EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

# Cálculo I: Limites (parte 2)

ACH 4532 Cálculo I - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

A2W

# Agenda

1. Cálculo de Limites
2. Limites Infinitos
3. Formas Indeterminadas
4. Limites nos extremos do domínio
5. Limite exponencial fundamental
6. Resumo

Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

# Agenda

1. Cálculo de Limites
2. Limites Infinitos
3. Formas Indeterminadas
4. Limites nos extremos do domínio
5. Limite exponencial fundamental
6. Resumo

Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 1. Cálculo de limites

- **Propriedades de Limites**:

- Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, então:

***O limite da soma, diferença ou produto é a soma, diferença ou produto de cada um dos limites.***

**a)** Propriedade da soma: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

**b)** Propriedade da diferença: $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

**c)** Propriedade do produto: $\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$

**d)** Propriedade do quociente: se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ , então: o limite do quociente é a razão de cada limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

# 1. Cálculo de limites *(continuação)*

- Propriedades da soma/ diferença:

**Exemplo 1**: f(x) = $x^3$ e g(x) = $-3x+1$ calcular $\lim_{x\to 2} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$

$$\lim_{x\to 2}[x^3 - 3x + 1] =$$

$$= \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 1$$

$\Rightarrow$ Resolver o limite substituindo x = 2:

$$= (2)^3 - 3(2) + (1) = 8 - 6 + 1 = 3$$

$\Rightarrow$ OBS: *o limite de uma constante = a própria constante, ou seja,* $\lim_{x\to 2} 1 = 1.$

$\Rightarrow$ Ou seja, $\lim_{x\to 2}[x^3 - 3x + 1] = 3$

## 1. Cálculo de limites *(continuação)*

- Propriedades do produto:

**Exemplo 2**: f(x) = 4 e g(x) = $x^2$ Calcule = $\lim_{x\to 3} f(x).g(x)$ = $\lim_{x\to 3} f(x).\lim_{x\to 3} g(x)$

$$\lim_{x\to 3} 4x^2 =$$

$$= \lim_{x\to 3} 4 \;.\; \lim_{x\to 3} x^2$$

$\Rightarrow$ Resolver o limite substituindo x = 3:

$$= 4.\,(3)^2 = \mathbf{36}$$

$\Rightarrow$ OBS: *o limite de uma constante = a própria constante, ou seja,* $\lim_{x\to 3} 4 = 4$.

$\Rightarrow$ Ou seja, $\boldsymbol{\lim_{x\to 3} 4x^2 = 36}$

# 1. Cálculo de limites *(continuação)*

- Propriedades do quociente:

**Exemplo 3**: f(x)= $3x^2 - 8$ e g(x)= $x - 2$ Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to 0} g(x)}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 8}{x - 2}$$

- Verificar se a regra do limite do quociente se aplica, ou seja, se o limite do denominador é diferente de zero: $\lim_{x \to 0} [x - 2] = 0 - 2 = -2$

- Como o limite do denominador é diferente de zero, quando x tende a 0, podemos usar a regra do limite do quociente: $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 8}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 0} 3x^2 - 8}{\lim_{x \to 0} x - 2}$

## 1. Cálculo de limites *(continuação)*

- Propriedades do quociente:

**Exemplo 3**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 8}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 0} 3x^2 - 8}{\lim_{x \to 0} x - 2}$$

$\Rightarrow$ Resolver o limite substituindo x = 0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 8}{x - 2} = \frac{3(0)^2 - 8}{0 - 2} = \frac{-8}{-2} = \mathbf{4}$$

$\Rightarrow$ Ou seja, $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{3x^2-8}{x-2} = 4}$

# Agenda

1. Cálculo de Limites
2. Limites Infinitos
3. Formas Indeterminadas
4. Limites nos extremos do domínio
5. Limite exponencial fundamental
6. Resumo

Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 2. Limites infinitos

- **Exemplo 4**: Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$

- Verificar se a regra do limite do quociente se aplica, ou seja, se o limite do denominador é diferente de zero:

$$\lim_{x \to 2} x - 2 = 2 - 2 = 0$$

- Como o limite do denominador é igual a zero, quando x tende a 2, não podemos usar a regra do limite do quociente.

- Como resolver esse limite, então?

- Calcular os limites laterais quando x tende a 2.

## 2. Limites infinitos *(continuação)*

- **Exemplo 4**: $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$

- **Limite lateral pela direita**: $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2}$

x está assumindo valores de uma sucessão que converge para 2 pela direita:

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$f(2{,}1) = 31$

$f(2{,}01) = 301$

$f(2{,}001) = 3001$

$f(2{,}0001) = 30001$

| x | y |
|---|---|
| 2,1 | 31 |
| 2,01 | 301 |
| 2,001 | 3001 |
| 2,0001 | 30001 |
| (...) | (...) |

=> as respectivas imagens (ou respectivos de y) estão cada vez maiores, ou seja, y tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

## 2. Limites infinitos *(continuação)*

- **Exemplo 4**: $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$

- **Limite lateral pela esquerda**: $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2}$

x está assumindo valores de uma sucessão que converge para 2 pela esquerda:

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$f(1{,}9) = -29$

$f(1{,}99) = -299$

$f(1{,}999) = -2999$

$f(1{,}9999) = -29999$

| x | y |
|---|---|
| 1,9 | -29 |
| 1,99 | -299 |
| 1,999 | -2999 |
| 1,9999 | -29999 |
| (...) | (...) |

=> as respectivas imagens (ou respectivos de y) estão cada vez maiores, ou seja, y tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 2^{--}} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

## 2. Limites infinitos *(continuação)*

- **Exemplo 4**: $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$

- **Limite lateral pela direita**: $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$

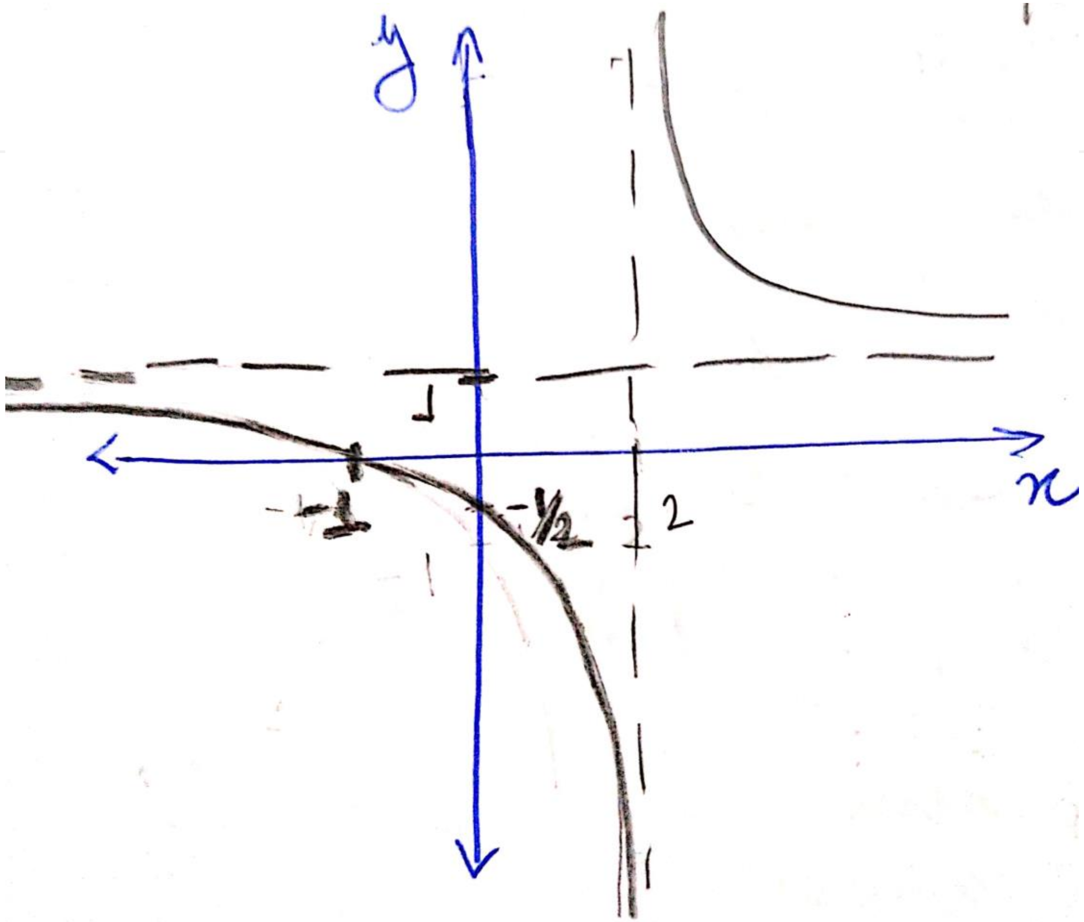
- **Limite lateral pela esquerda**: $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$

$\Rightarrow$ interceptos: se x = 0 -> y=-1/2

$\Rightarrow$ Se y = 0 -> x = -1

$\Rightarrow$ x = 2 é assíntota vertical

$\Rightarrow$ y = 1 é assíntota horizontal



## 2. Limites infinitos *(continuação)*

- Propriedades do quociente:

**Exemplo 5**: f(x) = $\frac{2}{x-4}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{2}{x-4}$$

- Verificar se a regra do limite do quociente se aplica, ou seja, se o limite do denominador é diferente de zero: $\lim_{x \to 4} x - 4 = 4 - 4 = 0$
- Como o limite do denominador é igual a zero, quando x tende a 4, não podemos usar a regra do limite do quociente.
- Como calcular esse limite?

=> Calcular os limites laterais e verificar se o limite global existe.

## 2. Limites infinitos *(continuação)*

- **Exemplo 5**: $\lim_{x \to 4} \frac{2}{x-4}$

- **Limite lateral pela direita**: $\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{x-4}$

x está assumindo valores de uma sucessão que converge para 4 pela direita:

$f(x) = \frac{2}{x-4}$

$f(4{,}1) = 20$

$f(4{,}01) = 200$

$f(4{,}001) = 2000$

$f(4{,}0001) = 20000$

| x | y |
|---|---|
| 4,1 | 20 |
| 4,01 | 200 |
| 4,001 | 2000 |
| 4,0001 | 20000 |
| (...) | (...) |

=> as respectivas imagens (ou respectivos de y) estão cada vez maiores, ou seja, y tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{x-4} = +\infty$$

## 2. Limites infinitos *(continuação)*

- **Exemplo 5**: $\lim_{x \to 4} \frac{2}{x-4}$

- **Limite lateral pela esquerda**: $\lim_{x \to 4^-} \frac{2}{x-4}$

x está assumindo valores de uma sucessão que converge para 4 pela esquerda:

$f(x) = \frac{2}{x-4}$

$f(3{,}9) = -20$

$f(3{,}99) = -200$

$f(3{,}999) = -2000$

$f(3{,}9999) = -20000$

| x | y |
|---|---|
| 3,9 | -20 |
| 3,99 | -200 |
| 3,999 | -2000 |
| 3,9999 | -20000 |
| (...) | (...) |

=> as respectivas imagens (ou respectivos de y) estão cada vez maiores, ou seja, y tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{2}{x-4} = -\infty$$

# Agenda

1. Cálculo de Limites
2. Limites Infinitos
3. Formas Indeterminadas
4. Limites nos extremos do domínio
5. Limite exponencial fundamental
6. Resumo

Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 3. Formas indeterminadas

- São expressões impossíveis de serem calculadas.

<u>Exemplos</u>:

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $0.\ \infty$
- $1^{\infty}$
- $\infty\ -\ \infty$
- $0^{0}$

$\Rightarrow$ Quando nos deparamos com formas indeterminadas, torna-se necessário simplificar algebricamente a função para calcular o limite desejado.

$\Rightarrow$ Para tanto, utilizar técnicas de **<u>fatoração</u>**.

## 3. Formas indeterminadas *(continuação)*

- <u>Exemplo 1</u>: Calcule o limite da função $\mathrm{f(x)} = \frac{x-3}{x^2-9}$ quando x tende a 3:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

$\Rightarrow$ Se substituirmos x = 3 para calcular o limite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{\lim_{x \to 3} x-3}{\lim_{x \to 3} x^2-9} = \frac{3-3}{3^2-9} = \frac{0}{0}$$ **=> forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Necessário simplificar algebricamente a função para calcular o limite.

$\Rightarrow$ Para tanto, utilizar técnicas de **<u>fatoração</u>**.

## 3. Formas indeterminadas *(continuação)*

- Exemplo 1: Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ quando x tende a 3:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3^2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3}$$

$\Rightarrow$ Substituindo x = 3 para calcular o limite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3} (x+3)} = \frac{1}{3+3} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

$\Rightarrow$ Portanto, $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$

## 3. Formas indeterminadas *(continuação)*

- Exemplo 2: Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x^2+10x}{2x}$ quando x tende a 0: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+10x}{2x}$

$\Rightarrow$ Se substituirmos x = 0 para calcular o limite: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+10x}{2x} = \frac{\lim_{x \to 0}(x^2+10x)}{\lim_{x \to 0} 2x} = \frac{0^2+10.0}{2.0} = \frac{0}{0}$ **=> forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+10x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,(x+10)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+10)}{2}$

$\Rightarrow$ substituirmos x = 0, $\lim_{x \to 0} \frac{(x+10)}{2} = \frac{\lim_{x \to 0}(x+10)}{\lim_{x \to 0} 2} = \frac{(0+10)}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$

## 3. Formas indeterminadas *(continuação)*

- Exemplo 3: Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x^2-14x+49}{x-7}$ quando x tende a 7:

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2-14x+49}{x-7} = \frac{0}{0}$$ **=> forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim_{x \to 7} \frac{x^2-14x+49}{x-7} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)^2}{x-7} = \lim_{x \to 7} (x-7)$

$\Rightarrow$ substituirmos x = 7, $\lim_{x \to 7} (x-7) = 7 - 7 = \mathbf{0}$

## 3. Formas indeterminadas *(continuação)*

- Exemplo 4: Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ quando x tende a 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{0}{0}$$ **=> forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x - 3)$

$\Rightarrow$ substituirmos x = 2, $\lim_{x \to 2} x - 3 = 2 - 3 = \mathbf{-1}$

## 3. Formas indeterminadas *(continuação)*

- Exemplo 5: Calcule o limite da função $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x + 10$ quando x tende a ∞:

$$\lim_{x \to \infty} 2x^3 + 2x^2 - 8x + 10$$

=> Substituindo x = ∞:

$2(\infty)^3 + 2(\infty)^2 - 8(\infty) + 10$ = 2. ∞ + 2. ∞ - ∞ = ∞ + ∞ - ∞ = **∞ - ∞ => forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim_{x \to \infty} x^3\left(2 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{10}{x^3}\right)$

$\Rightarrow$ substituirmos x = ∞, $(\infty)^3\left(2 + \frac{2}{\infty} - \frac{8}{(\infty)^2} + \frac{10}{(\infty)^3}\right)$ = $\infty\left(2 + \frac{2}{\infty} - \frac{8}{\infty} + \frac{10}{\infty}\right)$ = $\infty(2 + 0 - 0 + 0) = \infty$

# Agenda

1. Cálculo de Limites
2. Limites Infinitos
3. Formas Indeterminadas
4. Limites nos extremos do domínio
5. Limite exponencial fundamental
6. Resumo

Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 4. Limites nos extremos do domínio

- **Exemplo 6**: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} x+1}{\lim\limits_{x \to +\infty} x-2} = \frac{\infty+1}{\infty-2} = \frac{\infty}{\infty}$ **forma indeterminada**
- x está assumindo valores cada vez maiores e y se aproxima de 1:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})}{(1-\frac{2}{x})} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}(1+\frac{1}{x})}{\lim\limits_{x \to +\infty}(1-\frac{2}{x})} = \frac{(1+\frac{1}{\infty})}{(1-\frac{2}{\infty})} = \frac{(1+0)}{(1-0)} = \frac{(1)}{(1)} = 1$

| x | y |
|---|---|
| 10 | 1,4 |
| 100 | 1,03 |
| 1.000 | 1,003 |
| 10.000 | 1,0003 |
| (...) | (...) |

## 4. Limites nos extremos do domínio

- **Exemplo 6**: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} == \frac{\lim_{x\to-\infty} x^3+2x^2}{\lim_{x\to-\infty} x^2-2x} = \frac{(-\infty)^3+2(-\infty)^2}{(-\infty)^2-2(-\infty)} = \frac{-\infty+\infty}{\infty}$$ **forma indeterminada**
- Colocar x de maior expoente em evidência no numerador e no denominador:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(1+\frac{2}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{(1-\frac{2}{x})} = \frac{\lim_{x\to-\infty} x(1+\frac{2}{x})}{\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{2}{x})} = \frac{(-\infty)(1+\frac{2}{-\infty})}{(1-\frac{2}{-\infty})} = \frac{(-\infty)(1-0)}{(1+0)} = \frac{(-\infty)}{(1)} = -\infty$$

- **Exemplo 7**: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} == \frac{\lim_{x\to+\infty} x^3+2x^2}{\lim_{x\to+\infty} x^2-2x} = \frac{(\infty)^3+2(\infty)^2}{(\infty)^2-2(\infty)} = \frac{\infty}{\infty-\infty}$$ **forma indeterminada**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(1+\frac{2}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{(1-\frac{2}{x})} = \frac{\lim_{x\to+\infty} x(1+\frac{2}{x})}{\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x})} = \frac{(\infty)(1+\frac{1}{\infty})}{(1-\frac{2}{\infty})} = \frac{(\infty)(1-0)}{(1-0)} = \frac{(\infty)}{(1)} = +\infty$$

## 4. Limites nos extremos do domínio

- **Exemplo 8**: $\lim_{x \to -\infty} 2x^3 + 2x^2 - 8x + 10$
- Substituir $x = \infty$ na função => $2(-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 8(-\infty) + 10$ =

= $-\infty + \infty + \infty + 10$ =

= ∞ - ∞ => *forma indeterminada*

- Como resolver esse limite?

=> Fatorar! Nesse caso, colocar x com maior expoente em evidência: $\lim_{x \to -\infty} 2x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3})$

- Substituir $x = \infty$ na função => $2(-\infty)^3(1 + \frac{1}{-\infty} - \frac{4}{(-\infty)^2} + \frac{5}{(-\infty)^3})$ =

= $2.(-\infty)(1 - 0 - 0 + 0)$ = $2.(-\infty)(1)$ = -∞

# Agenda

1. Cálculo de Limites
2. Limites Infinitos
3. Formas Indeterminadas
4. Limites nos extremos do domínio
5. Limite exponencial fundamental
6. Resumo

Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 5. Limite exponencial fundamental

- Base dos logarítmos naturais ou logarítmo neperiano
- Definição do número e (número de Euler) ≅ 2,718281...

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

OU

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

| x | $(1+1/x)^x$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2,25 |
| 5 | 2,48 |
| 10 | 2,59 |
| 100 | 2,704 |
| 1.000 | 2,7169 |
| 100.000 | 2,718268 |
| 1.000.000 | 2,718280 |
| (...) | (...) |

| x | $(1+1/x)^x$ |
|---|---|
| -1 | 2 |
| -2 | 2,25 |
| -5 | 2,48 |
| -10 | 2,59 |
| -100 | 2,704 |
| -1.000 | 2,7169 |
| -100.000 | 2,718268 |
| -1.000.000 | 2,718280 |
| (...) | (...) |

# Agenda



Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 6. Resumo

- Pode-se destacar 3 tipos de limites:

**i. Limites laterais**

$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ ; $\lim_{x\to a^-} f(x) = M$ => não existe limite global

(se $\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Rightarrow existe\ o\ limite\ global \lim_{x\to a} f(x) = L$)

**ii. Limites infinitos**

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

**iii. Limites nos extremos do domínio**

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = K$ ou $\lim_{x\to -\infty} f(x) = Z$

# Agenda

1. Cálculo de Limites
2. Limites Infinitos
3. Formas Indeterminadas
4. Limites nos extremos do domínio
5. Limite exponencial fundamental
6. Resumo

Referência:

**Cap 4**:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.