

# SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

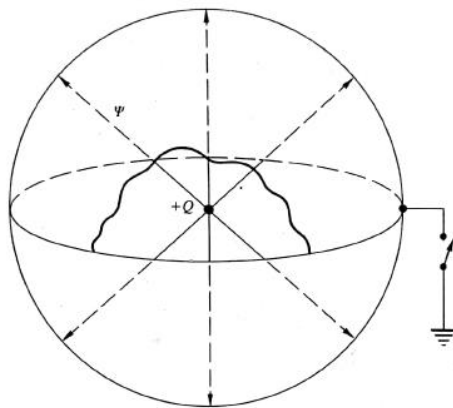
## Densidade de Fluxo Elétrico, Lei de Gauss e Divergência

- 1) Terceira aula: livros do W. Hayt Jr, “Engineering Electromagnetics”, 2nd Edition; J. Krauss, “Electromagnetics”, 4th Edition; S. Ramo, J.R. Whinnery, e T. van Duzer, “Field and waves in communication electronics”.

### 1.1 Densidade de Fluxo Elétrico

A definição da densidade de fluxo elétrico teve início com o seguinte experimento de Michael Faraday baseado em esferas concêntricas separadas por material dielétrico:

- Uma esfera interna carregada positivamente;
- A separação entre as esferas era de 1.9 cm;
- A esfera externa foi aterrada;
- A esfera externa foi, então, separada da interna, e a carga negativa induzida em ambos os hemisférios foi medida.



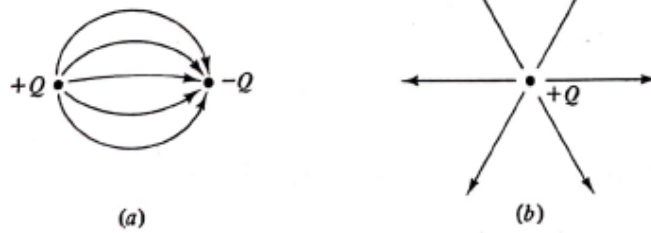
Faraday observou que a carga total na esfera externa era igual em magnitude à carga original da esfera interna, independentemente do tipo de dielétrico separando ambas. A carga negativa  $-Q$  na esfera externa decorria de um **fluxo** transiente de carga negativa devido ao aterramento, passando pela chave e, por fim, para a superfície da esfera, veja a figura acima.

O que causou este fluxo? Faraday concluiu que existe algum tipo de fluxo, ou “deslocamento”, de  $+Q$  para a superfície do condutor que induziu, ou deslocou, as cargas negativas  $-Q$  para a superfície.

Hoje, este deslocamento é referido como: fluxo elétrico, ou  $\Psi$ .

Por definição, o fluxo elétrico  $\Psi$  origina das cargas positivas e termina nas negativas. Na ausência de cargas negativas, ele termina no infinito. Também por definição, um coulomb de carga elétrica produz um coulomb de fluxo elétrico, ou seja,

$$\Psi = Q \quad (1)$$



Com relação à figura acima, o fluxo em (a) sai de  $+Q$  e termina em  $-Q$ , supondo que ambas as cargas são de igual magnitude. (b) ilustra o caso em que a carga negativa não está presente, com as linhas terminando no infinito.

Na superfície da esfera interna,  $Q = \Psi$  coulombs são distribuídos uniformemente sobre a superfície, resultando em uma densidade de fluxo de

$$\frac{\Psi}{4\pi a^2} \text{ ou } \frac{Q}{4\pi a^2} \text{ C/m}^2.$$

Com isso, podemos definir a **densidade de fluxo elétrico**, definida por  $\mathbf{D}$ , que é um vetor, medida em  $\text{C/m}^2$  (também definida como linhas por  $\text{m}^2$ , onde cada linha é devido a um coulomb).

Supondo esferas concêntricas, onde a interna tem raio  $a$  e a externa raio  $b$ , a direção de  $\mathbf{D}$  é radial e dada pela seguinte expressão,

$$\mathbf{D}|_{\text{raio}=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{esfera interna})$$

$$\mathbf{D}|_{\text{raio}=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{esfera externa})$$

A uma distância arbitrária ( $r$ ) entre as esferas, temos,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad a \leq r \leq b \quad (2)$$

Compare estas expressões com a expressão para a intensidade de campo elétrico no espaço livre, dada por,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r.$$

Portanto, no espaço livre, temos que,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (3)$$

Embora a equação (3) esteja escrita em relação ao vácuo, ela pode ser alterada para ser aplicada em qualquer meio, bastando trocar  $\epsilon_0$  pelo  $\epsilon$  do meio de interesse.

Com isso, de uma maneira mais geral, o fluxo elétrico  $\Psi$  pode ser definido como sendo,

$$\Psi = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iint D ds \quad (C) \quad (4)$$

Se integrarmos  $\Psi$  sobre um plano infinito, temos como resultado a carga  $Q$ , ou seja,

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad (C) \quad (5)$$

A expressão (5) vai ficar mais evidente na próxima seção, onde discutiremos a Lei de Gauss. No caso de uma distribuição volumétrica de cargas no espaço livre, temos que,

$$\mathbf{E} = \int_{vol} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (6)$$

Assim, a equação (2) torna-se,

$$\mathbf{D} = \int_{vol} \frac{\rho dv}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (7)$$

Exemplos:

- 1) [Hayt Jr] Considere uma densidade de fluxo elétrico uniforme de  $2 \text{ C/m}^2$  na direção  $3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y$ . Após expressar  $\mathbf{D}$  como um vetor, determine a magnitude do fluxo elétrico que cruza a porção do:
  - a) Plano  $yz$  limitado por  $y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$
  - b) Plano  $zx$  limitado por  $z = 0, z = 1, x = 0, x = 1$
  - c) Plano  $xy$  limitado por  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$

Respostas: 0; 1.2; 1.6 C

- 2) [Hayt Jr] Uma linha de carga uniforme  $\rho_L = 30\pi \text{ C/m}$  está sobre o eixo  $z$  no espaço livre. Determine a componente de  $\mathbf{D}$  na direção da linha  $-\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$  no ponto:
  - a) (2,0,0)
  - b) (0,2,0)
  - c) (3,-4,-2), para achar a resposta certa tem que usar (3,-4,0)

Respostas: -2.2; -2.5; 5 C/m<sup>2</sup>

**Os exemplos abaixo são um pouco mais elaborados e requerem mais atenção.**

- 3) Considere uma carga pontual de 12 nC na origem. Quatro linhas de carga uniformes são localizadas no plano  $x = 0$  da seguinte forma: 80 nC/m em  $y = -1$  e  $-5\text{m}$ ,  $-50 \text{ nC/m}$  em  $y = -2$  e  $-4 \text{ m}$ .
  - a) Calcule  $\mathbf{D}$  no ponto  $P(0,-3,2)$ .
  - b) Quanto de fluxo elétrico cruza o plano em  $y = -3$  e em que direção?
  - c) Quanto de fluxo elétrico deixa a superfície de uma esfera de 4 m de raio, centrada em  $C(0,-3,0)$ ?

Respostas: a)  $-61.1\mathbf{a}_y + 40.7\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$ ; b) 6 nC na direção  $-\mathbf{a}_y$ ; c) 348 nC

- 4) Três superfícies cilíndricas concêntricas cujos raios são 1, 2, e 3 cm possuem densidades de carga de 20, -8, e 5 nC/m<sup>2</sup>, respectivamente.

- a) Quanto de fluxo elétrico passa pela superfície fechada de raio 5 cm,  $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$ ?
- b) Calcule  $\mathbf{D}$  no ponto  $P(1,2,3)\text{cm}$ .

Use  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \text{carga envolvida} = Q$  para obter  $\mathbf{D}$

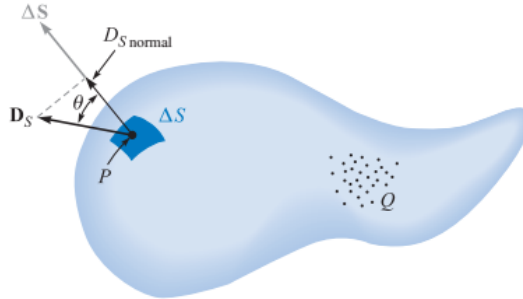
Respostas: a) 1.2 nC; b)  $\mathbf{D}_P = 0.8\mathbf{a}_x + 1.6\mathbf{a}_y \text{ nC/m}^2$

## 1.2 Lei de Gauss

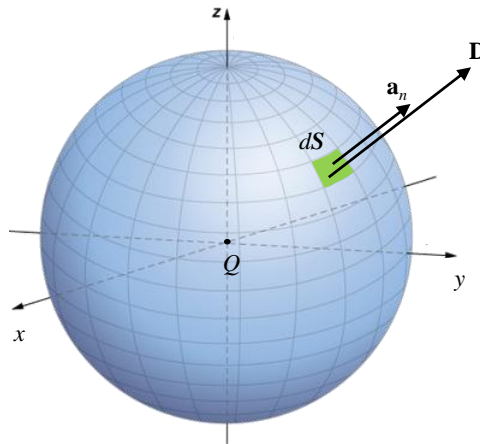
A Lei de Gauss estabelece que o fluxo total que sai de qualquer superfície fechada é igual à carga envolvida por esta superfície. Matematicamente, esta Lei é expressa como,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \text{carga envolvida} = Q = \Psi \quad (8)$$

A figura abaixo mostra que o fluxo total passando por  $\Delta S$  é  $D_S \cdot \Delta S$ .



Assim, considere uma carga pontual positiva na origem, como ilustra a figura abaixo.



Veja que a carga é envolvida por uma superfície esférica, e suponha que esta esfera tenha um raio  $r$ . Assim, a densidade de fluxo magnético  $\mathbf{D}$  devido a  $Q$  possui magnitude constante e é normal à superfície em qualquer ponto da esfera. Assim, da Lei de Gauss, temos,

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \oint dS = D(4\pi r^2)$$

Logo,

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Portanto,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_n = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

A intensidade de campo elétrico devido a  $Q$  é, portanto,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r,$$

Já demonstrado anteriormente. O que nos permite concluir, mais uma vez, que

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (9)$$

Aqui vale notar que em um meio isotrópico (que é o caso do vácuo), tanto  $\mathbf{D}$  quanto  $\mathbf{E}$  estão vetorialmente na mesma direção, diferindo apenas pela constante dielétrica do meio ( $\varepsilon_0$  neste caso). Em meios anisotrópicos, meios onde a permissividade varia em função da direção espacial),  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  não são mais necessariamente paralelos.

No caso de uma superfície que envolva várias cargas, temos,

$$Q = \sum Q_n$$

No caso de ser uma linha de carga,

$$Q = \int \rho_L dL$$

Uma distribuição superficial de carga,

$$Q = \iint \rho_s dS$$

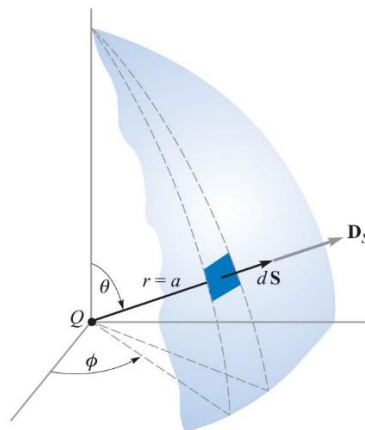
Uma distribuição volumétrica de carga,

$$Q = \iiint \rho dv$$

Portanto, podemos escrever a Lei de Gauss em termos de uma distribuição de carga da seguinte forma,

$$\oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho dv \quad (10)$$

Para ilustrar a Lei de Gauss, considere a figura abaixo, que mostra uma carga localizada na origem de um sistema de coordenadas esféricas [Hayt Jr].



Assim, a intensidade de campo elétrico é escrita como,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Sabendo de (9) que  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , temos

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

Na superfície da esfera, onde  $r = a$ ,

$$\mathbf{D}_s = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r$$

Em coordenadas esféricas, o elemento diferencial de área é

$$dS = r^2 \sin\theta d\phi d\theta = a^2 \sin\theta d\phi d\theta$$

Vetorialmente,

$$d\mathbf{S} = a^2 \sin\theta d\phi d\theta \mathbf{a}_r$$

Assim, a integral fechada torna-se,

$$\begin{aligned} \oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin\theta d\phi d\theta \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\phi d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\phi d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta 2\pi d\theta = \frac{Q}{2} (-\cos\theta) \Big|_0^\pi = Q \end{aligned}$$

Assim, obtivemos a carga contida na origem, como era de se esperar.

Exemplos:

- 1) [Hayt Jr.] O plano  $z = 0$  contém uma carga superficial não-uniforme de  $\rho_s = 50x^2$  C/m<sup>2</sup>. Determine o fluxo total que deixa a superfície fechada definida por:
  - a) Um cubo centrado na origem com 1.8 m de lado, e bordas paralelas aos eixos coordenados.
  - b) Um cilindro de raio 1.5 m com um eixo ao longo do eixo  $x$  estendendo de  $x = 0$  a  $x = 0.9$ .
  - c) Uma esfera de raio 1 m, centrada na origem.

Respostas: 36.4; 39.3; 43.7 C

- 2) [Hayt Jr.] Encontre a carga total dentro de um cubo de 1 m de lado, situado no primeiro octante com um vértice na origem e bordas paralelas aos eixos coordenados, se:

- a)  $\mathbf{D} = 2(x + 2)^2 \mathbf{a}_x$   
 b)  $\mathbf{D} = 10 \sin\left(\frac{\pi y}{6}\right) \mathbf{a}_y$   
 c)  $\mathbf{D} = 12x^2 y^2 \mathbf{a}_x + 8x^3 y \mathbf{a}_y$

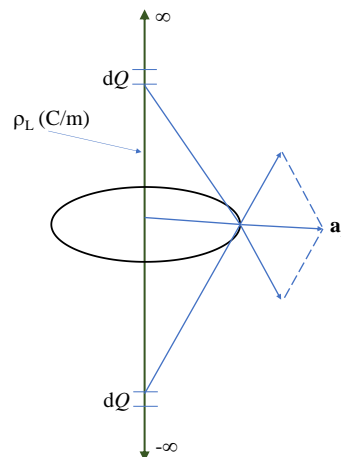
Respostas: 5; 6; 10 C

### 1.3 Superfícies gaussianas especiais

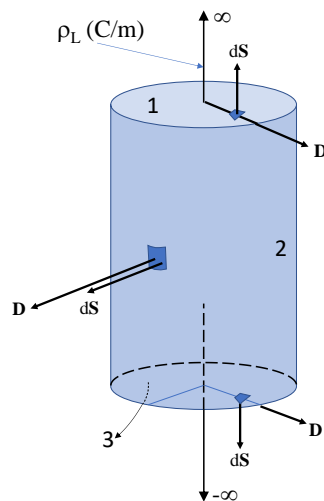
É importante ressaltar que a Lei de Gauss só pode ser aplicada em superfícies fechadas. Assim, as condições que definem uma superfície como gaussiana especial são:

- A superfície tem de ser fechada
- Em cada ponto da superfície o vetor  $\mathbf{D}$  é ou normal ou tangencial à superfície
- $D$  é seccionalmente constante sobre a parte da superfície em que  $\mathbf{D}$  é normal.

Para ilustrar essas condições, utilize uma superfície gaussiana especial para obter o vetor  $\mathbf{D}$  produzido por uma linha de carga  $\rho_L$  (C/m). O problema é ilustrado na figura abaixo e, como podemos ver, a linha de carga pode ser associada ao eixo  $z$  por conveniência (uma vez que a linha de carga se estende de  $-\infty$  a  $+\infty$ ).



Logo, podemos associar este problema a uma geometria cilíndrica, onde a densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$  apresentará apenas componente radial. Portanto, a superfície gaussiana especial para este problema é um cilindro fechado como mostrado abaixo. Os números 1, 2, e 3 denominam as três faces sobre as quais deveremos calcular as integrais.



Assim, aplicando a Lei de Gauss, temos,

$$Q = \int_1 \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_2 \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_3 \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Nas superfícies 1 e 3, tanto  $\mathbf{D}$  quanto  $d\mathbf{S}$  são ortogonais, portanto, a integral vai a **zero**. Já a superfície 2,  $\mathbf{D}$  e  $d\mathbf{S}$  são paralelos (antiparalelos caso a carga seja negativa),  $D$  é constante uma vez que  $r$  (o raio do cilindro) também é constante. Assim,

$$Q = D \int_2 dS = D(2\pi rL)$$

onde  $L$  é o comprimento do cilindro. Uma vez que a carga envolvida pelo cilindro é  $Q = \rho_L L$ , temos que a magnitude da densidade de fluxo elétrico,  $D$ , é

$$D = \frac{\rho_L}{2\pi r}$$

o que resulta em,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

Exemplo:

- 1) Considere um volume de ar definido por  $0 \leq x, y, z \leq 1$  m. Supondo  $\rho = 30x^2y$  ( $\frac{\mu C}{m^3}$ ), encontre a carga dentro deste volume.  
O que ocorre se os limites de  $y$  forem alterados para  $-1 \leq y \leq 0$  m ?

Sabendo que  $dQ = \rho dv$ ,

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 30x^2y dx dy dz = 5\mu C$$

Para  $-1 \leq y \leq 0$  m, temos



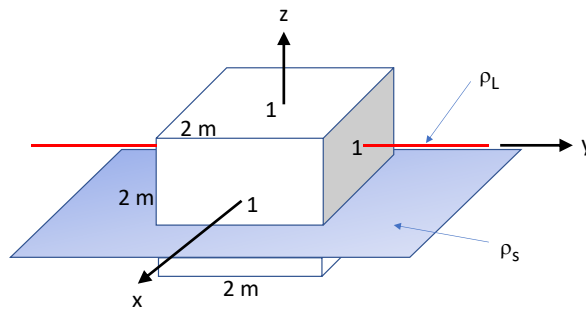
$$Q = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 30x^2 y dx dy dz = -5 \mu C$$

- 2) Uma superfície  $S$  envolve as cargas pontuais  $Q_1=30$  nC,  $Q_2=150$  nC, e  $Q_3=-70$  nC. Calcule o fluxo líquido através de  $S$ .

Como o fluxo elétrico origina nas cargas positivas e termina nas negativas,

$$\Psi_{liq} = Q_{liq} = 30 + 150 - 70 = 110 \text{ nC.}$$

- 3) Um plano de carga com densidade  $\rho_s = 40$  ( $\frac{\mu C}{m^2}$ ) está localizado em  $z=-0.5$ m. Uma linha de carga de  $\rho_L = -6$  ( $\frac{\mu C}{m}$ ) está localizada ao longo do eixo  $y$ . Calcule o fluxo líquido que atravessa um cubo de 2 m cada lado, localizado no centro.



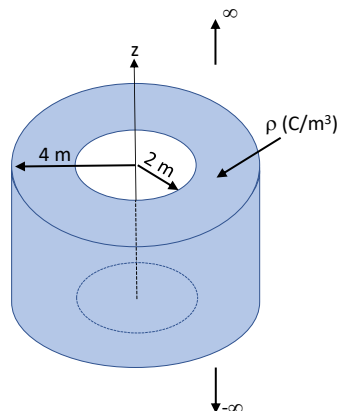
A carga envolvida pelo plano é  $Q = (4 \text{ m}^2)(40 \mu C/m^2) = 160 \mu C$

A carga envolvida pela linha é  $Q = (2 \text{ m})(-6 \mu C/m) = -12 \mu C$

Portanto, a carga total é,

$$Q_{liq} = \Psi_{liq} = 160 \mu C - 12 \mu C = 148 \mu C.$$

- 4) O volume situado entre  $2 \leq r \leq 4$  m contém uma distribuição de carga  $\rho$  ( $C/m^3$ ). Use a Lei de Gauss e encontre  $D$  em todas as regiões.



Para  $0 \leq r \leq 2$  m, temos,

$$Q_{envolvida} = D(2\pi rL)$$

$$\mathbf{D} = 0$$

Para  $2 \leq r \leq 4$  m, temos,

$$\pi\rho L(r^2 - 4) = D(2\pi rL)$$

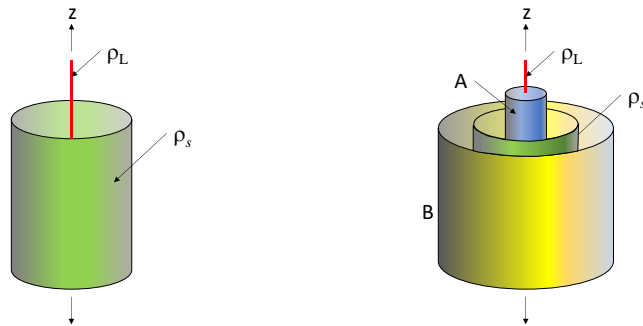
$$\mathbf{D} = \frac{\rho}{2r}(r^2 - 4)\mathbf{a}_r \quad (\text{C/m}^2)$$

Para  $r \geq 4$  m, temos,

$$12\pi\rho L = D(2\pi rL)$$

$$\mathbf{D} = \frac{6\rho}{r}\mathbf{a}_r \quad (\text{C/m}^2)$$

- 5) A estrutura da figura abaixo à esquerda (que se estende de  $-\infty$  a  $+\infty$ ), apresenta o seguinte: Uma carga linear de  $\rho_L = 3 \left(\frac{\mu\text{C}}{\text{m}}\right)$  ao longo do eixo  $z$ , e um cilindro concêntrico de raio 2 m com  $\rho_s = -\frac{1.5}{4\pi} \left(\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}\right)$ . Use a Lei de Gauss para encontrar  $\mathbf{D}$  em todas as regiões.



A solução deste problema requer a utilização das superfícies Gaussianas, como mostrado na figura da direita.

Para a distribuição linear, utilizamos a superfície A, de onde temos,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi r}\mathbf{a}_r \quad \text{para } 0 < r < 2\text{m}$$

Para o cilindro de carga, usamos a superfície B, assim,

$$Q_{env} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Observe que B envolve tanto o cilindro quanto a **linha de carga**, então os dois aparecem aqui:

$$(\rho_L + 2\pi r\rho_s)L = D(2\pi rL)$$

De onde temos (sabendo que  $r=2$  m),

$$D = \frac{(\rho_L + 4\pi\rho_s)}{2\pi r} \quad \text{para } r > 2 \text{ m}$$

Na forma de vetor,

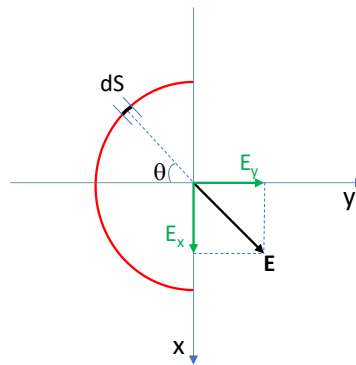
$$\mathbf{D} = \frac{(\rho_L + 4\pi\rho_s)}{2\pi r} \mathbf{a}_r \quad \text{para } r > 2 \text{ m}$$

Substituindo valores,

$$\mathbf{D} = \frac{0.477}{r} \mathbf{a}_r \quad \left( \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \right) \quad 0 < r < 2 \text{ m}$$

$$\mathbf{D} = \frac{0.239}{r} \mathbf{a}_r \quad \left( \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \right) \quad > 2 \text{ m}$$

- 6) A estrutura da figura abaixo é um semicírculo de raio  $a$  de carga uniformemente distribuída com carga  $\rho_L$  (C/m). Calcule  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  no centro do semicírculo.



Ponto de partida, é o campo elétrico devido a uma distribuição linear de carga. Cada diferencial de carga produz um diferencial de campo elétrico na forma,

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

onde  $dQ = \rho_L dl$ .

A simetria do problema nos diz que as contribuições de  $E_x$  irão se cancelar. Logo, o campo elétrico pode ser escrito em termos de  $E_y$ , na forma

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho_L \cos(\theta) dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho_L \cos(\theta) \text{ad}\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

onde  $dl = r d\theta$ , com  $r = a$ . A equação acima simplifica para,

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho_L \cos(\theta) d\theta}{4\pi\epsilon_0 a},$$

$$E_y = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 a} \sin(\theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 a} (1 - (-1)) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (\text{V/m})$$

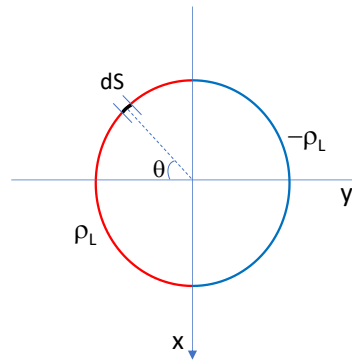
Como  $Q = 2\pi \frac{a}{2} \rho_L = \pi a \rho_L$  temos,  $\rho_L = \frac{Q}{\pi a}$ . Assim,

$$E_y = \frac{Q}{2\epsilon_0 (\pi a)^2} \quad (\text{V/m})$$

Como  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , temos

$$D_y = \frac{Q}{2(\pi a)^2} \quad (\text{C/m}^2)$$

- 7) Suponha, agora, que a configuração anterior seja complementada com um outro semicírculo com carga uniformemente distribuída com carga  $-\rho_L$  (C/m), como ilustra a figura abaixo. Calcule a magnitude dos campos totais  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$ .



O resultado para a distribuição de carga positiva não muda (vide exemplo anterior). No caso da distribuição negativa, o campo  $E_y$  está na direção negativa de  $y$ , mas como a distribuição de carga também é negativa, o resultado é positivo. Logo,

$$E_y^- = \frac{Q}{2\varepsilon_0(\pi a)^2} \quad (\text{V/m})$$

Como  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , temos

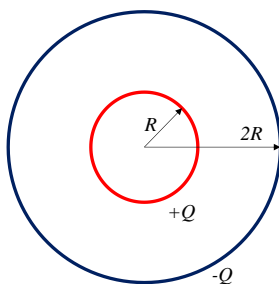
$$D_y^- = \frac{Q}{2(\pi a)^2} \quad (\text{C/m}^2)$$

Assim, os campos totais são:

$$E_{y,t} = E_y^+ + E_y^- = \frac{Q}{2\varepsilon_0(\pi a)^2} + \frac{Q}{2\varepsilon_0(\pi a)^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0(\pi a)^2} \quad (\text{V/m})$$

$$D_{y,t} = D_y^+ + D_y^- = \frac{Q}{2(\pi a)^2} + \frac{Q}{2(\pi a)^2} = \frac{Q}{(\pi a)^2} \quad (\text{C/m}^2)$$

- 8) O esquema abaixo apresenta duas cascas esféricas concêntricas preenchidas por ar, sendo a interna com carga  $+Q$  e a externa  $-Q$ , cujos raios são respectivamente,  $R$  e  $2R$ . Calcule a magnitude do campo elétrico na região entre as duas esferas ( $R < r < 2R$ ). Qual o campo elétrico dentro da esfera interna?



Aqui iremos usar uma superfície Gaussiana cujo raio  $r$  é tal que  $R < r < 2R$ . Da Lei de Gauss, temos que a carga envolvida é dada por:

$$Q_{env} = \oint \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$Q_{env} = \epsilon_0 E \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta = E 4\pi \epsilon_0 r^2$$

Logo,

$$E = \frac{Q_{env}}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad \text{Na forma vetorial, temos que } \mathbf{E} = \frac{Q_{env}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Veja que nós já derivamos isso no começo desta aula, sabendo que  $Q_{env} = +Q$ .

Para calcularmos o campo dentro da esfera interna, usamos uma superfície Gaussiana cujo  $r < R$ . Como  $Q_{env} = 0$  neste caso, logo,  $E = 0$ .

- 9) Considere uma esfera de raio  $R$  com uma densidade de carga volumétrica não-uniforme dada por  $\rho_v = \alpha r$  ( $C/m^3$ ), onde  $\alpha$  é uma constante. Calcule a carga total ( $Q$ ) desta esfera.

$$Q = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v(r) dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \alpha r^3 \sin(\theta) dr d\phi d\theta = \alpha \pi R^4 \quad (C)$$

onde  $dV = r^2 \sin(\theta) dr d\phi d\theta$ .

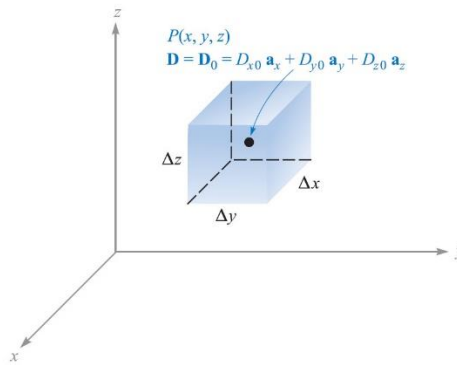
- 10) [Hayt Jr.] Determine as superfícies Gaussianas que devem ser usadas para determinar o campo elétrico em torno de cada uma das distribuições abaixo:
- Um plano infinito de densidade de carga uniforme  $\rho_s = \rho_{s1}$  em  $x = x_1$ .
  - Dois planos paralelos infinitos com densidade de carga uniforme  $\rho_{s1}$  em  $x = x_1$ ,  $\rho_{s2}$  em  $x = x_2$ .
  - Três planos paralelos infinitos com densidade de carga uniforme  $\rho_{s1}$  em  $x = x_1$ ,  $\rho_{s2}$  em  $x = x_2$ ,  $\rho_{s3}$  em  $x = x_3$ .

Respostas: Para a primeira parte, vários cilindros (regra da mão direita) de qualquer seção transversal, faces extremas paralelas ao plano  $x = 0$ ; paralelepípedos retangulares.

#### 1.4 Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de volume diferencial

A ideia desta seção é aplicar a Lei de Gauss em problemas que não apresentam simetria. Nesse caso, a melhor abordagem é escolher uma superfície fechada muito pequena de modo

que  $\mathbf{D}$  seja quase constante sobre esta superfície, e pequenas variações em  $\mathbf{D}$  sejam representadas pelos primeiros dois termos de uma expansão em série de Taylor de  $\mathbf{D}$ , veja figura abaixo.



Considere o ponto  $P$  nesta figura, em coordenadas cartesianas. Neste ponto, temos que

$$\mathbf{D} = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$$

O nosso volume diferencial, nesse caso, tem lados  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  e  $\Delta_z$ . Da Lei de Gauss, temos

$$\oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = Q$$

Para avaliarmos a integral sobre a superfície fechada, é melhor quebrarmos em seis integrais,

$$\oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_{frente} + \int_{trás} + \int_{esquerda} + \int_{direita} + \int_{topo} + \int_{baixo}$$

Como o elemento de superfície é infinitesimal,  $\mathbf{D} \cong$  constante, e

$$\int_{frente} \doteq \mathbf{D}_{frente} \cdot \Delta\mathbf{S}_{frente} = \mathbf{D}_{frente} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x = D_{x,frente} \Delta y \Delta z$$

Como a frente está a uma distância  $\Delta_x/2$  de  $P$ , temos

$$D_{x,frente} \doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{taxa de variação de } D_x \text{ com } x$$

$$D_{x,frente} \doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

Onde  $D_{x0}$  é o valor de  $D_x$  em  $P$ . Assim,

$$\int_{frente} \doteq \left( D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Por analogia, temos para a parte de trás,

$$\int_{trás} \doteq \left( -D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Combinando *frente e trás*, temos,

$$\int_{frente} + \int_{trás} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Para *esquerda e direita*, encontramos,

$$\int_{esquerda} + \int_{direita} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Para *topo e baixo*, encontramos,

$$\int_{topo} + \int_{baixo} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Combinando todos esses resultados, temos,

$$\oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} \doteq \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (11)$$

Exemplo:

- 1) Se  $\mathbf{D} = 5e^{2x}e^{3y}(2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y)$ , use a fórmula aproximada acima para estimar a carga total contida dentro de uma pequena esfera de raio 1 mm localizada em:
- (0,0,0)
  - (1,-1,1)
  - (-1,2,3)

Respostas: 0.1; 0.272; 14.87 ( $\mu\text{C}$ )

## 1.5 Divergente

Baseado em nossas aulas anteriores, podemos verificar que existem dois indicadores que nos possibilitam verificar como um campo vetorial se modifica de um ponto para outro, ou seja, o primeiro é o rotacional e o segundo é o divergente. O divergente é um escalar que carrega similaridade com a derivada de uma função.

### Importante:

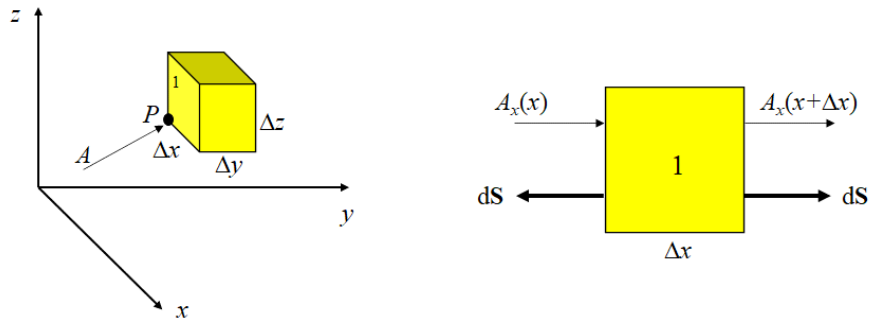
- Quando o divergente de um campo vetorial é diferente de zero, temos uma fonte (divergente positivo) ou um vertedouro (divergente negativo).
- Em campos estáticos, lembre-se que o fluxo elétrico  $\Psi$  origina de cargas positivas. Logo, regiões de cargas positivas contém fontes de  $\Psi$ , e o  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  será positivo. O oposto ocorre para cargas negativas.

O divergente de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  é definido da seguinte forma:

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (12)$$

*Fisicamente, esta equação estabelece que o divergente do vetor de campo  $\mathbf{A}$  é fluxo que sai de uma pequena superfície fechada por unidade de volume quando este volume tende a zero.*

Em coordenadas cartesianas, temos para o campo vetorial  $\mathbf{A}$ :



$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

Pela definição da integral fechada em (12), precisamos contabilizar as seis faces do cubo da figura acima, e em cada uma dessas faces a direção de  $d\mathbf{S}$  é para fora. O número “1” que aparece no cubo é apenas uma referência à face 1 deste cubo. A figura à direita mostra como fica esta definição para a face 1.

Como as faces do cubo são de dimensão infinitesimal, temos

$$\int_{\substack{\text{face} \\ \text{esquerda}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx -A_x(x) \Delta y \Delta z,$$

onde o sinal negativo se deve às direções de  $A_x$  e  $d\mathbf{S}$  na entrada do cubo como ilustrado na figura da direita acima.

Para a face da direita, temos,

$$\int_{\substack{\text{face} \\ \text{direita}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx A_x(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \approx \left[ A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

Portanto, somando as contribuições das duas faces, temos,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Procedimento similar deve ser adotado para os outros dois pares de faces, de onde obtemos,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Compare esta equação com a equação (11).

Dividindo equação acima por  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta v$  e fazendo  $\Delta v \rightarrow 0$ , temos que o divergente em coordenadas cartesianas é escrito como,

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (13)$$

Em coordenadas cilíndricas,



$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (14)$$

Em coordenadas esféricas,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (15)$$

Podemos, também, expressar o divergente do campo vetorial  $\mathbf{A}$  com a ajuda do operador vetorial Nabla ( $\nabla$ ), definido como (Nota: este operador é definido apenas em coordenadas cartesianas),

$$\nabla \equiv \frac{\partial(\quad)}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial(\quad)}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (16)$$

Quando temos um produto escalar entre  $\nabla$  e o campo vetorial  $\mathbf{A}$ , o resultado é o divergente de  $\mathbf{A}$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \frac{\partial(\quad)}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial(\quad)}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (18)$$

### 1.6 A primeira equação de Maxwell (eletrostática)

Do formalismo discutido na seção anterior, veja a equação (12), podemos escrever que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Sabemos da Lei de Gauss que,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{env}$$

que tomada por unidade de volume, resulta em

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

Isso nos leva a,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

que é a primeira das quatro equações de Maxwell, e estabelece que o fluxo elétrico por unidade de volume que sai de um volume infinitesimal é igual à densidade volumétrica de carga dentro deste volume.

### 1.7 O teorema da divergência

A Lei de Gauss estabelece que,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho dv = \text{carga envolvida} = Q_{env}$$

Porém,  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ , logo,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv \quad (19)$$

Esta equação é conhecida como o Teorema da Divergência, e também como o Teorema da Divergência de Gauss. Para um campo vetorial arbitrário  $\mathbf{A}$ , temos

$$\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv \quad (20)$$

Para exemplificar este Teorema, suponha uma região  $r \leq a$  em coordenadas esféricas apresenta

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon} \mathbf{a}_r.$$

Calcule o Teorema da Divergência para este vetor, examinando cada lado separadamente.

Resposta:

Lado esquerdo: escolha para a superfície S uma superfície esférica com  $r = b \leq a$ .

$$\begin{aligned} \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint \left( \frac{\rho r}{3\epsilon} \mathbf{a}_r \right) \cdot (b^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r) \\ \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho b^3}{3\epsilon} \sin\theta d\theta d\phi \\ \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{4\pi\rho b^3}{3\epsilon} \end{aligned}$$

Lado direito:

$$\iiint (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv$$

Temos que:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}$

Assim,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^b \frac{\rho}{\epsilon} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{4\pi\rho b^3}{3\epsilon}$$

$$\iiint (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = \frac{4\pi\rho b^3}{3\epsilon}$$

Observe que, como era de se esperar, os dois lados dão resultados iguais. Sendo assim, quando se deve usar este Teorema? Quando houver necessidade de mudar de uma integração de superfície fechada para uma integração de volume.

É importante ressaltar que o Teorema da Divergência de Gauss também se aplica a campos variantes no tempo.

Exemplos:

- 1) A região  $r \leq a$  em coordenadas esféricas contém uma densidade de carga uniforme  $\rho$ , enquanto para  $r > a$  a densidade de carga é zero. Sabendo que,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r, \quad \text{para } r \leq a$$

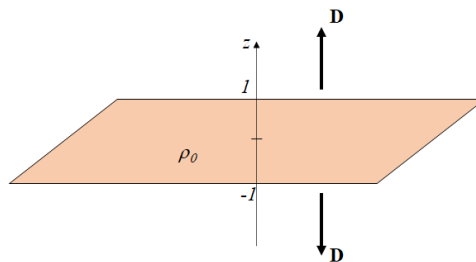
$$\mathbf{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r, \quad \text{para } r > a$$

Calcule o divergente de  $\mathbf{E}$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) = \frac{1}{r^2} \left( 3r^2 \frac{\rho}{3\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{para } r \leq a$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \right) = 0, \quad \text{para } r > a$$

- 2) Sabendo que  $\mathbf{D} = \rho_0 z \mathbf{a}_z$  na região  $-1 \leq z \leq 1$ , e que  $\mathbf{D} = \frac{\rho_0 z}{|z|} \mathbf{a}_z$  no restante, calcule a densidade de carga em coordenadas cartesianas.



Sabemos que  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

Assim, para  $-1 \leq z \leq 1$ ,

$$\rho = \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 z) = \rho_0$$

Para  $z < -1$  ou  $z > 1$ ,

$$\rho = \frac{\partial}{\partial z} (\mp \rho_0) = 0$$

- 3) Sabendo que  $\mathbf{D} = \frac{10r^3}{4} \mathbf{a}_r$  (C/m<sup>2</sup>) na região  $0 \leq r \leq 3$  m, em coordenadas cilíndricas, e que  $\mathbf{D} = \frac{810}{4r} \mathbf{a}_r$  (C/m<sup>2</sup>) no restante, encontre a densidade de carga.

Para  $0 \leq r \leq 3$  m,

$$\rho = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{10r^3}{4} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{10r^4}{4} \right) = 10r^2 \text{ (C/m}^3\text{)}$$

Para  $r > 3$  m,

$$\rho = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{810}{4r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{810}{4} \right) = 0$$

- 4) Um dipolo elétrico com cargas em  $\pm d/2$  no eixo  $z$  tem o seguinte campo elétrico,

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \mathbf{a}_r + \sin\theta \mathbf{a}_\theta)$$

Mostre que o divergente deste campo é igual a zero.

- 5) Sabendo que  $\mathbf{D} = 10\sin\theta \mathbf{a}_r + 2\cos\theta \mathbf{a}_\theta$ , encontre a densidade de carga.

Resposta:  $\frac{\sin\theta}{r} (18 + 2 \cot^2 \theta)$

- 6) Sabendo que  $\mathbf{D} = \frac{3r}{r^2+1} \mathbf{a}_r$ , em coordenadas esféricas, encontre a densidade de carga.

Resposta:  $3(r^2 + 3)/(r^2 + 1)^2$