

SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

Condutores e Dielétricos

Resolução dos problemas pares propostos no Capítulo 5 do Hayt Jr, 8ª Edição

5.2 Dado $\mathbf{J} = -10^4(y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y)$ A/m², calcule a corrente que atravessa o plano $y = 0$ na direção e sentido $-\mathbf{a}_y$, entre $z = 0$ e 1, e $x = 0$ e 2.

Como o problema pede a corrente em $y = 0$, temos que $\mathbf{J}(x, 0) = -10^4x\mathbf{a}_y$. Assim, a corrente ao longo do plano $y = 0$ torna-se:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \int_0^1 \int_0^2 10^4x\mathbf{a}_y \cdot (-\mathbf{a}_y) dx dz$$

$I = 2 \times 10^4 \text{ A}$

5.4 Se a densidade volumétrica de carga é dada por $\rho_v = (\cos\omega t)/r^2$ C/m³, em coordenadas esféricas, determine \mathbf{J} . É razoável considerar que \mathbf{J} não é uma função de θ ou ϕ .

Veja que a densidade de carga é função do tempo, e que não há variação angular. Assim, a melhor maneira de obtermos \mathbf{J} é com o auxílio da equação da continuidade em coordenadas esféricas,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\cos\omega t}{r^2} \right) = \omega \frac{\sin\omega t}{r^2}$$

Simplificando,

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) = \omega \sin\omega t$$

Integrando, temos,

$$r^2 J_r = r\omega \sin\omega t + C$$

Como uma carga variante no tempo não produz uma corrente contínua, temos que $C = 0$. Logo,

$$r^2 J_r = r\omega \sin\omega t$$

$$J_r = \frac{\omega \sin\omega t}{r}$$

Vetorialmente,

$$\mathbf{J} = \frac{\omega \sin \omega t}{r} \mathbf{a}_r \text{ A/m}^2$$

5.6 Em coordenadas esféricas, uma densidade de corrente $\mathbf{J} = -\frac{k}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\theta \text{ A/m}^2$ existe em um meio condutor, onde k é uma constante. Determine a corrente total, na direção \mathbf{a}_z , que atravessa um disco circular de raio R , centrado no eixo z e localizado em (a) $z = 0$; (b) $z = h$.

O problema pede a corrente que atravessa um disco. Isso quer dizer que teremos que resolver em coordenadas cilíndricas. Assim,

$$d\mathbf{S} = \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z$$

$$I = \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z \rho d\rho d\phi$$

Recorrendo às tabelas da Aula 1, temos que,

$$\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z = -\sin \theta$$

e sabendo que $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2} \sin \theta} \sin \theta d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\rho d\phi$$

$$I = k2\pi \sqrt{\rho^2 + z^2} \Big|_0^R$$

$$I = k2\pi \left[\sqrt{R^2 + z^2} - z \right]$$

Em $z = 0$, como pedido em (a), temos que,

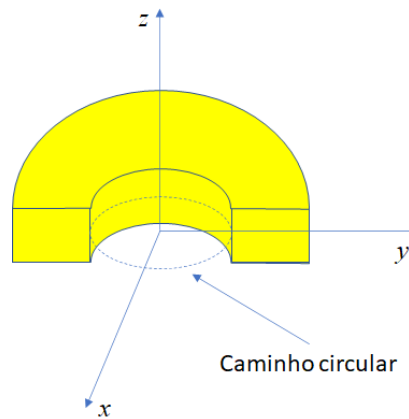
$$I(0) = k2\pi R$$

Em $z = h$, como pedido em (b), temos que,

$$I(h) = k2\pi \left[\sqrt{R^2 + h^2} - h \right]$$

5.10 Uma arruela de latão tem diâmetro interno de 2 cm, diâmetro externo de 5 cm e espessura igual a 0,5 cm. Sua condutividade é $\sigma = 1,5 \times 10^7 \text{ S/m}$. A arruela é cortada ao meio, ao longo do diâmetro, e uma tensão é aplicada entre as duas faces retangulares de uma das partes cortadas. O campo elétrico resultante, no interior da arruela cortada ao meio, é $\mathbf{E} = \frac{0,5}{\rho} \mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$, em coordenadas cilíndricas, onde o eixo z corresponde ao eixo da arruela. (a) Qual diferença de potencial existe entre as duas faces retangulares? (b) Qual corrente total está fluindo na arruela? (c) Qual é a resistência entre as duas faces?

a) Calculando a diferença de potencial entre os dois pedaços de arruela:



$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

Iremos calcular o potencial ao longo apenas de metade do caminho indicado na figura. Lembre-se de que o potencial ao longo de um caminho fechado é zero.

Assim, por conta da geometria,

$$d\mathbf{L} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{E} = \frac{0,5}{\rho} \mathbf{a}_\phi$$

$$V_{AB} = - \int_\pi^0 \frac{0,5}{\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi \rho d\phi$$

$V_{AB} = 0,5\pi V$

b) Corrente fluindo na arruela

Primeiramente, veja que a arruela possui uma condutividade. Assim, podemos começar usando a forma pontual da Lei de Ohm, que relaciona a densidade de corrente com a condutividade e a intensidade de campo elétrico,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Assim,

$$\mathbf{J} = \left(1,5 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}} \right) \left(\frac{0,5}{\rho} \mathbf{a}_\phi \frac{\text{V}}{\text{m}} \right)$$

$$\mathbf{J} = \frac{7,5 \times 10^6}{\rho} \mathbf{a}_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

A expressão acima é a densidade de corrente. Para calcularmos a corrente, usamos a seguinte relação,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

onde $d\mathbf{S}$ é a área da seção transversal da arruela, sendo dada por $d\mathbf{S} = d\rho dz \mathbf{a}_\phi$. Assim,

$$I = \int_s \frac{7,5 \times 10^6}{\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi d\rho dz$$

$$I = 7,5 \times 10^6 \int_s \frac{1}{\rho} d\rho dz = 7,5 \times 10^6 \int_0^{0,5 \times 10^{-2}} \int_{10^{-2}}^{2,5 \times 10^{-2}} \frac{1}{\rho} d\rho dz$$

$$I = (7,5 \times 10^6)(0,5 \times 10^{-2}) \int_{10^{-2}}^{2,5 \times 10^{-2}} \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$I = 3,75 \times 10^4 \ln(r) \Big|_{10^{-2}}^{2,5 \times 10^{-2}} = 3,75 \times 10^4 [\ln(2,5 \times 10^{-2}) - \ln(1 \times 10^{-2})]$$

$I = 3,436 \times 10^4 \text{ A}$

c) Resistência entre as duas faces

$$R = \frac{V_{AB}}{I}$$

$$R = \frac{0,5\pi \text{ V}}{3,436 \times 10^4 \text{ A}}$$

$R = 4,572 \times 10^{-5} \Omega$

5.12 Duas placas condutoras idênticas, cada uma tendo área A , estão posicionadas em $z = 0$ e $z = d$. A região entre as placas está preenchida com um material que possui uma condutividade dependente de z , $\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z/d}$, onde σ_0 é uma constante. Uma tensão V_0 é aplicada à placa em $z = d$. A placa em $z = 0$ está no potencial zero. Calcule, considerando os parâmetros dados: (a) a resistência do material; (b) a corrente total que flui entre as placas; (c) a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} dentro do material.

a) Resistência do material

O material é não homogêneo. Assim, devemos começar com a resistência diferencial para depois podermos integrar. Assim, da relação

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

onde $S = A$, e que foi derivada na Aula 5, concluímos que,

$$dR = \frac{dz}{\sigma(z)A}$$

Integrando ambos os lados, temos,

$$\int dR = \int_0^d \frac{dz}{\sigma(z)A} = \int_0^d \frac{dz}{\sigma_0 e^{-z/d} A} = \int_0^d \frac{e^{z/d} dz}{\sigma_0 A}$$

$$R = \frac{d}{\sigma_0 A} (e - 1)$$

$$R = \frac{1,718d}{\sigma_0 A} \Omega$$

b) A corrente total entre as placas

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0 \sigma_0 A}{1,718d}$$

$$I = \frac{\sigma_0 A V_0}{1,718d}$$

c) Intensidade de campo elétrico \mathbf{E}

Para isso, é melhor usarmos a Lei de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Mas primeiro vamos calcular \mathbf{J} , que é a densidade de corrente que flui na direção $-\mathbf{a}_z$ tendo em vista o potencial aplicado. Assim,

$$\mathbf{J} = -\frac{I}{A} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J} = -\frac{\sigma_0 A V_0}{1,718d A} \mathbf{a}_z = -\frac{\sigma_0 V_0}{1,718d} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma(z)} = -\frac{\sigma_0 V_0}{1,718d (\sigma_0 e^{-z/d})} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0 e^{z/d}}{1,718d} \mathbf{a}_z \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

5.14 Uma placa condutora retangular está posicionada no plano xy , ocupando a região $0 < x < a$, $0 < y < b$. Uma placa condutora idêntica é posicionada de forma paralela diretamente sobre a primeira, em $z = d$. A região entre as placas está preenchida com material que possui condutividade $\sigma(x) = \sigma_0 e^{-x/a}$, onde σ_0 é uma constante. Uma tensão V_0 é aplicada à placa em $z = d$. A placa em $z = 0$ está no potencial zero. Encontre, considerando os parâmetros dados: (a) a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} dentro do material; (b) a corrente total que circula entre as placas; (c) a resistência do material.

a) Intensidade de campo elétrico \mathbf{E} dentro do material

O material é não homogêneo, mas desta vez com a condutividade em função de x . Novamente, vamos começar com a resistência diferencial para depois podermos integrar. Assim,

$$dR = \frac{dz}{\sigma(x)A}$$

Integrando ambos os lados, temos,

$$\int dR = \int_0^d \frac{dz}{\sigma(x)A} = \int_0^d \frac{dz}{\sigma_0 e^{-x/a} A} = \int_0^d \frac{e^{x/a} dz}{\sigma_0 A}$$

$$R = \frac{de^{x/a}}{\sigma_0 A} \Omega$$

A corrente total entre as placas

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0 \sigma_0 A}{de^{x/a}}$$

$$I = \frac{V_0 \sigma_0 A}{de^{x/a}}$$

Agora podemos obter a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} a partir da Lei de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Mas primeiro, vamos calcular \mathbf{J} , que é a densidade de corrente que flui na direção $-\mathbf{a}_z$ tendo em vista o potencial aplicado. Assim,

$$\mathbf{J} = -\frac{I}{A} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J} = -\frac{V_0 \sigma_0 A}{A de^{x/a}} \mathbf{a}_z = -\frac{V_0 \sigma_0}{de^{x/a}} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma(x)} = -\frac{V_0 \sigma_0}{de^{x/a} (\sigma_0 e^{-x/a})} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \frac{V}{m}$$

b) A corrente total que circula entre as placas

Observe que agora as placas têm uma área finita. Assim, calcularemos I a partir da relação envolvendo a densidade de corrente,

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Sabendo que $d\mathbf{S} = -\mathbf{a}_z dx dy$, temos,

$$I = - \int_s \frac{V_0 \sigma_0}{de^{x/a}} \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) dx dy$$

$$I = \int_0^b \int_0^a \frac{V_0 \sigma_0}{d e^{x/a}} dx dy$$

$$I = \frac{V_0 \sigma_0 ab}{d} (1 - e^{-1}) = \frac{0,6321 ab V_0 \sigma_0}{d} \text{ A}$$

$$I = \frac{0,6321 ab V_0 \sigma_0}{d} \text{ A}$$

c) A resistência do material

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{d}{0,6321 ab \sigma_0}$$

$$R = \frac{d}{0,6321 ab \sigma_0} \Omega$$

5.18 Duas placas circulares e paralelas, de raio a , estão localizadas em $z = 0$ e $z = d$. A placa superior ($z = d$) está no potencial V_0 , enquanto a placa inferior está aterrada. Entre as placas existe um material condutor que possui condutividade dependente da variável radial, $\sigma(\rho) = \sigma_0 \rho$, onde σ_0 é uma constante. (a) Encontre a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} independente de ρ , entre as placas. (b) Determine a densidade de corrente \mathbf{J} entre as placas. (c) Determine a corrente total I entre as placas. (d) Determine a resistência entre as placas.

a) Intensidade de campo elétrico \mathbf{E}

Basta calcular (ignorando efeito de franjas):

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{d} (-\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) Densidade de corrente \mathbf{J} entre as placas

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = -\sigma(\rho) \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z = -\sigma_0 \rho \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J} = -\sigma_0 \rho \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \quad \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

c) Corrente total I entre as placas

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

onde $d\mathbf{S} = -\mathbf{a}_z \rho d\rho d\phi$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a -\sigma_0 \rho \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) \rho d\rho d\phi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_0 \rho \frac{V_0}{d} \rho d\rho d\phi = 2\pi \sigma_0 \frac{V_0}{d} \int_0^a \rho^2 d\rho = 2\pi \sigma_0 a^3 \frac{V_0}{3d}$$

$$I = 2\pi \sigma_0 a^3 \frac{V_0}{3d} \text{ A}$$

d) Resistência entre as placas

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{3d}{2\pi \sigma_0 a^3}$$

$$R = \frac{3d}{2\pi \sigma_0 a^3} \Omega$$

5.20 Duas cargas pontuais de $-100\pi \mu\text{C}$ estão posicionadas em $(2, -1, 0)$ e $(2, 1, 0)$. A superfície $x = 0$ é um plano condutor. (a) Determine a densidade superficial de carga na origem. (b) Determine ρ_s em $P(0, h, 0)$.

a) Densidade superficial de carga na origem

Este problema é típico do uso de carga-imagem (isso nos permite retirar o plano condutor do problema). Assim, supondo Q_1 em $(2, -1, 0)$ e Q_2 em $(2, 1, 0)$,

Para as cargas originais do problema, podemos escrever (já referenciando à origem):

$$\mathbf{D}_1 = \frac{Q_1}{4\pi r_{10}^2} \mathbf{a}_{10} = \frac{-100\pi \mu\text{C}}{4\pi r_{10}^2} \mathbf{a}_{10}$$

$$\mathbf{a}_{10} = \frac{-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{100 \mu\text{C}}{4(5)^{3/2}} (2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{Q_2}{4\pi r_{20}^2} \mathbf{a}_{20} = \frac{-100\pi \mu\text{C}}{4\pi r_{20}^2} \mathbf{a}_{20}$$

$$\mathbf{a}_{20} = \frac{-2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{-2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{100 \mu\text{C}}{4(5)^{3/2}} (2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)$$

Para as cargas-imagem do problema, podemos escrever (já referenciando à origem):

Q_{1im} em $(-2, -1, 0)$ e Q_{2im} em $(-2, 1, 0)$,

$$\mathbf{D}_{1im} = \frac{-Q_{1imagem}}{4\pi r_{10im}^2} \mathbf{a}_{10im} = \frac{100\pi \mu\text{C}}{4\pi r_{10im}^2} \mathbf{a}_{10im}$$

$$\mathbf{a}_{10im} = \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{D}_{1im} = \frac{100 \mu\text{C}}{4(5)^{3/2}} (2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)$$

$$\mathbf{D}_{2im} = \frac{Q_{2im}}{4\pi r_{20im}^2} \mathbf{a}_{20im} = \frac{100\pi \mu\text{C}}{4\pi r_{20im}^2} \mathbf{a}_{20im}$$

$$\mathbf{a}_{20} = \frac{2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{D}_{2im} = \frac{100 \mu\text{C}}{4(5)^{3/2}} (2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$$

Assim, o campo \mathbf{D} total será,

$$\mathbf{D}_T = \frac{100\pi \mu\text{C}}{4\pi(5)^{3/2}} [(2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y) + (2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) + (2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) + (2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)]$$

$$\mathbf{D}_T = \frac{100 \mu\text{C}}{4(5)^{3/2}} [8\mathbf{a}_x]$$

$$\mathbf{D}_T = \frac{100 \mu\text{C}}{4(5)^{3/2}} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D}_T = 17,89 \mathbf{a}_x \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

Como eu já fiz tudo referenciado à origem, o campo \mathbf{D}_T está na origem. Assim, das condições de contorno, temos que,

$$D_N = \rho_s$$

\mathbf{a}_x é normal ao plano condutor, logo,

$$\rho_{s(0,0,0)} = 17,89 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

b) Determine ρ_s em $P(0, h, 0)$.

É só repetir o processo referenciando a $P(0, h, 0)$. Fica como exercício para vocês fazerem.

5.28 Calcule a constante dielétrica de um material no qual a densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} seja quatro vezes a polarização \mathbf{P} .

É direto, basta usar $\mathbf{P} = \mathbf{D}/4$ na relação:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{D}/4$$

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}/4 = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\frac{3}{4} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \frac{4}{3} \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Portanto,

$$\varepsilon_r = \frac{4}{3}$$

5.34 A região 1 ($x \geq 0$) é um dielétrico com $\varepsilon_{r1} = 2$, enquanto a região 2 ($x < 0$) tem $\varepsilon_{r2} = 5$. Seja $\mathbf{E}_1 = 20\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z$ V/m. (a) Calcule \mathbf{D}_2 . (b) Calcule a densidade de energia em ambas as regiões.

a) Calcule \mathbf{D}_2

Primeiro, precisamos calcular \mathbf{E}_2 .

Neste problema, o eixo x é normal à interface. Assim, as componentes \mathbf{a}_y e \mathbf{a}_z do campo \mathbf{E}_2 serão as mesmas das de \mathbf{E}_1 devido à continuidade dos campos tangenciais. Resta calcular \mathbf{a}_x . Para isso, nós devemos aplicar as condições de contorno para a componente normal à interface,

$$\begin{aligned} D_{x1} &= D_{x2} \\ \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 E_{x1} &= \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 E_{x2} \\ E_{x2} &= \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{x1} = \frac{2}{5} E_{x1} = \frac{2}{5} 20 = 8 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_2 = 8\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 (8\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{D}_2 = 5\varepsilon_0 (8\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z) \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 (40\mathbf{a}_x - 50\mathbf{a}_y + 250\mathbf{a}_z) \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

b) Densidade de energia em ambas as regiões

$$w_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1$$

$$w_1 = \frac{1}{2} (2) \varepsilon_0 [20^2 + 10^2 + 50^2]$$

$$w_1 = 3000 \varepsilon_0 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2$$

$$w_1 = \frac{1}{2} (5) \varepsilon_0 [8^2 + 10^2 + 50^2]$$

$$w_1 = 6660 \varepsilon_0 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Capacitância

Resolução dos problemas pares propostos no Capítulo 6 do Hayt Jr, 8ª Edição

6.2 Seja $S = 100 \text{ mm}^2$, $d = 3 \text{ mm}$ e $\varepsilon_r = 12$ para um capacitor de placas paralelas. (a) Calcule a capacitância. (b) Após conectar uma bateria de 6V no capacitor, calcule E , D , Q e a energia eletrostática total armazenada. (c) Com a fonte ainda conectada, o dielétrico é cuidadosamente retirado da região entre as placas. Sem dielétrico, recalcule E , D , Q e a energia armazenada no capacitor. (d) A carga e a energia encontradas na parte (c) são menores que os respectivos valores encontrados na parte (b), como você já deve ter descoberto; então, o que foi feito da carga e da energia perdidas?

a) Capacitância

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \frac{12 \varepsilon_0 (100 \text{ mm}^2)}{3 \text{ mm}}$$

$$C = 0,4 \varepsilon_0 = 3,542 \text{ pF}$$

$$C = 3,542 \text{ pF}$$

b) E , D , Q e a energia eletrostática total armazenada

$$E = \frac{V_0}{d} = \frac{6 \text{ V}}{3 \text{ mm}} = 2000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E = 2000 \text{ V}$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_r \varepsilon_0 E = 12 \varepsilon_0 (2000 \text{ V/m})$$

$$D = 2,125 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$D = 0,2125 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$Q = \rho_s S = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_s = DS = 0,2125 \left(\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \right) 100(\text{mm}^2)$$

$$Q = 0,2125 \times 10^{-4} \text{ C}$$

$$Q = 21,25 \text{ pC}$$

$$W_e = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} 21,25 \text{ (pC)} 6(\text{V})$$

$$W_e = 6,375 \times 10^{-11} \text{ J}$$

$$W_e = 63,75 \text{ pJ}$$

c) Recalcule E , D , Q e a energia armazenada no capacitor sem o dielétrico

$$E = \frac{V_0}{d} = \frac{6 \text{ V}}{3 \text{ mm}} = 2000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E = 2000 \text{ V}$$

Com o dielétrico removido, temos que a permissividade deve ser suposta como a do vácuo, ε_0 . Assim,

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (2000 \text{ V/m})$$

$$D = 1,771 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$D = 17,71 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

$$Q = \rho_s S = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_s = DS = 17,71 \left(\frac{\text{nC}}{\text{m}^2} \right) 100(\text{mm}^2)$$

$$Q = 1,771 \times 10^{-12} \text{ C}$$

$$Q = 1,771 \text{ pC}$$

$$W_e = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} 1,771 \text{ (pC)} 6 \text{ (V)}$$

$$W_e = 5,313 \times 10^{-11} \text{ J}$$

$$W_e = 53,13 \text{ pJ}$$

d) O que foi feito da carga e da energia perdidas?

As cargas e a energia só podem ter voltado para a fonte, já que não há fricção devido à retirada do dielétrico.

6.8 Um capacitor de placas paralelas é feito utilizando-se duas placas circulares de raio a , com a placa inferior no plano xy , centrada na origem. A placa superior está posicionada em $z = d$, com seu centro no eixo z . A placa superior está em um potencial V_0 e a placa inferior está aterrada. Um dielétrico que tem permissividade que varia radialmente preenche a região entre as placas. A permissividade é dada por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + \rho^2/a^2)$. Calcule: (a) \mathbf{E} ; (b) \mathbf{D} ; (c) Q ; (d) C .

a) \mathbf{E}

Dadas as condições do problema, e de acordo com o problema 5.14, temos que,

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) \mathbf{D}

Como $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, temos,

$$\mathbf{D} = \epsilon(\rho) \left[-\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \left(\frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \right] = \epsilon_0(1 + \rho^2/a^2) \left(\frac{\text{F}}{\text{m}} \right) \left[-\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \left(\frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \right]$$

$$\mathbf{D} = -\epsilon_0(1 + \rho^2/a^2) \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

c) Q

Aqui encontramos a carga via Lei de Gauss, e podemos fazer isso para a placa superior,

$$Q = \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Nesse caso, $d\mathbf{S} = -\rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z$,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a -\epsilon_0(1 + \rho^2/a^2) \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) \rho d\rho d\phi$$

$$Q = \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \int_0^{2\pi} \int_0^a (1 + \rho^2/a^2) \rho d\rho d\phi$$

$$Q = 2\pi\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \int_0^a (\rho + \rho^3/a^2) d\rho = 2\pi\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4a^2} \right]_0^a = 2\pi\epsilon_0 \frac{V_0}{d} \left[\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4a^2} \right]$$

$$Q = 2\pi\epsilon_0 a^2 \frac{V_0}{d} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{2} \pi \epsilon_0 a^2 \frac{V_0}{d}$$

$$Q = \frac{3\pi\epsilon_0 a^2 V_0}{2d}$$

d) C

Podemos usar a definição de capacitância,

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{1}{V_0} \frac{3\pi\epsilon_0 a^2 V_0}{2d} = \frac{3\pi\epsilon_0 a^2}{2d}$$

$$C = \frac{3\pi\epsilon_0 a^2}{2d} \text{ F}$$

6.12 (a) Determine a capacitância de uma esfera condutora isolada de raio a no espaço livre (considere a existência de um condutor externo em $r \rightarrow \infty$). (b) A esfera é coberta com uma camada dielétrica de espessura d e constante dielétrica ϵ_r . Se $\epsilon_r = 3$, determine d considerando a , tal que a capacitância seja o dobro daquela da parte (a).

a) Capacitância de uma esfera condutora isolada

Como sabemos, podemos escrever a capacitância como sendo,

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

Lembrando que a intensidade de campo elétrico de uma esfera é dada por,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (a < r < \infty)$$

Assim, podemos determinar o potencial a partir de (com o condutor externo em $r \rightarrow \infty$),

$$V_0 = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_\infty^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r$$

$$V_0 = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_\infty^a \frac{dr}{r^2} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Assim,

$$C = \frac{Q}{V_0} = Q \frac{4\pi\epsilon_0 a}{Q} = 4\pi\epsilon_0 a$$

$C = 4\pi\epsilon_0 a \text{ F}$

b) determine d tal que a **capacitância** seja o **dobro** daquela **da parte (a)**.

O problema sugere que a esfera seja recoberta com um dielétrico de espessura d e constante dielétrica $\epsilon_r = 3$

Observe que embora tenhamos uma camada dielétrica recobrindo a esfera, esta camada é finita, o que nos diz que temos que considerar também o condutor externo em $r \rightarrow \infty$. Assim o cálculo de V_0 deve levar isso em conta,

$$V_0 = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_\infty^b \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

A primeira integral se refere ao potencial entre a casca dielétrica e o condutor em $r \rightarrow \infty$, enquanto que a segunda integral se refere ao potencial entre a esfera de raio a e a casca dielétrica de raio b .

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

A capacitância deve ser o dobro da de (a), logo,

$$C = 8\pi\epsilon_0 a \text{ F}$$

Da definição de $C = Q/V_0$,

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]}$$

Como precisamos determinar $d = b - a$, precisamos isolar b da equação acima,

$$b = \frac{a(\epsilon_r - 1)}{a\epsilon_r \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{C} \right) - 1} = \frac{a(3 - 1)}{a3 \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{8\pi\epsilon_0 a} \right) - 1} = 4a$$

$$d = b - a = 4a - a = 3a$$

$$d = 3a$$

6.16 Considere um arranjo de duas superfícies condutoras isoladas, de qualquer formato, que formam um capacitor. Use as definições de capacitância [Equação (2) neste capítulo] e resistência [Equação (14) no Capítulo 5] para mostrar que, quando a região entre os condutores é preenchida com material condutivo (condutividade σ) e com um dielétrico perfeito (permissividade ϵ), a resistência e a capacitância resultantes da estrutura são relacionadas por meio da fórmula simples $RC = \epsilon/\sigma$. Quais propriedades básicas relativas ao meio dielétrico e condutor devem ser verdadeiras para que esta fórmula permaneça válida?

A capacitância é definida de forma geral como,

$$C = \frac{\oint_s \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}$$

Por sua vez, a resistência é definida como,

$$R = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\oint_s \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

Assim, fazendo o produto RC , temos, lembrando que o meio é uniforme e o dielétrico é perfeito,

$$RC = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\oint_s \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \times \frac{\oint_s \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \times \frac{\epsilon \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}$$

$$RC = \frac{\epsilon \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \times \frac{\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

6.24 Um campo potencial, no espaço livre, é dado em coordenadas esféricas como

$$V(r) = \begin{cases} [\rho_0/(6\epsilon_0)] [3a^2 - r^2] & (r \leq a) \\ (a^3 \rho_0)/(3\epsilon_0 r) & (r \geq a) \end{cases}$$

onde ρ_0 e a são constantes. (a) Use a equação de Poisson para encontrar a densidade volumétrica de carga em toda a parte. (b) Determine a carga total presente.

a) Densidade volumétrica de carga em toda a parte

O operador Laplaciano em coordenadas esféricas é dado por,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Como o potencial só varia em r , temos que,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

Começando com $r \leq a$, a equação de Poisson torna-se,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \right] [3a^2 - r^2] \right) = \left[\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \right] (-2r) = -\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left[-\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \right] \right) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = -\frac{\rho_0 (3r^2)}{3\epsilon_0 r^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$-\frac{\rho_0 (3r^2)}{3\epsilon_0 r^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\rho_v = \rho_0 \quad (r \leq a)$$

Para $r \geq a$,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r} \right) = \frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left[-\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \right] \right) = -\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0 = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\rho_v = 0 \quad (r \geq a)$$

b) Determine a carga total presente

O volume de uma esfera é igual a: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Assim, a carga total será a densidade de carga ρ_v multiplicada por esse volume. Como apenas a esfera de raio a possui uma densidade de carga,

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$$

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$$

6.26 Dado o campo potencial, esfericamente simétrico, no espaço livre, $V = V_0 e^{-r/a}$, calcule: (a) ρ_v em $r = a$; (b) o campo elétrico em $r = a$; (c) a carga total.

a) ρ_v em $r = a$

Para isso precisaremos da equação de Poisson, que neste caso precisamos apenas da componente radial,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{a} V_0 e^{-r/a}$$

Logo,

$$-\frac{V_0}{ar^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 e^{-r/a}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\frac{V_0}{ar^2} (2re^{-r/a} - \frac{1}{a} e^{-r/a} r^2) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\frac{V_0}{ar^2} r e^{-r/a} (2 - \frac{r}{a}) = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\rho_v(r) = \frac{\epsilon_0 V_0}{ar} (2 - \frac{r}{a}) e^{-r/a}$$

em $r = a$

$$\rho_v(a) = \frac{\epsilon_0 V_0}{aa} (2 - \frac{a}{a}) e^{-a/a}$$

$\rho_v(a) = \frac{\epsilon_0 V_0}{a^2} \frac{C}{m^3}$
--

b) O campo elétrico em $r = a$
Lembre-se de que,

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Logo,

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr} \mathbf{a}_r$$

Do item anterior, temos que,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{a} V_0 e^{-r/a}$$

Logo,

$$\mathbf{E} = -\left(-\frac{1}{a}V_0e^{-r/a}\right)\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{a}V_0e^{-r/a}\mathbf{a}_r$$

em $r = a$

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{a}\mathbf{a}_r \quad \frac{V}{m}$$

c) A carga total

A maneira mais fácil é via Lei de Gauss, escrita como (ver Aula 3),

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \text{carga envolvida} = Q_{env} = \Psi$$

Para calcularmos o vetor \mathbf{D} , usamos a relação:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \frac{V_0e^{-r/a}}{a}\mathbf{a}_r$$

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin\phi d\phi d\theta \mathbf{a}_r$$

$$Q_{env} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon_0 \frac{V_0e^{-r/a}}{a} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r r^2 \sin\phi d\phi d\theta$$

$$Q_{env} = \varepsilon_0 \frac{V_0}{a} r^2 e^{-r/a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\phi d\phi d\theta = \varepsilon_0 \frac{V_0}{a} r^2 e^{-r/a} (4\pi)$$

$$Q_{env} = 4\pi\varepsilon_0 r^2 \frac{V_0}{a} e^{-r/a} \quad C$$

Campo Magnético Estacionário

Resolução dos problemas pares propostos no Capítulo 7 do Hayt Jr, 8ª Edição

7.2 Um condutor filamental onde circula uma corrente I tem a forma de um triângulo equilátero com lados de comprimento l . Calcule a intensidade de campo magnético no centro do triângulo.

Primeiro, suponha que um dos lados esteja ao longo do eixo z , como os extremos localizados em $z = \pm l/2$, e que o triângulo esteja no plano xz . Isso nos permite supor que o centro do triângulo

está localizado em um ponto x_0 . A ideia é resolver apenas este lado do triângulo, porque a contribuição final em x_0 será este resultado multiplicado por 3.

Da Lei de Biot-Savart, temos que,

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

No segmento z , temos que $I d\mathbf{L} = I dz \mathbf{a}_z$

O unitário \mathbf{a}_R que conecta este segmento ao ponto x_0 , é dado por:

$$\mathbf{a}_R = \frac{x_0 \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_z}{\sqrt{x_0^2 + z^2}}$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + z^2}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I dz \mathbf{a}_z}{4\pi(x_0^2 + z^2)} \times \frac{x_0 \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_z}{\sqrt{x_0^2 + z^2}} = \frac{I dz x_0 \mathbf{a}_y}{4\pi(x_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

Agora precisamos integrar esta equação para encontramos \mathbf{H} . Assim,

$$\mathbf{H} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I dz x_0 \mathbf{a}_y}{4\pi(x_0^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I x_0 \mathbf{a}_y}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(x_0^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I x_0 \mathbf{a}_y}{4\pi} \left. \frac{z}{x_0^2 \sqrt{x_0^2 + z^2}} \right|_{-l/2}^{l/2}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I \mathbf{a}_y}{4\pi x_0} \left[\frac{l/2}{\sqrt{x_0^2 + (l/2)^2}} + \frac{l/2}{\sqrt{x_0^2 + (l/2)^2}} \right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{I l \mathbf{a}_y}{4\pi x_0} \left[\frac{1}{\sqrt{4x_0^2 + l^2}} + \frac{1}{\sqrt{4x_0^2 + l^2}} \right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{I l \mathbf{a}_y}{4\pi x_0} \left[\frac{2}{\sqrt{4x_0^2 + l^2}} \right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{I l \mathbf{a}_y}{2\pi x_0 \sqrt{4x_0^2 + l^2}}$$

Como $x_0 = \frac{l}{2\sqrt{3}}$

$$\mathbf{H} = \frac{I l \mathbf{a}_y}{2\pi \frac{l}{2\sqrt{3}} \sqrt{4\left(\frac{l^2}{12}\right) + l^2}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I l \mathbf{a}_y}{2\pi \frac{l}{2\sqrt{3}} l \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{3I \mathbf{a}_y}{2\pi l}$$

Portanto, a contribuição total vinda dos 3 lados do triângulo será,

$$\mathbf{H}_T = 3 \times \frac{3I\mathbf{a}_y}{2\pi l}$$

$$\mathbf{H}_T = \frac{9I}{2\pi l} \mathbf{a}_y$$

7.4 Duas espiras circulares estão centradas no eixo z , em $z = \pm h$. Cada espira tem raio a e conduz uma corrente I na direção \mathbf{a}_ϕ . (a) Determine \mathbf{H} no eixo z na faixa $-h < z < h$. Considere $I = 1$ A e faça o gráfico de $|\mathbf{H}|$ em função de z/a se (b) $h = a/4$; (c) $h = a/2$; (d) $h = a$. Qual valor de h fornece o campo mais uniforme? Esse sistema é denominado bobinas de Helmholtz (neste caso, as bobinas correspondem às duas espiras*), utilizadas para oferecer campos uniformes.

a) Determine \mathbf{H} no eixo z na faixa $-h < z < h$.

Da Lei de Biot-Savart, temos que,

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

Para a espira em $z = h$, temos,

$$I d\mathbf{L} = I a d\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{-z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_\rho}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$R = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I a d\phi \mathbf{a}_\phi}{4\pi(a^2 + z^2)} \times \frac{-z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_\rho}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{I a d\phi (-z\mathbf{a}_\rho + a\mathbf{a}_z)}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\mathbf{H} = -\frac{I a z d\phi}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho + \frac{I a^2 d\phi}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

O primeiro termo terá contribuição zero, por conta da simetria. Assim,

$$d\mathbf{H} = \frac{I a^2 d\phi}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Integrando, temos,

$$\mathbf{H} = \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \quad \text{A/m}$$

Fazendo $z = z - h$, temos,

$$\mathbf{H} = \frac{I a^2}{2(a^2 + (z - h)^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \quad \text{A/m}$$

Para a espira em $z = -h$, temos,

$$Id\mathbf{L} = Iad\phi\mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_\rho}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$R = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{Iad\phi\mathbf{a}_\phi}{4\pi(a^2 + z^2)} \times \frac{z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_\rho}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{Iad\phi(z\mathbf{a}_\rho + a\mathbf{a}_z)}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{Iazd\phi}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_\rho + \frac{Ia^2d\phi}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

Idem para o primeiro termo da expressão acima,

$$d\mathbf{H} = \frac{Ia^2d\phi}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

Integrando, temos,

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z \quad \text{A/m}$$

Fazendo $z = z + h$,

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2}{2(a^2 + (z + h)^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z \quad \text{A/m}$$

O campo \mathbf{H}_T torna-se,

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + (z - h)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z + h)^2)^{3/2}} \right] \mathbf{a}_z$$

A partir daqui fica fácil para vocês encontrarem o restante das soluções.

7.6 Um disco de raio a pertence ao plano xy , com o eixo z passando pelo seu centro. Uma carga superficial de densidade uniforme ρ_s está presente no disco, que gira em volta do eixo z em uma velocidade angular de Ω rad/s. Calcule \mathbf{H} em todos os pontos no eixo z .

Começamos com a Lei de Biot-Savart,

$$d\mathbf{H} = \frac{Id\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

Como temos uma carga superficial, devemos usar a densidade de corrente superficial \mathbf{K} , onde,

$$\mathbf{K} = \rho_s \mathbf{v}$$

Precisamos converter a velocidade angular para velocidade linear. Logo, $\mathbf{v} = \rho\Omega\mathbf{a}_\phi$. Substituindo,

$$\mathbf{K} = \rho_s \rho \Omega \mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{L} = \mathbf{K}dS = \mathbf{K}\rho d\rho d\phi$$

$$d\mathbf{H} = \frac{\mathbf{K}dS \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{\rho_s \rho \Omega \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \rho d\rho d\phi$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{z\mathbf{a}_z - \rho\mathbf{a}_r}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

$$R = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\rho_s \rho \Omega \rho d\rho d\phi}{4\pi R^2} \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_R = \frac{\rho_s \rho^2 \Omega d\rho d\phi}{4\pi(z^2 + \rho^2)} \mathbf{a}_\phi \times \frac{z\mathbf{a}_z - \rho\mathbf{a}_r}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\rho_s \rho^2 \Omega d\rho d\phi}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} (z\mathbf{a}_\rho + \rho\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\rho_s \rho^2 z \Omega d\rho d\phi}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho + \frac{\rho_s \rho^3 \Omega d\rho d\phi}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

Devido à simetria radial, o primeiro termo se cancela. Assim,

$$\mathbf{H} = \frac{\rho_s \rho^3 \Omega d\rho d\phi}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

Integrando,

$$\mathbf{H} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s \rho^3 \Omega d\rho d\phi}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z = \int_0^a \frac{2\pi \rho_s \rho^3 \Omega d\rho}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H} = \frac{\rho_s \Omega}{2} \int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s \Omega}{2} \left[\frac{2z^2 + \rho^2}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right]_0^a \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H} = \frac{\rho_s \Omega}{2} \left[\frac{(2z^2 + a^2)}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{2z^2}{z} \right] = \frac{\rho_s \Omega}{2} \left[\frac{(2z^2 + a^2)}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2z \right] \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H} = \frac{\rho_s \Omega}{2} \left[\frac{z^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \sqrt{z^2 + a^2} - 2z \right] \mathbf{a}_z \quad \text{A/m}$$

7.10 Uma casca condutora esférica e oca de raio a tem conexões filamentosas feitas no topo ($r = a$, $\theta = 0$) e na base ($r = a$, $\theta = \pi$). Uma corrente contínua I circula para baixo pelo filamento superior e pela superfície esférica, saindo pelo filamento inferior. Calcule \mathbf{H} em coordenadas esféricas (a) dentro e (b) fora da esfera.

Da Lei de Ampère, temos que,

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

Aqui podemos usar uma superfície Gaussiana esférica para calcularmos \mathbf{H} dentro da esfera. Mas como esta superfície não envolve uma corrente, temos que,

$$\mathbf{H} = 0 \quad \text{para } r < a$$

Ao usarmos esta superfície Gaussiana com um raio maior que o da esfera, vemos que a corrente envolvida será a própria corrente I . Assim,

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H(2\pi r)$$

Como a corrente flui no sentido negativo de z ,

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi = -\frac{I}{2\pi r \sin\theta} \mathbf{a}_\phi$$

$\mathbf{H} = -\frac{I}{2\pi r \sin\theta} \mathbf{a}_\phi \quad \text{A/m}$
--

7.14 Um toroide que possui seção reta de formato retangular é definido pelas seguintes superfícies: os cilindros $\rho = 2$ e $\rho = 3$ cm, e os planos $z = 1$ e $z = 2,5$ cm. Pelo toroide passa uma densidade superficial de corrente de $-50\mathbf{a}_z$ A/m na superfície $\rho = 3$ cm. Calcule \mathbf{H} no ponto $P(\rho, \phi, z)$: (a) $P_A(1,5 \text{ cm}, 0, 2 \text{ cm})$; (b) $P_B(2,1 \text{ cm}, 0, 2 \text{ cm})$; (c) $P_C(2,7 \text{ cm}, \pi/2, 2 \text{ cm})$; (d) $P_D(3,5 \text{ cm}, \pi/2, 2 \text{ cm})$.

Da Lei Circuitual de Ampère, já derivamos que,

$$\mathbf{H} = \frac{I_{env}}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \quad (2 < \rho < 3)\text{cm}, (1 < z < 2,5)\text{cm}$$

A corrente I_{env} pode ser encontrada a partir da densidade superficial. Na superfície externa ($\rho = 3$ cm, temos,

$$I_{ext} = K2\pi\rho = -50(2\pi \times 0,03) = -3\pi \text{ A}$$

Como esta corrente está orientada na direção $-z$, a do cilindro interno estará na $+z$. Logo, como as correntes em ambos os cilindros devem ter a mesma magnitude,

$$I_{int} = 3\pi \text{ A}$$

Com isso, o campo \mathbf{H} nos pontos sugeridos no problema saem diretamente,

a) $P_A(1,5 \text{ cm}, 0, 2 \text{ cm})$

Observe que o campo \mathbf{H} não é função de z ou ϕ . Neste primeiro caso, $\rho = 1,5$ cm está fora da seção do toroide,

$\mathbf{H} = 0$

b) $P_B(2,1 \text{ cm}, 0, 2 \text{ cm})$

Neste caso, $\rho = 2,1$ cm está dentro da seção do toroide,

$$\mathbf{H} = \frac{3\pi}{2\pi(0,021)} \mathbf{a}_\phi = 71,4\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H} = 71,4\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

c) $P_C(2,7 \text{ cm}, \pi/2, 2 \text{ cm})$

Neste caso, $\rho = 2,7 \text{ cm}$ está dentro da seção do toroide,

$$\mathbf{H} = \frac{3\pi}{2\pi(0,027)}\mathbf{a}_\phi = 55,6\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H} = 55,6\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

d) $P_D(3,5 \text{ cm}, \pi/2, 2 \text{ cm})$

Neste caso, $\rho = 3,5 \text{ cm}$ está fora da seção do toroide,

$$\mathbf{H} = 0$$

7.16 Um condutor filamental conduz uma corrente I na direção $-\mathbf{a}_z$ e se estende ao longo de todo o eixo z positivo. Na origem, ele é conectado a uma lâmina condutora que forma o plano xy . (a) Determine \mathbf{K} na lâmina condutora. (b) Use a lei circuital de Ampère para encontrar \mathbf{H} para $z > 0$. (c) Determine \mathbf{H} para $z < 0$.

a) Determine \mathbf{K} na lâmina condutora

Como o fio se conecta com o plano condutor, a direção da corrente neste plano deverá ser radial. Assim, \mathbf{K} é a corrente total dividida pela circunferência,

$$\mathbf{K} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho \text{ A/m}$$

b) Use a lei Circuitual de Ampère para encontrar \mathbf{H} para $z > 0$

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H \int_0^{2\pi} \rho d\phi$$

$$I = 2\pi\rho H_\phi$$

Lembre que a corrente flui no sentido $-\mathbf{a}_z$. Assim,

$$H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

c) Determine \mathbf{H} para $z < 0$

Como o filamento se estende ao longo de todo o eixo z positivo, a corrente envolvida na região negativa é zero. Logo,

$$\mathbf{H} = 0$$

7.18 Um fio de 3 mm de raio é constituído de um material interno ($0 < \rho < 2$ mm) para o qual $\sigma = 10^7$ S/m, e de um material externo ($2 \text{ mm} < \rho < 3$ mm) para o qual $\sigma = 4 \times 10^7$ S/m. Se pelo fio passa uma corrente contínua total de 100 mA, determine \mathbf{H} em todos os pontos como uma função de ρ .

Os materiais têm condutividades diferentes, logo, as correntes em cada fio serão diferentes.

Precisamos achar o campo elétrico, que sai pela Lei de Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, sabendo que neste caso o campo \mathbf{E} é constante. Mas antes, vamos calcular a corrente sai diretamente da relação entre as áreas dos condutores e a densidade de corrente J em cada fio,

$$I = \pi(0,002)^2 J_1 + \pi[(0,003)^2 - (0,002)^2] J_2$$

$$I = \pi(0,002)^2 \sigma_1 E + \pi[(0,003)^2 - (0,002)^2] \sigma_2 E$$

$$100 \times 10^{-3} = [\pi(0,002)^2 10^7 + \pi[(0,003)^2 - (0,002)^2] (4 \times 10^7)] E$$

$$E = 1,33 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

Podemos usar a Lei de Ampère em um caminho circular, primeiro com um raio $\rho < 2$ mm,

$$H_{\phi 1} = \frac{I}{2\pi\rho} = \frac{\pi\rho^2 J_1}{2\pi\rho} = \frac{\pi\rho^2 \sigma_1 E}{2\pi\rho}$$

$$H_{\phi 1} = \frac{\pi\rho^2 10^7 (1,33 \times 10^{-4})}{2\pi\rho} = \frac{\rho 10^7 (1,33 \times 10^{-4})}{2} = 665\rho$$

$$\mathbf{H}_1 = 665\rho \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

Agora para um raio $2 \text{ mm} < \rho < 3$ mm,

$$H_{\phi 2} = \frac{I}{2\pi\rho} = \frac{\pi(0,002)^2 \sigma_1 E + \pi[\rho^2 - (0,002)^2] \sigma_2 E}{2\pi\rho}$$

$$H_{\phi 2} = 2,7 \times 10^3 \rho - \frac{8 \times 10^{-3}}{\rho} \text{ A/m}$$

Agora para um raio $\rho > 3$ mm,

$$H_{\phi 3} = \frac{I}{2\pi\rho} = \frac{100 \times 10^{-3}}{2\pi\rho}$$

$$H_{\phi 3} = \frac{1,6 \times 10^{-2}}{\rho} \text{ A/m}$$

7.20 Um condutor sólido de seção reta circular, com raio de 5 mm, tem uma condutividade que varia com o raio. O condutor tem 20 metros de comprimento e existe uma diferença de potencial contínua de 0,1 V entre suas duas extremidades. Dentro desse condutor, $\mathbf{H} = 10^5 \rho^2 \mathbf{a}_\phi$ A/m. (a) Calcule σ como uma função de ρ . (b) Qual é o valor da resistência entre as duas extremidades?

a) Calcule σ como uma função de ρ

Usamos a equação de Maxwell e depois aplicamos a Lei de Ohm,

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho H_\phi) \mathbf{a}_z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (10^5 \rho^3) \mathbf{a}_z = 3 \times 10^5 \rho \mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$$

$$\mathbf{J} = 3 \times 10^5 \mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$$

Temos que,

$$\mathbf{E} = \frac{0,1}{20} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = 5 \times 10^{-3} \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Aplicando agora a Lei de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$,

$$\sigma = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{E}} = \frac{J}{E} = \frac{3 \times 10^5 \rho}{5 \times 10^{-3}} = 6 \times 10^7 \rho \text{ S/m}$$

$$\sigma = 6 \times 10^7 \rho \text{ S/m}$$

b) Qual é o valor da resistência entre as duas extremidades?

Para isso, calculamos a corrente no fio,

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \int_0^a 3 \times 10^5 \rho \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \rho d\rho = 6 \times 10^5 \pi \int_0^a \rho^2 d\rho$$

$$I = 6 \times 10^5 \pi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^a = 2 \times 10^5 \pi a^3 = 2\pi \times 10^5 (5 \times 10^{-3})^3$$

$$I = 79 \text{ mA}$$

Com isso, obtemos a resistência da lei de Ohm,

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{0,1}{79 \times 10^{-3}} = 1,3 \Omega$$

$$R = 1,3 \Omega$$

7.26 Considere uma esfera de raio $r = 4$, com centro em $(0, 0, 3)$. Seja S_1 a porção da superfície esférica que está situada acima do plano xy . Encontre $\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ se $\mathbf{H} = 3\rho\mathbf{a}_\phi$ em coordenadas cilíndricas.

A porção da esfera que intercepta o plano xy é um disco, e a primeira coisa a fazer é determinar o raio deste disco. Fica mais fácil ver o raio se desenharmos a esfera como uma circunferência no plano yz . Assim, conectando a origem ao ponto que toca o eixo y irá produzir um triângulo, cuja hipotenusa é o raio da esfera, e a altura igual a 3 (que é onde está centro da esfera no eixo z). Assim, o raio do disco é dado por,

$$\rho_d = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Como só temos a componente \mathbf{a}_ϕ e ela é dependente apenas de ρ ,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho dH_\phi) \mathbf{a}_z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (3\rho^2) \mathbf{a}_z = 6\mathbf{a}_z$$

Observe que $\nabla \times \mathbf{H}$ produziu um valor constante, logo,

$$d\mathbf{S} = \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z$$

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 6 \int_{S_1} \mathbf{a}_z \cdot \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z = 6 \int_{S_1} \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \rho d\rho d\phi = 6 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \rho d\rho d\phi$$

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 6 \times \frac{2\pi\rho_d^2}{2} = 6\pi\rho_d^2 = 6\pi(\sqrt{7})^2 = 42\pi$$

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 42\pi \quad \text{A}$$

7.32 A região de espaço livre definida por $1 < z < 4$ cm e $2 < \rho < 3$ cm é um toroide de seção reta retangular. Seja a superfície em $\rho = 3$ cm pela qual circula uma corrente superficial $\mathbf{K} = 2\mathbf{a}_z$ kA/m. (a) Especifique as densidades de corrente nas superfícies em $\rho = 2$ cm, $z = 1$ cm e $z = 4$ cm. (b) Calcule \mathbf{H} em todos os pontos. (c) Calcule o fluxo total dentro do toroide.

- a) Especifique as densidades de corrente nas superfícies em $\rho = 2$ cm, $z = 1$ cm e $z = 4$ cm. Primeiramente, é importante ter em mente que embora as densidades de correntes possam variar em uma dada face do toroide, **a corrente que passa pelo toroide deve ser a mesma.**

Foi especificada a densidade de corrente na face em $\rho = 3$ cm como sendo

$$\mathbf{K}_3 = 2\mathbf{a}_z \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

Vamos obter a corrente (que é igual em todas as faces) a partir da face externa do toroide ($\rho = 3$ cm),

$$I = K(0,03) = 60 \text{ A}$$

Na face $\rho = 2$ cm a corrente irá circular no sentido $-\mathbf{a}_z$ (afinal ela sobe na direção $+\mathbf{a}_z$ na face $\rho = 3$ cm, e deve descer na face $\rho = 2$ cm no sentido oposto). Logo,

$$\mathbf{K}_2 = -3\mathbf{a}_z \text{ kA/m}$$

Na face $z = 1$ cm (base do toroide). Observe que aqui a densidade de corrente irá variar com o raio.

Como \mathbf{K} varia com o raio (\mathbf{a}_ρ),

$$\mathbf{K} = \frac{I}{\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{60}{\rho} \mathbf{a}_\rho \text{ A/m}$$

$$\mathbf{K}_1 = -\frac{60}{\rho} \mathbf{a}_\rho \text{ A/m}$$

Na face $z = 4$ cm, topo do toroide,

$$\mathbf{K}_4 = \frac{60}{\rho} \mathbf{a}_\rho \text{ A/m}$$

- b) Calcule \mathbf{H} em todos os pontos
Fora do toroide temos que,

$$\mathbf{H} = 0$$

Dentro do toroide podemos calcular \mathbf{H} partindo da Lei Circuital de Ampère, onde no lado esquerdo foi definido um caminho circular, enquanto o lado direito inclui a contribuição de um dos lados do toroide (pode ser qualquer um, mas eu tomei o lado K_1 para ficar em função de ρ , assim eu caio em qualquer K),

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = K_1 L_\rho$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi\rho H_\phi = \frac{60}{\rho} (0,01)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi\rho H_\phi = \frac{0,6}{\rho}$$

$$2\pi\rho H_\phi = \frac{0,6}{\rho}$$

$$H_\phi = \frac{0,6}{2\pi\rho^2} \quad \text{A/m} \quad (\text{em magnitude})$$

$$\mathbf{H} = -\frac{0,6}{2\pi\rho^2} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{sinal pela regra da mão direita})$$

c) Calcule o fluxo total dentro do toroide.

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Wb}$$

$$d\mathbf{S} = d\rho dz \mathbf{a}_\phi$$

$$\Phi = -\mu_0 \int_s \frac{0,6}{2\pi\rho^2} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi d\rho dz$$

$$\Phi = -\mu_0 \int_{0,01}^{0,04} \int_{0,02}^{0,03} \frac{0,6}{2\pi\rho^2} d\rho dz$$

$$\Phi = -\mu_0(0,03) \int_{0,02}^{0,03} \frac{0,6}{2\pi\rho^2} d\rho$$

$$\Phi = -\frac{\mu_0(0,03)(0,6)}{2\pi} \left[-\frac{1}{\rho} \right]_{0,02}^{0,03}$$

$$\Phi = \mu_0(0,03)(0,6) \left[\frac{1}{0,03} - \frac{1}{0,02} \right]$$

$$\Phi = -\mu_0 0,3 \quad \text{Wb}$$

7.36 Seja $\mathbf{A} = (3y - z)\mathbf{a}_x + 2xz\mathbf{a}_y$ Wb/m em uma certa região do espaço livre. (a) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (b) Em $P(2, -1, 3)$ calcule \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{J} .

a) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(3y - z) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz) = 0$$

b) Em $P(2, -1, 3)$ calcule \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{J}

$$\mathbf{A}_P = (3(-1) - 3)\mathbf{a}_x + 2(2)(3)\mathbf{a}_y \quad \text{Wb/m}$$

$$\mathbf{A}_P = -6\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y \quad \text{Wb/m}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = -2x\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + (2z - 3)\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B}_p = -2(2)\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + (2(3) - 3)\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B}_p = -4\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \quad \text{Wb/m}^2$$

$$\mathbf{H} = 1/\mu_0 \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (-2x\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + (2z - 3)\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{1}{\mu_0} (-4\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \quad \text{A/m}$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}$$

Forças Magnéticas, Materiais e Indutância

Resolução dos problemas pares propostos no Capítulo 8 do Hayt Jr, 8ª Edição

8.2 Compare as intensidades das forças elétrica e magnética exercidas sobre um elétron que atinge uma velocidade de 10^7 m/s. Considere uma intensidade de campo elétrico de 10^5 V/m e uma densidade de fluxo magnético associada à densidade do campo magnético da Terra em latitudes temperadas, equivalente a 0,5 gauss (G).

Começamos com a equação da força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

de onde força eletrostática é dada por $\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E}$ e a magnetostática por $\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

$$|\mathbf{E}| = 10^5 \text{ V/m}$$

$$|\mathbf{B}| = 0,5 \text{ G} = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Assim a aplicação destas forças é imediata,

$$|\mathbf{F}_e| = |Q\mathbf{E}| = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^5 \text{ V/m}) = 1,6 \times 10^{-14} \text{ N}$$

$$|\mathbf{F}_m| = |Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m/s})(5 \times 10^{-5} \text{ T}) = 8 \times 10^{-17} \text{ N}$$

Portanto, a razão entre as forças elétrica e magnética é dada por,

$$\frac{|\mathbf{F}_e|}{|\mathbf{F}_m|} = \frac{1,6 \times 10^{-14} \text{ N}}{8 \times 10^{-17} \text{ N}}$$

$\frac{ \mathbf{F}_e }{ \mathbf{F}_m } = 200$

Ou seja, a força eletrostática é 200 vezes maior que a magnetostática neste caso.

8.6 Mostre que o trabalho diferencial ao mover um elemento de corrente $I d\mathbf{L}$ ao longo de uma distância $d\mathbf{l}$ em um campo magnético \mathbf{B} , é o negativo do trabalho realizado no movimento do elemento $I d\mathbf{L}$ em uma distância $d\mathbf{L}$ no mesmo campo.

Começemos pela definição de trabalho, que é força multiplicada por uma distância. Assim, um diferencial de trabalho é dado por,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

Já sabemos que $\mathbf{F}_m = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$. Logo, para um elemento de corrente $I d\mathbf{L}$ passando por uma distância $d\mathbf{l}$

$$dW_1 = (I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Agora, tomando o segundo caso, como sugerido no problema, para um elemento de corrente $I d\mathbf{l}$ passando por uma distância $d\mathbf{L}$,

$$dW_2 = (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

Observe que o lado direito dessas duas equações está relacionado à seguinte identidade vetorial,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}$$

Com isso, podemos escrever o lado direito de dW_1 como,

$$(I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{B} \times d\mathbf{l}) \cdot I d\mathbf{L} = -(I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

Na equação acima foram utilizadas apenas identidades vetoriais. Com isso,

$dW_1 = -(I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = -dW_2$

8.8 Duas fitas condutoras, de comprimentos infinitos na direção z , estão situadas no plano xz . Uma ocupa a região $d/2 < x < b + d/2$ e conduz uma densidade de corrente superficial $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_z$, enquanto a outra está situada em $-(b + d/2) < x < -d/2$ e conduz uma densidade de corrente superficial igual a $-K_0 \mathbf{a}_z$. (a) Encontre a força por unidade de comprimento em z que tende a separar as duas fitas. (b) Considere que b se aproxima de zero enquanto a corrente é mantida constante ($I = K_0 b$), e mostre que a força por unidade de comprimento tende a $\mu_0 I^2 / (2\pi d)$ N/m.

a) Encontre a força por unidade de comprimento em z que tende a separar as duas fitas.

Começamos calculando o campo magnético a partir da Lei de Biot-Savart,

$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{a}_R dS}{4\pi R^2}$$

e calculamos o campo magnético produzido pela fita 1 na fita 2, \mathbf{H}_2 . Observe que são duas fitas paralelas, ambas com largura b . Assim, devemos calcular a força a partir de um ponto genérico de uma em relação à outra. Vocês poderiam resolver tomando a borda da primeira em relação à borda da segunda, e estaria certo do mesmo jeito. Mas não foi isso que o problema pediu.

$$\mathbf{H}_2 = \int_S \frac{\mathbf{K}_1 \times \mathbf{a}_{R12} dS}{4\pi R_{12}^2}$$

Com isso, \mathbf{a}_R deve ser definido de maneira mais geral em (x, z) na fita 1, com referência a um ponto arbitrário (x_P, z_P) na fita 2, lembrando que a fita é infinita em relação a z ,

$$\mathbf{a}_{R12} = \frac{(x_P - x)\mathbf{a}_x + (z_P - z)\mathbf{a}_z}{\sqrt{(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2}}$$

$$R_{12} = \sqrt{(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2}$$

Os limites de integração são relativos à fita 2 que é onde o campo \mathbf{H}_2 é desejado. Logo,

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-(b+d/2)}^{-d/2} \frac{\mathbf{K}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} dx dz$$

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-(b+d/2)}^{-d/2} \frac{(K_0 \mathbf{a}_z)}{4\pi} \times \frac{(x_P - x)\mathbf{a}_x + (z_P - z)\mathbf{a}_z}{[(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2]^{3/2}} dx dz$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-(b+d/2)}^{-d/2} \frac{(x_P - x)\mathbf{a}_y}{[(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2]^{3/2}} dx dz$$

Integrando primeiro em z ,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{K_0}{4\pi} \int_{-(b+d/2)}^{-d/2} \left[-\frac{(z_P - z)}{(x_P - x)\sqrt{(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_y dx$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{K_0}{4\pi} \int_{-(b+d/2)}^{-d/2} \frac{1}{(x_P - x)} \left[\frac{z}{\sqrt{(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2}} - \frac{z_P}{\sqrt{(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_y dx$$

Sabendo que o segundo termo do colchete será zero (divisão por infinito), e que para o primeiro termo,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2}} = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z}{\sqrt{(x_P - x)^2 + (z_P - z)^2}} = -1$$

Temos que,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-(b+d/2)}^{-d/2} \frac{1}{(x_P - x)} \mathbf{a}_y dx$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{K_0}{2\pi} \ln(x_P - x) \Big|_{-(b+d/2)}^{-d/2}$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{K_0}{2\pi} \left[\ln\left(x_P + \frac{d}{2}\right) - \ln\left(x_P + \left(b + \frac{d}{2}\right)\right) \right] \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{K_0}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{\left(b + \frac{d}{2}\right) + x_P}{\left(\frac{d}{2} + x_P\right)}\right) \right] \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{K_0}{2\pi} \ln \frac{\frac{d}{2} + x_P + b}{\frac{d}{2} + x_P} \mathbf{a}_y \quad \text{A/m}$$

Similarmente, o campo \mathbf{H}_1 será,

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{K_0}{2\pi} \ln \frac{\frac{d}{2} + x_P + b}{\frac{d}{2} + x_P} \mathbf{a}_y \quad \text{A/m}$$

Assim, a força atuando na fita 2 será,

$$\mathbf{F}_2 = \int_s \mathbf{K}_2 \times \mathbf{B}_1 dS$$

Onde $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1$. Veja que a integração em x deve ser realizada para um x_P arbitrário. Assim vamos impor que $x_P = x$. Logo,

$$\mathbf{F}_2 = \int_0^z \int_{d/2}^{b+d/2} (-K_0 \mathbf{a}_z) \times \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \ln \frac{\frac{d}{2} + x + b}{\frac{d}{2} + x} (-\mathbf{a}_y) dx dz$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0 K_0^2}{2\pi} \int_0^z \int_{d/2}^{b+d/2} \ln \frac{\frac{d}{2} + x + b}{\frac{d}{2} + x} \mathbf{a}_x dx dz$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{z \mu_0 K_0^2}{2\pi} \int_{d/2}^{b+d/2} \ln \frac{\frac{d}{2} + x + b}{\frac{d}{2} + x} \mathbf{a}_x dx$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{z \mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[\left(\frac{d}{2} + x + b\right) \ln\left(\frac{\frac{d}{2} + x + b}{\frac{d}{2} + x}\right) + (b) \ln\left(\frac{d}{2} + x\right) \right]_{d/2}^{b+d/2} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{z\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[\left(\frac{d}{2} + b + \frac{d}{2} + b \right) \ln \left(\frac{\frac{d}{2} + b + \frac{d}{2} + b}{\frac{d}{2} + b + \frac{d}{2}} \right) + (b) \ln \left(\frac{d}{2} + b + \frac{d}{2} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2} + b \right) \ln \left(\frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2} + b}{\frac{d}{2} + \frac{d}{2}} \right) - (b) \ln \left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2} \right) \right] \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{z\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[(d + 2b) \ln \left(\frac{d + 2b}{b + d} \right) + (b) \ln(b + d) - (d + b) \ln \left(\frac{d + b}{d} \right) - (b) \ln(d) \right] \mathbf{a}_x$$

Força por unidade de comprimento, pode supor $z = 1$ m,

$$\boxed{\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[(d + 2b) \ln \left(\frac{d + 2b}{b + d} \right) + (b) \ln(b + d) - (d + b) \ln \left(\frac{d + b}{d} \right) - (b) \ln(d) \right] \mathbf{a}_x}$$

É possível simplificar ainda mais a equação acima, mas deixo para vocês fazerem. Veja que a força sobre a fita 2 produzida pela fita 1 vai no sentido $-\mathbf{a}_x$, indicando que esta força é **repulsiva**.

b) Considere que b se aproxima de zero enquanto a corrente é mantida constante ($I = K_0 b$), e mostre que a força por unidade de comprimento tende a $\mu_0 I^2 / (2\pi d)$ N/m

Supondo que b tende a zero na equação da força, temos,

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[(d + 2b) \ln \left(\frac{1 + \frac{2b}{d}}{1 + \frac{b}{d}} \right) + (b) \ln(b + d) - (d + b) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) - (b) \ln(d) \right] \mathbf{a}_x$$

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[(d + 2b) \ln \left(\frac{1 + \frac{2b}{d}}{1 + \frac{b}{d}} \right) + (b) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) - (d + b) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) \right] \mathbf{a}_x$$

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{d\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{2b}{d} \right) \ln \left(\frac{1 + \frac{2b}{d}}{1 + \frac{b}{d}} \right) + \left(\frac{b}{d} \right) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) - \left(1 + \frac{b}{d} \right) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) \right] \mathbf{a}_x$$

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{d\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{2b}{d} \right) \ln \left(\frac{1 + \frac{2b}{d}}{1 + \frac{b}{d}} \right) - \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) \right] \mathbf{a}_x$$

Para $\frac{b}{d} \ll 1$, temos que

$$\frac{1}{1 + \frac{b}{d}} \cong 1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d} \right)^2$$

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{d\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{2b}{d}\right) \ln \left[\left(1 + \frac{2b}{d}\right) \left(1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2\right) \right] - \ln \left(1 + \frac{b}{d}\right) \right] \mathbf{a}_x$$

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{d\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{2b}{d}\right) \ln \left[1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 + \frac{2b}{d} - \frac{2b^2}{d^2} + \frac{2b^3}{d^3} \right] - \ln \left(1 + \frac{b}{d}\right) \right] \mathbf{a}_x$$

Olhando o argumento dos logaritmos, para $arg = 1 + f\left(\frac{b}{d}\right)$ para $f\left(\frac{b}{d}\right) \ll 1$, temos que o $\log(arg) = arg$. Assim,

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{d\mu_0 K_0^2}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{2b}{d}\right) \left(1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 + \frac{2b}{d} - \frac{2b^2}{d^2} + \frac{2b^3}{d^3}\right) - \left(1 + \frac{b}{d}\right) \right] \mathbf{a}_x$$

Expandindo,

$$\frac{\mathbf{F}_2}{z} = -\frac{\mu_0 (bK_0)^2}{2\pi d} \mathbf{a}_x \quad \text{N/m}$$

8.10 Uma linha de transmissão plana consiste em dois planos condutores de largura b separados por d m no ar, pelos quais circulam correntes iguais e opostas de I A. Se $b \gg d$, encontre a força de repulsão por metro de comprimento entre os dois condutores.

Temos que,

$$\mathbf{F}_2 = \int_s \mathbf{K}_2 \times \mathbf{B}_1 dS$$

Que é a força na linha 2 devido ao campo da linha 1. Assim,

$$\mathbf{H}_2 = \int_s \frac{\mathbf{K}_1 \times \mathbf{a}_{R12} dS}{4\pi R_{12}^2}$$

$$\mathbf{a}_{R12} =$$

8.12 Dois anéis circulares condutores são paralelos, compartilham do mesmo eixo, possuem raio a e estão separados por uma distância d , onde $d \ll a$. Cada anel conduz uma corrente I . Determine a força de atração aproximada e indique as orientações relativas das correntes.

8.14 Um solenoide, com 25 cm de comprimento e 3 cm de diâmetro, conduz 4 A de corrente contínua em sua bobina de 400 espiras. Seu eixo é perpendicular a um campo magnético uniforme

de $0,8 \text{ Wb/m}^2$ no ar. Usando uma origem no centro do solenoide, calcule o torque que age sobre ele.

8.20 Calcule \mathbf{H} em um material onde (a) $\mu_r = 4,2$, no qual existem $2,7 \times 10^{29}$ átomos/ m^3 e cada átomo tem um momento de dipolo de $2,6 \times 10^{-30} \mathbf{a}_y \text{ A} \cdot \text{m}^2$; (b) $\mathbf{M} = 270 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$ e $\mu = 2 \text{ mH/m}$; (c) $\chi_m = 0,7$ e $\mathbf{B} = 2 \mathbf{a}_z \text{ T}$. (d) Calcule \mathbf{M} em um material onde existem densidades superficiais de corrente ligada de $12 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$ e $-9 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$ em $\rho = 0,3$ e $0,4 \text{ m}$, respectivamente.

8.22 Sob certas condições, é possível aproximar os efeitos de materiais ferromagnéticos assumindo linearidade na relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} . Seja $\mu_r = 1000$ para certo material do qual um fio cilíndrico de raio 1 mm é feito. Se $I = 1 \text{ A}$ e a distribuição de corrente é uniforme, calcule (a) \mathbf{B} ; (b) \mathbf{H} , (c) \mathbf{M} , (d) \mathbf{J} e (e) \mathbf{J}_B dentro do fio.

8.28 Para valores de \mathbf{B} abaixo do joelho da curva de magnetização para o aço-silício, aproxime a curva por uma linha reta com $\mu = 5 \text{ mH/m}$. O núcleo mostrado na Figura 8.16 possui áreas de $1,6 \text{ cm}^2$ e comprimentos de 10 cm em cada perna externa, e uma área de $2,5 \text{ cm}^2$ e comprimento de 3 cm na perna central. Uma bobina de 1200 espiras, que conduz 12 mA , é enrolada na perna central. Calcule B na: (a) perna central; (b) perna central se um gap de ar de $0,3 \text{ mm}$ está presente nessa perna.

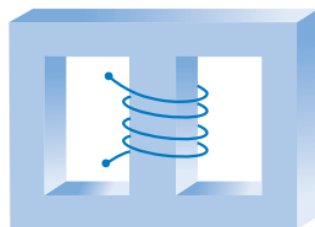


Figura 8.16 Ver Problema 8.28.

8.32 (a) Encontre uma expressão para a energia magnética armazenada, por unidade de comprimento, em uma linha de transmissão coaxial, que consiste em luvas condutoras de espessura desprezível, de raios a e b . Um meio de permeabilidade relativa μ_r preenche a região entre os condutores. Suponha que uma corrente I flua em ambos os condutores, na mesma direção e em sentidos opostos. (b) Obtenha a indutância, L , por unidade de comprimento da linha, igualando a energia magnética a $1/2(LI^2)$.

8.34 Determine a energia armazenada por unidade de comprimento no campo magnético interno de um fio retilíneo infinitamente longo de raio a , pelo qual circula uma corrente I .

8.40 Um cabo coaxial possui raios a e b , onde $a < b$. Um material de permeabilidade $\mu_r \neq 1$ existe na região $a < \rho < c$, enquanto a região $c < \rho < b$ é preenchida com ar. Determine uma expressão para a indutância por unidade de comprimento.

8.42 Ache a indutância mútua entre dois filamentos que formam anéis circulares de raios a e Δa , onde $\Delta a \ll a$. O campo deve ser determinado por métodos aproximados. Os anéis são coplanares e concêntricos.