

SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

Campo eletrostático: Trabalho, Energia e Potencial

1) Potencial elétrico

Das nossas aulas anteriores, sabemos que uma carga Q produz um campo \mathbf{E} (intensidade de campo elétrico). Sabemos, ainda, que ao colocarmos uma carga ΔQ em um ponto P próximo a esta carga, a razão entre a força $\Delta \mathbf{F}$ e a carga ΔQ é a medida da intensidade do campo elétrico naquele ponto, ou seja,

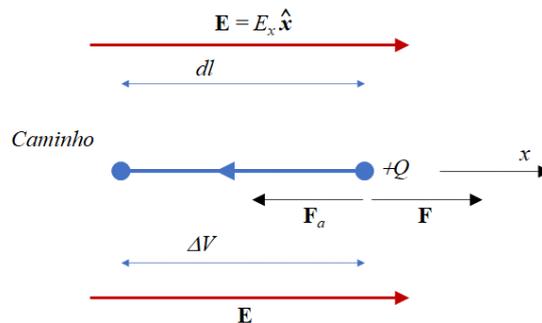
$$\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta Q} = \mathbf{E} \quad (1)$$

Para movermos a carga ΔQ contra o campo elétrico \mathbf{E} , é preciso realizar um trabalho (W). Com base na figura abaixo, onde \mathbf{E} é uniforme e está na direção $+x$, e dl é a distância que queremos mover a carga ΔQ pelo caminho indicado na direção $-x$, temos que o diferencial de trabalho realizado é dado por,

$$dW = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l} = -QE \cdot dl \quad (2)$$

Assim, uma quantidade diferencial de trabalho dW foi realizada quando a força aplicada \mathbf{F}_a produz um deslocamento diferencial $d\mathbf{l}$ da carga (movendo a carga uma distância $dl = |d\mathbf{l}|$).

Importante: para uma carga positiva e $d\mathbf{l}$ na direção de \mathbf{E} , a equação (2) é negativa, o que significa que o trabalho é realizado pelo campo elétrico. Caso (2) fosse positiva, teríamos que o trabalho é realizado contra o campo elétrico.



Lembrando, *trabalho é definido como uma força atuando sobre uma distância*. Escrevendo a razão entre o diferencial de trabalho por um diferencial de carga, supondo que a carga se move contra o campo elétrico, temos,

$$\frac{dW}{dQ} = \frac{dF_x dl}{dQ} = E_x dl \quad (3)$$

onde F_x e E_x são a magnitude de \mathbf{F}_a e \mathbf{E} , respectivamente, ambos na direção x . No sistema SI, a equação (3) tem unidade de

$$\frac{\text{trabalho}}{\text{carga}} = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{volts}$$

Portanto, a quantidade trabalho por unidade de carga é denominada **Potencial**. Assim, o trabalho (ou energia) por unidade de carga requerido para transportar dQ por uma distância dl é denominado diferença de potencial ΔV ao longo de dl . E como se pode ver, o potencial tem unidade de volts (V).

Assim, considerando uma carga envolvida por um campo elétrico, o trabalho para mover esta carga por uma distância finita é dado por,

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4)$$

onde o caminho deve ser especificado a priori.

Exemplos:

- 1) [Hayt Jr.] Suponha $\mathbf{E} = (2y + 1)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$. Encontre o trabalho para mover uma carga de $5 \mu\text{C}$ ao longo de uma distância incremental de 1 mm começando em (1,2,-1) se estendendo até:
 - a) (2,2,-1)
 - b) (11,6,-7)
 - c) (3,-3,-1)

Respostas: 0; -25; -30.8 nJ

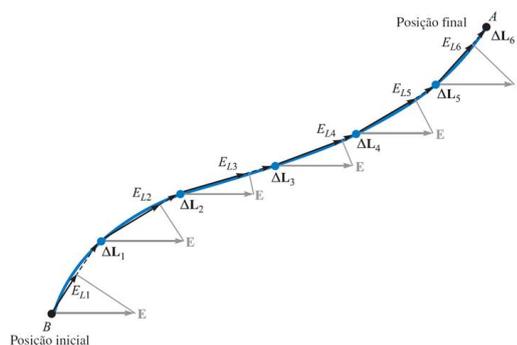
- 2) [Hayt Jr.] Repita o problema anterior para os mesmos parâmetros, mas começando no ponto (2,3,0). Ou seja, os caminhos agora se estendem até:
 - a) (3,3,0)
 - b) (12,7,-6)
 - c) (4,-2,0)

Respostas: 5.57; -35; -42.2 nJ

2) Integral de linha

A equação (4) é um exemplo de integral de linha. A solução desta integral pode ser feita de mais de uma maneira, sendo a mais fácil quebrando o caminho A-B em segmentos e somando as contribuições originais. Isso será deixado a critério do aluno.

O importante é saber que o trabalho realizado para mover uma carga de um ponto A para o ponto B, em um campo elétrico uniforme, independe da forma do caminho (como o da figura abaixo). Na verdade, depende da carga, de \mathbf{E} , e do comprimento do caminho L_{BA} .



Assim, em um campo uniforme \mathbf{E} , a integral

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5)$$

Torna-se,

$$W = -QE \cdot \int_B^A d\mathbf{l} \quad (6)$$

onde a integral em (6) resulta em L_{BA} , e o trabalho W , torna-se,

$$W = -QE \cdot L_{BA} \quad (7)$$

O processo acima pode ser ilustrado da seguinte forma [Hayt Jr.]: Considere um campo não uniforme dado por,

$$\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

Determine o trabalho requerido para mover uma carga de 2 C de $B(1,0,1)$ para $A(0.8,0.6,1)$ ao longo do arco mais curto do círculo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$$

Em coordenadas cartesianas, o caminho diferencial $d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$. Assim, a integral torna-se,

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z)$$

$$W = -2 \int_1^{0.8} y dx - 2 \int_0^{0.6} x dy - 4 \int_1^1 dz$$

Com base no caminho circular sugerido, e selecionando o sinal do radical que é apropriado ao quadrante envolvido, temos (note o limite de integração em z),

$$W = -2 \int_1^{0.8} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{0.6} \sqrt{1-y^2} dy - 0$$

$$W = -[x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x]_1^{0.8} - [y\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1} y]_0^{0.6}$$

$$W = -0.96 \text{ J}$$

A título de comparação, suponha, agora, que o caminho seja uma linha reta ligando B e A . Precisamos determinar a equação da reta para este problema. Qualquer duas das equações abaixo são suficientes para definirmos a linha. Assim,

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} (x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B} (y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B} (z - z_B)$$

Da primeira equação, temos $y = -3(x - 1)$,

e da segunda, $z = 1$.

Assim,

$$W = -2 \int_1^{0.8} y dx - 2 \int_0^{0.6} x dy - 4 \int_1^1 dz = 6 \int_1^{0.8} (x - 1) dx - 2 \int_0^{0.6} (1 - \frac{y}{3}) dy - 0$$

$$W = -0.96 \text{ J}$$

Ou seja, caminhos diferentes, mas de mesmo comprimento, produzem o mesmo trabalho.

Note que o problema acima foi resolvido em coordenadas cartesianas. Mas por conveniência vale expressar $d\mathbf{l}$ nas três coordenadas, para facilitar consultas futuras. Assim,

Cartesianas: $d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$

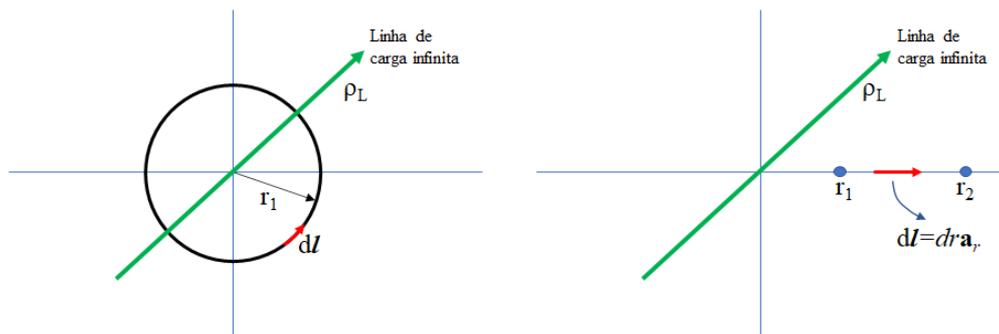
Cilíndricas: $d\mathbf{l} = dr\mathbf{a}_r + r d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z$

Esféricas: $d\mathbf{l} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi$

Outra maneira de ilustrar o uso da integral de linha consiste em investigar diferentes caminhos que podemos tomar próximo a uma linha de carga infinita [Hayt Jr.]. O campo para este problema, como já sabemos, é da seguinte forma,

$$\mathbf{E} = E_r\mathbf{a}_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{a}_r$$

A ideia é calcular o trabalho para mover uma carga positiva em um caminho circular de raio r_1 centrado na linha de carga, como ilustra a figura abaixo à esquerda.



A simetria do problema sugere que $d\mathbf{l}$ esteja em coordenadas cilíndricas, e o caminho circular requer que dr e dz sejam ambos iguais a zero. Logo,

$$d\mathbf{l} = r_1 d\phi\mathbf{a}_\phi$$

$$W = -Q \int_{\text{inicio}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r_1} \mathbf{a}_r \cdot r_1 d\phi \mathbf{a}_\phi = -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

Ou seja, o trabalho realizado em um caminho fechado é igual a zero. Suponha, agora, que queiramos mover a carga na direção radial, de r_1 para r_2 , como mostra a figura acima à direita.

$$W = -Q \int_{\text{início}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{r} \mathbf{a}_r = -Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Como $r_2 > r_1$, o logaritmo será positivo e o trabalho realizado será negativo. Isso implica que a fonte externa que move a carga recebe energia.

Exemplos [Hayt Jr.]:

1) Calcule o trabalho realizado para mover a carga de 1 C do infinito para $(a, 0, 0)$ ao longo do eixo x no campo:

- $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$
- $\mathbf{E} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$
- $\mathbf{E} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)$

Respostas: 0; $1/a$; infinito J

2) Encontre o trabalho realizado para mover a carga de 1 C

- De $(6, 8, -10)$ para $(3, 4, -5)$ ao longo de uma linha reta no campo $\mathbf{E} = -x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$.
- De $(r = 1, \theta = 30^\circ, \phi = 0^\circ)$ para $(r = 0.5, \theta = 60^\circ, \phi = 90^\circ)$ procedendo nas direções $\mathbf{a}_\phi, \mathbf{a}_\theta$, e $-\mathbf{a}_r$ (nesta sequência) no campo $\mathbf{E} = \left(\frac{1}{r^2}\right)\mathbf{a}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\phi$.
- De $(r = 1, \phi = 0^\circ, z = 0)$ para $(r = 1, \phi = 90^\circ, z = 5)$ ao longo de um caminho helicoidal $z = \left(\frac{10\phi}{\pi}\right)$, $r = 1$, no campo $\mathbf{E} = \left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{a}_r - \frac{1}{r}\mathbf{a}_\phi + 2\mathbf{a}_z$.

Respostas: 3.34; -8.43; 25.5 J

3) Calcule o trabalho realizado no deslocamento de uma carga de 4 C de $B(1, 0, 0)$ até $A(0, 2, 0)$ pelo caminho $y = 2 - 2x, z = 0$ no campo $\mathbf{E} = (a) 5\mathbf{a}_x$ V/m, (b) $5x\mathbf{a}_x$ V/m; (c) $5x\mathbf{a}_x + 5y\mathbf{a}_x$ V/m.

Respostas: 20 J; 10 J; -30 J

4) Veremos mais tarde que um campo \mathbf{E} variante no tempo não é conservativo. (Se ele não for conservativo, o trabalho expresso pela Equação (4) deve ser uma função do caminho utilizado.) Sendo $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x$ V/m em certo instante de tempo, calcule o trabalho necessário para deslocar uma carga de 3 C de $(1, 3, 5)$ até $(2, 0, 3)$ ao longo dos segmentos de linha reta que unem:

- $(1, 3, 5)$ a $(2, 3, 5)$ a $(2, 0, 5)$ a $(2, 0, 3)$
- $(1, 3, 5)$ a $(1, 3, 3)$ a $(1, 0, 3)$ a $(2, 0, 3)$.

Respostas: -9 J; 0

3) Diferença de Potencial

Da equação (4), repetida aqui por conveniência, sabemos que o trabalho realizado por uma fonte externa para mover uma carga Q de um ponto a outro em um campo elétrico é dado por,

$$W = -Q \int_{inicial}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Assim, podemos definir a diferença de potencial V como sendo o trabalho realizado por uma fonte externa no deslocamento de uma carga de um ponto a outro em um campo elétrico da seguinte forma,

$$\text{Diferença de potencial} = V = - \int_{inicial}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

A diferença de potencial entre os pontos A e B (supondo que a carga será deslocada do ponto B para o ponto A) é escrita como,

$$V = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{V}) \quad (9)$$

Assim, considere uma carga Q localizada na origem, tendo o campo elétrico dado por:

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r$$

Queremos mover a carga de r_B para r_A . O potencial nesse caso é escrito como,

$$V = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Se $r_B > r_A$, V_{AB} é positiva, indicando que energia é despendida pela fonte externa quando traz a carga positiva de r_B até r_A .

A equação abaixo,

$$V_{AB} = V_A - V_B \quad (10)$$

pressupõe que tanto V_A quanto V_B estão em um mesmo referencial de zero.

Exemplo [Hayt Jr]:

- 1) Um campo elétrico é expresso em coordenadas cartesianas por $\mathbf{E} = 6x^2 \mathbf{a}_x + 6y \mathbf{a}_y + 4 \mathbf{a}_z$ V/m. Calcule:
 - a) V_{MN} se os pontos M e N são especificados por $M(2, 6, -1)$ e $N(-3, -3, 2)$;
 - b) V_M se $V = 0$ em $Q(4, -2, -35)$;
 - c) V_N se $V = 2$ em $P(1, 2, -4)$.

Respostas: $-139,0$ V; $-120,0$ V; $19,0$ V

4) Campo Potencial de uma carga pontual

A forma mais simples de definirmos um zero de referência para uma carga na origem é supor $V = 0$ no infinito. Assim, com $r_B \rightarrow \infty$, o potencial em r_A torna-se,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

ou simplesmente,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (11)$$

A interpretação física de (11) nos diz que $Q/4\pi\epsilon_0 r$ joules de trabalho devem ser realizados para se deslocar uma carga de 1 C do infinito até um ponto qualquer a r metros da carga Q .

Nota: o potencial é um campo escalar.

No contexto de referência de potencial, é importante definirmos uma superfície em que todos os pontos apresentam o mesmo valor de potencial. Esta superfície é denominada **superfície equipotencial**. Todas as linhas de campo devem ser perpendiculares à superfície equipotencial, nos pontos onde tais linhas interceptarem a superfície.

Portanto, **não há trabalho envolvido no deslocamento de uma carga por uma superfície equipotencial porque não há diferença de potencial entre dois pontos nestas superfícies.**

Exemplo [Hayt Jr]:

- 1) Uma carga pontual de 15 nC localiza-se na origem, no espaço livre. Calcule V_1 se o ponto P_1 está posicionado em $P_1(-2, 3, -1)$ e:
 - a) $V = 0$ em (6, 5, 4);
 - b) $V = 0$ no infinito;
 - c) $V = 5$ V em (2, 0, 4).

Respostas: 20,67 V; 36,0 V; 10,89 V

5) Campo Potencial de um sistema de cargas

Nesta seção iremos tratar da propriedade conservativa, ou seja, o trabalho realizado (e consequentemente o potencial) independente do caminho. Assim, o campo potencial de uma carga Q_1 posicionada em r_1 é dado por,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

O potencial devido a duas cargas, por superposição, torna-se,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

Portanto, o potencial devido a n cargas,

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \quad (12)$$

Finalmente, se cada carga for representada por um elemento de uma distribuição volumétrica contínua de cargas $\rho_v \Delta v$, e supondo um número infinito de elementos, obtemos a seguinte forma integral,

$$V(\mathbf{r}) = \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13)$$

Se considerarmos uma linha de cargas, temos que,

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_l(\mathbf{r}') dl'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14)$$

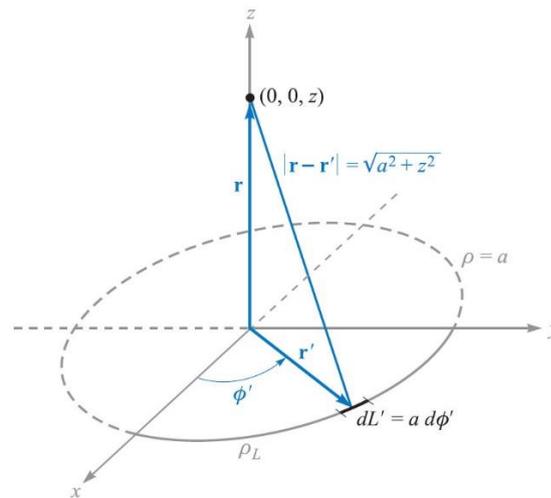
Caso tenhamos uma distribuição superficial, então,

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}') dS'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15)$$

Exemplo [Hayt Jr]:

IMPORTANTE: Eu estou adotando a partir de agora o Hayt Jr 8ª Edição. Nesta edição, o autor usa como variável de raio a letra grega ρ . Na minha antiga edição (2ª Edição) a variável era r . Assim, fiquem atentos quanto aos exemplos, e principalmente as figuras.

- 1) Calcule V no eixo z para uma linha uniforme de cargas ρ_l na forma de um anel, $\rho = a$, no plano $z = 0$, conforme mostrado na figura abaixo.



Resposta:

Da equação (14), temos $dl' = a d\phi'$, $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$, logo,

$$V(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l a d\phi'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Por fim, vale sempre lembrar que nenhum trabalho é realizado ao se deslocar uma carga sobre um caminho fechado, ou seja,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (16)$$

A equação (16) é verdadeira para campos estáticos (sem variação temporal). Qualquer campo que satisfaça esta equação é denominado conservativo.

Exemplo [Hayt Jr]:

- 1) Tomando o zero de referência para o potencial no infinito, calcule o potencial em (0, 2, 2) causado pela seguinte configuração de cargas no espaço livre:
 - a) 12 nC/m na linha $\rho = 2,5$ m, $z = 0$;
 - b) carga pontual de 18 nC em (1, 2, -1);
 - c) 12 nC/m na linha $y = 2,5$, $z = 0$, $-1,0 < x < 1,0$.

Respostas: 529 V; 43,2 V; 66,3 V

6) Gradiente de Potencial

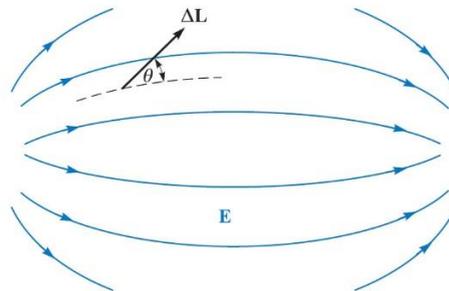
O objetivo desta seção é apresentar um método simples para encontrar a intensidade de campo elétrico por meio do **potencial**.

Sabemos de (9) que,

$$V = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{V}) \quad (17)$$

No entanto, é mais fácil encontrarmos V a partir de \mathbf{E} . Assim, considere uma região arbitrária no espaço como ilustra a figura abaixo, onde tanto \mathbf{E} quanto V variam espacialmente. Da equação (17), temos que para $\Delta\mathbf{l}$ muito pequeno, \mathbf{E} é suposto constante, e portanto,

$$\Delta V \doteq - \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{l}$$



Designando o ângulo entre $\Delta\mathbf{l}$ e \mathbf{E} como θ , temos

$$\Delta V \doteq - E \Delta l \cos\theta \quad (18)$$

Rearranjando (18),

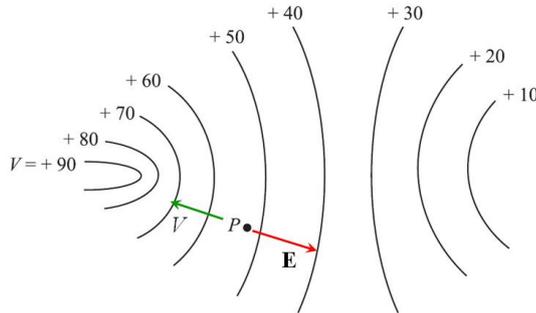
$$\frac{\Delta V}{\Delta l} = -E \cos\theta \quad (19)$$

Se quisermos saber o valor máximo de ΔV , precisamos ver em que direção devemos colocar $\Delta\mathbf{l}$. Assim, ΔV_{max} ocorre quando o unitário associado a $\Delta\mathbf{l}$ (a magnitude de $\Delta\mathbf{l}$), ou seja, \mathbf{a}_l , estiver na direção oposta a \mathbf{E} ou quando $\cos\theta = -1$.

$$\left. \frac{\Delta V}{\Delta l} \right|_{max} = E$$

Essa discussão visa mostrar duas características da relação entre \mathbf{E} e V (ilustradas na figura abaixo):

- 1) E é o valor máximo da taxa de variação do potencial com a distância;
- 2) O valor máximo só ocorre quando \mathbf{a}_l está no sentido oposto a \mathbf{E} . Ou seja, o sentido de \mathbf{E} é oposto ao sentido no qual o potencial aumenta rapidamente.



Assim, o sentido de aumento (mais rápido) do potencial é perpendicular às superfícies equipotenciais. Da mesma forma, o sentido de \mathbf{E} , além de oposto ao de V , também é perpendicular às superfícies equipotenciais.

Com isso, a intensidade de campo elétrico é obtida da seguinte forma,

$$\mathbf{E} = - \left. \frac{\Delta V}{\Delta l} \right|_{max} \mathbf{a}_N \quad (20)$$

onde \mathbf{a}_N é o unitário normal à superfície equipotencial.

A operação matemática aplicada a V que nos permite obter \mathbf{E} é o gradiente, definido pelo operador ∇ . Assim, o gradiente de um campo escalar V é dado por,

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z = -\mathbf{E} \quad (21)$$

onde o operador ∇ , já definido em (16), é dado por,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

Assim, podemos escrever,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (22)$$

Escrevendo o gradiente nas três coordenadas:

Coordenadas cartesianas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (23)$$

Em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (24)$$

Em coordenadas esféricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (25)$$

Como exemplo [Hayt Jr], considere o campo potencial $V = 2x^2y - 5z$ e um ponto $P(-4, 3, 6)$. Desejamos calcular diversos valores numéricos no ponto P: o potencial V, a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} , a direção e o sentido de \mathbf{E} , a densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} e a densidade volumétrica de carga ρ_v .

Resposta:

O potencial em $P(-4, 3, 6)$ é $V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ V}$

Em seguida, utilizamos o gradiente para obter a intensidade de campo elétrico,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

O valor de \mathbf{E} no ponto P é $\mathbf{E}_P = 48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$

$$e |\mathbf{E}_P| = \sqrt{48^2 + (-32)^2 + 5^2} = 59.9 \text{ V/m}$$

A direção e sentido de \mathbf{E} em P é dada pelo vetor unitário

$$\mathbf{a}_{E,P} = \frac{48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{57.9} = 0.829\mathbf{a}_x - 0.553\mathbf{a}_y + 0.086\mathbf{a}_z$$

Se considerarmos que esses campos existem no espaço livre, então

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} = -35.4xy\mathbf{a}_x - 17.71x^2\mathbf{a}_y + 44.3\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$$

Finalmente, podemos utilizar a relação de divergência para calcular a densidade volumétrica de carga que é a fonte do campo potencial dado,

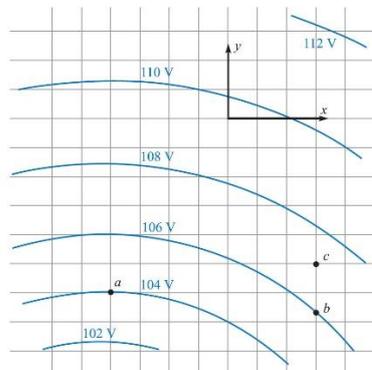
$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = -35.4y \text{ pC/m}^3$$

No ponto P, temos que $\rho_v = -106.2 \text{ pC/m}^3$.

Exemplos:

- 1) [Hayt Jr] Uma porção de um campo potencial bidimensional ($E_z = 0$) é mostrada na abaixo. As linhas de grade estão espaçadas por 1 mm no campo real. Determine os valores aproximados para E em coordenadas retangulares em: (a) a; (b) b; (c) c.

Respostas: $-1.075\mathbf{a}_y \text{ V/m}$; $-600\mathbf{a}_x - 700\mathbf{a}_y \text{ V/m}$; $-500\mathbf{a}_x - 650\mathbf{a}_y \text{ V/m}$



- 2) [Hayt Jr] Dado o campo potencial em coordenadas cilíndricas $V = \frac{100}{z^2+1} r \cos\phi$ V, e o ponto $P(r = 3$ m, $\phi = 60^\circ$, $z = 2$ m), calcule os valores em P para
- V ;
 - \mathbf{E} ;
 - E ;
 - dV/dN ;
 - \mathbf{a}_N ;
 - ρ_v no espaço livre.

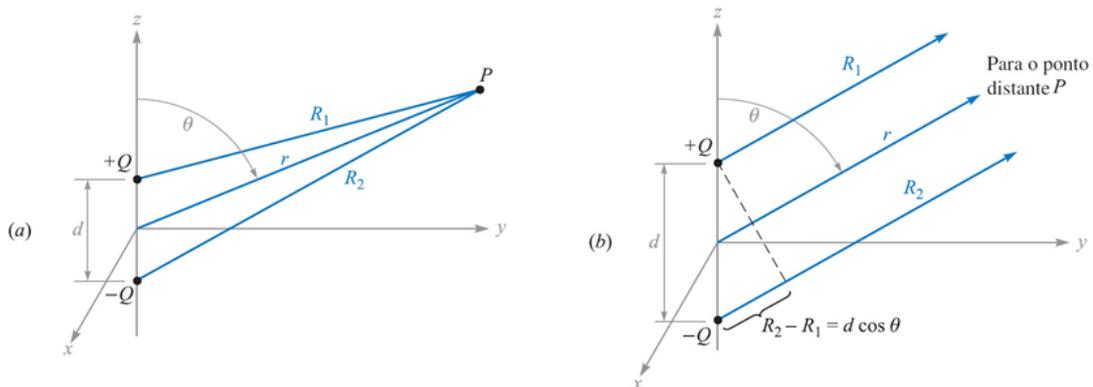
Respostas: 30.0 V; $-10.0\mathbf{a}_r + 17.3\mathbf{a}_\phi + 24.0\mathbf{a}_z$ V/m; 31.2 V/m; 31.2 V/m; $0.32\mathbf{a}_r - 0.55\mathbf{a}_\phi - 0.77\mathbf{a}_z$; -234 pC/m³.

7) Dipolo Elétrico

Os campos de dipolo formam a base do comportamento de materiais dielétricos em campos elétricos.

Definição: Dipolo elétrico é o nome dado a duas cargas pontuais de mesma magnitude e sinais opostos, separadas por uma distância, como mostra a figura abaixo.

Na figura (a) logo abaixo, o ponto P é o local onde queremos calcular V e \mathbf{E} . Esse ponto em coordenadas esféricas é descrito por r , θ , e $\phi = 90^\circ$, devido à simetria azimutal.



É mais simples resolvermos esse problema se calcularmos, primeiramente, o potencial V . Assim, calculamos as distâncias de Q e $-Q$ ao ponto P , sendo elas R_1 e R_2 , respectivamente. Logo,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Da figura acima, podemos concluir que:

- Em $z = 0$, $R_2 = R_1$, e $V = 0$ (e será também zero para os pontos tomados no infinito);
- Se o ponto P é suficientemente distante, podemos tomar R_1 e R_2 como essencialmente paralelos, ver figura (b), o que leva o numerador $R_2 - R_1 = d \cos\theta$, e o denominador $R_1 R_2 = r^2$.

Assim, o potencial torna-se,

$$V = \frac{Qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (26)$$

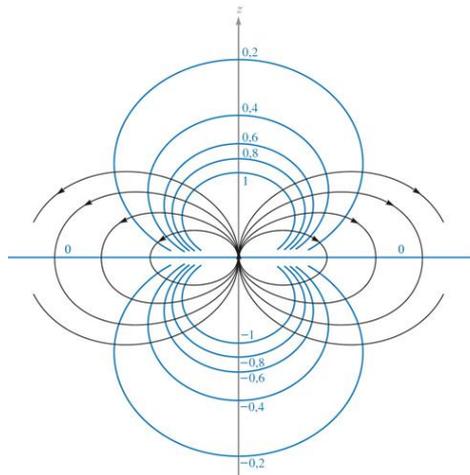
Finalmente, calculando a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} via gradiente de V :

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi\right)$$

Da simetria do problema, temos que $E_\phi = 0$. Logo,

$$\mathbf{E} = -\left(-\frac{Qd \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_r - \frac{Qd \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_\theta\right) = \frac{Qd}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

Graficamente, podemos obter o potencial supondo $\frac{Qd}{4\pi \epsilon_0} = 1$ e $Vr^2 = \cos \theta$. O resultado é mostrado na figura abaixo. O eixo do dipolo é vertical, com a carga positiva no topo. As linhas com setas representam as linhas de potencial, e as sem setas as linhas de força.



A equação (26), que representa o campo potencial do dipolo, pode ser simplificada com o auxílio do **momento de dipolo** (a medida da separação entre duas cargas elétricas opostas), definido como,

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (\text{Cm}) \quad (27)$$

onde \mathbf{d} é o vetor de comprimento ligando $-Q$ e $+Q$.

Como $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d \cos \theta$, temos,

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Generalizando, temos,

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (28)$$

independentemente do tipo de coordenadas, onde \mathbf{r} é relativo ao ponto P e \mathbf{r}' ao centro do dipolo.

Exemplos:

1) Um dipolo elétrico posicionado na origem no espaço livre tem um momento $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ nC · m. Pede-se:

- V em $P_A(2, 3, 4)$.
- V em $r = 2.5$, $\theta = 30^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

Respostas: 0.23 V; 1.97 V

2) Um dipolo de momento $\mathbf{p} = 6\mathbf{a}_z$ nC · m está na origem no espaço livre. Calcule:

a) V em $P(r = 4, \theta = 20^\circ, \varphi = 0^\circ)$.

b) \mathbf{E} em P .

Respostas: 3.17 V ; $1.58\mathbf{a}_r + 0.29\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$

8) Densidade de Energia no Campo Eletrostático

O objetivo desta seção é encontrar a energia potencial de um sistema de cargas. Isso requer que calculemos o trabalho realizado por uma fonte externa no posicionamento das cargas.

Assim, considere o seguinte problema: você quer trazer três cargas pontuais localizadas no infinito para uma região definida do espaço. O trabalho para trazer a carga Q_1 para essa região será zero, porque neste momento não há campo presente produzido por outras cargas. Ao trazer a carga Q_2 para esta região, será realizado um trabalho por conta do campo de Q_1 que já se encontra nesta região. O trabalho nesse caso será igual ao produto de Q_2 e o potencial devido a Q_1 . Assim, temos que o trabalho total para mover as três cargas é dado por,

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + (Q_2 V_{2,1}) + (Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2})$$

onde o potencial $V_{2,1}$ é o potencial no ponto 2 devido à carga Q_1 no ponto 1, e o trabalho W_E é a energia armazenada no campo elétrico da distribuição de cargas.

No caso destas três cargas terem sido trazidas para esta mesma região em ordem reversa, teríamos,

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + (Q_2 V_{2,3}) + (Q_1 V_{1,3} + Q_1 V_{1,2})$$

Se somarmos as duas expressões, teremos,

$$2W_E = Q_1(V_{1,2} + V_{1,3}) + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3}) + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2})$$

onde o termo $Q_1(V_{1,2} + V_{1,3})$ é o trabalho realizado contra os campos de Q_2 e Q_3 , as únicas outras carga na região. Portanto, temos que,

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3}$$

é o potencial na posição 1. Generalizando, temos,

$$2W_E = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3$$

Portanto,

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m V_m \quad (29)$$

Válido para uma região contendo n cargas pontuais. No caso de uma região com densidade linear de carga, temos,

$$W_E = \frac{1}{2} \int \rho V dv \quad (30)$$

A energia armazenada também pode aparecer nas seguintes formas,

$$W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (31)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv \quad (32)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dv \quad (33)$$

Agora, vamos tomar a primeira equação de Maxwell sabendo que $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$, e fazendo uso da seguinte identidade vetorial,

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

Assim, aplicando em (30),

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv \quad (34)$$

Utilizando o Teorema da Divergência em (34), temos,

$$W_E = \frac{1}{2} \oint_s (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv \quad (35)$$

A integral fechada em (35) é zero, porque no limite que $r \rightarrow \infty$, tanto o integrando quanto a integral tendem a zero. Como $\mathbf{E} = -\nabla V$, (35) torna-se

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon_0 E^2 dv \quad (36)$$

Exemplo:

1) [Hayt Jr] Calcule a energia armazenada no espaço livre para a região $2 \text{ mm} < r < 3 \text{ mm}$, $0 < \theta < 90^\circ$, $0 < \varphi < 90^\circ$, dado o campo de potencial:

a) $V = \frac{200}{r} \text{ V}$

b) $V = \frac{300 \cos \theta}{r^2} \text{ V}$

Respostas: 46.4 μJ ; 36.7 J

2) Supondo um potencial $V = 2x + 4y \text{ V}$ no espaço livre, encontre a energia armazenada em 1 m^3 centrado na origem.

Resposta:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z\right) = -2\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Como esse campo possui magnitude $E = |\mathbf{E}| = \sqrt{20}$ V/m e direção constantes em todo o espaço, **a energia total é infinita.**

Entretanto, é possível encontrarmos a densidade de energia pela equação

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon_0 E^2 dv = \frac{10^{-8}}{36\pi} \text{ J}$$