \circ f_{\gamma} = f_{\zeta} \circ \pi_{i(\zeta)}^{i(\gamma)}$  para todo  $\gamma \geq \zeta$  com  $\gamma, \zeta \in \Gamma$ .

Então existe  $f : \lim_{\leftarrow S} \rightarrow \lim_{\leftarrow T}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\leftarrow S} & \xrightarrow{f} & \lim_{\leftarrow T} \\ \pi_{i(\gamma)} \downarrow & & \downarrow \pi_{\gamma} \\ X_{i(\zeta)} & \xrightarrow{f_{\gamma}} & Y_{\gamma} \end{array}$$

comuta, ou seja  $\pi_{\gamma} \circ f = f_{\gamma} \circ \pi_{i(\gamma)}$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ .

*Demonstração.* Dada  $(x_{\sigma} : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow S}$ . Vamos definir  $f((x_{\sigma} : \sigma \in \Sigma)) = (f_{\gamma}(x_{i(\gamma)}) : \gamma \in \Gamma)$ . Primeiro temos que verificar que  $(y_{\gamma} : \gamma \in \Gamma) := (f_{\gamma}(x_{i(\gamma)}) : \gamma \in \Gamma)$  é um thread. De fato, para cada  $\zeta \leq \gamma$  temos  $\delta_{\zeta}^{\gamma}(y_{\gamma}) = \delta_{\zeta}^{\gamma} \circ f_{\gamma}(x_{i(\gamma)}) = f_{\zeta} \circ \pi_{i(\zeta)}^{i(\gamma)}(x_{i(\gamma)}) = f_{\zeta}(x_{i(\zeta)}) = y_{\zeta}$ .

Além disso, temos que  $\pi_{\gamma} \circ f((x_{\sigma} : \sigma \in \Sigma)) = \pi_{\gamma}((f_{\zeta}(x_{i(\zeta)}) : \zeta \in \Gamma)) = f_{\gamma}(x_{i(\gamma)}) = f_{\gamma} \circ \pi_{i(\gamma)}((x_{\sigma} : \sigma \in \Sigma))$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Assim,  $\pi_{\gamma} \circ f = f_{\gamma} \circ \pi_{i(\gamma)}$  para cada  $\gamma \in \Gamma$ .

Vamos verificar que  $f$  é uma função contínua. Seja  $x = (x_{\sigma} : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow S}$  e  $U$  uma vizinhança de  $f(x)$  em  $\lim_{\leftarrow T}$ . Temos que existe um  $\gamma \in \Gamma$  e  $V$  um aberto em  $Y_{\gamma}$  tal que  $f(x) \in (\pi_{\gamma})^{-1}[V] \subseteq U$  (Note que  $\pi_{\gamma}$  é a restrição da projeção  $\prod_{\zeta \in \Gamma} Y_{\delta}$  em  $Y_{\gamma}$ ).

Tomemos então  $W = (f_{\gamma})^{-1}[V]$  que é um aberto em  $X_{i(\gamma)}$ . Então  $(\pi_{i(\gamma)})^{-1}[W]$  é um aberto de  $\lim_{\leftarrow S}$  (aqui  $\pi_{i(\gamma)}$  é a restrição da projeção  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_{\sigma}$  em  $X_{i(\gamma)}$ ). Afirmamos que  $x \in (\pi_{i(\gamma)})^{-1}[W]$ . De fato, temos que  $f_{\gamma} \circ \pi_{i(\gamma)}(x) = \pi_{\gamma} \circ f(x) \in V$ . Assim,  $x \in (f_{\gamma} \circ \pi_{i(\gamma)})^{-1}[V] = (\pi_{i(\gamma)})^{-1}[(f_{\gamma})^{-1}[V]] = (\pi_{i(\gamma)})^{-1}[W]$ . Dado  $z \in \lim_{\leftarrow S} \cap (\pi_{i(\gamma)})^{-1}[W]$ , temos que  $\pi_{\gamma} \circ f(z) = f_{\gamma} \circ \pi_{i(\gamma)}(z) \in V$ . Assim,  $f(z) \in (\pi_{\gamma})^{-1}[V] \subseteq U$ .

Logo,  $f$  é contínua em  $x$ .  $\square$

O resultado abaixo vale para sistemas inversos e limites inversos sem topologia. Neste caso as  $f_{\gamma}$  não seriam funções contínuas, apenas injetoras ou bijetoras.

**Teorema 31.7.** Sejam  $S = \langle X_{\sigma}, \pi^{\sigma} \rho, \Sigma \rangle$  e  $T = \langle Y_{\gamma}, \delta^{\gamma}, \Gamma \rangle$  dois sistemas inversos de espaços Hausdorff. Seja  $i : \Gamma \rightarrow \Sigma$  uma função cofinal que preserva ordem. Para cada  $\gamma \in \Gamma$  suponha que existe uma função contínua  $f_{\gamma} : X_{i(\gamma)} \rightarrow Y_{\gamma}$  para  $\gamma \in \Gamma$  como nas condições do teorema anterior.

Se  $f_{\gamma}$  é injetora para cada  $\gamma \in \Gamma$ , então  $f$  é injetora.

Se  $f_{\gamma}$  é bijetora para cada  $\gamma \in \Gamma$ , então  $f$  é bijetora.

*Demonstração.* Suponhamos que  $f_{\gamma}$  é injetora para cada  $\gamma \in \Gamma$ .

Sejam  $x$  e  $z$  em  $\lim_{\leftarrow S}$ . Se  $x \neq z$  então existe  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $x_{\sigma} \neq z_{\sigma}$ . Seja  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $i(\gamma) \geq \sigma$ . Então  $x_{i(\gamma)} = z_{i(\gamma)}$  implica que  $x_{\sigma} = \pi_{\sigma}^{i(\gamma)}(x_{i(\gamma)}) = \pi_{\sigma}^{i(\gamma)}(z_{i(\gamma)}) = z_{\sigma}$ , contradição. Assim,  $x_{i(\gamma)} \neq z_{i(\gamma)}$ . Como  $f_{\gamma}$  é injetora, temos que  $f_{\gamma}(x_{i(\gamma)}) \neq f_{\gamma}(z_{i(\gamma)})$ . Pela comutatividade do diagrama, segue que  $\pi_{i(\gamma)} \circ f(x) = f_{\gamma}(x_{i(\gamma)}) \neq f_{\gamma}(z_{i(\gamma)}) = \pi_{i(\gamma)} \circ f(z)$ . Logo  $f(x) \neq f(z)$ . Assim,  $f$  é injetora.

Suponhamos agora que  $f_\gamma$  é bijetora para cada  $\gamma \in \Gamma$ . Nestas condições a  $f$  será injetora, então basta mostrarmos que  $f$  é sobrejetora. Seja  $(y_\gamma : \gamma \in \Gamma) \in \lim_{\leftarrow} T$ .

Para cada  $\gamma \in \Gamma$ , usando a bijeção de  $f_\gamma$ , defina  $x_{i(\gamma)} \in X_{i(\gamma)}$  o único ponto tal que  $f_\gamma(x_{i(\gamma)}) = y_\gamma$ .

Note que, dado  $\gamma \leq \gamma''$  então  $x_{i(\gamma)} = \pi_{i(\gamma)}^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')})$ . De fato,  $f_\gamma(x_{i(\gamma)}) = y_\gamma = \pi_\gamma^{i(\gamma'')}(y_{\gamma''}) = \pi_\gamma^{i(\gamma'')} \circ f_{\gamma''}(x_{i(\gamma'')}) = f_\gamma \circ \pi_{i(\gamma)}^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')})$ . Como  $f_\gamma$  é injetora, segue que  $x_{i(\gamma)} = \pi_{i(\gamma)}^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')})$ .

Para cada  $\sigma \in \Sigma$  tome  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\sigma \leq i(\gamma)$  e defina  $x_\sigma = \pi_\sigma^{i(\gamma)}(x_{i(\gamma)})$ . Vamos verificar que  $x_\sigma$  independe da escolha de  $\gamma$ . De fato, se  $\gamma, \gamma'$  são tais que  $\sigma \leq i(\gamma)$  e  $\sigma \leq i(\gamma')$ , podemos tomar  $\gamma'' \geq \gamma$  e  $\gamma'' \geq \gamma'$ .

Pelo que vimos acima, temos que

$$x_{i(\gamma)} = \pi_{i(\gamma)}^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')}) \text{ e } x_{i(\gamma')} = \pi_{i(\gamma')}^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')}).$$

$$\text{Assim, } \pi_\sigma^{i(\gamma)}(x_{i(\gamma)}) = \pi_\sigma^{i(\gamma)} \circ \pi_{i(\gamma)}^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')}) = \pi_\sigma^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')}) = \pi_\sigma^{i(\gamma')} \circ \pi_{i(\gamma')}^{i(\gamma'')}(x_{i(\gamma'')}) = \pi_\sigma^{i(\gamma')}(x_{i(\gamma')}).$$

Mostraremos que  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$  é um thread. Dado  $\rho \leq \sigma$ , tome  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\sigma \leq i(\gamma)$  (com isto,  $\rho \leq i(\gamma)$ ). Então  $x_\rho = \pi_\rho^{i(\gamma)}(x_{i(\gamma)}) = \pi_\rho^\sigma \circ \pi_\sigma^{i(\gamma)}(x_{i(\gamma)}) = \pi_\rho^\sigma(x_\sigma)$ .

Portanto  $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \lim_{\leftarrow} S$ . Agora,  $f((x_\sigma : \sigma \in \Sigma)) = (f_\gamma(x_{i(\gamma)}) : \gamma \in \Gamma) = (y_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ .

Assim,  $f$  é sobrejetora.  $\square$

Usando compacidade, não precisamos exigir bijeções:

**Teorema 31.8.** Sejam  $S = \langle X_\sigma, \pi^\sigma \rho, \Sigma \rangle$  e  $T = \langle Y_\gamma, \delta_\zeta^\gamma, \Gamma \rangle$  dois sistemas inversos de espaços compactos Hausdorff (Note que no enunciado acima os espaços não eram compactos). Seja  $i : \Gamma \rightarrow \Sigma$  uma função cofinal que preserva ordem. Para cada  $\gamma \in \Gamma$  suponha que existe uma função contínua  $f_\gamma : X_{i(\gamma)} \rightarrow Y_\gamma$  para  $\gamma \in \Gamma$  como nas condições do teorema anterior ao anterior.

Se  $f_\gamma$  é sobrejetora para cada  $\gamma \in \Gamma$ , então  $f$  é sobrejetora.

*Demonstração.* Fixe  $y = (y_\gamma : \gamma \in \Gamma) \in \lim_{\leftarrow} T$ . Para cada  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  finito e  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  finito seja  $A_{\Sigma', \Gamma'} = \{(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma : f_\gamma(x_{i(\gamma)}) = y_\gamma \forall \gamma \in \Gamma' \text{ e } \pi_\rho^\sigma(x_\sigma) = x_\rho \forall \rho, \sigma \in \Sigma' \text{ com } \rho \leq \sigma\}$ . Tomando  $\gamma^* \in \Gamma$  tal que  $i(\gamma^*)$  maior que os elementos de  $\Sigma'$  e  $\gamma^*$  maior que os elementos de  $\Gamma'$ . Fixe  $t_{i(\gamma^*)} \in X_{i(\gamma^*)}$  tal que  $f_{\gamma^*}(t_{i(\gamma^*)}) = y_{\gamma^*}$ .

Seja  $t_\sigma \in X_\sigma$  arbitrário se  $\sigma \notin \Sigma' \cup \{i(\gamma) : \gamma \in \Gamma' \cup \{\gamma^*\}\}$ ,  $t_\sigma = \pi_\sigma^{i(\gamma^*)}(t_{i(\gamma^*)})$  para  $\sigma \in \Sigma' \cup \{i(\gamma) : \gamma \in \Gamma'\}$ , com  $\sigma \neq i(\gamma^*)$ . Em particular, se  $\rho \leq \sigma$  temos que  $t_\rho = \pi_\rho^{i(\gamma^*)}(t_{i(\gamma^*)}) = \pi_\rho^\sigma \circ \pi_\sigma^{i(\gamma^*)}(t_{i(\gamma^*)}) = \pi_\rho^\sigma(t_\sigma)$ .

Além disso, para cada  $\zeta \in \Gamma'$  temos  $y_\zeta = \delta_\zeta^{\gamma^*} \circ f_{\gamma^*}(t_{i(\gamma^*)}) = f_\zeta \circ \pi_\zeta^{i(\gamma^*)}(t_{i(\gamma^*)}) = f_\zeta(t_{i(\zeta)})$ . Com isto, podemos ver que  $A_{\Sigma', \Gamma'} \neq \emptyset$ . Como  $A_{\Sigma', \Gamma'} \cap A_{\Sigma'', \Gamma''} \supseteq A_{\Sigma' \cup \Sigma'', \Gamma' \cup \Gamma''}$ , segue que a família dos  $A_{\Sigma', \Gamma'}$ 's tem PIF.

Vamos mostrar agora que cada  $A_{\Sigma', \Gamma'}$  é um fechado. Seja  $x_\lambda = (x_{\sigma, \lambda} : \sigma \in \Sigma)$  para  $\lambda \in \Lambda$  e  $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$  uma rede em  $A_{\Sigma', \Gamma'}$  convergindo para  $x = (x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ .

Para cada  $\gamma \in \Gamma'$ ,  $f_\gamma(x_{i(\gamma)}, \lambda) = y_\gamma$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Como  $(x_{i(\gamma), \lambda} : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $x_{i(\gamma)}$  e  $f_\gamma$  é contínua, segue que  $(y_\lambda : \lambda \in \Lambda) = (f_\gamma(x_{i(\gamma)}, \lambda) : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $f_\gamma(x_{i(\gamma)})$ . Como  $X_{i(\gamma)}$  é Hausdorff, segue que  $f_\gamma(x_{i(\gamma)}) = y_\gamma$ .

Fixado  $\rho \leq \sigma$  com  $\rho, \sigma \in \Sigma'$  temos  $\pi_\rho^\sigma(x_{\sigma, \lambda}) = x_{\rho, \lambda}$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Como  $(x_{\sigma, \lambda} : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $x_\sigma$ ,  $(x_{\rho, \lambda} : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $x_\rho$  e  $\pi_\rho^\sigma$  é contínua, segue que

$(\pi_\rho^\sigma(x_{\sigma, \lambda}) : \lambda \in \Lambda) = (x_{\rho, \lambda} : \lambda \in \Lambda)$  converge para  $\pi_\rho^\sigma(x_\sigma)$  e  $x_\rho$ . Pela unicidade do limite, segue que  $\pi_\rho^\sigma(x_\sigma) = x_\rho$ . Assim,  $A_{\Sigma', \Gamma'}$  é um conjunto fechado.

Usando a compacidade do produto  $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ , temos que  $\bigcap \{A_{\Sigma', \Gamma'} : \Sigma' \subseteq \Sigma, \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ finitos}\} \neq \emptyset$ . Seja  $z = (z_\sigma : \sigma \in \Sigma) \in \bigcap \{A_{\Sigma', \Gamma'} : \Sigma' \subseteq \Sigma, \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ finitos}\}$ . Como visto anteriormente, temos que  $z$  é um thread, e portanto,  $z \in \lim_{\leftarrow} S$ . Vamos verificar que  $f(z) = y$ . De fato, dado  $\gamma \in \Gamma$ , tome  $\Sigma'$  e  $\Gamma'$  com  $\gamma \in \Gamma'$ . Então  $f_\gamma(z_{i(\gamma)}) = y_\gamma$ . Portanto  $f(z) = (f_\gamma(z_{i(\gamma)}) : \gamma \in \Gamma) = (y_\gamma : \gamma \in \Gamma) = y$ .  $\square$

### 31.3 Existe apenas um espaço métrico compacto zero-dimensional sem pontos isolados a menos de homeomorfismo.

Lembramos que um espaço zero-dimensional possui uma base de aberto-fechados (clopens).

**Proposição 31.9.** Seja  $X$  um compacto métrico zero dimensional e  $\epsilon > 0$ . Então  $X$  pode ser escrito como uma reunião disjunta de clopens disjuntos de diâmetro menor a  $\epsilon$ .

*Demonstração.* Para cada  $x \in X$  podemos encontrar uma vizinhança clopen  $V_x$  contida na bola centrada em  $x$  de raio  $\frac{\epsilon}{2}$ . Então pela compacidade, existe  $x_1, \dots, x_k \in X$  tal que  $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k} = X$ . Seja  $U_i = V_{x_i} \setminus (V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_{i-1}})$  para  $1 \leq i \leq k$ . Então  $\{U_1, \dots, U_k\}$  são clopens disjuntos de diâmetro menor a  $\epsilon$ .  $\square$

**Proposição 31.10.** Se  $X$  é um compacto métrico zero dimensional sem pontos isolados e  $k$  é um número inteiro positivo, então  $X$  pode ser particionado em  $k$  clopens disjuntos.

*Demonstração.* Dado um clopen  $U$ , por ser aberto, existem dois pontos distintos  $x, y \in U$ . Seja  $V_x$  um clopen tal que  $x \in V_x \setminus U \setminus \{y\}$ . Então  $V_x$  e  $U \setminus V_x$  são dois clopens não vazios cuja união é  $U$ . Basta prosseguir agora por indução e particionar um dos clopens.  $\square$

**Proposição 31.11.** Seja  $X$  um espaço compacto zero dimensional sem pontos isolados. Então podemos encontrar  $\{X_p : p \in 2^{<\omega}\}$  e  $\{n_k : k \in \omega\}$  sequência crescente em  $\omega$  tais que

- 1)  $\{X_p : p \in 2^n\}$  é uma partição de  $X$  em clopens não vazios;
- 2) se  $p \subseteq q$  então  $X_q \subseteq X_p$ ;
- 3)  $X_p$  tem diâmetro menor ou igual a  $\frac{1}{2^k}$  para todo  $p \in 2^{n_k}$  para todo  $k \in \omega$ .

*Demonstração.* Começamos com  $X_0 = X$ . Podemos particionar  $X$  em  $a_0$  pedaços clopen, cada um com diâmetro menor ou igual a 1. Tome  $m_0 > 0$  tal que  $a_0 \leq 2^{m_0}$  e podemos dividir a família com  $a_0$  pedaços clopen em  $2^{m_0}$  pedaços clopen e enumerá-los com  $\{F_p : p \in 2^{m_0}\}$ . Defina  $n_0 = m_0 + 0$  e  $X_q = \bigcup_{p \supseteq q} F_p$ , para cada  $q \in 2^n$  com  $n \leq n_0$ . Para cada  $p \in 2^{n_0}$ , podemos particionar  $X_p$  em  $a_p$  pedaços cada um com diâmetro menor ou igual a  $\frac{1}{2^1}$ . Podemos tomar  $m_1 > 0$  tal que  $a_p \leq 2^{m_1}$  para cada  $p \in 2^{n_0}$ . Podemos então particionar  $X_p$  em  $2^{m_1}$  pedaços clopens não vazios como  $\{F_{p \wedge s} : s \in 2^{m_1}\}$  ( $p \wedge s$  é a *contenação*, ou seja é a função com domínio  $|p| + |s|$  que estende  $p$  e  $p \wedge s(|p| + k) = s(k)$  para  $k < |s|$ ). Defina  $n_1 = n_0 + m_1$ . Para cada  $q \in 2^k$  com  $n_0 < k \leq n_0 + m_0$ , defina  $X_q = \bigcup_{q \subseteq p, p \in 2^{n_1}} F_p$ .

Fica a cargo do leitor se convencer que a construção acima funciona, onde  $\square$

**Teorema 31.12.** Seja  $X$  um espaço compacto zero dimensional sem pontos isolados. Existe um homeomorfismo de  $X$  em  $2^\omega$ .

*Demonstração.* Considere o  $X_n = X$  para cada  $n \in \omega$  e seja  $\pi_m^n$  a função identidade. Seja este o sistema inverso  $S$ . Note que como as bonding maps são a identidade segue que  $\lim_{\leftarrow} S$  é homeomorfo a  $X$ .

Seja  $Y_n := 2^n$ . Vamos denotar  $\delta_m^n : 2^n \rightarrow 2^m$  por  $\delta_m^n(p) = p|_m$ . Seja  $T$  este limite inverso. Como as bonding maps são as projeções no produto, segue que  $\lim_{\leftarrow} T$  é homeomorfo a  $2^\omega$ .

Defina  $f_n : X_n \rightarrow 2^n$  tal que  $f_n(x) = p$ , onde  $p \in 2^n$  é a única tal que  $x \in 2^n$ . Note que se  $m \leq n$  então  $\delta_m^n \circ f_n(x) = f_m \circ \pi_m^n(x)$ .

Claramente para cada  $p \in 2^n$  temos que  $(f_n)^{-1}[\{p\}] = X_p$  que é um aberto. Assim,  $f_n$  é contínua. Temos que  $f_n$  é sobrejetora e  $X_n$  é compacto, assim  $f$  é contínua e sobrejetora.

Resta verificar que  $f$  é injetora. De fato, se  $x \neq z$  então existe  $n$  e  $p, q \in 2^n$  distintos tais que  $x \in X_p$  e  $z \in X_q$  (basta usar  $n$  tal que diâmetro de cada  $X_r$  com  $r \in 2^n$  é menor que a distância entre  $x$  e  $z$ , e fixar  $p, q \in 2^n$  tais que  $x \in X_p$  e  $z \in X_q$ ). Então  $f_n(x) \neq f_n(z)$  e portanto  $f(x) \neq f(z)$ .  $\square$

**Corolário 31.13.** O conjunto de Cantor é homeomorfo a  $2^\omega$ .

*Demonstração.* O conjunto de Cantor é um espaço compacto métrico sem pontos isolados. Iremos rever a construção deste espaço no próximo capítulo.  $\square$

## 31.4 Todo espaço métrico compacto é imagem contínua de $2^\omega$ .

**Teorema 31.14.** Seja  $X$  um espaço métrico compacto sem pontos isolados. Então existe uma função contínua sobrejetora de  $2^\omega$  em  $X$ .

*Demonstração.* **‘Desmontando  $X$  para construir um zero dimensional.**

Defina indutivamente  $C_0 = \{X\}$ . Suponhamos que  $C_n$  está definida para todo  $n \leq k$  de forma que

- 1)  $\bigcup C_n = X$  e  $C_n$  é um conjunto finito;
- 2)  $F$  é um fechado sem pontos isolados (como subespaço) para todo  $F \in C_n$  e diâmetro de  $C_n$  é menor ou igual a  $\frac{1}{2^n}$ ;
- 3) Se  $n < k$  e  $F \in C_{n+1}$  então existe  $G \in C_n$  tal que  $F \subseteq G$ ;



4) Se  $n < k$  e  $G \in \mathcal{C}_n$  então  $G = \bigcup \{F \in \mathcal{C}_{n+1} : F \subseteq G\}$ .

Vamos definir  $\mathcal{C}_{k+1}$ . Para cada  $G \in \mathcal{C}_k$ , temos que  $G$  é um fechado sem pontos isolados. Seja  $\mathcal{U}_G$  uma cobertura aberta de  $G$  por abertos de  $G$  tais que o diâmetro de cada aberto é menor ou igual a  $\frac{1}{2^{k+1}}$ . Pela compacidade de  $G$  existe  $\mathcal{V}_G \subseteq \mathcal{U}_G$  finita tal que  $\mathcal{V}_G$  recobre  $G$ . Seja  $\mathcal{C}_{k+1,G} = \{\bar{U} : U \in \mathcal{V}_G\}$ . Como  $U$  é aberto em  $G$ , não possui pontos isolados. Assim  $\bar{U}$  ( $G$  é fechado assim, o fecho em  $X$  e  $G$  é o mesmo e  $\bar{U} \subseteq G$ ) não possui pontos isolados. Claramente temos que  $\bigcup \mathcal{C}_{k+1,G} = G$ . Seja  $\mathcal{C}_{k+1} = \bigcup \{\mathcal{C}_{k+1,G} : G \in \mathcal{C}_k\}$ . Pela definição de  $\mathcal{C}_{k+1,G}$  segue que 2), 3) e 4) estão satisfeitas. A condição 1) para  $k = 1$  segue de 1) para  $k$  e 4) para  $k$ .

**Definição ‘visual’ de  $X_n$ .**

Seja  $X_0 = X$ . Supondo que  $X_n = \bigoplus_{G \in I_n} G$  está definida, definimos  $X_{n+1} = \bigoplus_{G \in I_n} \bigoplus_{F \in \mathcal{C}_{n+1}, F \subseteq G} F = \bigoplus_{F \in I_{n+1}} F$  (note que podem haver mais de um cópia do mesmo  $F$ , mas elas são consideradas distintas se são partes de  $G$ 's distintos) com  $\pi_n^{n+1}(x) = x \in G$  onde  $x \in F$  e  $G$  é tal que  $F$  é a cópia dentro de  $G$ .  $\pi_m^n$  é definida a partir das composições, ou seja  $\pi_m^n = \pi_{n-1}^n \circ \dots \circ \pi_m^{m+1}$ . Esse vai ser o sistema inverso  $S$ .

Visualmente, no nível mais abaixo temos  $X$ , escrevemos na linha acima os elementos de  $\mathcal{C}_{1,X}$ , e cada  $F \in \mathcal{C}_{1,X}$  é ligado a  $X$  por uma aresta. Cada elemento  $F$  em  $\mathcal{C}_{1,X}$  é reunião de  $\mathcal{C}_{2,F}$  e para cada elemento  $G$  em  $\mathcal{C}_{2,F}$  fazemos uma aresta de  $G$  a  $F$  e assim sucessivamente.

Isso da a imagem de uma árvore e cada linha será uma soma direta. A projeção é dada por descer as arestas até o nível correspondente, onde o ponto de cima é levado ao seu correspondente no nível abaixo.

**‘Enumeração em árvore’.**

Vamos indicar agora como fazer a demonstração com a notação adequada para as somas diretas. Dada uma função  $p \in 2^n$ , a função  $p^\wedge i$  é uma extensão de  $p$  com domínio  $n + 1$  tal que  $p^\wedge i(n) = i$ .

Começamos com  $X_\emptyset = X \times \{\emptyset\}$ .

Podemos enumerar  $\mathcal{C}_{1,X}$  como  $F_0, \dots, F_{n_\emptyset-1}$ .

Então  $X_1 = \bigoplus_{i < n_\emptyset} F_i \times \{\emptyset^\wedge i\}$ . Seja  $P_1 = \{\emptyset^\wedge i : i < n_\emptyset\}$ .

Cada somando de  $X_1$  é da forma  $F \times \{p\}$  para algum  $p \in P_1$  e um único  $F \in \mathcal{C}_{|p|-1,p}$ . Enumere  $\mathcal{C}_{2,F}$  como  $F_0, \dots, F_{n_p-1}$  e seja  $X_p = \bigoplus_{i < n_p-1} F_i \times \{p^\wedge i\}$ . Seja  $X_2 = \bigoplus_{p \in P_1} X_p$  e  $P_2 = \{p^\wedge i : p \in P_1, i < n_p - 1\}$ . Podemos proceder assim por indução.

Dado  $(x, p) \in X_n$ , denote  $\pi_m^n((x, p)) = (x, p|_m)$ .

**O limite inverso de  $S$  é homeomorfo a  $2^\omega$ .**

Como cada  $X_n$  é uma soma topológica finita de compactos com base enumerável,  $X_n$  é compacto e metrizável. Assim,  $\prod_{n \in \omega} X_n$  é compacto e metrizável. Assim,  $\lim_{\leftarrow} S$  é um subespaço fechado de um compacto metrizável e portanto é compacto e metrizável.

Seja  $(x_n : n \in \omega)$  um thread em  $\prod_{n \in \omega} X_n$ . Seja  $x$  o ponto de  $X$  que corresponde a  $x_n$  em  $X_n$ . Considere  $F_n$  o fechado que corresponde ao somando de  $X_n$  que contém  $x_n$  para cada  $n \in \omega$  tal que  $x_n$  pertence ao fechado correspondente a  $F_n$ . Seja  $O$  uma vizinhança de  $(x_n : n \in \omega)$ .

Então existe  $m \in \omega$  e  $U$  aberto em  $X_m$  tal que  $(\pi_m)^{-1}[U] \subseteq O$ . Podemos assumir que  $U$  é subconjunto ao somando correspondente a  $F_m$ . Como  $F_m$  é compacto e  $\bigcap \{F_n : n \geq m\}$  é unitário, segue que existe  $k \geq m$  tal que  $F_k$  é subconjunto do aberto correspondente a  $U$ . Seja  $G_k$  o fechado de  $X_k$  correspondente a  $F_k$  que contém  $x_k$ . Então  $(\pi_k)^{-1}[G_k] \subseteq (\pi_m)^{-1}[U] \subseteq O$ .

Note que neste sistema inverso temos que  $(\pi_k)^{-1}[X_k \setminus G_k]$  é o complementar de  $(\pi_k)^{-1}[G_k]$ . Assim,  $(\pi_k)^{-1}[G_k]$  é um fechado. Como também é um aberto, temos um clopen. Como  $(x_n : n \in \omega)$  e  $O$  eram arbitrários, segue que  $\lim_{\leftarrow} S$  é zero dimensional.

Claramente para cada  $t \in G_k$ , há um thread  $(t_n : n \in \omega)$  tal que  $t_n$  é correspondente a  $t$  e  $(t_n : n \in \omega) \in (\pi_k)^{-1}[G_k]$ . Assim, os pontos de  $\lim_{\leftarrow} S$  não são isolados.

Como  $\lim_{\leftarrow} S$  é compacto metrizável, zero dimensional e sem pontos isolados, segue que  $\lim_{\leftarrow} S$  é homeomorfo a  $2^\omega$ .

**Função contínua sobrejetora de  $2^\omega$  em  $X$ .** Tomemos  $Y_n = X$  e  $\delta_m^n$  é a identidade. Esse vai ser o sistema inverso  $T$  e  $\lim_{\leftarrow} T = X$ .

Para cada  $n \in \omega$  tome  $f_n(x) = x \in X$  (identificando o somando  $F$  tal que  $x \in F$  com o subconjunto  $F \subseteq X$ ).

É claro que  $f_m \circ \pi_m^n = \delta_m^n \circ f_n$ . Assim  $f : \lim_{\leftarrow} S \rightarrow \lim_{\leftarrow} T$  é uma função contínua.

Cada  $f_n$  é sobrejetora e cada  $X_n$  é compacta. Assim  $f : \lim_{\leftarrow} S \rightarrow \lim_{\leftarrow} T$  é sobrejetora.

Como o sistema inverso  $T$  é a identidade, é claro que  $\lim_{\leftarrow} T$  é homeomorfa a  $X$ . Como  $\lim_{\leftarrow} S$  é homeomorfa a  $2^\omega$ , segue então que  $X$  é imagem contínua de  $2^\omega$ . □

**Corolário 31.15.** Todo espaço métrico compacto é imagem contínua de  $2^\omega$ .

*Demonstração.* Seja  $X$  um compacto métrico. Então  $X \times 2^\omega$  é um espaço métrico compacto sem pontos isolados. Logo existe  $f : 2^\omega \rightarrow X \times 2^\omega$  sobrejetora e contínua. Como a projeção  $\pi_X : X \times 2^\omega \rightarrow X$  é contínua e sobrejetora, segue que  $\pi_X \circ f : 2^\omega \rightarrow X$  é uma sobrejeção contínua.  $\square$

Espaços métricos compacto são os espaços compactos que possuem base enumerável. Vamos ver que uma generalização não vale, se tomarmos espaços compactos ‘maiores’.

**Exemplo 31.16.**  $\beta\omega$  é um subespaço de  $2^{2^\omega}$ , mas não é imagem contínua de  $2^{2^\omega}$ .

*Demonstração.* O conjunto  $\{x \in 2^{2^\omega} : \text{spte } x \text{ é enumerável}\}$  é sequencialmente compacto e denso em  $2^{2^\omega}$ . Se  $\beta\omega$  fosse imagem contínua de  $2^{2^\omega}$ , então a imagem de  $\{x \in 2^{2^\omega} : \text{spte } x \text{ é enumerável}\}$  seria densa e sequencialmente compacta. Em particular, existiria uma sequência injetora convergente. Mas, toda sequência convergente em  $\beta\omega$  é quase constante.  $\square$

## Capítulo 32

# O conjunto de Cantor. O espaço dos irracionais.

### 32.1 O conjunto de Cantor.

#### 32.1.1 Uma discussão informal sobre o conjunto de Cantor.

**Exemplo 32.1. O conjunto de Cantor.** Visualmente, dividimos o intervalo em três pedaços iguais e removemos o intervalo aberto do meio. A seguir dividimos cada um dos dois intervalos em três pedaços iguais e removemos o intervalo aberto do meio de cada um deles e assim sucessivamente. O conjunto de Cantor será os pontos que restarem. A conta pode ser feita usando a expressão dos números na base 3. Vamos chamar  $C_0$  o intervalos  $[0, 1]$ ,  $C_1$  o conjunto de dois intervalos após remover o primeiro intervalo,  $C_2$  os quatro intervalos após remover um intervalo aberto do meio dos dois intervalos em  $C_1$  e assim sucessivamente. O conjunto de Cantor  $C$  é a interseção  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ .

No processo descrito acima, vemos que no passo 1 é removido um intervalo aberto de tamanho  $\frac{1}{3}$ , no passo 2, dois intervalos de tamanho  $\frac{1}{3^2}$ , a seguir,  $2^2$  intervalos de tamanho  $\frac{1}{3^3}$ ... Assim, no passo  $k$ , são removidos  $2^{k-1}$  intervalos de tamanho  $\frac{1}{3^k}$ . Assim, a soma dos comprimentos dos intervalos removidos é dada pela série geométrica com primeiro termo  $\frac{1}{3}$  e razão  $\frac{2}{3}$  que é  $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$ . Assim, a medida do conjunto removido é 1 e o complementar do conjunto que sobra tem medida de Lebesgue 0.

Note que entre dois intervalos abertos removidos até um certo estágio  $k$ , iremos remover outro intervalo aberto entre eles. Assim, podemos pensar que os intervalos abertos removidos são densos em si mesmo em termos da ordem (um interlavo  $I$  é menor que  $J$  se os pontos de  $I$  são menores que os pontos de  $J$ ).

Iremos verificar intuitivamente que o conjunto de Cantor é compacto, zero dimensional e sem pontos isolados. Como foi removido um conjunto aberto (reunião de abertos é um aberto), temos que o conjunto de Cantor é um fechado do intervalo  $[0, 1]$ , assim o conjunto de Cantor é compacto e métrico.

Dado  $x \in C$  e  $\epsilon > 0$ , tome  $n$  tal que  $\frac{1}{3^n} < \frac{\epsilon}{2}$ . Então  $x \in I_n$ , onde  $I_n$  é um dos intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$  que compõe  $C_n$ . Assim, temos que a distância de  $x$  a qualquer ponto  $y$  de  $I_n$  é menor ou igual a  $\frac{1}{3^n}$ , assim a distância de  $x$  a  $y$  é menor que  $\epsilon$  e portanto  $I_n \subseteq ]x - \epsilon, x + \epsilon[$ . Temos que as duas extremidades de  $I_n$  estarão em todo  $C_m$  para  $m \geq n$ , assim as extremidades de  $I_n$  são pontos de  $C$ . Como um dos pontos não é  $x$ , segue que  $]x - \epsilon, x + \epsilon[ \cap (C \setminus \{x\})$  é não vazio. Como  $\epsilon$  é arbitrário, segue que  $\{x\}$  não é um ponto isolado.

Vamos denotar  $I_n = [b, c]$ . Como  $I_n$  é um dos intervalos que compõe  $C_n$ , então existe  $]a, b[$  e  $]c, d[$  intervalos abertos que foram removidos em algum estágio  $\leq n$ . Com isto, temos que  $I_n \cap C = ]a, d[ \cap C \subseteq ]x - \epsilon, x + \epsilon[ \cap C$  é um aberto e fechado em  $C$ . Como  $\epsilon$  é arbitrário, segue que  $x$  possui uma base local de clopens. Como  $x \in C$  é arbitrário, segue que  $C$  é zero-dimensional.

**Exemplo 32.2.** Um espaço compacto zero dimensional sem pontos isolados removendo família de abertos.

Assim de forma mais geral, seja  $\mathcal{U}$  uma família de intervalos dois a dois disjuntos que sejam densos em si mesmos sem primeiro e último elemento contidos em  $]0, 1[$  e  $\bigcup \mathcal{U}$  denso em  $[0, 1]$ . O complementar, que chamaremos de  $K$  é um fechado, portanto um compacto. Vamos verificar que  $K$  é zero dimensional

sem pontos isolados.

De fato, fixe  $x \in K$  e  $\epsilon > 0$ . Primeiro, note que existe  $U_0 \in \mathcal{U}$  tal que  $]x - \epsilon, x[ \cap U_0 \neq \emptyset$  e existe  $U_1 \in \mathcal{U}$  tal que  $]x, x + \epsilon[ \cap U_1 \neq \emptyset$ . Seja  $U \in \mathcal{U}$  entre  $U_0$  e  $U_1$ .

Seja  $x_0 \in ]x - \epsilon, x[ \cap U_0$  e  $x_1 \in ]x, x + \epsilon[ \cap U_1$ . Então  $U$  está contida em  $[x_0, x_1] \subseteq ]x - \epsilon, x + \epsilon[$ . Assim, as duas extremidades de  $U$  são elementos de  $K$  contidas em  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ , assim,  $\{x\}$  não é aberto em  $K$ . Logo  $K$  não possui pontos isolados.

Temos que  $x - \epsilon < x_0 < x < x_1 < x + \epsilon$  e  $x_0, x_1 \notin K$ . Assim,  $K \cap [x_0, x_1] = K \cap ]x_0, x_1[$  é um clopen de  $K$  contido em  $]x - \epsilon, x + \epsilon[ \cap K$ . Logo,  $x$  possui uma base de clopens de  $K$  em  $x$ . Como  $x$  é arbitrário segue que  $K$  é zero dimensional.

### 32.1.2 O conjunto de Cantor e variações.

Podemos remover intervalos abertos disjuntos cuja soma seja qualquer número entre positivo  $\epsilon$  menor ou igual a 1 e construir um subespaço de  $[0, 1]$  de medida  $1 - \epsilon$  que um compacto métrico zero dimensional sem pontos isolados. Seguindo exatamente o modelo anterior, mas falando do ponto médio do intervalo. No primeiro passo, remova um intervalo aberto de comprimento  $\frac{\epsilon}{3}$  centrado no ponto médio de  $[0, 1]$ . No segundo estágio temos dois intervalos fechado e removemos de cada um deles um intervalo aberto de comprimento  $\frac{\epsilon}{3^2}$  centrado no ponto médio desses intervalos e prosseguimos sucessivamente. Fica a cargo do leitor notar que os argumentos usados anteriormente também servem para provar que essa variação do conjunto de Cantor é um compacto métrico zero dimensional sem pontos isolados.

## 32.2 ‘What the devil is a staircase?’

### 32.2.1 A escadaria de Cantor.

**Exemplo 32.3.** A escadaria de Cantor (‘Cantor’s staircase’ ou ‘Devil’s staircase’).

Vamos também apenas dar uma noção intuitiva. A conta precisa pode ser feita usando a representação dos números na base 3.

Primerio, é dado o valor da função no complementar do conjunto de Cantor. No primeiro intervalo aberto removido damos o valor  $\frac{1}{2}$ , ou seja  $g(x) = \frac{1}{2}$  para todo  $x$  neste primeiro intervalo aberto removido. No segundo estágio temos um intervalo anterior e outro posterior ao primeiro intervalo. Atribuímos  $g(x) = \frac{1}{4}$  para cada  $x$  no primeiro intervalo e  $g(x) = \frac{3}{4}$  para cada  $x$  no segundo intervalo. No terceiro estágio temos quatro intervalos. Para cada um dos dois intervalos do estágio 2, há os intervalos do estágio 3) mais próximos. Um anterior e outro posterior a esse intervalo. Ao intervalo anterior atribuímos o valor dado ao intervalo  $-\frac{1}{2^3}$  e ao intervalo posterior, o valor dado ao intervalo  $+\frac{1}{2^3}$ . O importante aqui é que ao final dessa construção temos que os valores atribuídos na união dos intervalos é crescente e a imagem densa em  $[0, 1]$ . A função de Cantor é definida como  $f(x) = \{\sup\{g(t) : t \in \text{dom } g \cap [0, x]\}$ . Devido a densidade da imagem e o fato da função  $g$  ser crescente, temos que  $f$  é uma função crescente e  $f$  estende  $g$ . Como  $g$  está definida num aberto e é contínua, segue que  $f$  é contínua nos pontos fora do conjunto de Cantor.

Resta verificar que  $f$  é contínua em  $C$ . Dado  $x \in C$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $a, b \in \text{dom } g$  tais que  $f(x) - \epsilon < g(a) < f(x) < g(b) < f(x) + \epsilon$ . Como  $f$  é crescente, segue que  $a < x < b$  e se  $t \in ]a, b[$  então  $g(a) < f(t) \leq g(b)$ . Assim,  $f$  é contínua em  $x$ . Temos que em torno de todo ponto de  $x \in [0, 1] \setminus C$  temos que a função é constante numa vizinhança de  $x$ , assim a função é derivável em  $x$  e a derivada é 0 e os pontos onde a função não é derivável tem medida nula.

Assim de forma mais geral, se temos uma família  $\mathcal{U}$  de intervalos dois a dois disjuntos que sejam densos em si mesmos sem primeiro e último elemento e um denso  $D$  enumerável de  $]0, 1[$ , podemos encontrar uma bijeção  $h$  de  $\mathcal{U}$  em  $D$  que preserva ordem. Podemos assim, definir como acima uma função  $g$  de  $\bigcup \mathcal{U}$  em  $D$  tal que  $g(x) = h(I)$ , onde  $I \in \mathcal{U}$  é o único intervalo tal que  $x \in I$ . Então  $h$  é uma função crescente. O argumento para estender para uma função contínua é a mesma de antes.

## 32.3 O espaço dos Irracionais.

### 32.3.1 O que faz o $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ser o espaço dos irracionais?

**Proposição 32.4.** O espaço dos irracionais é um espaço completamente metrizável, zero dimensional tal que todo clopen é não compacto.

*Demonstração.* Já vimos anteriormente que um  $G_\delta$  de um complemento metrizável é completamente metrizável. Como  $\mathbb{R}$  é completamente metrizável, segue que o espaço dos Irracionais (por ser um  $G_\delta$  de  $\mathbb{R}$ ) é completamente metrizável. O espaço dos Irracionais é zero dimensional, pois  $\{]a, b[ \setminus \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$  é uma base de aberto-fechados (clopens) do espaço dos Irracionais. Falta verificar que os clopens não são compacto. Se  $W$  é um clopen do espaço dos irracionais, então seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}$  tal que  $U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = U \setminus \mathbb{Q} = W$ . Como  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  é denso em  $\mathbb{R}$  e  $U$  é aberto em  $\mathbb{R}$ , segue que  $\overline{W}^{\mathbb{R}} = \overline{U}^{\mathbb{R}}$ . Tomando  $x \in U \cap \mathbb{Q}$ , existe uma sequência  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  em  $W$  que converge para  $x$ . Logo  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  não possui ponto de acumulação em  $W$ , logo  $W$  não é compacto.  $\square$

Note que a propriedade ‘todo clopen não é compacto’ implica em particular que o espaço não possui pontos isolados.

### 32.3.2 Enumeração que cresce em árvore.

**Teorema 32.5.** Seja  $X$  um espaço completamente metrizável, zero dimensional tal que todo clopen é não compacto. Então  $X$  é homeomorfo a  $\omega^\omega$ . Lembrando que  $\omega^\omega$  é o produto de Tychonoff de  $\omega$  cópias de  $\omega$  com a topologia discreta.

*Demonstração.* Denote  $X_\emptyset = X$ . Sem perda de generalidade vamos supor que o diâmetro de  $X$  é  $\leq 1$ . Suponha que para cada  $n \leq k$  temos  $X_p, p \in \omega^n$  definidos, tais que

- 1)  $X_p$  é um clopen não vazio de  $X$  de diâmetro menor ou igual a  $\frac{1}{2^n}$  para todo  $p \in \omega^n$ ;
- 2)  $\{X_p : p \in \omega^n\}$  é uma partição de  $X$ ;
- 3)  $\{X_{p \wedge i} : i \in \omega\}$  é uma partição de  $X_p$  para todo  $n < k$  e para todo  $p \in \omega^n$ .

As condições estão satisfeitas para  $k = 0$ . Vamos supor que as condições estão satisfeitas para todo  $n \leq k$  e vamos definir para  $k+1$ . Fixe  $p \in \omega^k$ . Como  $X_p$  é um clopen, por hipótese, existe uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$  de  $X_p$  sem subcobertura finita. Podemos tomar um refinamento de  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  que consiste de clopens de diâmetro menor ou igual a  $\frac{1}{2^{k+1}}$ . Como  $X$  possui base de abertos enumerável, podemos tomar  $\mathcal{V}'$  subcobertura enumerável de  $\mathcal{U}$ . Vamos enumerar  $\mathcal{V}' = \{V_m : m < \omega\}$  e tomar  $W_m = V_m \setminus (\bigcup_{i < m} V_i)$ . Como a reunião finita de clopen é clopen e remover um clopen de um clopen é um clopen, temos que  $W_m$  é um clopen. Além disso, temos que  $\bigcup\{W_m : m \in \omega\} = \bigcup\{V_m : m \in \omega\}$ .

Seja  $\mathcal{W} = \{W_m : W_m \neq \emptyset\}$ . Temos que  $\mathcal{W}$  é um refinamento de  $\mathcal{U}$ , assim  $\mathcal{W}$  é infinito enumerável e é uma partição de  $X_p$ . Reenumere  $\mathcal{W}$  como  $\{W_{m_i} : i \in \omega\}$ . Defina  $X_{p \wedge i} = W_{m_i}$  para cada  $i \in \omega$ . Assim, a condição 3) está satisfeita para todo  $p \in \omega^k$  e 1) está satisfeita para todo  $p \in \omega^{k+1}$ . Aplicando a condição 2) para  $k$ , e usando 3) para  $k$ , temos que 2) está satisfeita para  $k+1$ .

**Af. 1 - Para cada  $f \in \omega^\omega$ , o conjunto  $\bigcap_{m < \omega} X_{f|_m}$  é unitário.** De fato, temos que  $\{X_{f|_m} : m < \omega\}$  é uma família decrescente de fechados cujo diâmetro converge para 0. Pela completude da métrica, segue que a intersecção é um conjunto unitário.  $\square$

Defina  $\Phi(f)$  tal que  $\{\Phi(f)\} = \bigcap_{m < \omega} X_{f|_m}$ . Então  $\Phi : \omega^\omega \rightarrow X$  é uma função. Vamos mostrar que  $\Phi$  é um homeomorfismo.

**Af. 2 -  $\Phi$  é contínua.** Tome  $f \in \omega^\omega$  e seja  $U$  uma vizinhança de  $\Phi(f)$ . Seja  $m$  um natural positivo tal que  $B(\Phi(f), \frac{1}{2^{m-1}}) \subseteq U$ . Por hipótese,  $\Phi(f) \in X_{f|_m}$  e pelo diâmetro de  $X_{f|_m}$ , temos que  $X_{f|_m} \subseteq B(\Phi(f), \frac{1}{2^{m-1}}) \subseteq U$ . Temos que  $W = \{g \in \omega^\omega : g|_m = f|_m\}$  é um vizinhança aberta de  $f$  e claramente  $\Phi(g) \in X_{g|_m} = X_{f|_m}$ . Assim,  $\phi[W] \subseteq U$  e  $\Phi$  é contínua em  $f$ . Como  $f$  é arbitrário, segue que  $\Phi$  é contínua em  $\omega^\omega$ .

**Af. 3 -  $\Phi$  é injetora.** Dado  $f, g \in \omega^\omega$ , seja  $n$  o menor natural tal que  $f(n) \neq g(n)$ . Então temo que  $p := f|_n = g|_n$ . Temos então que  $X_{f|_{n+1}} \cap X_{g|_{n+1}} = X_{p \wedge f(n)} \cap X_{p \wedge g(n)} = \emptyset$ . Como  $\Phi(f) \in X_{f|_{n+1}}$  e  $\Phi(g) \in X_{g|_{n+1}}$ , segue que  $\Phi(f) \neq \Phi(g)$ . Logo  $\Phi$  é injetora.

**Af. 4 -  $\Phi$  é sobrejetora.** Tome  $x \in X$ . Então por hipótese, existe  $p_n \in \omega^n$  tal que  $x \in X_{p_n}$ . Vamos verificar que  $f = \bigcup\{p_n : n \in \omega\}$  é uma função. Para isto, tome  $k \in \omega$  e  $n, m \in \omega$  estritamente maiores que  $k$ . Suponhamos por absurdo que  $p_n(k) \neq p_m(k)$ . Então existe  $l \leq k$  mínimo tal que  $p_n(l) \neq p_m(l)$ .

Então  $X_{p_n|l} = X_{p_m|l}$  e  $X_{p_n|l+1} \cap X_{p_m|l+1} = \emptyset$ . Por indução, temos que  $X_p \supseteq X_q$  se  $p \subseteq q$ . Assim, temos que  $x \in X_{p_n} \cap X_{p_m} \subseteq X_{p_n|l+1} \cap X_{p_m|l+1} = \emptyset$ , uma contradição.

**Af. 5 -  $\Phi$  é uma função aberta.** Para isto basta mostrar a imagem de abertos básicos de  $\omega^\omega$  são abertos em  $X$ .

Dado  $p \in \omega^n$ , o conjunto  $W_p = \{f \in \omega^\omega : f|_n = p\}$  é um aberto básico do produto e  $\Phi[W_p] = X_p$  que é um aberto de  $X$ . Pela definição de  $\Phi$ , temos que  $\Phi[W_p] \subseteq X_p$ . Usando o argumento de sobrejeção restrito a pontos  $x$  de  $X_p$ , temos que existe  $f \supseteq p$  tal que  $\Phi(f) = x$ . Assim,  $\Phi[W_p] \supseteq X_p$  e temos a igualdade.

Segue das afirmações acima que  $\Phi$  é um homeomorfismo entre  $\omega^\omega$  e  $X$ .  $\square$

**Corolário 32.6.** O espaço dos irracionais é homeomorfo a  $\omega^\omega$ .

No próximo resultado, vamos seguir o mesmo roteiro usado para os compactos métricos. Primeiro vamos usar uma observação.

**Lema 32.7.** Seja  $Z$  um espaço Hausdorff zero-dimensional. Então nenhum clopen não vazio de  $Z$  é compacto se e somente se todo subespaço compacto de  $Z$  possui interior vazio.

*Demonstração.* Para a ida, suponha  $K$  é um compacto de  $Z$ . Se o interior de  $K$  é não vazio, então o interior contém um clopen não vazio. Como  $Z$  é Hausdorff, segue esse clopen é compacto, contradição. Para a recíproca, usamos a contrapositiva. Suponha que  $U$  é um clopen compacto não vazio. Então  $U$  é um compacto com interior não vazio.  $\square$

**Teorema 32.8.** Todo espaço métrico completo com base enumerável é imagem contínua de  $\omega^\omega$ .

*Demonstração.* Vamos proceder por indução. Seja  $Z$  um espaço métrico completo com base enumerável. Podemos escolher a métrica completa de forma que o diâmetro de  $Z$  seja 1. Seja  $U_\emptyset := Z$ .

Suponhamos que  $\{U_p : p \in 2^n\}$  estão definidos para todo  $n \leq k$  satisfazendo o seguinte:

- 1)  $U_p$  é um aberto de  $Z$  de diâmetro menor ou igual a  $\frac{1}{2^{|p|}}$ ;
- 2)  $U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq U_{p|m}$  para todo  $m < |p|$ ;
- 3)  $U_p = \bigcup_{i \in \omega} U_{p \wedge i}$ .

Claramente temos que as condições estão satisfeitas para  $k = 0$ . Vamos supor que as condições estão satisfeitas para todo  $n \leq k$ .

Fixe  $p \in \omega^k$ . Então  $U_p$  é um aberto de  $Z$ . Tome uma cobertura aberta enumerável de  $U_p$  tal que cada elemento de  $U_p$  tem diâmetro menor ou igual a  $\frac{1}{2^{k+1}}$  e cujo fecho está contido em  $U_p$ . Assim, as condições indutivas estão satisfeitas.

Seja  $X_p = \{(x, p) : x \in U_p\}$  para cada  $n < \omega$  e  $p \in \omega^n$ . Seja  $X_n = \bigoplus_{p \in \omega^n} X_p$ .

Defina  $\pi_m^n((x, p)) = (x, p|m)$  para cada  $m \leq n < \omega$  e  $p \in \omega^n$ . Esse será o sistema inverso  $S$ .

Seja  $Y_n := Z$  para cada  $n < \omega$  e  $\delta_m^n : Y_n \rightarrow Y_m$  a função identidade para cada  $m \leq n < \omega$ . Esse será o sistema inverso  $T$ . Claramente,  $\lim_{\leftarrow} T$  é homeomorfo a  $Z$ .

Seja  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  dada por  $f_n((x, p)) = x$  para cada  $x \in X_p$  e  $p \in \omega^n$ . Claramente temos que  $\delta_m^n \circ f_n = f_m \circ \pi_m^n$ . Assim, existe uma função contínua  $f : \lim_{\leftarrow} S \rightarrow \lim_{\leftarrow} T$  tal que  $\delta_n \circ f = f_n \circ \pi_n$  para cada  $n < \omega$ . Para ver que  $f$  é sobre, dado  $x \in Z$ , podemos indutivamente encontrar  $p_n \in \omega^n$  tal que  $p_n \subseteq p_{n+1}$  e  $x \in U_{p_n}$  para todo  $n$ . Então  $((x, p_n) : n < \omega)$  é um thread e  $f(((x, p_n) : n < \omega))$  é a sequência constante  $x$ . Portanto  $f$  é uma sobrejeção.

Resta verificarmos qual é a topologia de  $\lim_{\leftarrow} S$ .

Seja  $K_n = \omega^n$  para cada  $n$  e  $\eta_m^n(p) = p|m$  para cada  $m \leq n < \omega$ . Denote este o sistema inverso por  $L$ . Temos que  $\lim_{\leftarrow} L = 2^\omega$ .

Seja  $g_n : X_n \rightarrow \omega^n$  dada por  $g_n((x, p)) = p$ , para cada  $n < \omega$  e  $p \in 2^n$  e  $x \in U_p$ . Claramente temos que  $\eta_m^n \circ g_n = g_m \circ \pi_m^n$ . Assim, existe uma função contínua  $g : \lim_{\leftarrow} S \rightarrow \lim_{\leftarrow} L$  tal que  $\eta_n \circ g = g_n \circ \pi_n$  para cada  $n < \omega$ .

Vamos verificar que  $g$  é um homeomorfismo.

1) Se  $((x_n, p_n) : n < \omega) \in \lim_{\leftarrow} S$  então existe  $z \in Z$  e  $t \in \omega^\omega$  tal que  $x_n = z$  e  $p_n = t|_n$  para todo  $n < \omega$ . Para cada  $t$  existe um único  $z \in Z$  tal que  $((z, t|_n) : n < \omega) \in \lim_{\leftarrow} S$ .

Seja  $((x_n, p_n) : n < \omega)$  um thread. Então  $(x_m, p_m) = \pi^n((x_n, p_n)) = (x_n, p_n|m)$  e assim,  $x_m = x_n$  e  $p_m \subseteq p_n$ . Assim a primeira coordenada de um thread é constante e  $f = \bigcup_{n < \omega} p_n$  é uma função. Dado  $t \in \omega^\omega$  temos que  $U_\emptyset \supseteq \overline{U_{t|_1}} \supseteq U_{t|_1} \supseteq \overline{U_{t|_2}} \dots$  com diâmetro indo a zero. Assim,  $\bigcap_{n < \omega} U_{t|_n} = \bigcap_{n < \omega} \overline{U_{t|_n}}$  é um conjunto unitário. Vamos denotar esse ponto por  $z_f$ .

2)  $g$  é injetora. Como vimos acima, dados dois pontos de  $\lim_{\leftarrow} S$  estão associados a  $(z_t, t), (z_s, s) \in Z \times \omega^\omega$  e que se  $s = t$  então  $z_s = z_t$ . Assim,  $t \neq s$ . Logo,  $g((z_t, t|_n) : n < \omega) \neq g((z_s, t|_n) : n < \omega)$  pois o primeiro está associado a  $t$  e o segundo a  $s$ .

3)  $g$  é sobre. Se  $((a_n : n < \omega))$  é um thread em  $\lim_{\leftarrow} L$  então está associado a algum ponto  $t \in \omega^\omega$ . Pelo ítem 1) existe um thread em  $\lim_{\leftarrow} S$  associado a  $(z_t, t)$ . Então  $g((z_t, t|_n) : n < \omega)$  é  $((a_n : n < \omega))$ .

4)  $g$  é aberta. Dado o thread  $((x_n, p_n) : n < \omega)$  associado a  $(z_t, t)$  e uma vizinhança  $U$  desse thread, existe  $m < \omega$  e  $W$  aberto em  $X_n$  tal que  $((x_n, p_n) : n < \omega) \in (\pi_m)^{-1}[W] \subseteq W$ .

Podemos escolher  $U_{t|_{m+1}}$  e então  $((x_n, p_n) : n < \omega) \in (\pi_{m+1})^{-1}[U_{t|_{m+1}} \times \{t_{m+1}\}] \subseteq (\pi_m)^{-1}[W]$ .

Se  $((b_n, q_n) : n < \omega) \in (\pi_{m+1})^{-1}[U_{t|_{m+1}} \times \{t_{m+1}\}] \cap \lim_{\leftarrow} S$  então  $q_m = t|_{m+1}$  e portanto  $g(((b_n, q_n) : n < \omega)) \subseteq \{s \in \omega^\omega : s \supset t|_{m+1}\}$ . Por outro lado, se  $u \in \{s \in \omega^\omega : s \supset t|_{m+1}\}$  então o thread associado a  $(z_u, u)$  é tal que  $z_u \in U_{u|_{m+1}} = U_{t|_{m+1}}$ . Assim, o thread associado a  $(z_u, u)$  pertence a  $(\pi_{m+1})^{-1}[U_{t|_{m+1}} \times \{t_{m+1}\}] \cap \lim_{\leftarrow} S$  e sua imagem é o thread associado a  $u$ . Logo  $g[(\pi_{m+1})^{-1}[U_{t|_{m+1}} \times \{t_{m+1}\}]]$  é o aberto  $(\eta_{m+1})^{-1}[t|_{m+1}]$  que é associado ao aberto gerado por associado a  $t|_{m+1}$  em  $\omega^\omega$ .  $\square$

*Ao invés de mostrarmos o homeomorfismo  $g$ , poderíamos ter mostrado que  $\lim_{\leftarrow} S$  é um espaço completamente metrizável, zero dimensional e tal que todo conjunto com interior não vazio não é compacto, pois isto implica que é uma cópia de  $\omega^\omega$ .*

*O fato de ser completamente metrizável segue de ser o subconjunto fechado de um produto enumerável de completamente metrizáveis.*

*O fato de ser zero dimensional segue de 1) e 4), pois  $(\pi_{m+1})^{-1}[U_{t|_{m+1}} \times \{t_{m+1}\}] = \lim_{\leftarrow} S \setminus \bigcup\{(\pi_{m+1})^{-1}[U_p \times \{p\}] : p \in 2^{m+1} \setminus \{t|_{m+1}\}\}$ .*

*Se tivéssemos um compacto com interior não vazio, ele conteria por 4) um clopen básico (que deveria ser compacto) da forma  $(\pi_{m+1})^{-1}[U_{t|_{m+1}} \times \{t|_{m+1}\}]$ . Porém esse clopen  $(\pi_{m+1})^{-1}[U_{t|_{m+1}} \times \{t|_{m+1}\}]$  não é compacto, pois possui a cobertura aberta  $\{(\pi_{m+1})^{-1}[U_{(t|_{m+1})^\wedge i} \times \{(t|_{m+1})^\wedge i\}] : i < \omega\}$  que não tem subcobertura própria por serem dois a dois disjuntos (e logo não possui subcobertura finita).*

includeaula33



# Capítulo 33

## Funções cardinais.

### 33.1 ‘Para o $\omega_1$ e além’.

#### 33.1.1 Algumas funções cardinais.

Vimos algumas propriedades topológicas associadas a ser infinito enumerável. Iremos agora associar a uma propriedade um cardinal e chamaremos isto de função cardinal. Essas cardinalidades associadas devem ser as mesmas para espaços homeomorfos, assim as funções cardinais são propriedades topológicas. Iremos sempre assumir que uma função cardinal é infinita, assim, em geral, usamos espaços infinitos.

**Definição 33.1.** O peso de  $X$ ,  $w(X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  para o qual existe uma base de abertos  $\mathcal{B}$  com  $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ .

**Definição 33.2.** A densidade de  $X$ ,  $d(X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  para o qual existe um subconjunto denso  $D$  de  $X$  tal que  $|D| \leq \kappa$ .

**Definição 33.3.** O caráter de  $x$  em  $X$ ,  $\chi(x, X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que existe uma base local  $\mathcal{V}_x$  para  $x$  em  $X$  com  $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ .

O caráter de  $X$ ,  $\chi(X)$ , é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que existe um sistema fundamental de vizinhanças  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$  tal que  $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ .

*Note que  $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$ .*

**Definição 33.4.** Dado um espaço  $T_1$   $X$ , dizemos que uma família de vizinhanças abertas de  $x$ ,  $\mathcal{V}_x$  é uma pseudobase local de  $x$  se  $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$ .

**Definição 33.5.** O pseudocaráter de  $x$  em  $X$ ,  $\psi(x, X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que existe uma pseudobase local  $\mathcal{V}_x$  para  $x$  em  $X$  com  $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ .

O pseudocaráter de  $X$ ,  $\psi(X)$ , é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que para cada  $x \in X$  existe uma pseudobase local  $\mathcal{V}_x$  de  $x$  em  $X$  tal que  $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ .

*Note que  $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$ .*

**Exemplo 33.6.** Seja  $X$  um subconjunto enumerável denso de  $Z = [0, 1]^{2^\omega}$  (vimos que é separável). Como  $X$  é um subconjunto denso de um espaço  $T_3$ , segue que para cada  $x \in X$  temos  $\chi(x, X) = \chi(x, Z) = 2^\omega$ . Por outro lado,  $X$  é enumerável, assim,  $\psi(x, X) = \omega$ . Temos ainda que  $\psi(X \times X) \leq \chi(X \times X) = \omega$  e  $c(X \times X) \leq d(X \times X) = \omega$  e  $w(X \times X) = 2^\omega$ .

**Definição 33.7.** Seja  $X$  um espaço Hausdorff (segue que a intersecção das vizinhanças fechadas de  $x$  é  $\{x\}$ ).

O pseudocaráter fechado de  $x$  em  $X$ ,  $\psi_c(x, X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que existe uma pseudobase local de vizinhanças fechadas  $\mathcal{V}_x$  para  $x$  em  $X$  com  $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ .

O pseudocaráter fechados de  $X$ ,  $\psi_c(X)$ , é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que para cada  $x \in X$  existe uma pseudobase local de vizinhanças fechadas  $\mathcal{V}_x$  de  $x$  em  $X$  tal que  $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ .

*Note que  $\psi_c(X) = \sup\{\psi_c(x, X) : x \in X\}$ .*

**Definição 33.8.** O grau de Lindelöf,  $L(X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que toda cobertura aberta de  $X$  possui subcobertura enumerável.

Note que um espaço compacto e um espaço Lindelöf tem grau de Lindelöf  $\omega$ .

**Definição 33.9.** A celularidade de  $X$ ,  $c(X)$ , é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que toda família de abertos disjunto de  $X$  possui cardinalidade  $\leq \kappa$ .

**Definição 33.10.** O spread de  $X$ ,  $s(X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que se  $A \subseteq X$  é um subconjunto discreto de  $X$  então  $|A| \leq \kappa$ .

**Definição 33.11.** O extent de  $X$ ,  $e(X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que se  $A \subseteq X$  é fechado e discreto então  $|A| \leq \kappa$ .

**Exemplo 33.12.** Seja  $X$  a compactificação por um ponto de um conjunto infinito discreto de cardinalidade  $\kappa$ . Então temos um discreto de cardinalidade  $\kappa$ , assim  $s(X) = \kappa$ . Por outro lado todo subconjunto fechado e discreto é finito, assim temos  $e(X) = \omega$ .

**Exemplo 33.13.** Seja  $X$  a reta de Sorgenfrey. Vimos que  $c(x) \leq d(X) = \omega$ ,  $w(X) = 2^\omega$ ,  $\psi(X) \leq \chi(X) = \omega$ ,  $e(X) \leq L(X) = \omega$  e  $s(X) = \omega$ .

Vamos mostrar que  $s(X) = \omega$ , as outras seguem do que já foi feito anteriormente. Suponhamos que  $A$  é discreto não enumerável. Então, para cada  $a \in A$ , existe  $n_a \in \mathbb{N}$   $[a, a + \frac{1}{n_a}[ \cap A = \{a\}$ . Podemos tomar então  $n \in \mathbb{N}$  e  $B \subseteq A$  não enumerável tal que  $n_a = n$  para todo  $a \in B$ . Como  $B$  é não enumerável, existe  $a_1, a_2 \in B$  tais que  $a_1 < a_2 < a_1 + \frac{1}{n}$ . Assim,  $a_2 \in [a_1, a_1 + \frac{1}{n}[ \cap A$ , contradizendo que  $A$  é discreto.

Agora, temos que  $X \times X$  possui um discreto fechado de cardinalidade  $2^\omega$  e é um espaço de cardinalidade  $2^\omega$ , assim temos  $s(X \times X) = 2^\omega$  e  $2^\omega = e(X \times X) \leq L(X \times X)$ . Além disso, temos que  $c(X \times X) \leq d(X \times X) = \omega \cdot \omega = \omega$  e  $2^\omega \leq w(X \times X) \leq 2^\omega \cdot 2^\omega = 2^\omega$ .

**Definição 33.14.** O tightness de  $x$  em  $X$ ,  $t(x, X)$  é o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que se  $x \in \bar{A}$  existe  $D \subseteq A$  com  $|D| \leq \kappa$  e  $x \in \bar{D}$ .

O tightness de  $X$ ,  $t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}$ , ou seja o menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que para todo  $x \in X$  e todo  $A$  tal que  $x \in \bar{A}$ , existe  $D \subseteq A$  com  $|D| \leq \kappa$  tal que  $x \in \bar{D}$ .

### 33.1.2 Algumas desigualdades envolvendo funções cardinais.

**Proposição 33.15.**  $t(x, X) \leq \chi(x, X)$  para todo  $x \in X$ . Em particular,  $t(X) \leq \chi(X)$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{V}_x$  uma base local de  $X$  de cardinalidade  $\leq \chi(x, X)$ . Dado  $A \subseteq X$  tal que  $x \in \bar{A}$ , tome  $y_V \in V \cap A$  para cada  $V \in \mathcal{V}_x$ . Então  $D = \{y_V : V \in \mathcal{V}_x\}$  é um subconjunto de  $A$  tal que  $|D| \leq |\mathcal{V}_x| \leq \chi(x, X)$ . Para verificarmos que  $x \in \bar{D}$ , dado  $U$  uma vizinhança de  $x$ , existe  $V \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V \subseteq U$ . Logo  $y_V \in D \cap V \subseteq D \cap U$  e isto termina a prova.  $\square$

**Proposição 33.16.** Se  $X$  é compacto Hausdorff então  $\psi(x, X) = \chi(x, X)$  para cada  $x \in X$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{V}$  uma pseudobase de  $x$  em  $X$ . Se  $\mathcal{V}$  for finita então a intersecção é um aberto, assim  $\{x\}$  é um aberto. Como  $X$  é regular, para cada  $V \in \mathcal{V}$ , podemos fixar  $U_V$  aberto tal que  $x \in U_V \subseteq \bar{U}_V \subseteq V$ . Assim,  $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \bar{U}_V = \{x\}$ . Dado  $W$  uma vizinhança aberta de  $x$ , temos que  $X \setminus W$  é um compacto e  $\bigcup\{X \setminus \bar{U}_V : V \in \mathcal{V}\} \supseteq X \setminus \{x\} \supseteq X \setminus W$ . Pela compacidade, existe  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  finito tal que  $\bigcup\{X \setminus \bar{U}_V : V \in \mathcal{V}'\} \supseteq X \setminus W$ . Assim, temos que  $\bigcap_{V \in \mathcal{V}'} \bar{U}_V \subseteq W$ . Em particular,  $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}'} U_V \subseteq W$ . Portanto  $\{\{\bigcap U_V : V \in \mathcal{V}'\} : \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V} \text{ finito}\}$  é uma base local de  $x$  com a mesma cardinalidade que  $\mathcal{V}$ .  $\square$

**Proposição 33.17.** Seja  $X$  um espaço  $T_3$ . Então  $|X| \leq d(X)^{t(X)\psi(X)}$ .

*Demonstração.* Para cada  $x \in X$ , seja  $\mathcal{V}_x$  uma pseudobase para  $x$  em  $X$  de cardinalidade  $\leq \psi(X)$ . Para cada  $V \in \mathcal{V}_x$  seja  $U_V$  vizinhança de  $X$  tal que  $\bar{U}_V \subseteq V$ .

Seja  $D$  um subconjunto denso de  $X$  de cardinalidade  $\leq d(X)$ . Dado  $x \in X$  e  $V \in \mathcal{V}_x$ , temos que  $x \in \bar{U}_V = \bar{U}_V \cap \bar{D} \subseteq V$ . Então existe  $A_{x,V} \subseteq U_V \cap D$  tal que  $x \in \bar{A}_{x,V}$  e  $|A_{x,V}| \leq t(X)$ .

Tome  $f : X \rightarrow [[D]^{\leq t(X)}]^{\leq \psi(X)}$  dada por  $x \mapsto \{A_{x,V} : V \in \mathcal{V}_x\}$ .

Primeiro note que  $[[D]^{\leq t(X)}]^{\leq \psi(X)} \leq |[D]^{\leq t(X)}|^{\psi(X)} \leq (d(X)^{t(X)})^{\psi(X)} = d(X)^{t(X)\psi(X)}$ . Falta mostrarmos que  $f$  é injetora, para concluirmos que  $|X| \leq d(X)^{t(X)\psi(X)}$ .

Note que para cada  $x \in X$  temos que  $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} \bar{A}_{x,V} \subseteq \bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$ . Assim,  $f(x) \neq f(y)$  se  $x \neq y$ . Portanto  $f$  é injetora.  $\square$

Para espaços Hausdorff, podemos ver que  $\psi(x, X) \leq \psi_c(x, X)$ .

**Lema 33.18.** Seja  $X$  Hausdorff. Então  $\psi_c(x, X) \leq \chi(x, X)$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{V}_x$  uma base local de  $x$  em  $X$ . Vamos mostrar que  $\bigcap \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$ .

De fato, dado  $y \neq x$ , pela propriedade de Hausdorff, existe  $W$  vizinhança de  $x$  tal que  $y \notin \bar{W}$ . Como  $\mathcal{V}_x$  é base local de  $x$ , existe  $V \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V \subseteq W$ . Assim, temos que  $y \notin \bar{V}$ . Portanto  $y \notin \bigcap \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_x\}$ . Como  $y \neq x$  era arbitrário, segue que  $\bigcap \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_x\} \subseteq \{x\}$ . Portanto,  $\bigcap \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$   $\square$

**Proposição 33.19.** Seja  $X$  um espaço  $T_2$ . Então  $|X| \leq d(X)^{t(X)\psi_c(X)}$ .

*Demonstração.* Para cada  $x \in X$ , seja  $\mathcal{V}_x$  uma pseudobase de vizinhanças fechadas para  $x$  em  $X$  de cardinalidade  $\leq \psi_c(x, X)$ . Assim, temos que  $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} \bar{V} = \{x\}$ .

Seja  $D$  um subconjunto denso de  $X$  de cardinalidade  $\leq d(X)$ . Dado  $x \in X$  e  $V \in \mathcal{V}_x$ , temos que  $x \in \bar{V} = \overline{V \cap D}$ . Então existe  $A_{x,V} \subseteq V \cap D$  tal que  $x \in \overline{A_{x,V}}$  e  $|A_{x,V}| \leq t(X)$ .

Tome  $f : X \rightarrow \prod_{x \in X} \prod_{V \in \mathcal{V}_x} \{A_{x,V} : V \in \mathcal{V}_x\}$ .

Primeiro note que  $|\prod_{x \in X} \prod_{V \in \mathcal{V}_x} \{A_{x,V} : V \in \mathcal{V}_x\}| \leq \prod_{x \in X} \prod_{V \in \mathcal{V}_x} t(X) \leq (d(X)^{t(X)})^{\psi_c(X)} = d(X)^{t(X)\psi_c(X)}$ . Falta mostrarmos que  $f$  é injetora, para concluirmos que  $|X| \leq d(X)^{t(X)\psi_c(X)}$ .

Note que para cada  $x \in X$  temos que  $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} \overline{A_{x,V}} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} \bar{V} = \{x\}$ . Assim,  $f(x) \neq f(y)$  se  $x \neq y$ . Portanto  $f$  é injetora.  $\square$

**Corolário 33.20.** Seja  $X$  um espaço  $T_2$ . Então  $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$ .

*Demonstração.* Temos que  $\psi_c(X) \leq \chi(X)$  e  $t(X) \leq \chi(X)$ . Assim,  $|X| \leq d(X)^{t(X)\psi_c(X)} \leq d(X)^{\chi(X)}$ .  $\square$

**Proposição 33.21.** Seja  $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$  uma família crescente de fechado de  $X$  com  $\text{cof}(\kappa) > t(X)$ . Então  $\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$  é um fechado de  $X$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \overline{\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha}$ . Então existe  $A \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$  com  $|A| \leq t(X)$  tal que  $x \in \bar{A}$ . Para cada  $a \in A$  seja  $\alpha_a < \kappa$  tal que  $a \in F_{\alpha_a}$ . Como  $\{\alpha_a : a \in A\}$  é um subconjunto de  $\kappa$  de cardinalidade estritamente menor que a cofinalidade, segue que é limitada. Assim, existe  $\beta < \kappa$  tal que  $\sup\{\alpha_a : a \in A\} < \beta$ . Temos então que  $a \in F_{\alpha_a} \subseteq F_\beta$  para cada  $a \in A$ . Assim,  $A \subseteq F_\beta$ . Portanto  $x \in \bar{A} \subseteq \bar{F}_\beta = F_\beta$ . Logo  $x \in F_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$ .

Portanto  $\overline{\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha} \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$  e  $\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$  é um fechado.  $\square$

## 33.2 Cardinalidade de compactos em relação ao tamanho das base locais.

### 33.2.1 A técnica de Pol-Šapirovskii.

Visualmente, a ideia da técnica é como tentar misturar a farinha e os outros ingredientes para fazer a massa... voce vai catando o que estiver pra fora para que fique tudo dentro da massa.

**Teorema 33.22.** Seja  $X$  um espaço Hausdorff. Então  $|X| \leq 2^{t(X)\psi_c(X)L(X)}$ .

*Demonstração.* Seja  $\kappa = t(X)\psi_c(X)L(X)$ . Para cada  $x \in X$ , fixe uma pseudobase de abertos  $\mathcal{V}_x$  de  $x$  de cardinalidade  $\leq \psi_c(x, X)$  ( $\psi_c(X)$  é apenas usado para aplicar uma das proposições anteriores).

Seja  $X_0$  um subconjunto não vazio qualquer de  $X$  de cardinalidade  $\leq 2^\kappa$ . Seja  $F_0 = \overline{X_0}$ . Como a densidade de  $F_0$  é menor ou igual a  $|X_0|$ , segue que  $|F_0| \leq d(F_0)^{t(F_0)\psi_c(F_0)} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ , pois  $t(F_0)\psi_c(F_0) \leq t(X)\psi_c(X) \leq \kappa$ .

Suponha que  $\{F_\alpha : \alpha < \gamma\}$  estão definidos para alguma  $\gamma < \kappa^+$  de forma que

1)  $F_\alpha$  é fechado para todo  $\alpha < \gamma$ ;

2)  $|F_\alpha| \leq 2^\kappa$  para todo  $\alpha < \gamma$ ;

3)  $F_\beta \subseteq F_\alpha$  para todo  $\beta < \alpha < \gamma$ ;

4) se  $\alpha + 1 < \gamma$ ,  $\mathcal{O}$  é uma cobertura de  $F_\alpha$  com  $|\mathcal{O}| \leq \kappa$  e  $\mathcal{O} \subseteq \bigcup_{x \in F_\alpha} \mathcal{V}_x$  e  $X \setminus \bigcup \mathcal{O} \neq \emptyset$  então  $F_{\alpha+1} \setminus \bigcup \mathcal{O} \neq \emptyset$ .

Claramente  $F_0$  satisfaz todas as condições (algumas por vacuidade.)

Vamos definir  $F_\gamma$ . Para isto dividiremos em dois casos:

**Caso 1.  $\gamma$  é limite.** Como  $\gamma < \kappa^+$ , segue que  $|\gamma| \leq \kappa$ . Assim,  $|\bigcup_{\alpha < \gamma} F_\alpha| \leq \kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$ . Seja  $F_\gamma = \overline{\bigcup_{\alpha < \gamma} F_\alpha}$ . Pelo mesmo argumento usado para  $F_0$ , podemos concluir que  $F_\gamma$  é um fechado de cardinalidade  $\leq 2^\kappa$ , assim condições 1) e 2) estão satisfeitas. Pela definição de  $F_\gamma$  também segue que a condição 3) está satisfeita. A condição 4) está satisfeita, pois  $\gamma$  não é sucessor.

**Caso 2.  $\gamma = \alpha + 1$ .** Seja  $\mathfrak{D}$  o conjunto de todas as cobertura  $\mathcal{O}$  de  $F_\alpha$  com  $|\mathcal{O}| \leq \kappa$  e  $\mathcal{O} \subseteq \bigcup_{x \in F_\alpha} \mathcal{V}_x$  e  $X \setminus \bigcup \mathcal{O} \neq \emptyset$ . Para cada  $\mathcal{O} \in \mathfrak{D}$ , fixe  $x_{\mathcal{O}} \in X \setminus \bigcup \mathcal{O}$ . Note que o número de abertos em  $\bigcup_{x \in F_\alpha} \mathcal{V}_x$  é  $\leq 2^\kappa \cdot \kappa = 2^\kappa$ . Assim,  $|\mathfrak{D}| \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ .

Seja  $F_\gamma = \overline{F_\alpha \cup \{x_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \in \mathfrak{D}\}}$ . Como  $F_\gamma$  é o fecho de um conjunto de cardinalidade  $\leq 2^\kappa$ , segue do argumento utilizado anteriormente que  $F_\gamma$  tem cardinalidade  $\leq 2^\kappa$ . Assim condições 1) a 4) estão satisfeitas.

Seja  $F = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} F_\alpha$ . Como  $\kappa^+$  é regular, segue que  $\text{cof}(\kappa^+) = \kappa^+ > t(X)$ . Portanto  $F$  é fechado. Além disso, temos que  $|F| \leq \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$ .

Vamos provar que  $F = X$ , o que mostra que  $|X| = |F| \leq 2^\kappa$ . De fato se  $X \setminus F \neq \emptyset$ , fixe  $z \in X \setminus F$ . Para todo  $x \in F$ , existe  $V_x \in \mathcal{V}_x$  tal que  $z \notin V_x$ . Assim,  $\{V_x : x \in F\}$  recobre  $F$ . Como  $F$  é fechado temos que  $L(F) \leq L(X)$ . Assim, existe  $F' \subseteq F$  tal que  $|F'| \leq L(X) \leq \kappa$  tal que  $F \subseteq \bigcup \{V_x : x \in F'\}$ . Como  $F' \subseteq \bigcup \{F_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$  e  $|F'| \leq \kappa < \text{cof}(\kappa^+) = \kappa^+$ , existe  $\xi < \kappa^+$  tal que  $F' \subseteq F_\xi$ . Assim,  $\mathcal{O} = \{V_x : x \in F'\}$  é uma das coberturas de  $F_\xi$  que aparecem no estágio  $\xi + 1$  (note que  $X \setminus \bigcup \mathcal{O} \neq \emptyset$ ). Assim,  $x_{\mathcal{O}} \in F_{\xi+1} \setminus \bigcup \mathcal{O} \subseteq F \setminus \bigcup \mathcal{O} = \emptyset$ , que é uma contradição. Assim  $X \setminus F = \emptyset$ . □

**Corolário 33.23.** Seja  $X$  um espaço Hausdorff. Então  $|X| \leq 2^{\chi(X)L(X)}$ .

*Demonstração.* Temos que  $t(x)\psi_c(X) \leq \chi(X)$  para espaços Hausdorff. □

**Corolário 33.24.** Seja  $X$  um espaço  $T_3$ . Então  $|X| \leq 2^{t(X)\psi(X)L(X)}$ .

*Demonstração.* Num espaço  $T_3$  temos que  $\psi(X) = \psi_c(X)$ . □

### 33.2.2 ‘É elementaridade meu Caro...’

Prosseguindo a analogia com a massa, submodelos elementares já vem com os ingredientes misturados então o preparo é mais rápido. O problema é saber qual ingrediente foi usado pra fazer uma nova massa. Ou seja, uma vez que você saiba o que quer provar, a prova usando submodelos vai simplificar a apresentação.

**Teorema 33.25.** (Usando submodelos elementares). Seja  $X$  um espaço Hausdorff. Então  $|X| \leq 2^{t(X)\psi_c(X)L(X)}$ .

*Esboço da Demonstração.* Um submodelo elementar é obtido utilizando Löwenheim-Skolem, e no fundo, boa parte da construção de Pol-Šapirovsii é fazer argumento de Löwenheim-Skolen específico à construção.

Basicamente, dado uma fórmula  $\phi$  fixada, um submodelo elementar  $M$  para a fórmula  $\phi$  é tal que se  $z_1, \dots, z_n$  estão em  $M$  e existe uma testemunha  $x$  tal que  $\phi(x, z_1, \dots, z_n)$  (onde todas as variáveis aparecem listadas), então existe  $y \in M$  tal que  $\phi(y, z_1, \dots, z_n)$ .

Seja  $\kappa = t(X)\psi_c(X)L(X)$ . Para cada  $x \in X$ , fixe uma pseudobase de abertos  $\mathcal{V}_x$  de  $x$  de cardinalidade  $\leq \psi_c(X)$  tal que  $\{x\} = \bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_x\}$  e tome um submodelo elementar  $M$  de cardinalidade  $2^\kappa$  tal que  $[M]^{\leq \kappa} \subseteq M$  tal que  $\kappa \subseteq M$ ,  $X \in M$ ,  $\{\mathcal{V}_x : x \in X\} \in M$ . Em adição também temos que se  $C \in M$  e  $|C| \leq \kappa$  então  $C \subseteq M$ . Geralmente as fórmulas usadas são colocadas ‘on demand’ ou seja, depois que terminamos a prova, sabemos o que devemos assumir sobre o submodelo elementar e incluímos isto no começo da prova.

A ideia é provar que  $X \subseteq M$ , assim vamos tomar  $X \cap M$ . Não podemos falar de  $X \cap M$  dentro de  $M$ , assim o que faremos a seguir está fora de  $M$ . Tome  $y \in \overline{X \cap M}$ . Então existe  $A \subseteq X \cap M$  com  $|A| \leq t(X)$  tal que  $y \in \overline{A}$ . Como  $A \subseteq M$  e  $|A| \leq \kappa$ , segue que  $A \in M$ . Seja  $\mathcal{W} = \{A \cap V : V \in \mathcal{V}_x\}$ . Temos que o conjunto (não o conjunto indexado) é uma família de tamanho  $\leq \kappa$  de elementos de  $M$ . Logo  $\mathcal{W} \in M$ . Além disso  $y$  satisfaz a fórmula  $y \in \bigcap \{\overline{B} : B \in \mathcal{W}\}$  (incluindo o operador fecho em  $M$ ). Assim, existe  $a \in M$  tal que  $a \in \bigcap \{\overline{B} : B \in \mathcal{W}\}$ . Como a intersecção é um único ponto, segue que  $y \in M$ . Logo, temos que  $\overline{X \cap M} \subseteq M$ . Assim,  $X \cap M$  é fechado em  $X$ .

Se  $X \cap M = X$  terminamos. Vamos verificar que  $X \cap M \neq X$  não pode ocorrer. Fixe  $z \in X \setminus M$ . Para cada  $x \in X \cap M$  temos que  $\mathcal{V}_x \in M$ . Como  $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ , segue que  $\mathcal{V}_x \subseteq M$ . Assim, existe  $V_x$  tal que

$x \in V_x \in \mathcal{V}_x \subseteq M$  e  $z \notin V_x$ . Então  $\{V_x : X \cap M\}$  é uma cobertura aberta de  $X \cap M$ . Como  $X \cap M$  é fechado em  $X$ , segue que  $L(X \cap M) \leq L(X)$ . Assim, existe  $B \subseteq X \cap M$  de cardinalidade  $\leq L(X)$  tal que  $X \cap M \subseteq \bigcup\{V_x : x \in B\}$ . Como  $B \in M$  e  $V_x \in M$  para cada  $x \in B$ , temos que  $\{V_x : x \in B\} \in M$ . Temos que existe  $z$  tal  $z \notin \{V_x : x \in B\}$ . Segue então da elementaridade e do fato que  $\{V_x : x \in B\} \in M$  que existe  $b \in M$  tal que  $b \notin \{V_x : x \in B\}$ , mas isto contradiz  $X \cap M \subseteq \bigcup\{V_x : x \in B\}$ .  $\square$

# Capítulo 34

## Jogos topológicos para espaços de Baire.

O resultado principal apresentado neste capítulo é de W. Moors (Proc. Amer. Math. Soc., 2006).

### 34.1 Espaços de Baire e cia.

#### 34.1.1 Espaços hereditariamente Baire.

Lembramos que um espaço  $X$  é de Baire se toda intersecção enumerável  $\{O_n : n \in \omega\}$  de abertos densos é densa em  $X$ .

Já vimos que espaços compactos Hausdorff, e mais geralmente, espaços enumeravelmente compactos regulares são espaços de Baire. Espaços localmente compactos Hausdorff e espaços completamente metrizáveis são espaços de Baire.

**Definição 34.1.** Um espaço  $X$  é hereditariamente Baire se todo subespaço fechado de  $X$  é de Baire.

**Exemplo 34.2.** Espaços compactos Hausdorff e espaços completamente metrizáveis são hereditariamente Baire.

Um espaço  $X$  é chamado de Bairely Baire se  $X$  é de Baire, mas existe um espaço de Baire  $Y$  tal que  $X \times Y$  não é de Baire. O primeiro exemplo deste tipo foi obtido por Oxtoby usando a Hipótese do Contínuo. Usando técnicas de forcing, Cohen obteve um exemplo em ZFC (a rigor, forcing é para obter resultados que não são em ZFC). No próximo capítulo iremos apresentar o exemplo devido a Fleissner e Kunen que não utiliza forcing.

### 34.2 Baire e jogos.

Seja  $X$  um espaço topológico. Abaixo vamos descrever um jogo de Choquet. Temos dois jogadores  $\alpha$  e  $\beta$ . O jogador  $\beta$  começa jogando um aberto não vazio  $B_0$ . O jogador  $\alpha$  responde com um aberto não vazio  $A_0$  com  $A_0 \subseteq B_0$ . O jogador  $\beta$  então responde com um aberto não vazio  $B_1 \subseteq A_0$ . A partida procede com infinitas rodadas produzindo uma sequência  $((A_n, B_n) : n \in \omega)$  tal que  $A_{n+1} \subseteq B_{n+1} \subseteq A_n \subseteq B_n$  para todo  $n \in \omega$  com  $A_n$  e  $B_n$  abertos não vazios para todo  $n \in \omega$ .

Dizemos que  $\alpha$  ganhou a partida se  $\bigcap_{n \in \omega} A_n \neq \emptyset$ . Caso contrário dizemos que  $\beta$  ganha a partida.

Um estratégia para  $\beta$  é uma regra que  $\beta$  irá seguir sabendo quais foram os movimentos anteriores de  $\alpha$ . Mais especificamente, uma estratégia é uma sequência  $t = (t_n : n \in \omega)$  tal que  $t_0(\emptyset)$  é um aberto não vazio e  $t_{n+1}(A_0, A_1, \dots, A_n) \subseteq A_n$  é um aberto não vazio, com  $A_0 \supseteq A_1 \dots \supseteq A_n$ . (ou seja  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$  é um possível início de partida).

Dizemos que uma sequência decrescente de abertos não vazios  $(A_n : n \in \omega)$  é uma  $t$ -sequência se  $A_n \subseteq t_n(A_0, \dots, A_{n-1})$  para todo  $n$ .

Dizemos que  $t$  é uma estratégia vencedora para  $\beta$  se para toda partida  $\beta$  vence todas as partidas  $((A_n, B_n) : n \in \omega)$  em que  $(A_n : n \in \omega)$  é uma  $t$ -sequência e  $\beta$  responde com a estratégia  $t$ .

A equivalência abaixo foi provada por Saint Raymond na década de 1980.

**Proposição 34.3.** O espaço  $X$  é Baire se e somente se  $\beta$  não possui estratégia vencedora.

*Demonstração. (Ida.)* Suponha que  $X$  é Baire e seja  $t$  uma estratégia para  $\beta$ . Vamos definir uma árvore de conjuntos. Começamos com uma família  $\mathcal{A}_1$  uma família 1-uplas de abertos ( $A$ ) contidos em  $t_0(\emptyset)$  tais que  $\{t_1(A) : (A) \in \mathcal{A}_0\}$  é uma família densa dois a dois disjuntos em  $t_0(\emptyset)$ . Tal família existe usando maximalidade. De fato, tomando  $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F} \subseteq \{t_1(A) : A \subseteq t_0(\emptyset), A \text{ aberto}\} : \mathcal{F} \text{ são dois a dois disjuntos}\}$  com a ordem  $\subseteq$  em  $\mathfrak{F}$ . Claramente uma cadeia em  $\mathfrak{F}$  tem a união como majorante em  $\mathfrak{F}$ , assim possui elemento maximal. Se um maximal  $\mathcal{F}$  em  $\mathfrak{F}$  não fosse denso, existe  $A \subseteq t_0(\emptyset) \setminus \overline{\bigcup \mathcal{F}}$ . Assim,  $t_1(A) \subseteq A$  e  $\mathcal{F} \cup \{A\}$  estenderia  $\mathcal{F}$ .

A seguir podemos tomar para  $(A_0) \in \mathcal{A}_1$  um conjunto  $\mathcal{A}_2(A_0)$  tal que os elementos de  $\mathcal{A}_2(A_0)$  são da forma  $(A_0, A)$  e  $A \subseteq t_1(A_0)$  e  $\{t_2(A_0, A) : (A_0, A) \in \mathcal{A}_2(A_0)\}$  é denso e dois a dois disjuntos em  $t_1(A_0)$ . Tal conjunto existe usando maximalidade no conjunto  $\{\mathcal{F} \subseteq \{t_2(A_0, A) : A \subseteq t_1(A_0), A \text{ aberto}\} : \mathcal{F} \text{ são dois a dois disjuntos}\}$ .

Tome  $\mathcal{A}_2 = \bigcup \{\mathcal{A}_2(A_0) : A_0 \in \mathcal{A}_0\}$ . Então  $\{t_2(A_0, A) : (A_0, A) \in \mathcal{A}_2\}$  é densa em  $t_0(\emptyset)$ . Para cada  $(A_0, A_1) \in \mathcal{A}_2$  podemos definir  $\mathcal{A}_3(A_0, A_1)$  como conjuntos da forma  $(A_0, A_1, A)$  com  $A \subseteq t_2(A_0, A_1)$  tal que  $\{t_3(A_0, A_1, A) : (A_0, A_1, A) \in \mathcal{A}_3(A_0, A_1)\}$  é denso e dois a dois disjuntos em  $t_2(A_0, A_1)$ . Então tome  $\mathcal{A}_3 = \bigcup_{(A_0, A_1) \in \mathcal{A}_2} \mathcal{A}_3(A_0, A_1)$ . Então  $\{t_3(A_0, A_1, A_2) : (A_0, A_1, A_2) \in \mathcal{A}_3\}$  é denso em  $t_0(\emptyset)$  e dois a dois disjuntos. Podemos proceder assim indutivamente para todo  $n \in \omega$ .

Defina  $U_n = \bigcup \{t_{n+1}(A_0, \dots, A_{n-1}) : (A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{A}_n\}$ . Então  $U_n$  é denso em  $U$  para cada  $n$ . Assim  $V_n = U_n \cup X \setminus \overline{U}$  é um aberto denso em  $X$ . Pela propriedade de Baire, temos que existe  $y \in U \cap \bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ . Assim, para cada  $n \in \omega$  existe  $(A_{n,0}, \dots, A_{n,n}) \in \mathcal{A}_n$  tal que  $y \in t_{n+1}(A_{n,0}, \dots, A_{n,n-1})$ . Se  $m > n$  temos que  $y \in t_{n+1}(A_{m,0}, \dots, A_{m,n-1})$ . Assim,  $t_{n+1}(A_{n,0}, \dots, A_{n,n-1}) = t_{n+1}(A_{m,0}, \dots, A_{m,n-1})$ . Logo,  $(A_{n,0}, \dots, A_{n,n-1}) = (A_{m,0}, \dots, A_{m,n-1})$ . Para cada  $n$  tome  $A_n$  tal que  $A_n = A_{m,n}$  para algum (todo)  $m > n$ .

Assim,  $(A_n : n \in \omega)$  é uma  $t$ -sequência tal que  $y \in A_n$  para cada  $n \in \omega$  (pois  $y \in t_{n+2}(A_0, \dots, A_n) \subseteq A_n$ ).

Portanto  $y \in \bigcap_{n \in \omega} A_n$  e  $t$  não é uma estratégia vencedora.

**(Volta.)** Suponha que  $\beta$  não possui estratégia vencedora e seja  $\{U_n : n \in \omega\}$  uma família de abertos densos de  $X$ . Seja  $W$  um aberto não vazio de  $X$  e seja  $t_0(\emptyset) = W$ . Supondo jogados  $(A_0, \dots, A_n)$  seja  $t_{n+1}(A_0, \dots, A_n) = A_n \cap U_n$ . Como  $A_n$  é aberto não vazio e  $U_n$  é aberto denso, segue que  $A_n \cap U_n \subseteq A_n$  é um aberto não vazio.

Assim,  $t$  é uma estratégia para  $\beta$ . Como  $t$  não é uma estratégia vencedora, existe uma partida válida para a estratégia  $t$  em que  $\alpha$  ganha. Assim, existe  $((A_n, B_n) : n \in \omega)$  tal que  $A_0 \subseteq B_0 \subseteq W$ ,  $A_{n+1} \subseteq B_{n+1} \subseteq A_n \cap U_n$  com  $W \cap \bigcap_{n \in \omega} U_n \supseteq \bigcap_{n \in \omega} A_n \neq \emptyset$ . Assim temos que  $\bigcap_{n \in \omega} U_n$  é denso em  $X$ .  $\square$

Note que no caso de um espaço métrico completo ou de compacto, podemos construir uma árvore e cada ‘caminho’ (na verdade é chamado de ramo) que seguirmos na árvore, teremos um ponto na intersecção dos abertos densos. No caso do espaço de Baire, sabemos que existe algum caminho que vai ter algum ponto. Isso vai se refletir na hora de definir um estratégia em  $X$  para mostrar que o produto de um Baire  $X$  por um espaço hereditariamente Baire  $Y$  é Baire.

### 34.3 Produto de Baire com métrico hereditariamente Baire.

A ideia seria que dada uma família de abertos densos, vamos encontrar um ponto  $x$  tal que  $\{x\} \times Y$  mantém informações suficientes para que possamos usar a propriedade de Baire de  $Y$ . Isso na verdade não pode ser garantido para  $Y$ , mas para algum  $Z$  enumerável, construído indutivamente a partir de conjuntos finitos. Como a propriedade hereditariamente de Baire é para fechados, esse  $Z$  vai ser construído e é utilizado Baire em  $\overline{Z}$ .

Se tentarmos todas as possibilidades de partidas sabemos que em alguma delas  $\alpha$  irá ganhar, assim temos que montar uma estratégia que dê uma informação que queremos independente da  $t$ -sequência vencedora de  $\alpha$ . Para isso, vai ser usado o próximo lema:

**Lema 34.4.** Seja  $X$  um espaço topológico, seja  $(Y, d)$  um espaço métrico e seja  $O$  um aberto denso de  $X \times Y$ . Então dado um conjunto finito  $Z$  de  $Y$ ,  $\epsilon > 0$  e um aberto não vazio  $U$  de  $X$ , existe um finito  $Y'$  de  $Y$  e um aberto não vazio  $W$  de  $U$  tal que

- i) para cada  $z \in Z$  existe  $y \in Y'$  com  $d(y, z) < \epsilon$ .
- ii)  $W \times Y' \subseteq O$ .

*Demonstração.* Enumere  $Z = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$  e tome  $W_0 = X$ . Então  $W_0 \times B_d(z_0, \epsilon)$  é um aberto não vazio, logo

$(W_0 \times B_d(z_0, \epsilon)) \cap U \neq \emptyset$ . Tome  $(x_0, y_0) \in (X \times B_d(z_0, \epsilon)) \cap U$  e seja  $W_1 \times B_d(y_0, \epsilon_0)$  tal que  $(x_0, y_0) \in W_1 \times B_d(y_0, \epsilon_0) \subseteq U$ . Em particular, temos que  $W_1 \times \{y_0\} \subseteq U$ .

A seguir,  $W_1 \times B_d(z_1, \epsilon)$  é um aberto não vazio, logo existe  $(x_1, y_1) \in W_1 \times B_d(z_1, \epsilon) \cap U$ . Assim, existe  $W_2$  e  $\epsilon_1$  tal que  $(x_1, y_1) \in W_2 \times B_d(y_1, \epsilon_1) \subseteq U$ . Note que  $d(y_1, z_1) < \epsilon$ . Assim  $W_2 \times \{y_0, y_1\} \subseteq (W_1 \times \{y_0\}) \cup W_2 \times \{y_1\} \subseteq U$ .

Podemos assim construir indutivamente  $W_{i+1}$  e  $y_i$ . Ao final da indução sobre  $n$ , teremos  $W_n$  tal que  $W_n \times \{y_0, \dots, y_{n-1}\} \subseteq U$  com  $d(y_i, z_i) < \epsilon$  para todo  $i < n$ . Tome  $W := W_n$ .  $\square$

A ideia básica é usar encontrar um ponto  $x \in X$  e encontrar um fechado  $\bar{Z}$  de  $Y$  tal que a propriedade de Baire é aplicada em  $\bar{Z}$ . O  $Z$  vai ser tal que  $(\{x\} \times V) \cap Z \cap O_n$  é denso em  $(\{x\} \times V) \cap Z$ , e assim,  $(\{x\} \times V) \cap \bar{Z} \cap O_n$  é aberto denso em podemos usar a propriedade de Baire em  $\{x\} \times \bar{Z}$ . Para chegar a  $Z$ , é feito uma união crescente de finitos. Para que o ponto  $(\{x\} \times Y) \cap Z$  tenha pontos para a densidade, temos que colocar isso na estratégia de  $\beta$  para que qualquer ponto  $x$  que testemunhe a vitória de  $\alpha$  satisfaça a condição acima e pra isso vai ser usado *ii*). O  $Z$  não é fixo, depende do possível  $x$  e vai ser também construído em árvore. Assim teremos junto com a construção da estratégia a construção da aproximação de  $Z$  associada à jogada.

**Teorema 34.5.** Seja  $X$  um espaço de Baire e  $(Y, d)$  um espaço métrico hereditariamente Baire. Então  $X \times Y$  é um espaço de Baire.

*Demonstração.* Seja  $(O_n : n \in \omega)$  uma seqüência de abertos densos de  $X \times Y$ . Vamos assumir sem perda de generalidade que  $O_{n+1} \subseteq O_n$  para todo  $n \in \omega$ . Precisamos mostrar que  $\bigcap_{n \in \omega} O_n$  é denso em  $X \times Y$ . Para isto, vamos mostrar que se  $U \times V$  é um aberto básico não vazio do produto  $X \times Y$  então  $\bigcap_{n \in \omega} O_n \cap (U \times V) \neq \emptyset$ . Iremos usar a caracterização da propriedade de Baire usando jogos. Vamos definir uma estratégia (necessariamente não vencedora)  $t = (t_n : n \in \omega)$  para  $\beta$  em  $X$ .

**Passo 0.** Escolha  $y \in V$  e  $U_\emptyset \subseteq U$  tal que  $U_\emptyset \times \{y\} \subseteq O_0$ . Note que isto é possível pois  $(U \times V) \cap O_0 \neq \emptyset$ . Seja  $Y_\emptyset := \{y\}$ ,  $Z_\emptyset := Y_\emptyset$  e defina  $t_0(\emptyset) = U_\emptyset$ .

**Passo 1.** Para cada jogada  $(A_0)$  de  $\alpha$  em resposta a  $t_0(\emptyset)$ , podemos aplicar o lema acima para encontrar um conjunto finito  $Y_{(A_0)}$  de  $V$  e um subconjunto  $U_{(A_0)}$  de  $A_0$  tal que

*i)* para cada  $z \in Z_\emptyset$  existe um  $y \in Y_{(A_0)}$  tal que  $d(y, z) < \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ ;

*ii)*  $U_{(A_0)} \times Y_{(A_0)} \subseteq O_1$ .

Então definimos

*iii)*  $Z_{(A_0)} := Z_\emptyset \cup Y_{(A_0)}$  e

*iv)*  $t_1(A_0) := U_{(A_0)}$ .

Vamos supor que a estratégia  $t$  está definida até  $n$ , com  $Y_{(A_0, \dots, A_j)}$  e  $Z_{(A_0, \dots, A_j)}$  subconjuntos de  $V$  definidos, um aberto não vazio  $U_{(A_0, \dots, A_j)} \subseteq A_j$  para toda jogada  $(A_0, \dots, A_j)$  uma possível jogada de  $\alpha$  em resposta a  $t_j$  com  $j < n$  tal que

*i)* para cada  $z \in Z_{(A_0, \dots, A_{j-1})}$  existe  $y \in Y_{(A_0, \dots, A_j)}$  tal que  $d(y, z) < \frac{1}{2^j}$ ;

*ii)*  $U_{(A_0, \dots, A_j)} \times Y_{(A_0, \dots, A_j)} \subseteq O_{j+1}$ ;

*iii)*  $Z_{(A_0, \dots, A_j)} = Z_{(A_0, \dots, A_{j-1})} \cup Y_{(A_0, \dots, A_j)}$  e

*iv)*  $t_{j+1}(A_0, \dots, A_j) := U_{(A_0, \dots, A_j)}$ .

**Passo  $n + 1$ .**

Seja  $A_n$  uma possível resposta de  $\alpha$  a  $t_n(A_0, \dots, A_{n-1})$ . Aplique o lema em  $Z_{(A_0, \dots, A_{n-1})}$  e  $U_{(A_0, \dots, A_{n-1})}$  para obter  $U_{(A_0, \dots, A_n)}$  e  $Y_{(A_0, \dots, A_n)}$  tal que

*i)* para cada  $z \in Z_{(A_0, \dots, A_{n-1})}$  existe  $y \in Y_{(A_0, \dots, A_n)}$  tal que  $d(y, z) < \frac{1}{2^n}$  e

*ii)*  $U_{(A_0, \dots, A_n)} \times Y_{(A_0, \dots, A_n)} \subseteq O_{n+1}$  e  $U_{(A_0, \dots, A_n)} \subseteq U_{(A_0, \dots, A_{n-1})}$ .

Com isto, definimos

*iii)*  $Z_{(A_0, \dots, A_n)} = Z_{(A_0, \dots, A_{n-1})} \cup Y_{(A_0, \dots, A_n)}$  e

*iv)*  $t_{n+1}(A_0, \dots, A_n) := U_{(A_0, \dots, A_n)}$ .

Assim, a indução está satisfeita.

Como  $t$  é uma estratégia para  $\beta$  em  $X$ , existe  $(A_n : n \in \omega)$  uma  $t$ -seqüência para a qual  $\alpha$  vence. Seja  $x \in \bigcap_{n \in \omega} A_n$ .

Seja  $Z = \bigcup_{n \in \omega} Z_{(A_0, \dots, A_{n-1})}$ . Vamos verificar que  $(\{x\} \times \bar{Z}) \cap (\{x\} \times V) \cap O_n$  é denso em  $(\{x\} \times \bar{Z}) \cap (\{x\} \times V)$ .



De fato, dado  $\epsilon > 0$  e  $z \in \overline{Z}$ , existe  $z' \in Z$  tal que  $d(z, z') < \frac{\epsilon}{2}$ . Então existe  $m$  tal que  $z' \in Z_{(A_0, \dots, A_{m-1})}$ . Tome  $k > \max\{m, n\}$  tal que  $\frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2}$ . Então existe  $y \in Y_{(A_0, \dots, A_k)}$  tal que  $d(z', y) < \frac{1}{2^k}$ ,  $(x, y) \in U_{(A_0, \dots, A_k)} \times Y_{(A_0, \dots, A_k)} \subseteq O_{k+1} \subseteq O_n$ . Assim  $(x, y) \in (\{x\} \times Z) \cap (\{x\} \times V) \cap O_n$  com  $d(y, z) < \epsilon$ . Assim, está provada que  $(\{x\} \times \overline{Z}) \cap (\{x\} \times V) \cap O_n$  é denso em  $(\{x\} \times \overline{Z}) \cap (\{x\} \times V)$ .

Como  $\{x\} \times \overline{Z}$  é Baire e  $(\{x\} \times (\overline{Z} \cap V)) \cap O_n$  é denso em  $(\{x\} \times (\overline{Z} \cap V))$  com  $\{x\} \times (\overline{Z} \cap V)$  aberto em  $\{x\} \times \overline{Z}$ , segue que  $(\{x\} \times (\overline{Z} \cap V)) \cap \bigcap_{n \in \omega} O_n \neq \emptyset$ . Logo,  $(U \times V) \cap \bigcap_{n \in \omega} O_n \neq \emptyset$ . Portanto  $\bigcap_{n \in \omega} O_n$  é denso em  $X \times Y$ .  $\square$

includeaula36

# Capítulo 35

## Alguns tipos de construção.

Métrica de Haudorff. Hiperespaços de Vietoris. Teorema de Alexander. MAD families e  $\psi$ -espaços.

### 35.1 ‘Exponenciação’.

Existem algumas topologias que são definidas nos subconjuntos fechados de um espaço topológico. Vamos apenas definir a topologia de Vietoris, que é para os subespaços fechados não vazios de  $X$ . A notação para alguns autores é  $2^X$ , mas iremos usar  $CL(X)$ .

#### 35.1.1 A topologia de Vietoris.

**Definição 35.1.** Dado um espaço topológico  $X$ . Dado  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{n-1}\}$  uma família de abertos não vazios, denotamos por  $\langle \mathcal{U} \rangle = \langle U_0, \dots, U_{n-1} \rangle$  o conjunto dos fechados não vazios  $F$  de  $X$  tais que

- a)  $F \cap U_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ;
- b)  $F \subseteq \bigcup_{i < n} U_i$ .

**Definição 35.2.** Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $CL(X)$  o conjunto de todos os subespaços fechados de  $X$ .

A topologia de Vietoris de  $CL(X)$  é a topologia gerada pela base  $\mathcal{B} = \{\langle \mathcal{U} \rangle : \mathcal{U} \text{ família finita de abertos não vazios de } X\}$ .

**Proposição 35.3.** O conjunto  $\mathcal{B}$  é de fato uma base para uma topologia.

*Demonstração.* Temos que  $CL(X) = \langle \{X\} \rangle$ , assim a primeira propriedade para base está satisfeita.

Dado  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  duas famílias finitas de abertos tais que  $\langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle \neq \emptyset$ .

Seja  $W' = (\bigcup \mathcal{U}) \cap (\bigcup \mathcal{V})$  e seja  $\mathcal{W} = \{U \cap W' : U \in \mathcal{U}\} \cup \{V \cap W' : V \in \mathcal{V}\}$ .

Temos que se  $F \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$  se e somente se  $U \cap F \neq \emptyset$  para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $F \cap V \neq \emptyset$  para cada  $V \in \mathcal{V}$ ,  $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$  e  $F \subseteq \bigcup \mathcal{V}$  se e somente se  $U \in \mathcal{U}$ ,  $F \cap V \neq \emptyset$  para cada  $V \in \mathcal{V}$  e  $F \subseteq W'$  se e somente se  $F \cap W' \neq \emptyset$  para cada  $W' \in \mathcal{W}$  e  $F \subseteq \bigcup \mathcal{W}$  se e somente se  $F \in \langle \mathcal{W} \rangle$ . Assim, a segunda propriedade para base de abertos para uma topologia está satisfeita.  $\square$

**Proposição 35.4.** Dado  $X$  um espaço topológico  $X$ , temos que  $CL(X)$  é  $T_0$ .

*Demonstração.* Sejam  $F$  e  $G$  dois fechados distintos. Então  $F \setminus G \neq \emptyset$  ou  $G \setminus F \neq \emptyset$ . Se  $F \setminus G \neq \emptyset$  então  $F \in \langle X \setminus G, X \rangle$  e  $G \notin \langle X \setminus G, X \rangle$ . Se  $G \setminus F \neq \emptyset$  então  $G \in \langle X \setminus F, X \rangle$  e  $F \notin \langle X \setminus F, X \rangle$ .  $\square$

*Note que se  $X$  não é  $T_0$ ,  $CL(X)$  pode ser  $T_0$  por ter pouco elementos.*

**Proposição 35.5.**  $X$  é um espaço  $T_1$  se e somente se  $CL(X)$  com a topologia de Vietoris é  $T_1$ .

*Demonstração.* Assuma que  $X$  é  $T_1$  e seja  $F$  em  $CL(X)$ . Tome  $G \in CL(X)$  distinto de  $F$ . Se  $G \setminus F \neq \emptyset$  então  $\langle X, X \setminus F \rangle$  é um vizinhança de  $G$  que não contém  $F$ .

Caso contrário, temos que  $F \setminus G \neq \emptyset$ . Tome  $y \in F \setminus G$ . Como  $X$  é  $T_1$ , segue que  $X \setminus \{y\}$  é um aberto contendo  $G$ . Assim,  $G \in \langle X \setminus \{y\} \rangle$  e  $F \notin \langle X \setminus \{y\} \rangle$ .  $\square$

**Proposição 35.6.** Se  $X$  é  $T_1$  então  $Z = \{\{x\} : x \in X\}$  é homeomorfo a  $X$ . Se  $X$  é  $T_2$  então  $Z$  é um subconjunto fechado de  $CL(X)$ .

*Demonstração.* Precisamos de  $T_1$  para que os pontos sejam fechados e assim  $\{x\} \in CL(X)$ .

Vamos considerar a função  $\phi$  entre  $X$  e  $Z$  tal que  $x \mapsto \{x\}$ . Claramente  $\phi$  é uma bijeção. Se  $U$  é aberto em  $X$ , temos que  $\phi[U] = \langle U \rangle \cap Z$ . Assim,  $\phi$  é uma função aberta. Por outro lado, se  $\mathcal{U}$  é uma família não vazia de abertos não vazios com  $\emptyset \neq \langle \mathcal{U} \rangle \cap Z$  então  $\langle \mathcal{U} \rangle \cap Z = \langle \bigcap \mathcal{U} \rangle \cap Z = \phi[\bigcap \mathcal{U}]$  e como  $\phi$  é bijeção, temos que  $\phi^{-1}[\langle \mathcal{U} \rangle \cap Z] = \bigcap \mathcal{U}$ . A intersecção finita de abertos de  $X$  e portanto a imagem inversa de  $\langle \mathcal{U} \rangle$  é um aberto.

Assuma que  $X$  é  $T_2$ . Vamos verificar que  $Z := \{\{x\} : x \in X\}$  é fechado. Seja  $F$  um fechado que não é um unitário. Então podemos tomar dois pontos de  $F$  e vizinhanças disjuntas deles,  $U$  e  $V$  (assim,  $U \cap F \neq \emptyset$  e  $U \cap V = \emptyset$ ). Assim,  $F \in \langle U, V, X \rangle$ . Como  $U$  e  $V$  são disjuntos, temos que  $Z \cap \langle U, V, X \rangle = \emptyset$ . Assim,  $CL(X) \setminus Z$  é aberto e  $Z$  é fechado.  $\square$

**Corolário 35.7.** Se  $CL(X)$  é  $T_i$  com  $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$  então  $X$  é  $T_i$ .

*Demonstração.* Se  $CL(X)$  é  $T_i$  para  $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$  então  $CL(X)$  é  $T_1$ . Assim,  $X$  é  $T_1$ . Logo  $X$  é homeomorfo a um subespaço de  $CL(X)$  e como  $T_i$  é uma propriedade herediária, segue que  $X$  é  $T_i$ .

Se  $CL(X)$  é  $T_4$  então  $CL(X)$  é  $T_2$  e pelo visto acima,  $X$  é  $T_2$ . Assim,  $X$  é homeomorfo a um subespaço fechado de  $CL(X)$ . Como normalidade é preservada por fechados, segue que  $X$  é normal. Assim,  $X$  é  $T_4$ .  $\square$

**Proposição 35.8.** Se  $X$  é  $T_1$  então  $F(X) = \{F \in CL(X) : F \text{ é finito}\}$  é denso em  $CL(X)$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U}$  uma família finita de abertos tais que  $\langle \mathcal{U} \rangle \neq \emptyset$ . Para cada  $U \in \mathcal{U}$ , fixe  $x_U \in U$ . Como  $X$  é  $T_1$  temos que  $F = \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$  é um fechado. Claramente temos que  $F \in \langle \mathcal{U} \rangle$ . Assim,  $F(X) \cap \langle \mathcal{U} \rangle \neq \emptyset$ . Como  $F(X)$  intercepta todo aberto da base, segue que  $F(X)$  é denso em  $CL(X)$ .  $\square$

**Proposição 35.9.**  $X$  é  $T_3$  se e somente se  $CL(X)$  é  $T_2$ .

*Demonstração. (Ida.)* Suponhamos que  $X$  é  $T_3$ . Sejam  $F$  e  $G$  dois fechados não vazios distintos de  $X$ . Então assumamos sem perda de generalidade que  $F \setminus G \neq \emptyset$  e tome  $y \in F \setminus G$ . Pela regularidade, tome  $W$  uma vizinhança aberta de  $y$  tal que  $\overline{W} \cap G = \emptyset$ . Temos que  $\langle W, X \rangle$  é uma vizinhança aberta de  $F$  e  $\langle X \setminus \overline{W} \rangle$  é uma vizinhança aberta de  $G$ .

Vamos verificar que  $\langle W, X \rangle \cap \langle X \setminus \overline{W} \rangle$  é o conjunto vazio. Se  $A \in \langle W, X \rangle \cap \langle X \setminus \overline{W} \rangle$  então temos que  $A \cap W \neq \emptyset$  e  $A \subseteq X \setminus \overline{W}$ , o que implicaria que  $A = \emptyset$ , contradição.

**(Volta.)** Suponhamos que  $CL(X)$  é  $T_2$ , então  $X$  é  $T_2$  e os unitários de  $x$  são conjuntos fechados.

Seja  $x \in X$  e  $F$  um fechado de  $X$  tal que  $x \notin F$ . A tentativa mais imediata é usar que  $\{x\}$  e  $F$  possuem vizinhanças disjuntas e tentar usar isto para obter os abertos de  $X$ , porém isto é insuficiente. Seja  $G := \{x\} \cup F$ . Então  $G$  e  $F$  são elementos distintos de  $CL(X)$  e possuem vizinhanças abertas disjuntas  $\langle \mathcal{U} \rangle$  e  $\langle \mathcal{V} \rangle$  em  $CL(X)$ .

Seja  $V := \bigcup \mathcal{V}$ . Como  $F \in \langle \mathcal{V} \rangle$ , segue que  $F \subseteq V$ . Como  $G \cap V' \supseteq G \cap V' \neq \emptyset$  para cada  $V' \in \mathcal{V}$  e  $G \notin \langle \mathcal{V} \rangle$ , segue que  $G \not\subseteq V$ . Assim,  $x \notin V$ . Note que isto não é suficiente pois necessitamos de uma vizinhança de  $x$  que não intercepta  $V$ .

Seja  $\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} : U \cap F = \emptyset\}$  e  $\mathcal{U}_1 = \{U \in \mathcal{U} : U \cap F \neq \emptyset\}$ . Claramente temos  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ . Afirmamos que  $\mathcal{U}_0 \neq \emptyset$ . De fato, como  $F \notin \langle \mathcal{U} \rangle$ , segue que existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $U \cap F = \emptyset$  (já que a condição  $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$  está satisfeita.)

Afirmamos que existe  $U_0 \in \mathcal{U}_0$  tal que  $U_0 \cap V = \emptyset$ . Por contradição, suponha que  $U \cap V \neq \emptyset$  para todo  $U \in \mathcal{U}_0$ . Tome  $x_U \in U \cap V$  para cada  $U \in \mathcal{U}_0$ . Então  $H := F \cup \{x_U : U \in \mathcal{U}_0\} \in CL(X)$ . Temos que  $H \cap U \supseteq F \cap U \neq \emptyset$  se  $U \in \mathcal{U}_1$  e  $H \cap U \supseteq \{x_U\} \neq \emptyset$  para cada  $U \in \mathcal{U}_0$ . Além disso,  $H \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \cup \bigcup \mathcal{U}_1 = \bigcup \mathcal{U}$ . Assim,  $H \in \langle \mathcal{U} \rangle$ . Por outro lado,  $H \cap V' \supseteq F \cap V' \neq \emptyset$  para cada  $V' \in \mathcal{V}$  e por definição  $H \subseteq V = \bigcup \mathcal{V}$ . Assim,  $H \in \langle \mathcal{V} \rangle$ . Logo  $H \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$ . Como  $U_0 \in \mathcal{U}_0$ , temos que  $\emptyset \neq G \cap U_0 = (\{x\} \cup F) \cap U_0 = (\{x\} \cap U_0) \cup (F \cap U_0) \subseteq \{x\}$ . Assim,  $x \in U_0$ . Por outro lado, temos que  $F \subseteq V$ , assim  $X$  é regular. Como  $X$  é  $T_1$  então  $X$  é  $T_3$ .  $\square$

Para a demonstração abaixo iremos usar uma sub-base que definiremos a seguir.

**Definição 35.10.** Seja  $X$  um espaço topológico. Então  $U^+ = \{A \in CL(X) : A \subseteq U\} = \langle U \rangle$  e  $U^- = \{A \in CL(X) : A \cap U \neq \emptyset\} = \langle U, X \rangle$ .

**Proposição 35.11.**  $\{U^+ : U \text{ aberto em } X\} \cup \{U^- : U \text{ aberto em } X\}$  é uma subbase da topologia de Vietoris.

*Demonstração.* Como visto acima, temos que  $U^+$  e  $U^-$  são abertos. Dado  $\mathcal{U}$  uma família finita de abertos de  $X$ , seja  $V = \bigcup \mathcal{U}$ . Então temos que  $V^+ \cap \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U^- = \langle \mathcal{U} \rangle U$ . De fato, se  $A \in V^+ \cap \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U^-$  se e somente se  $A \subseteq V$  e  $A \cap U \neq \emptyset$  para cada  $U \in \mathcal{U}$  se e somente se  $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$ .  $\square$

**Proposição 35.12.** Se  $X$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$  então  $CL(X)$  é funcionalmente Hausdorff, ou seja, existe uma função contínua que separa pontos.

*Demonstração.* Sejam  $F$  e  $G$  dois fechados de  $X$ . Como  $F$  e  $G$  são distintos, temos que  $F \setminus G \neq \emptyset$  ou  $G \setminus F \neq \emptyset$ . Se  $x \in F \setminus G$ , pela regularidade de  $X$  existe uma função contínua tal que  $f(x) = 0$  e  $f[G] = \{1\}$ . Tome  $\phi : CL(X) \rightarrow [0, 1]$  dada por  $\phi(A) = \inf f[A]$ . Primeiro, temos que  $\phi(F) = 0$ , pois,  $f(x) = 0$ . Temos também que  $\phi(G) = 1$ , pois  $f[G] = \{1\}$ .

Para ver a continuidade de  $\phi$ , dado  $\epsilon > 0$  e  $A \in CL(X)$ , tome  $\mathcal{W} = \{X \setminus f^{-1}[0, \phi(A) - \frac{\epsilon}{2}], f^{-1}[\phi(A) - \frac{\epsilon}{2}, \phi(A) + \frac{\epsilon}{2}]\}$ . Temos então que  $A \in \langle \mathcal{W} \rangle$ . Além disso, se  $B \in \langle \mathcal{W} \rangle$ , temos que  $\inf f[B] \geq \phi(A) - \frac{\epsilon}{2}$  e  $\inf B \leq \phi(A) + \frac{\epsilon}{2}$ . Assim,  $\phi(B) \in [\phi(A) - \epsilon, \phi(A) + \epsilon]$ . Logo  $\phi$  é contínua em  $A$ .

No caso em que  $x \in G \setminus F \neq \emptyset$ , tome  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f[F] = \{0\}$  e  $f(x) = 1$  e tome  $\psi(A) = \sup f[A]$ . Então  $\psi(F) = 0$  e  $\psi(G) = 1$ . Para ver a continuidade de  $\psi$ , dado  $\epsilon > 0$  e  $A \in CL(X)$ , tome  $\mathcal{W} = \{X \setminus f^{-1}[\psi(A) + \frac{\epsilon}{2}, 1], f^{-1}[\psi(A) - \frac{\epsilon}{2}, \psi(A) + \frac{\epsilon}{2}]\}$ . Dado  $B \in \langle \mathcal{W} \rangle$  temos que  $\sup f[B] \leq \psi(A) + \frac{\epsilon}{2}$  e  $\sup f[B] \geq \psi(A) - \frac{\epsilon}{2}$ . Assim o resto do argumento é similar a de  $\phi$ .  $\square$

**Proposição 35.13.**  $X$  é  $T_4$  se e somente se  $CL(X)$  é  $T_3$  se e somente se  $CL(X)$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$ .

*Demonstração.* Para isto, basta mostrarmos que  $X T_4$  implica que  $CL(X)$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$  e que se  $CL(X)$  é  $T_3$  então  $X$  é  $T_4$ .

**Primeiro, vamos supor que  $CL(X)$  é  $T_3$ .** Em particular,  $X$  é  $T_3$ . Sejam  $F$  e  $G$  dois fechados disjuntos de  $X$ . Seja  $H = \{G \cup \{x\} : x \in F\}$ .

Afirmamos que  $H$  é um fechado em  $CL(X)$ . De fato, se  $A$  é um fechado de  $X$  que não pertence a  $H$  então temos três possibilidades:

- 1)  $G$  não é subconjunto de  $A$ . Neste caso, tome  $y \in G \setminus A$  e  $U$  um aberto contendo  $A$  tal que  $y \notin U$ . Então  $\langle U \rangle$  é uma vizinhança de  $A$  tal que  $H \cap \langle U \rangle = \emptyset$ .
- 2)  $A$  não intercepta  $F$ . Neste caso tome um  $z \in A$  e uma vizinhança  $V$  de  $z$  tal que  $V \cap F = \emptyset$ . Então  $\langle V, X \rangle$  é uma vizinhança de  $A$  disjunta de  $H$ .
- 3)  $A$  intercepta  $G$  em mais de um ponto. Neste caso, tome dois pontos distintos  $y, z \in A \cap G$  e tome vizinhanças disjuntas  $U$  e  $V$  de  $y$  e  $z$  respectivamente. Então  $\langle U, V, X \rangle$  é uma vizinhança de  $A$  que é disjunta de  $H$ .

Assim,  $H$  é fechado. Claramente  $G \notin H$ , assim podemos aplicar a regularidade de  $CL(X)$  para  $G$  e  $H$ .

Como  $G$  é um ponto de  $CL(X)$ , existe  $\mathcal{U}$  uma família finita de abertos tais que  $G \in \langle \mathcal{U} \rangle$  e  $\overline{\langle \mathcal{U} \rangle}^{CL(X)} \cap H = \emptyset$ .

Seja  $U = \bigcup \mathcal{U}$ . Claramente  $G \subseteq U$ . Falta mostrar que  $F \cap \overline{U}^X = \emptyset$ .

Seja  $z \in F$ . Então  $G \cup \{z\} \in H$ . Como  $G \cup \{z\} \notin \overline{\langle \mathcal{U} \rangle}^{CL(X)}$ , segue que existe uma família finita de abertos  $\mathcal{W}$  tal que  $G \cup \{z\} \in \langle \mathcal{W} \rangle$  e  $\langle \mathcal{W} \rangle \cap \langle \mathcal{U} \rangle = \emptyset$ .

Como  $G \in \langle \mathcal{U} \rangle$ , segue que  $G \notin \langle \mathcal{W} \rangle$ . Como  $G \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ , segue que  $\mathcal{W}' = \{W \in \mathcal{W} : W \cap G = \emptyset\}$  é não vazio. Como  $G \cup \{z\} \in \langle \mathcal{W} \rangle$ , segue que  $z \in W := \bigcap \mathcal{W}'$ . Se  $W \cap U \neq \emptyset$  então existe  $y \in W \cap U$ . Assim,  $G \cup \{y\} \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{W} \rangle$ , que é uma contradição. Assim,  $W \cap U = \emptyset$ . Como  $W$  é uma vizinhança de  $z$  segue que  $z \notin \overline{U}^X$ . Como  $z \in F$  é arbitrário, segue que  $F \cap \overline{U}^X = \emptyset$ .

**Para a recíproca, assumamos que  $X$  é normal.** Fixe  $F \in CL(X)$ . Dada  $U$  tal que  $F \in U^+$ , pela normalidade tome  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f[F] = 0$  e  $f[X \setminus U] = \{1\}$ . Então, dada  $\psi$  tal que  $\psi(A) = \sup f[A]$  para cada  $A \in CL(X)$ , temos que  $\psi(F) = 0$  e  $\psi(A) = 1$  para todo  $A \notin U^+$ , pois  $A \setminus U \neq \emptyset$ . Como visto anteriormente  $\psi$  é contínua.

Dada  $U$  tal que  $F \in U^-$ , tome  $x \in F \cap U$  e considere uma função  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f(x) = 0$  e  $f[X \setminus U] = \{1\}$ . Tome  $\phi = \inf f[A]$  para cada  $A \in CL(X)$ . Como visto anteriormente,  $\phi$  é contínua. Agora temos que  $\phi(F) = 0$  (pois,  $f(x) = 0$  e  $x \in F$ ) e  $\phi(A) = 1$  para cada  $A \notin U^-$  (se  $A \in U^-$  então  $A \cap U = \emptyset$ , ou seja  $A \subseteq X \setminus U$ ).

Como temos as funções contínuas para as vizinhanças subbásicas de  $F$ , segue que  $CL(X)$  é completamente regular em  $F$ . Como  $F$  é arbitrário, segue que  $CL(X)$  é completamente regular.  $\square$

## Capítulo 36

# Algumas referências aleatórias de topologia geral e conjuntista feita no Brasil.

Quem tiver interesse, o Prof. Renan Maneli Mezabarba da UFES está escrevendo um texto com diversos tópicos que não são cobertos neste texto:

[https://drive.google.com/file/d/1SgLc-kd0Ti6n\\_qz7w-5QH0wns8HHZyWI/view](https://drive.google.com/file/d/1SgLc-kd0Ti6n_qz7w-5QH0wns8HHZyWI/view)

Pelo menos um dos autores citados em cada referência abaixo foram indiretamente ligados ao grupo de topologia geral do IME-USP, liderado pela Prof. Ofélia Teresa Alas. Todas as referências são de 2017 até 2021 para ilustrar o que tem sido feito em anos recentes.

Nem todos os artigos abaixo estão disponíveis mesmo via CAPES Cafe, mas alguns tem uma versão próxima à final no arXiv. As referências foram tiradas do Mathscinet (*no caso MR=Math Review*) que podem ser acessadas via CAPES Cafe.

MR4243404 Prelim Bellini, Matheus Koveroff; Rodrigues, Vinicius de Oliveira; Tomita, Artur Hideyuki; Forcing a classification of non-torsion Abelian groups of size at most  $2c$  with non-trivial convergent sequences. *Topology Appl.* 296 (2021), 107684.

MR4186077 de Oliveira Rodrigues, Vinicius; dos Santos Ronchim, Victor Almost-normality of Isbell-Mrówka spaces. *Topology Appl.* 288 (2021), 107470, 13 pp.

MR4229481 Bellini, Matheus Koveroff; de Oliveira Rodrigues, Vinicius; Tomita, Artur Hideyuki; On countably compact group topologies without non-trivial convergent sequences on  $\mathbb{Q}(\kappa)$  for arbitrarily large  $\kappa$  and a selective ultrafilter. *Topology Appl.* 294 (2021), 107653.

MR4076721 Alas, Ofelia T.; Junqueira, Lucia R.; Passos, Marcelo D.; Wilson, Richard G. On cellular-compactness and related properties. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 114 (2020), no. 2, Paper No. 101, 13 pp.

MR4054280 Alas, O. T.; Junqueira, L. R.; Wilson, R. G. Lindelöf domination versus  $\omega$ -domination of discrete subsets. *Acta Math. Hungar.* 160 (2020), no. 1, 109–118.

MR4150856 Garcia-Ferreira, S.; Tomita, A. H. Selectively pseudocompact groups and p-compactness. *Topology Appl.* 285 (2020), 107380, 7 pp.

MR4081069 Aurichi, Leandro; Zdomskyy, Lyubomyr Covering properties of  $\omega$ -mad families. *Arch. Math. Logic* 59 (2020), no. 3-4, 445–452.

MR3942367 Alas, Ofelia T.; Junqueira, Lucia R.; Tkachuk, Vladimir V.; Wilson, Richard G. Star countable spaces and  $\omega$ -domination of discrete subspaces. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 113 (2019), no. 2, 807–818.

MR3924509 Alas, Ofelia T.; Junqueira, Lucia R.; Wilson, Richard G. On linearly H-closed spaces. *Topology Appl.* 258 (2019), 161–171.

MR4013201 Bellini, Matheus Koveroff; Boero, Ana Carolina; Castro-Pereira, Irene; Rodrigues, Vinicius de Oliveira; Tomita, Artur Hideyuki Countably compact group topologies on non-torsion Abelian groups of size continuum with non-trivial convergent sequences. *Topology Appl.* 267 (2019), 106894, 30 pp.

MR3984281 Rodrigues, Vinicius de Oliveira; Tomita, Artur Hideyuki Small MAD families whose Isbell-Mrówka space has pseudocompact hyperspace. *Fund. Math.* 247 (2019), no. 1, 99–108.

MR3958277 Tomita, Artur Hideyuki A van Douwen-like ZFC theorem for small powers of countably compact groups without non-trivial convergent sequences. *Topology Appl.* 259 (2019), 347–364.

MR4011099 Gullo Mercado, Henry Jose; Fiorini Aurichi, Leandro Maximal topologies with respect to a family of discrete subsets. *Topology Appl.* 267 (2019), 106891, 11 pp.

MR3924520 Aurichi, Leandro F.; Dias, Rodrigo R. A minicourse on topological games. *Topology Appl.* 258 (2019), 305–335.

MR3924512 Aurichi, Leandro F.; Mezabarba, Renan M. Bornologies and filters applied to selection principles and function spaces. *Topology Appl.* 258 (2019), 187–201.

MR4011922 da Silva, Samuel G. Reductions between certain incidence problems and the continuum hypothesis. *Rep. Math. Logic No.* 54 (2019), 121–143.

MR3928388 da Silva, Samuel G. On uniformly continuous functions between pseudometric spaces and the axiom of countable choice. *Arch. Math. Logic* 58 (2019), no. 3-4, 353–358.

MR3834837 Ortiz-Castillo, Y. F.; Rodrigues, V. O.; Tomita, A. H. Small cardinals and the pseudocompactness of hyperspaces of subspaces of  $\beta\omega$ . *Topology Appl.* 246 (2018), 9–21.

MR3766565 Ortiz-Castillo, Y. F.; Tomita, A. H. Pseudocompactness and resolvability. *Fund. Math.* 241 (2018), no. 2, 127–142.

MR3831310 Aurichi, L. F.; Bella, A. A definitive improvement of a game-theoretic bound and the long tightness game. *Acta Math. Hungar.* 155 (2018), no. 2, 458–465.

MR3803685 Aurichi, Leandro F.; Zdomskyy, Lyubomyr Internal characterizations of productively Lindelöf spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 146 (2018), no. 8, 3615–3626.

MR3799752 Aurichi, Leandro F.; Bella, Angelo; Dias, Rodrigo R. Tightness games with bounded finite selections. *Israel J. Math.* 224 (2018), no. 1, 133–158.

MR3820876 da Silva, Samuel G. The I-Hurewicz property and bounded families modulo an ideal. *Questions Answers Gen. Topology* 36 (2018), no. 1, 31–38.

MR4014221 Brunner, Andreas B. M.; Mariano, Hugo L.; Pinto, Darllan C.; da Silva, Samuel G. More on categorical forms of the axiom of choice. *South Amer. J. Log.* 4 (2018), no. 2, 351–372.

MR3624475 Alas, Ofelia T.; Wilson, Richard G. Properties related to star countability and star finiteness. *Topology Appl.* 221 (2017), 432–439.

MR3708780 Passos, Marcelo D.; Santana, Heides L.; da Silva, Samuel G. On star covering properties related to countable compactness and pseudocompactness. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 58 (2017), no. 3, 371–382.

MR3619286 Aurichi, Leandro F.; Lara, Dione A. Relations between a topological game and the  $G_\delta$ -diagonal property. *Topology Appl.* 220 (2017), 140–145.

MR3685096 da Silva, Samuel G.; de Paiva, Valeria C. V. Dialectical categories, cardinalities of the continuum and combinatorics of ideals. *Log. J. IGPL* 25 (2017), no. 4, 585–603.

MR3624479 Morgan, Charles J. G.; Rangel, Dimi R.; da Silva, Samuel G. Almost disjoint families and relative versions of covering properties of  $\kappa$ -paracompactness type. *Topology Appl.* 221 (2017), 476–490.

# Referências Bibliográficas