

# SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

## Campo Magnético Estacionário

Fonte: “Eletromagnetismo”, Hayt Jr, 8ª Edição, Capítulo 7.

### 1) Definição

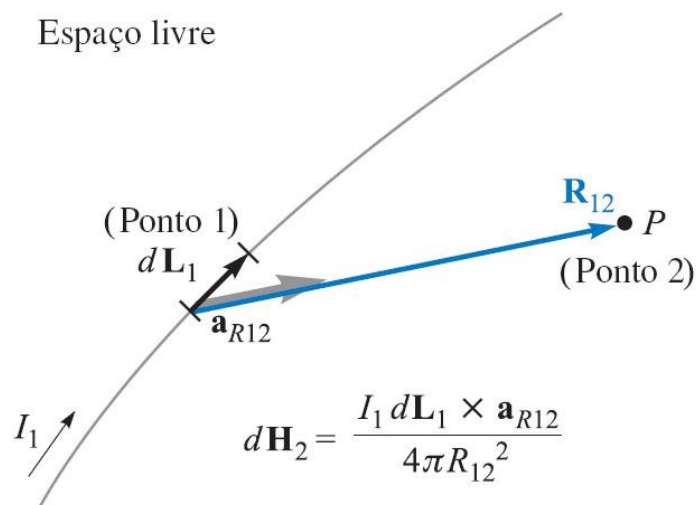
Um campo magnético estacionário pode se originar de uma corrente constante, de um ímã permanente, e de um campo elétrico variando linearmente com o tempo. Mas aqui, nós iremos focar nossa atenção no campo magnético produzido por um elemento de corrente contínua no espaço livre.

### 2) Lei de Biot-Savart (ou também, Lei de Ampère para o elemento de corrente)

Primeiro, considere uma corrente  $I$  circulando em um comprimento diferencial vetorial  $d\mathbf{L}$  de um filamento. A lei de Biot-Savart nos diz que, em qualquer ponto  $P$ , a magnitude do campo magnético produzido por  $d\mathbf{L}$  é proporcional ao produto entre a corrente, a intensidade de  $d\mathbf{L}$ , e o seno do ângulo entre o filamento e a reta que conecta o filamento ao ponto  $P$  no qual o campo é desejado. Ainda, a magnitude do campo magnético é inversamente proporcional ao quadrado da distância de  $d\mathbf{L}$  ao ponto  $P$ . A direção da intensidade de campo magnético é normal ao plano que contém  $d\mathbf{L}$  e a linha desenhada do filamento ao ponto  $P$ . Das duas normais possíveis, a escolhida é aquela que está no sentido de progressão de um parafuso dextrogiro que é girado, pelo ângulo mais curto, de  $d\mathbf{L}$  até a reta que liga o filamento a  $P$ . No sistema mks, a constante de proporcionalidade é  $1/4\pi$ .

Matematicamente, a Lei de Biot-Savart é escrita como:

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (\text{A/m}) \quad (1)$$



Com base na figura anterior, a equação (1) torna-se:

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} \quad (\text{A/m}) \quad (2)$$

Tendo em vista que o elemento de corrente não pode ser isolado, as equações (1) e (2) não podem ser verificadas na prática. Para correntes contínuas, a densidade de carga não é função do tempo, e a equação da continuidade torna-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0$$

que, após aplicar o teorema da divergência (Aula 5, equação (8)), torna-se:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3)$$

que nos diz que qualquer corrente que atravessa uma superfície fechada é igual a zero. Isso quer dizer que apenas a forma integral da Lei de Biot-Savart mostrada abaixo pode ser verificada na prática,

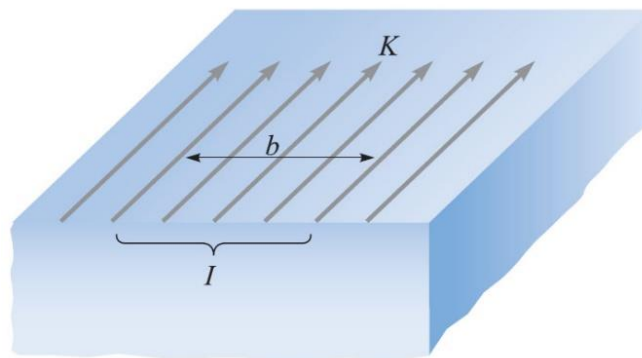
$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (3)$$

Podemos, também, expressar a Lei de Biot-Savart em termos da densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e da densidade superficial de corrente  $\mathbf{K}$ .

Obs.: uma vez que  $\mathbf{K}$  circula em uma lâmina extremamente fina, isso implica que  $\mathbf{J} = \infty$ .

Da figura abaixo, podemos concluir que se  $\mathbf{K}$  é uniforme, a corrente total em uma largura  $b$  será:

$$I = Kb$$



Caso  $\mathbf{K}$  seja não-uniforme,

$$I = \int K dN \quad (4)$$

onde  $dN$  é o elemento diferencial do caminho no qual a corrente circula. Assim, podemos escrever  $I d\mathbf{L}$  da seguinte forma,

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{K} dS = \mathbf{J} dv \quad (5)$$

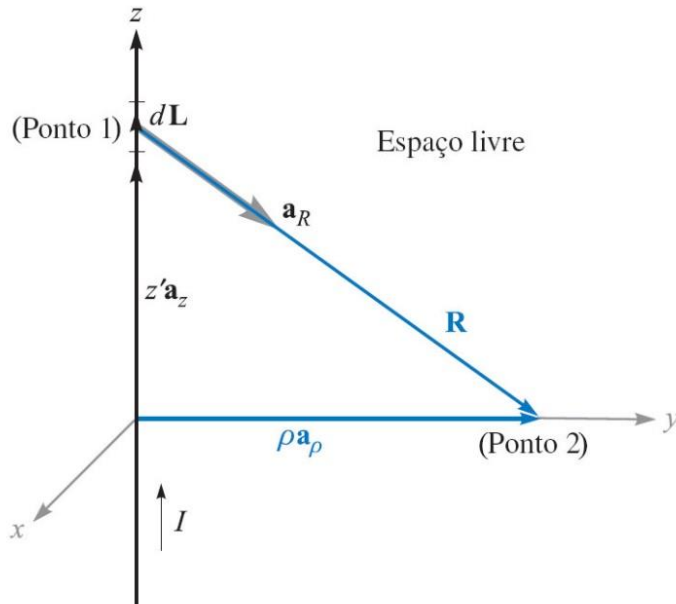
Com isso chegamos à seguinte forma alternativa da Lei de Biot-Savart,

$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{a}_R dS}{4\pi R^2} \quad (6)$$

e

$$\mathbf{H} = \int_{vol} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R dv}{4\pi R^2} \quad (7)$$

Como exemplo, vamos aplicar a Lei de Biot-Savart no caso ilustrado na figura abaixo, onde temos um filamento infinitamente longo, e determinar o campo no ponto 2. A geometria do problema nos diz que não pode haver variação ao longo de  $z$  ou  $\phi$ .



Assim,

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{R12} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

$$R_{12}^2 = |\mathbf{R}_{12}|^2 = \rho^2 + z'^2$$

Se  $d\mathbf{L} = dz' \mathbf{a}_z$ , logo, temos que,

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I dz' \mathbf{a}_z}{4\pi R_{12}^2} \times \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \frac{I dz' \mathbf{a}_z}{4\pi(\rho^2 + z'^2)} \times \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{Idz'\mathbf{a}_z}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)$$

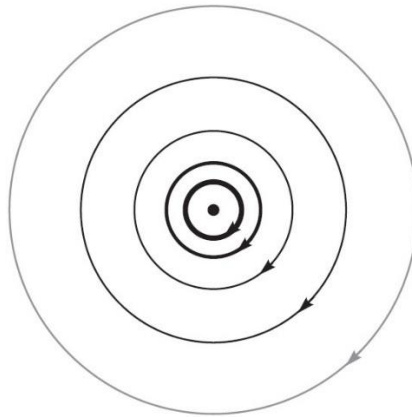
$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz'\mathbf{a}_z}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz'\mathbf{a}_\phi}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \frac{z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \quad (8)$$

Veja que  $\mathbf{H}_2$  não é função de  $\varphi$  ou  $z$ , e varia inversamente com  $\rho$ . A direção do vetor intensidade de campo magnético descreve uma circunferência. As linhas de força são, desta forma, círculos em volta do filamento, e a separação entre elas é proporcional ao raio, ou inversamente proporcional à intensidade de  $\mathbf{H}_2$ , veja figura abaixo.



Agora, vamos considerar o campo de um elemento de corrente de comprimento finito, como mostrado na figura abaixo.

Assim,

$$\mathbf{H} = \oint \frac{Id\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{Id\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$\mathbf{H} = \int_{\rho \tan(\alpha_1)}^{\rho \tan(\alpha_2)} \frac{Idz\mathbf{a}_z \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

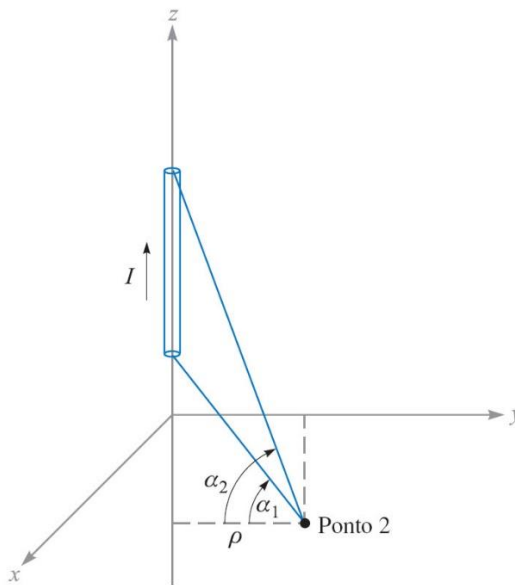
$$\mathbf{H} = \int_{\rho \tan(\alpha_1)}^{\rho \tan(\alpha_2)} \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi dz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{Iz\mathbf{a}_\phi}{4\pi\rho\sqrt{\rho^2 + z^2}} \Big|_{\rho \tan(\alpha_1)}^{\rho \tan(\alpha_2)} = \frac{I}{4\pi\rho} \left[ \frac{\tan(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_2)}} - \frac{\tan(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_1)}} \right] \mathbf{a}_\phi$$

O campo  $\mathbf{H}$  deste problema é, então, dado por,

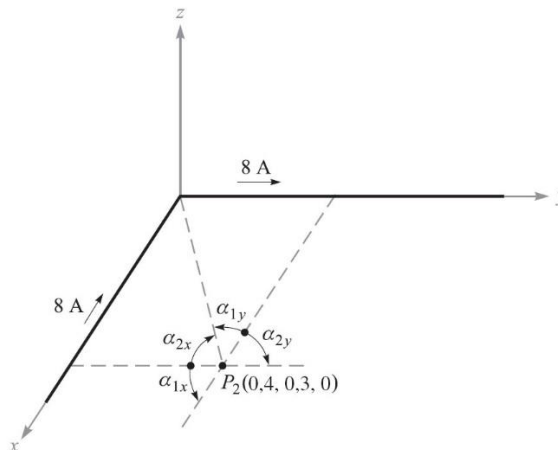
$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \mathbf{a}_\phi \quad (9)$$

Esta equação nos permite encontrar  $\mathbf{H}$  devido a filamentos de corrente arranjados como uma sequência de segmentos de reta.



Exemplo:

- 1) [Hayt Jr] Determine  $\mathbf{H}$  no ponto  $P_2(0,4, 0,3, 0)$  no campo de uma corrente filamental de 8 A direcionada do infinito para a origem ao longo do eixo  $x$  positivo, e depois da origem para o infinito ao longo do eixo  $y$ , conforme a figura abaixo.



Vamos considerar primeiro a corrente semi-infinita no eixo  $x$ . Da figura podemos extrair que  $\alpha_{1x} = 90^\circ$  e  $\alpha_{2x} = \text{atan}(0.4/0.3) = 53.1^\circ$ . A distância radial  $\rho$  é medida em relação ao eixo  $x$ , logo,  $\rho_x = y = 0.3$ , que é o afastamento do ponto  $P$  em relação ao eixo  $x$ .

Assim,

$$\mathbf{H}_1 = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\rho_x \mathbf{a}_\rho + x \mathbf{a}_x}{\sqrt{\rho_x^2 + x^2}}$$

$$R = \sqrt{\rho_x^2 + x^2}$$

$$d\mathbf{L} = -\mathbf{a}_x dx$$

$$\mathbf{H}_1 = \int_{y \tan(\alpha_{1x})}^{-y \tan(\alpha_{2x})} \frac{I(-\mathbf{a}_x) dx}{4\pi(\rho_x^2 + x^2)} \times \frac{\rho_x \mathbf{a}_\rho + x \mathbf{a}_x}{\sqrt{\rho_x^2 + x^2}}$$

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{I \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{y \tan(\alpha_{1x})}^{-y \tan(\alpha_{2x})} \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{I \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \frac{x}{y \sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{y \tan(\alpha_{1x})}^{-y \tan(\alpha_{2x})} = \frac{I}{4\pi y} \left[ \frac{\tan(\alpha_{2x})}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_{2x})}} - \frac{\tan(\alpha_{1x})}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_{1x})}} \right] \mathbf{a}_\phi$$

Simplificando, temos,

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{I}{4\pi y} [-\sin(\alpha_{2x}) - \sin(\alpha_{1x})] \mathbf{a}_\phi$$

Da figura temos que  $y = 0.3$ , logo, substituindo valores,

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{8}{4\pi(0.3)} [-\sin(53.13^\circ) - \sin(90^\circ)] \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{8}{4\pi(0.3)} [0.8 + 1] \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{12}{\pi} \mathbf{a}_\phi = -\frac{12}{\pi} \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Para o eixo  $y$ , por analogia temos que  $\alpha_{1y} = \text{atan}(0.3/0.4) = 36.9^\circ$  e  $\alpha_{2y} = 90^\circ$ . Agora podemos utilizar a mesma equação derivada acima (marcada em amarelo) e substituir os valores diretamente. Assim, a distância radial  $\rho$  é medida em relação ao eixo  $y$ , logo,  $\rho_y = x = 0.4$ , que é o afastamento do ponto  $P$  em relação ao eixo  $y$ .

$$\mathbf{a}_R = \frac{\rho_y \mathbf{a}_\rho - y \mathbf{a}_x}{\sqrt{\rho_y^2 + y^2}}$$

$$R = \sqrt{\rho_y^2 + y^2}$$

$$d\mathbf{L} = \mathbf{a}_y dy$$

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-x \tan(\alpha_{1y})}^{x \tan(\alpha_{2y})} \frac{I(\mathbf{a}_y) dy}{4\pi(\rho_y^2 + y^2)} \times \frac{\rho_y \mathbf{a}_\rho - y \mathbf{a}_x}{\sqrt{\rho_y^2 + y^2}}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-x \tan(\alpha_{1y})}^{x \tan(\alpha_{2y})} \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \frac{y}{x \sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-x \tan(\alpha_{1y})}^{x \tan(\alpha_{2y})} = \frac{I}{4\pi x} \left[ \frac{\tan(\alpha_{2y})}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_{2y})}} - \frac{\tan(\alpha_{1y})}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_{1y})}} \right] \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{4\pi x} [\sin(\alpha_{2y}) + \sin(\alpha_{1y})] \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{8}{4\pi(0.4)} [\sin(90^\circ) + \sin(36.9^\circ)] \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{8}{\pi} \mathbf{a}_\phi = -\frac{8}{\pi} \mathbf{a}_z \quad \text{A/m}$$

O campo total torna-se, então,

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = -\frac{12}{\pi} \mathbf{a}_z - \frac{8}{\pi} \mathbf{a}_z = -\frac{20}{\pi} \mathbf{a}_z \quad \text{A/m}$$

Exemplos:

- 1) [Hayt Jr] Dados os seguintes valores para  $P_1$ ,  $P_2$  e  $I_1 \Delta L_1$ , calcule  $\Delta \mathbf{H}_2$ : (a)  $P_1(0, 0, 2)$ ,  $P_2(4, 2, 0)$ ,  $2\pi \mathbf{a}_z \mu\text{A} \cdot \text{m}$ ; (b)  $P_1(0, 2, 0)$ ,  $P_2(4, 2, 3)$ ,  $2\pi \mathbf{a}_z \mu\text{A} \cdot \text{m}$ ; (c)  $P_1(1, 2, 3)$ ,  $P_2(-3, -1, 2)$ ,  $2\pi(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \mu\text{A} \cdot \text{m}$ .

Respostas:  $-8.51\mathbf{a}_x + 17.01\mathbf{a}_y$  nA/m;  $16\mathbf{a}_y$  nA/m;  $18.9\mathbf{a}_x - 33.9\mathbf{a}_y + 26.4\mathbf{a}_z$  nA/m

- 2) [Hayt Jr] Um filamento de corrente pelo qual passam 15 A na direção  $\mathbf{a}_z$  se posiciona ao longo de todo eixo  $z$ . Calcule  $\mathbf{H}$  em coordenadas cartesianas em: (a)  $P_A(0, 4)$ ; (b)  $P_B(2, -4, 4)$ .

Respostas:  $0.534\mathbf{a}_y$  A/m;  $0.477\mathbf{a}_x + 0.239\mathbf{a}_y$  A/m

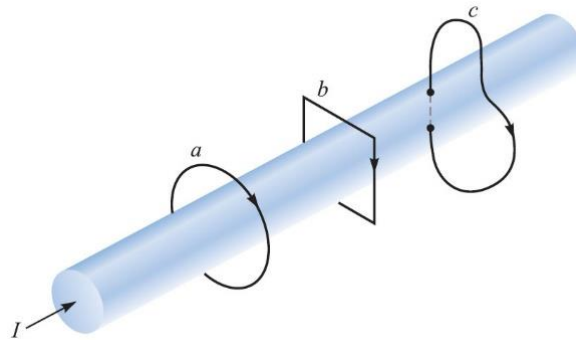
### 3) Lei Circuital de Ampère

A Lei Circuital de Ampère nos diz que a integral de linha do campo  $\mathbf{H}$  em um caminho fechado é igual à corrente contínua envolvida pelo caminho. Matematicamente, temos,

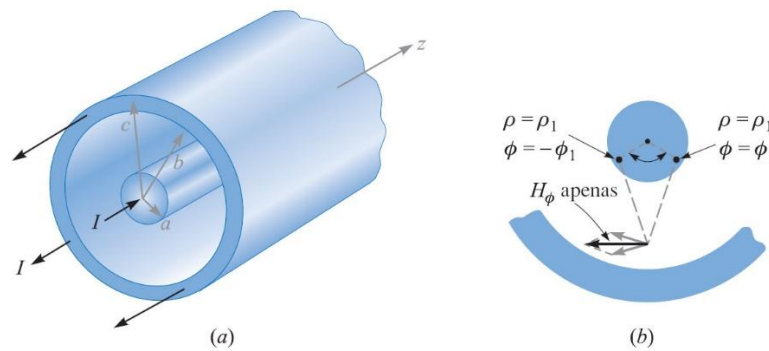
$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (10)$$

A corrente positiva é aquela que circula na direção do avanço de um parafuso dextrogiro, girado na direção na qual o caminho fechado é percorrido. Conforme a figura abaixo, a

integral de linha em (1) produzirá o mesmo resultado para os caminhos  $a$  e  $b$ , mas um resultado inferior para o caminho  $c$ .



Como exemplo, considere a linha de transmissão coaxial infinita da figura abaixo, pela qual flui uma corrente total  $I$ , uniformemente distribuída no condutor central e  $-I$  no condutor externo. A simetria do problema nos diz que o campo  $\mathbf{H}$  não é função de  $z$  ou  $\phi$ .



Para facilitar a análise, podemos dizer com base na simetria do problema que:

- Os condutores se constituem de filamentos. Não há filamentos com componente na direção  $z$ . A Lei de Biot-Savart permite inferir isso sem fazer o produto vetorial;
- O componente  $H_\rho$  em  $\phi = 0^\circ$ , produzido por um filamento posicionado em  $\rho = \rho_1$ ,  $\phi = \phi_1$ , é cancelado pelo componente  $H_\rho$  produzido pelo filamento simetricamente posicionado em  $\rho = \rho_1$ ,  $\phi = -\phi_1$  (veja figura (b) acima);
- Com isso, teremos apenas a componente  $H_\phi$ .

Logo, para um caminho circular de raio  $\rho$ , onde  $a < \rho < b$ , chegamos à expressão de campo para a componente  $H_\phi$ ,

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

ou

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

Caso  $\rho < a$ , temos que a corrente envolvida será,

$$I_{env} = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

e que,



$$2\pi\rho H_\phi = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

ou

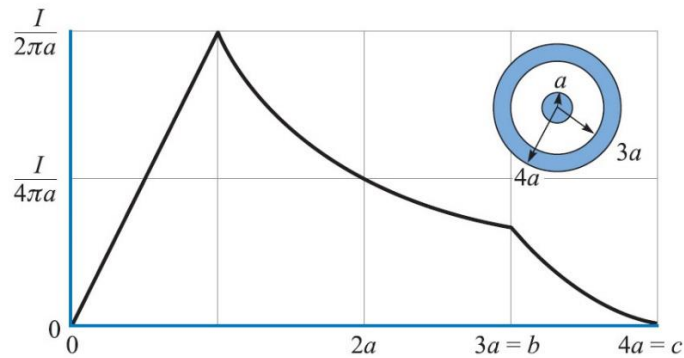
$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad \text{para } \rho < a$$

Para  $\rho > c$ , nenhuma corrente será envolvida e  $H_\phi = 0$ . Isso ocorre porque o campo produzido por cada condutor irá se cancelar tendo em vista que as correntes nestes condutores tem sinais opostos.

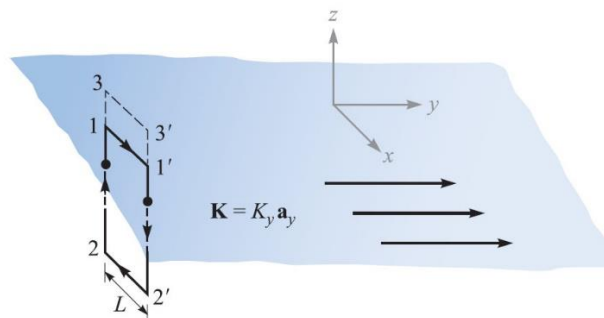
E para  $b < \rho < c$ , temos que,

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

A variação da intensidade do campo magnético com o raio é mostrada na figura abaixo, supondo  $b = 3a$ ,  $c = 4a$ . Note a continuidade do campo magnético em todas as fronteiras.



Considere, agora, uma lâmina de corrente que flui na direção  $+y$ , posicionada no plano  $z = 0$ , como mostra a figura abaixo.



A densidade superficial de corrente é  $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$ . Como a lâmina é infinita nas direções  $x$  e  $y$ ,  $\mathbf{H}$  não pode variar nestas direções. Primeiro, apenas veja a Lei de Biot-Savart:

$$d\mathbf{H} = \frac{Id\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{Id\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (11)$$

Se considerarmos a lâmina como sendo constituída por filamentos condutores, a Lei de Biot-Savart nos mostra que as contribuições para  $H_z$  de pares simétricos se cancelam, resultando

em  $H_z = 0$ . Também podemos ver que  $H_y = 0$ , já que  $d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R$  não produzirá componente nesta direção. Assim, só teremos a componente  $H_x$ .

Seguindo o caminho 1-1'-2'-2-1 sugerido na figura acima, a Lei Circuital de Ampère no diz que:

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_{x1}L + H_{x2}(-L) = K_y L$$

Simplificando,

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

Caso o caminho escolhido seja 3-3'-2'-2-3, encontraremos,

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

Comparando as duas últimas equações vemos que  $H_{x3} = H_{x1}$ , e que  $H_x$  é o mesmo para qualquer  $z$ .

A simetria nos diz que:

$$H_x = \frac{1}{2}K_y \quad (z > 0)$$

$$H_x = -\frac{1}{2}K_y \quad (z < 0)$$

Assim,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K} \times \mathbf{a}_N$$

onde  $\mathbf{a}_N$  é o unitário normal à superfície.

Agora, se incluirmos uma segunda lâmina em  $z = h$  com corrente circulando no sentido inverso, onde  $\mathbf{K} = -K_y \mathbf{a}_y$  a expressão para  $\mathbf{H}$  entre as lâminas torna-se,

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N \quad (0 < z < h)$$

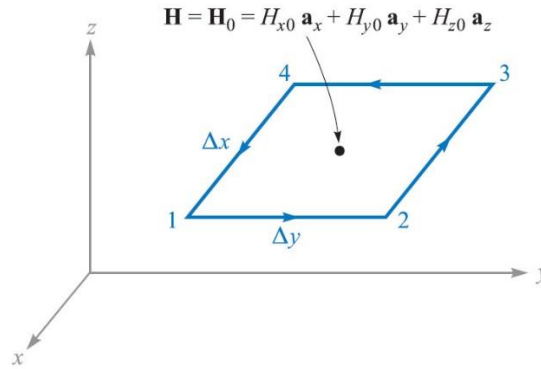
e

$$\mathbf{H} = 0 \quad (z < 0, z > h)$$

#### 4) Rotacional

Nesta seção, a Lei Circuital de Ampère será utilizada para discutirmos a terceira e última das derivadas espaciais na análise vetorial, ou seja, o rotacional.

Primeiro, iremos obter a forma pontual da Lei Circuital de Ampère. Mas para isso, vamos escolher em coordenadas cartesianas um caminho fechado incremental de lados  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , como ilustra a figura abaixo.



Suponha que uma corrente produza o seguinte campo elétrico no centro do quadrado,

$$\mathbf{H} = H_{x0} \mathbf{a}_x + H_{y0} \mathbf{a}_y + H_{z0} \mathbf{a}_z$$

A integral fechada de  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$  ao longo do caminho especificado na figura resulta, para o caminho 1-2, em

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} = H_{y,1-2} \Delta y$$

Assim,

$$H_{y,1-2} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)$$

Logo,

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} \doteq \left( H_{y0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

Para o segmento 2-3,

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{2-3} \doteq H_{x,2-3} (-\Delta x) \doteq - \left( H_{x0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

Repetindo para os seguimentos restantes e somando, temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

A Lei Circuital de Ampère nos diz que o resultado da equação acima deve fornecer a corrente que é envolvida pelo caminho. Logo, para uma corrente qualquer  $\mathbf{J}$ , a corrente envolvida será,

$$\Delta I \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

e

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = J_z \Delta x \Delta y$$

Ou ainda,

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

No limite em que o caminho fechado tende a zero,

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

Fazendo uma análise semelhante, mas escolhendo caminhos fechados orientados perpendicularmente a cada um dos dois eixos coordenados restantes, teremos,

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

$$\lim_{\Delta z, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

Logo, podemos concluir que o rotacional é definido como,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_N}$$

onde  $\Delta S_N$  é a área plana envolvida pela integral de linha fechada. O subscrito  $N$  indica que o componente do rotacional é normal à superfície em questão.

**Em coordenadas cartesianas:**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \quad (12)$$

Na forma de um determinante,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (13)$$

**Em coordenadas cilíndricas:**

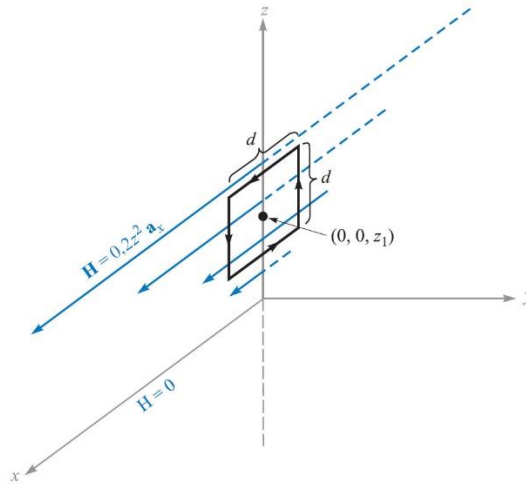
$$\nabla \times \mathbf{H} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_z \quad (14)$$

**Em coordenadas esféricas:**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{a}_\phi \quad (15)$$

Exemplo:

- 1) [Hayt Jr] Suponha que  $\mathbf{H} = 0.2z^2 \mathbf{a}_x$  para  $z > 0$ , e  $\mathbf{H} = 0$  nos outros pontos, conforme mostrado na figura abaixo. Calcule  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$  ao longo de um caminho quadrado de lado  $d$ , centrado em  $(0, 0, z_1)$  no plano  $y = 0$  onde  $z_1 > d/2$ .



$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 0.2 \left( z_1 + \frac{1}{2}d \right)^2 d + 0 - 0.2 \left( z_1 - \frac{1}{2}d \right)^2 d + 0 = 0.4z_1 d^2$$

No limite, à medida que a área tende a zero, podemos aplicar a relação,

$$(\nabla \times \mathbf{H})_y = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{d^2} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{0.4z_1 d^2}{d^2} = 0.4z_1$$

Como os outros componentes serão zero, temos que,

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0.4z_1 \mathbf{a}_y$$

Sem ir pela definição, podemos usar a forma em determinante, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} (0.2z^2) \mathbf{a}_y = 0.4z \mathbf{a}_y$$

Que produz o mesmo resultado quando  $z = z_1$ .

Retomando a definição do rotacional aplicada à Lei Circuital de Ampère (e da definição de rotacional), obtemos,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (16)$$

que é a forma pontual da Lei Circuital de Ampère, e também a segunda das quatro equações de Maxwell para campos não variantes no tempo. Podemos aproveitar e escrever a terceira equação de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

que é a forma pontual de  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ , também para campos não variantes no tempo.

Exemplos [Hayt Jr]:

**EP7.4.** (a) Calcule a integral de linha fechada de  $\mathbf{H}$  ao longo de um caminho retangular  $P_1(2, 3, 4)$  a  $P_2(4, 3, 4)$  a  $P_3(4, 3, 1)$  a  $P_4(2, 3, 1)$  a  $P_1$ , dado  $\mathbf{H} = 3z\mathbf{a}_x - 2x^3\mathbf{a}_z$  A/m. (b) Determine o quociente da integral de linha fechada pela área envolvida pelo caminho como uma aproximação para  $(\nabla \times \mathbf{H})_y$ . (c) Determine  $(\nabla \times \mathbf{H})_y$  no centro da área.

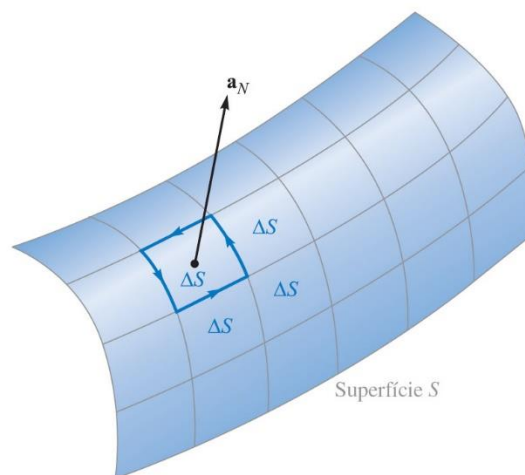
**Resp.** 354 A; 59 A/m<sup>2</sup>; 57 A/m<sup>2</sup>

**EP7.5.** Calcule o valor do vetor densidade de corrente: (a) em coordenadas cartesianas em  $P_A(2, 3, 4)$  se  $\mathbf{H} = x^2z\mathbf{a}_y - y^2x\mathbf{a}_z$  A/m; (b) em coordenadas cilíndricas em  $P_B(1,5, 90^\circ, 0,5)$  se  $\mathbf{H} = \frac{2}{\rho}(\cos 0,2\phi)\mathbf{a}_\rho$  A/m; (c) em coordenadas esféricas em  $P_C(2, 30^\circ, 20^\circ)$  se  $\mathbf{H} = \frac{1}{\sin \theta}\mathbf{a}_\theta$  A/m.

**Resp.**  $-16\mathbf{a}_x + 9\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z$  A/m<sup>2</sup>;  $0,055 \mathbf{a}_z$  A/m<sup>2</sup>;  $\mathbf{a}_\phi$  A/m<sup>2</sup>

## 5) Teorema de Stokes

Considere a figura abaixo.



Aplicando a definição de rotacional em cada elemento de área  $\Delta S$  seguindo o caminho indicado na figura, temos,

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H})_N$$

com o subscrito  $N$  indicando a superfície normal dada pela regra da mão direita. Isso é o mesmo que escrevermos,

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N$$

Ou ainda,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta \mathbf{S}$$

Determinando a circulação de todos os  $\Delta S$  que compõem  $S$  e somando (cancelamentos irão ocorrer já que as paredes interiores são percorridas uma vez em cada direção). Somente as fronteiras externas não sofrem cancelamentos. Com isso, temos,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \equiv \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (18)$$

Esta equação é uma identidade, e vale para qualquer campo vetorial, sendo denominada de **Teorema de Stokes**.

Obs.: O **Teorema de Stokes** relaciona uma integral de superfície a uma integral de linha fechada, enquanto o **Teorema da Divergência** relaciona uma integral volumétrica a uma integral de superfície fechada.

Exemplo [Hayt Jr]:

**EP7.6.** Calcule ambos os lados do teorema de Stokes para o campo  $\mathbf{H} = 6xy\mathbf{a}_x - 3y^2\mathbf{a}_y$  A/m e o caminho retangular ao redor da região,  $2 \leq x \leq 5$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $z = 0$ . Considere que o sentido positivo de  $d\mathbf{S}$  seja  $\mathbf{a}_z$ .

**Resp.**  $-126$  A;  $-126$  A

## 6) Fluxo Magnético e Densidade de Fluxo Magnético

A densidade de fluxo magnético no espaço livre é definida matematicamente como,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad \text{ou Tesla (T)} \quad (19)$$

onde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m é a permeabilidade magnética do espaço livre. Hoje em dia, a unidade Tesla é mais utilizada para  $\mathbf{B}$ . Podemos dizer que  $\mathbf{B}$  é o campo de força associado a  $\mathbf{H}$ . Podemos agora definir o fluxo magnético que atravessa uma superfície como sendo,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Wb} \quad (20)$$

definido aqui no espaço livre. Se outro meio for considerado, basta trocar  $\mu_0$  por  $\mu$  (permeabilidade magnética do meio de interesse). Em se tratando de  $\Phi$ , a unidade será sempre o Wb (Weber).

Em nossos estudos, vimos pela Lei de Gauss que as **cargas são as fontes de fluxo elétrico** (linhas que começam nas cargas positivas e terminam nas negativas).

Quando o assunto é fluxo magnético, é importante dizer que não existe uma fonte para as linhas de fluxo magnético. As linhas de fluxo magnético são fechadas e não terminam em uma “carga magnética”.

Portanto, a Lei de Gauss para campo magnético é dada por,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (21)$$

E do Teorema da Divergência  $\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$  (ver equação (20) da Aula 3), obtemos que,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (22)$$

A equação (22) é a quarta e última equação de Maxwell para campos estacionários.

Agrupando todas as quatro, temos,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Podemos também incluir as relações entre  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  e entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ , também conhecidas como relações constitutivas, relacionadas aqui (por conveniência) ao espaço livre,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (25)$$

Além da relação entre  $\mathbf{E}$  e  $V$ ,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (26)$$

Podemos também expressar o grupo de equações em (23) na forma integral,

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_v \rho_v dv \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

onde foram usadas, respectivamente, as definições de divergente, de rotacional na segunda e terceira, e novamente de divergente.



Exemplo [Hayt Jr]:

**EP7.7.** Um condutor sólido de seção reta circular é feito de um material não magnético homogêneo. Se o raio  $a = 1$  mm, o eixo do condutor posiciona-se no eixo  $z$  e a corrente total na direção  $\mathbf{a}_z$  é 20 A, calcule: (a)  $H_\phi$  em  $\rho = 0,5$  mm; (b)  $B_\phi$  em  $\rho = 0,8$  mm; (c) o fluxo magnético total por unidade de comprimento dentro do condutor; (d) o fluxo total para  $\rho < 0,5$  mm; (e) o fluxo magnético total fora do condutor.

**Resp.** 1.592 A/m; 3,2 mT;  $2 \mu\text{Wb/m}$ ;  $0,5 \mu\text{Wb}$ ;  $\infty$

## 7) Potencial escalar e vetor magnéticos

Em nossa trajetória até aqui, vimos como obter  $\mathbf{E}$  de uma configuração de cargas, e como obter a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  a partir do potencial  $V$  pela relação  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Vimos também que a equação de Laplace nos permitiu desenvolver um método de obter o potencial  $V$  de potenciais conhecidos. Agora, iremos definir uma quantidade intermediária que nos permite obter  $\mathbf{B}$  (e por extensão,  $\mathbf{H}$ ). Essa quantidade é definida como o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  (energia potencial por elemento unitário de corrente), definido como,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (28)$$

que é consistente com a definição de  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , já que se aplicarmos o  $\nabla \cdot$  nos dois lados de (28) iremos obter zero como resultado. O potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  tem unidade de Wb/m ou T·m.

Podemos agora encontrar o campo magnético a partir do potencial  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (29)$$

E, por sua vez, aplicando  $\nabla \times$  nos dois lados de (29), temos,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

ou,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (30)$$

onde  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  é uma identidade vetorial.  $\nabla^2 \mathbf{A}$  é o Laplaciano de  $\mathbf{A}$ . Retomaremos esta equação mais à frente.

Se impusermos a seguinte condição adicional,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (31)$$

e usarmos a definição de  $\mathbf{B}$  e a Lei de Biot-Savart, poderemos obter  $\mathbf{A}$  de uma corrente conhecida  $I$  da seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}}{4\pi R} \quad (\text{filamento}) \quad (32)$$

Podemos, também, obter uma expressão para  $\mathbf{A}$  a partir de uma fonte de corrente distribuída,

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{K} dS$$

que no caso de uma circulação de corrente por um volume com densidade  $\mathbf{J}$ , temos,

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{J} dv$$

Com isso, obtemos as seguintes soluções alternativas para  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A} = \int_s \frac{\mu_0 \mathbf{K} dS}{4\pi R} \quad (\text{lâmina}) \quad (33)$$

$$\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi R} \quad (\text{volume}) \quad (34)$$

Assim como no caso eletrostático (onde definimos um potencial conservativo  $V$ ), podemos também definir um potencial escalar magnético  $V_m$  que, diferentemente de  $V$ , não é um campo conservativo. No caso magnetostático, vimos que,

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

sempre que  $\mathbf{J} = 0$ , mas

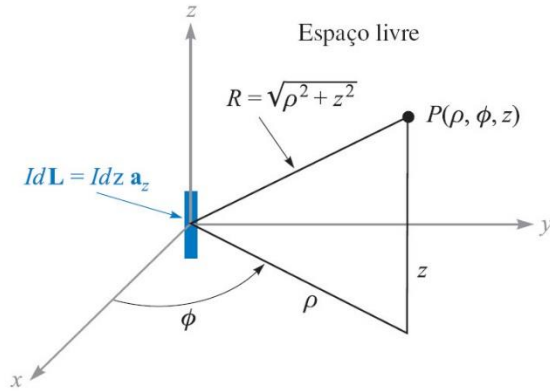
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

mesmo que  $\mathbf{J}$  seja zero ao longo do caminho de integração. Ao darmos uma outra volta completa no caminho, o resultado aumenta de  $I$ . Porém, se nenhuma corrente é envolvida pelo caminho, podemos definir uma função potencial de valor único, tal que,

$$V_{m,ab} = - \int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (35)$$

Exemplo [Hayt Jr]:

- 1) Considere o potencial vetor magnético em volta de um filamento diferencial, como ilustra a figura abaixo. O filamento encontra-se na origem no espaço livre, e se estende no sentido positivo de  $z$  de forma que  $d\mathbf{L} = dz \mathbf{a}_z$ . Utilize coordenadas cilíndricas para encontrar  $d\mathbf{A}$  no ponto  $(\rho, \varphi, z)$ :



O que se pede neste problema é que encontremos  $d\mathbf{A}$ , que é a forma diferencial da equação (32), ou seja,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 Id\mathbf{L}}{4\pi R}$$

Temos que,

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$d\mathbf{L} = dz\mathbf{a}_z$$

Logo,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 Idz\mathbf{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Como só temos unitário na direção  $\mathbf{a}_z$ ,  $dA_\phi = dA_\rho = 0$ . Portanto,

$$dA_z = \frac{\mu_0 Idz}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (36)$$

Agora podemos calcular a intensidade de campo magnético, que é obtida tomando-se o rotacional de (36),

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{H} = \frac{Idz}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\phi$$

que é o mesmo valor que será obtido por meio da Lei de Biot-Savart.

Agora, vamos retornar à equação (30), rescrita aqui por conveniência,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (37)$$

onde  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  é uma identidade vetorial.  $\nabla^2 \mathbf{A}$  é o Laplaciano de  $\mathbf{A}$ .

Lembre-se de que em (31) impusemos a condição (cuja prova é deixada como exercício) de que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Com isso, de (37),

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} \quad (38)$$

Com um pouco de álgebra, e com a ajuda do potencial eletrostático e da equação de Poisson, podemos chegar à seguinte expressão para o Laplaciano de  $\mathbf{A}$ ,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (39)$$

Assim, substituindo (39) em (38), obtemos a equação (16) a partir da definição do potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ , ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$