SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

Campo eletrostático: Trabalho, Energia e Potencial

Resolução dos problemas pares propostos no Capítulo 4 do Hayt Jr, 8ª Edição

Quiz 3:

1) Suponha $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y + 6z^3\mathbf{a}_z \ \mathrm{C/m^2}$.

a) Use a Lei de Gauss e calcule a carga total em um cubo de lado a no quadrante positivo com um vértice na origem.

$$\Psi = \mathrm{Q} = \oint \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da = \int_0^a\int_0^a 2ay\,dydz + \int_0^a\int_0^a -2(0)y\,dydz + \int_0^a\int_0^a -x^2dxdz +$$

$$\int_0^a\int_0^a x^2dxdz + \int_0^a\int_0^a -6(0)^3dxdy + \int_0^a\int_0^a 6a^3dxdy$$

$$Q = 6a^5 + a^4$$

Sequência de integrais (relativas às faces do cubo): frente, atrás, esquerda, direita, fundo, topo.

b) Sabendo que,

$$Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \times \Delta v$$

Use a equação acima e encontre o valor aproximado da carga em $P(a/2, a/2, a/2)$.

A equação acima é o mesmo que,

$$Q \doteq (\nabla\cdot\mathbf{D}) \times \Delta v$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 2x + 18z^2$$

$$\mathrm{Q} = (2x + 18z^2) \times a^3$$

No ponto P,

$$\mathrm{Q} = (a + 4.5a^2)a^3 = 4.5a^5 + a^4$$

c) Mostre que para $a \to 0$ os resultados em (a) e (b) tendem a concordar.

No limite que $a \to 0$, $Q = a^4$ em ambos os casos, então (a) e (b) concordam.

2) Em $P(r = 2, \varphi = 40°, z = 3)$ temos que $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_r - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$ V/m. Calcule o trabalho incremental necessário para mover uma carga de 20 μC por 6 μm:

a) na direção de $\mathbf{a}_r$;

$$dW = -\mathrm{q}\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = dr\mathbf{a}_r = 6\times 10^{-6}\mathbf{a}_r$$
$$dW = -(20\times 10^{-6}\ \mathrm{C})\times(100\ \mathrm{V/m})\times(6\times 10^{-6}\ \mathrm{m}) = -12\ \mathrm{nJ}$$

Onde o produto escalar $\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 100$ V/m

b) na direção de $\mathbf{a}_\phi$;

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = rd\phi\mathbf{a}_\phi = 2d\phi\mathbf{a}_\phi = 6\times 10^{-6}\mathbf{a}_\phi$$
$$dW = -(20\times 10^{-6}\ \mathrm{C})\times(-200\ \mathrm{V/m})\times(6\times 10^{-6}\ \mathrm{m}) = 24\ \mathrm{nJ}$$

c) na direção de $\mathbf{a}_z$;

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = dz\mathbf{a}_z = 6\times 10^{-6}\mathbf{a}_z$$
$$dW = -(20\times 10^{-6}\ \mathrm{C})\times\left(300\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)\times(6\times 10^{-6}\ \mathrm{m}) = -36\ \mathrm{nJ}$$

d) na direção de $\mathbf{E}$;

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 6\times 10^{-6}\mathbf{a}_E$$
$$\mathbf{a}_E = \frac{100\mathbf{a}_r - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z}{\sqrt{100^2+200^2+300^2}} = \frac{100\mathbf{a}_r - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z}{374.166}$$
$$\mathbf{a}_E = 0.267\mathbf{a}_r - 0.535\mathbf{a}_\phi + 0.802\mathbf{a}_z$$

$$dW = -(20\times 10^{-6}\ \mathrm{C})\times\left(100\mathbf{a}_r - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z\right)\cdot\left(0.267\mathbf{a}_r - 0.535\mathbf{a}_\phi + 0.802\mathbf{a}_z\right)\times(6\times 10^{-6}\ \mathrm{m})$$

$$dW = -44.9\ \mathrm{nJ}$$

e) na direção de $\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 6\times 10^{-6}\mathbf{a}_G$$
$$\mathbf{a}_G = \frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{5.385} = 0.371\mathbf{a}_x - 0.557\mathbf{a}_y + 0.743\mathbf{a}_z$$

$$dW = -(20\times 10^{-6}\ \mathrm{C})\times\left(100\mathbf{a}_r - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z\right)\cdot\left(0.371\mathbf{a}_x - 0.557\mathbf{a}_y + 0.742\mathbf{a}_z\right)\times(6\times 10^{-6}\ \mathrm{m})$$

$$dW = -(1.2\times 10^{-10}\ \mathrm{Cm})\times[37.1(\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_x) - 55.7\left(\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_y\right) - 74.2\left(\mathbf{a}_\phi\cdot\mathbf{a}_x\right) + 111.4\left(\mathbf{a}_\phi\cdot\mathbf{a}_y\right) + 222.9(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_z)]$$

Agora você deve recorrer à relação entre coordenadas retangulares e cilíndricas, de onde (checar Aula 1),

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = cos\phi$$
$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = sin\phi$$
$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -sin\phi$$
$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = cos\phi$$

Logo, e sabendo que ϕ = 40°,

$$dW = -(1.2 \times 10^{-10}\ \text{Cm}) \times [37.1(cos\phi) - 55.7(sin\phi) - 74.2(-sin\phi) + 111.4(cos\phi) + 222.9(1)]$$

$$dW = -41.8\ \text{nJ}$$

3) Calcule o $\nabla \cdot \mathbf{D}$ nos seguintes casos:

a) $\mathbf{D} = \frac{1}{z^2}\left(10xyz\mathbf{a}_x + 5x^2z\mathbf{a}_y + (2z^3 - 5x^2y)\mathbf{a}_z\right)$ em P(-2,3,5);

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{10y}{z} + 0 + 2 + \frac{10x^2y}{z^3}\bigg|_{(-2,3,5)} = 8.96$$

b) $\mathbf{D} = 5z^2\mathbf{a}_r + 10rz\mathbf{a}_z$ em P(3,-45º ,5);

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{5z^2}{r} + 10r\bigg|_{(3,-45^o,5)} = 71.67$$

c) $\mathbf{D} = 2r\text{sin}\theta\text{sin}\phi\mathbf{a}_r + r\text{cos}\theta\text{sin}\phi\mathbf{a}_\theta + r\text{cos}\phi\mathbf{a}_\phi$ em P(3, 45º, -45º).

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(D_\theta sin\theta) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 6sin\theta\text{sin}\phi + \frac{\text{cos}\,(2\theta)\text{sin}\phi}{sin\theta} - \frac{sin\phi}{sin\theta}\bigg|_{(3,45^o,-45^o)} = -2$$

Solução dos problemas pares do Hayt Jr:

Capítulo 2:

2.2 Cargas pontuais de 1 nC e −2 nC estão localizadas no espaço livre em (0, 0, 0) e (1, 1, 1), respectivamente. Determine o vetor força que age sobre cada carga.

A força $\mathbf{F}_1$ em uma carga Q_1 devido a uma carga Q_2 é dada por (ou seja, de 2 para 1):

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2}\mathbf{a}_{21} \ \ (\text{leia} - \text{se, indo de } Q_2 \text{ para } Q_1)$$

$$\mathbf{a}_{21} = \frac{\mathbf{r}_{21}}{|\mathbf{r}_{21}|} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{(0-1)\mathbf{a}_x + (0-1)\mathbf{a}_y + (0-1)\mathbf{a}_z}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = -\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{(1\text{ nC}) \times (-2\text{ nC})}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{3}\right)^2}\left[-\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}\right] = \frac{2\ (\text{nC})^2}{4\pi\epsilon_0 3\sqrt{3}}\left(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z\right)$$

$$\boldsymbol{F}_1 = 3.464\left(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z\right)\ \text{nN}$$

A força $\mathbf{F}_2$ em uma carga Q_2 devido a uma carga Q_1 é dada por (ou seja, de 1 para 2):

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}\mathbf{a}_{12} \ (\text{leia} - \text{se, indo de } Q_1 \text{ para } Q_2)$$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{(1-0)\mathbf{a}_x + (1-0)\mathbf{a}_y + (1-0)\mathbf{a}_z}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{(1\text{ nC}) \times (-2\text{ nC})}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{3}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\ (\text{nC})^2}{4\pi\epsilon_0 3\sqrt{3}}\left(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z\right)$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -3.464\left(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z\right)\ \text{nN}$$

2.4 Oito cargas pontuais idênticas de Q C estão posicionadas nos vértices de um cubo cujo lado tem comprimento a, com uma carga na origem e com as três cargas mais próximas em (a, 0, 0), (0, a, 0) e (0, 0, a). Encontre uma expressão para o vetor da força total na carga em P(a, a, a), considerando o espaço livre.

Sabemos que a força em uma carga Q_1 devido a n cargas é dada por:

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2}\mathbf{a}_{21} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{31}^2}\mathbf{a}_{31} + \frac{Q_1 Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{41}^2}\mathbf{a}_{41} + \cdots = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=2}^{n}\frac{Q_k}{r_{k1}^2}\mathbf{a}_{k1} \quad (N)$$

Assim, para uma carga Q_P localizada em P(a, a, a), temos (resolvendo da forma mais geral possível):

$$\boldsymbol{F}_P = \frac{Q_P Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1P}^2}\mathbf{a}_{1P} + \frac{Q_P Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2P}^2}\mathbf{a}_{2P} + \frac{Q_P Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{3P}^2}\mathbf{a}_{3P} + \frac{Q_P Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{4P}^2}\mathbf{a}_{4P} + \frac{Q_P Q_5}{4\pi\epsilon_0 r_{5P}^2}\mathbf{a}_{5P} + \frac{Q_P Q_6}{4\pi\epsilon_0 r_{6P}^2}\mathbf{a}_{6P} + \frac{Q_P Q_7}{4\pi\epsilon_0 r_{7P}^2}\mathbf{a}_{7P}$$

$$\boldsymbol{F}_P = \frac{Q_P}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_1}{r_{1P}^2}\mathbf{a}_{1P} + \frac{Q_2}{r_{2P}^2}\mathbf{a}_{2P} + \frac{Q_3}{r_{3P}^2}\mathbf{a}_{3P} + \frac{Q_4}{r_{4P}^2}\mathbf{a}_{4P} + \frac{Q_5}{r_{5P}^2}\mathbf{a}_{5P} + \frac{Q_6}{r_{6P}^2}\mathbf{a}_{6P} + \frac{Q_7}{r_{7P}^2}\mathbf{a}_{7P}\right]$$

$$\mathbf{a}_{1P} = \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_1|} = \frac{(a-0)\mathbf{a}_x + (a-0)\mathbf{a}_y + (a-0)\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = \frac{a\mathbf{a}_x + a\mathbf{a}_y + a\mathbf{a}_z}{a\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{a}_{2P} = \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_2|} = \frac{(a-0)\mathbf{a}_x + (a-a)\mathbf{a}_y + (a-0)\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{a\mathbf{a}_x + a\mathbf{a}_z}{a\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{a}_{3P} = \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_3|} = \frac{(a-a)\mathbf{a}_x + (a-0)\mathbf{a}_y + (a-0)\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{a\mathbf{a}_y + a\mathbf{a}_z}{a\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{a}_{4P} = \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_4}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_4|} = \frac{(a-0)\mathbf{a}_x + (a-0)\mathbf{a}_y + (a-a)\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{a\mathbf{a}_x + a\mathbf{a}_y}{a\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{a}_{5P} = \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_5}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_5|} = \frac{(a-a)\mathbf{a}_x + (a-0)\mathbf{a}_y + (a-a)\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2}} = \frac{a\mathbf{a}_y}{a} = \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_{6P} = \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_6}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_6|} = \frac{(a-0)\mathbf{a}_x + (a-a)\mathbf{a}_y + (a-a)\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2}} = \frac{a\mathbf{a}_x}{a} = \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_{7P} = \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_7}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_7|} = \frac{(a-a)\mathbf{a}_x + (a-a)\mathbf{a}_y + (a-0)\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2}} = \frac{a\mathbf{a}_z}{a} = \mathbf{a}_z$$

Assim,

$$\boldsymbol{F}_P = \frac{Q_P}{4\pi\epsilon_0}\left[Q_1\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{a^2 3\sqrt{3}} + Q_2\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{a^2 2\sqrt{2}} + Q_3\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{a^2 2\sqrt{2}} + Q_4\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{a^2 2\sqrt{2}} + Q_5\frac{\mathbf{a}_y}{a^2} + Q_6\frac{\mathbf{a}_x}{a^2} + Q_7\frac{\mathbf{a}_z}{a^2}\right]$$

Como as cargas são iguais,

$$\boldsymbol{F}_P = \frac{Q^2}{4\pi a^2\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{3\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{2\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{2\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{2\sqrt{2}} + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z\right]$$

$$\boldsymbol{F}_P = \frac{Q^2}{4\pi a^2\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\mathbf{a}_z\right]$$

$$\boldsymbol{F}_P = \frac{Q^2}{4\pi a^2\epsilon_0}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)[\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z]$$

$$\boldsymbol{F}_P = \frac{1.9Q^2}{4\pi a^2\epsilon_0}[\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z]$$

2.6 Duas cargas pontuais, de valores iguais a q, estão posicionadas em $z = \pm d/2$. (a) Encontre o campo elétrico em qualquer ponto sobre o eixo z; (b) encontre o campo elétrico em qualquer ponto sobre o eixo x; (c) repita (a) e (b) se a carga localizada em $z = -d/2$ possuir valor $-q$ em vez de $+q$.

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{r}'}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

O campo elétrico total é igual à soma dos campos elétricos (lembre-se de que $\mathbf{r}'$ é onde a carga está posicionada, e que $\mathbf{r}$ é um ponto arbitrário onde queremos observar o efeito), logo

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\mathbf{a}_2$$

a) Sobre o eixo z:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{z\mathbf{a}_z - \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\left(z - \frac{d}{2}\right)} = \frac{z - \frac{d}{2}}{\left(z - \frac{d}{2}\right)}\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{z\mathbf{a}_z + \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\left(z + \frac{d}{2}\right)} = \frac{z + \frac{d}{2}}{\left(z + \frac{d}{2}\right)}\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(z - \frac{d}{2}\right)^2}\mathbf{a}_z + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(z + \frac{d}{2}\right)^2}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2}\right]\mathbf{a}_z \quad \mathrm{V/m}$$

b) Agora sobre o eixo x:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{x\mathbf{a}_x - \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{x\mathbf{a}_x + \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)}\frac{x\mathbf{a}_x - \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)}\frac{x\mathbf{a}_x + \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}[2x\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_z] \quad \mathrm{V/m}$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} 2x\mathbf{a}_x \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \qquad \text{ao longo de } x$$

c) carga localizada em $z = -d/2$ possui valor $-q$
Podemos usar o que já foi calculado em a) e b), e inverter o sinal da carga em z=-d/2, logo,

Sobre o eixo z:

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}\right]\mathbf{a}_z \quad \mathrm{V/m}$$

Sobre o eixo x:

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)}\frac{x\mathbf{a}_x - \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+\frac{d^2}{4}}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)}\frac{x\mathbf{a}_x + \frac{d}{2}\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+\frac{d^2}{4}}}$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}[0\mathbf{a}_x - d\mathbf{a}_z] \quad \mathrm{V/m}$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}\mathbf{a}_z \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \qquad \text{ao longo de } x$$

2.10 Uma carga de −1 nC está localizada na origem, no espaço livre. Qual carga deve ser inserida em (2, 0, 0) para fazer com que E_x seja zero em (3, 1, 1)?

Supondo que Q_1 = -1 nC em (0,0,0) e que Q_2 em (2,0,0) seja a carga desconhecida, e o ponto P(3,1,1) seja onde o campo E_x deve ser zero.

A posição da carga de referência sempre fica em $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_x + b\mathbf{a}_y + c\mathbf{a}_z$

Enquanto o vetor onde queremos avaliar o efeito fica em $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$. Assim, como queremos o efeito no ponto P, temos que,

$$\mathbf{r} = 3\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

Novamente, temos que o campo elétrico total devido às duas cargas é dado por,

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\mathbf{a}_2$$

Que avaliado no ponto P tem resulta em,

$$\mathbf{E}_\mathrm{P} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1P}^2}\mathbf{a}_{1P} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2P}^2}\mathbf{a}_{2P}$$

$$\mathbf{a}_{1P} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{(3-0)\mathbf{a}_x + (1-0)\mathbf{a}_y + (1-0)\mathbf{a}_z}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}} = \frac{3\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{11}}$$

$$\mathbf{a}_{2P} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{(3-2)\mathbf{a}_x + (1-0)\mathbf{a}_y + (1-0)\mathbf{a}_z}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{P} = \frac{(-1\ \mathrm{nC})}{4\pi\epsilon_0(11)}\frac{3\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{11}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(3)}\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}$$

Como E_x é zero em (3, 1, 1), tomamos a componente em x da equação acima e a igualamos a zero. Logo,

$$\frac{(-1\ \mathrm{nC})}{4\pi\epsilon_0(11)}\frac{3}{\sqrt{11}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(3)\sqrt{3}} = 0$$

$$Q_2 = -\frac{(-1\ \mathrm{nC})9\sqrt{3}}{11\sqrt{11}} = 0.427\ \mathrm{nC}$$

2.14 Um feixe de elétrons em determinado tubo de raios catódicos possui simetria cilíndrica, e a densidade de carga é representada por $\rho_v = -\frac{0.1}{\rho^2+10^{-8}}$ $\mathrm{pC/m^3}$ para $0 < \rho < 3 \times 10^{-4}$ m e $\rho_v = 0$ para $\rho > 3 \times 10^{-4}$ m. (a) Determine a carga total por metro ao longo do comprimento do feixe. (b) Se a velocidade do elétron é de 5×10^7 m/s, e com um ampère definido como 1 C/s, encontre a corrente do feixe.

a) Para encontrarmos a carga total, temos que integrar a densidade ao longo do comprimento do cilindro, tal que

$$Q = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3\times10^{-4}} \frac{-0.1}{\rho^2+10^{-8}} \rho d\rho d\phi dz = -0.2\pi\left(\frac{1}{2}\right) ln(\rho^2+10^{-8})\Big|_0^{3\times10^{-4}} = 0.1\pi ln(10)$$

$$Q = -0.23\pi \quad \mathrm{pC/m}$$

b) Calculando a corrente do feixe,

Da definição de corrente, temos que

$$Corrente = \frac{carga}{\mathrm{m}} \times v$$

Como a velocidade do elétron é $v = 5 \times 10^7\ \mathrm{m/s}$, e sabendo que 1 Ampére de corrente é igual a 1 C/s, temos,

$$Corrente = I = (-0.23\pi \quad \mathrm{pC/m}) \times (5 \times 10^7\ \mathrm{m/s})$$

$$I = -11.5\pi \times 10^6\ \frac{\mathrm{pC}}{\mathrm{s}} = -11.5\pi\ \ \mu\mathrm{A}$$

2.18 (a) Determine **E** no plano $z = 0$ que é produzido por uma linha uniforme de carga ρ_L, que se estende ao longo do eixo z na faixa $-L < z < L$ em um sistema de coordenadas cilíndricas. (b) Se a linha finita de carga for aproximada por uma linha infinita de carga ($L \to \infty$), qual é o erro percentual em E_ρ se $\rho = 0.5\ L$? (c) Repita (b) com $\rho = 0.1\ L$.

a) Sabemos que,

$$\mathbf{E} = \int_{-L}^{L} \frac{\rho_L \mathrm{d}z}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

O plano z = 0 significa qualquer lugar no plano xy, portanto, o nosso ponto de observação é,

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{a}_\rho$$

Por outro lado, nosso diferencial de carga se encontra ao longo do eixo z, assim,

$$\mathbf{r}' = z\mathbf{a}_z$$

Portanto,

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = \int_{-L}^{L} \frac{\rho_L \mathrm{d}z}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{(\rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z)dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Resolvendo a integral, note que a componente em $z\mathbf{a}_z$ dará zero por conta da simetria. Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{a}_\rho \int_{-L}^{L} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Tomando apenas a magnitude de **E**, ou seja, a componente E_ρ,

$$E_\rho = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \Bigg|_{-L}^{L} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{L}\right)^2}}$$

b) Linha infinita ($L \to \infty$), calcule o erro percentual em E_ρ se ρ = 0.5 L
Nesse caso, da equação acima, temos (fazendo $L \to \infty$) :

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

Assim, o erro % torna-se (tomando-se o resultado em (b) como referência):

$$Erro\% = \left[\frac{E_\rho^{(b)} - E_\rho^{(a)}}{E_\rho^{(b)}}\right] \times 100 = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{L}\right)^2}}\right] \times 100$$

Para ρ = 0.5 L,

$$Erro\% = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.5L}{L}\right)^2}}\right] \times 100 = 10.56\%$$

c) Repetindo b) para ρ = 0.1 L

$$Erro\% = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.1L}{L}\right)^2}}\right] \times 100 = 0.496\%$$

Que conclusões você tira desses resultados?

Capítulo 3

3.2 Um campo elétrico no espaço livre é dado pela seguinte expressão: $\mathbf{E} = (5z^2/\varepsilon_0)\mathbf{a}_z$ V/m. Determine a carga total contida no interior de um cubo centrado na origem e com lado de 4 m, no qual todos os lados são paralelos aos eixos coordenados (e, em consequência onde cada lado intercepta um eixo em ±2).

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$Q = \varepsilon_0 \oint \frac{5z^2}{\varepsilon_0} \mathbf{a}_z \cdot d\mathbf{S} = \oint 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot d\mathbf{S}$$

Tomando os seis lados do cubo, temos

$$Q = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x dydz + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_x) dydz + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y dxdz + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_y) dxdz + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dxdy + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) dxdy$$

Observe que nos pontos indicados em amarelo nas integrais, o resultado do produto escalar é zero. Assim,

$$Q = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dxdy + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5z^2 \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) dxdy$$

Tomando $z = 2$, temos,

$$Q = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5(2)^2 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dxdy + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 5(2)^2 \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) dxdy$$

$$Q = 0$$

3.4 Um campo elétrico no espaço livre é $\mathbf{E} = (5z^3/\varepsilon_0)\mathbf{a}_z$ V/m. Encontre a carga total contida no interior de uma esfera de raio igual a 3 m, centrada na origem.

De novo, da Lei de Gauss, temos que,

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$Q = \varepsilon_0 \oint \frac{5z^3}{\varepsilon_0} \mathbf{a}_z \cdot d\mathbf{S} = \oint 5z^3 \mathbf{a}_z \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\mathbf{S} = r^2 sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

$$Q = \oint 5z^3 \mathbf{a}_z \cdot r^2 sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

Da Aula 1 (ver primeira Tabela), temos que $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = cos\theta$, e que $z = rcos\theta = 3cos\theta$. Assim,

$$Q = \oint 5\,(3)^3 \cos^3\theta\,(3)^2 cos\theta sin\theta d\theta d\phi = 1215 \oint \cos^4\theta\, sin\theta d\theta d\phi$$

$$Q = 1215 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^4\theta \, sin\theta d\theta d\phi$$

$$Q = 1215 \times (2\pi) \int_0^{\pi} \cos^4\theta \, sin\theta d\theta = -1215 \times (2\pi) \times \left(\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 972\pi \ \ \mathrm{C}$$

3.6 No espaço livre, uma carga volumétrica de densidade constante $\rho_v = \rho_0$ existe na região $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ e $-d/2 < z < d/2$. Encontre **D** e **E** em todos os pontos.

O problema nos indica que os campos são uniformes em x e y para um dado valor de z, e têm direção ao longo de z. Além disso, sua geometria sugere que a superfície Gaussiana especial é retangular. Assim, podemos supor uma superfície Gaussiana limitada por,

$-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ e $-d/2 < z < d/2$

$$\oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho dv$$

Trabalhando o lado esquerdo (LE) da equação acima,

$$LE = \int_{-1}^{1} \int_{-d/2}^{d/2} D_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x dydz + \int_{-1}^{1} \int_{-d/2}^{d/2} D_z \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_x) dydz + \int_{-1}^{1} \int_{-d/2}^{d/2} D_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y dxdz$$
$$+ \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} D_z \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_y) dxdz + \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} D_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dxdy$$
$$+ \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} D_z (-\mathbf{a}_z) \cdot (-\mathbf{a}_z) dxdy$$

$$LE = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} D_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dxdy + \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} D_z (-\mathbf{a}_z) \cdot (-\mathbf{a}_z) dxdy$$

$$LE = 2 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} D_z dxdy$$

Como D_z é constante dentro desse volume,

$$LE = 2D_z \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} dxdy = 8D_z$$

Agora o lado direito (LD),

$$LD = \int_{-z}^{z} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \rho_0 dxdydz$$

$$LD = \rho_0 \int_{-z}^{z} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} dxdydz = \rho_0 (2z \times 2 \times 2) = \rho_0 8z$$

Igualando LE=LD,

$$8D_z = \rho_0 8z$$

$$D_z = \rho_0 z$$

$$\mathbf{D} = \rho_0 z \mathbf{a}_z \;\; \text{C/m}^2 \;\; \text{para} \; -d/2 \; < \; z \; < \; d/2$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0} \mathbf{a}_z \;\; \text{V/m} \;\; \text{para} \; -d/2 \; < \; z \; < \; d/2$$

Para a região onde $z > |d/2|$, temos

$$LD = \rho_0 \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} dxdydz = \rho_0 (d \times 2 \times 2) = \rho_0 4d$$

Como o lado esquerdo não muda, igualando LE=LD,

$$8D_z = \rho_0 4d$$

$$D_z = \rho_0 \frac{d}{2}$$

$$\mathbf{D} = \rho_0 \frac{d}{2} \mathbf{a}_z \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \;\text{para}\;\; z > \; d/2$$

$$\mathbf{D} = -\rho_0 \frac{d}{2} \mathbf{a}_z \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad \text{para z} < -d/2$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0} \mathbf{a}_z \; \frac{\text{V}}{\text{m}} \;\text{para}\;\; z > \; d/2$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0} \mathbf{a}_z \; \frac{\text{V}}{\text{m}} \;\text{para z} < -d/2$$

3.10 Um cilindro dielétrico, infinitamente longo, de raio b, contém carga no interior de seu volume de densidade $\rho_v = a\rho^2$, onde a é uma constante. Encontre a <u>intensidade de campo elétrico</u> no <u>interior</u> e no <u>exterior</u> do cilindro.

O ponto de partida para resolver esse problema é a Lei de Gauss, porque ela permite relacionar a intensidade de campo elétrico com a carga envolvida. Assim,

$$\oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho_v dv$$

Sabendo que $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$,

$$\varepsilon_0 \oiint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho_v dv$$

Como já vimos anteriormente, a simetria do problema nos diz que teremos apenas a componente radial, $\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_r$. Logo, supondo um cilindro de comprimento L para $\rho < b$, temos,

$$\varepsilon_0 \int_0^L \int_0^{2\pi} E_\rho \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r \rho d\phi dz = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} a\rho^2 \rho d\rho d\phi dz$$

$$E_\rho \varepsilon_0 \int_0^L \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r \rho d\phi dz = a \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \rho^3 d\rho d\phi dz$$

$$E_\rho \varepsilon_0 \rho (2\pi L) = a \frac{\rho^4}{4} (2\pi L)$$

$$E_\rho \varepsilon_0 = a\frac{\rho^3}{4}$$

$$E_\rho = \frac{a\rho^3}{4\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho^3}{4\varepsilon_0}\mathbf{a}_r \qquad \text{válido para } \rho < b.$$

Para encontrarmos **E** no exterior do cilindro ($\rho > b$),

$$E_\rho \varepsilon_0 \int_0^L \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r \rho d\phi dz = a \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^b \rho^3 d\rho d\phi dz$$

$$E_\rho \varepsilon_0 \rho (2\pi L) = a\frac{b^4}{4}(2\pi L)$$

$$E_\rho \varepsilon_0 \rho = a\frac{b^4}{4}$$

$$E_\rho = \frac{ab^4}{4\rho\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{ab^4}{4\rho\varepsilon_0}\mathbf{a}_r$$

3.16 Uma densidade de fluxo elétrico é dada por $\mathbf{D} = D_0\mathbf{a}_\rho$, onde D_0 é uma constante conhecida. (a) Que densidade de carga gera este campo? (b) Para o campo fornecido, qual carga total está contida no interior de um cilindro de raio a e altura b, onde o eixo do cilindro corresponde ao eixo z?

a) Densidade de carga:
Uma vez que conhecemos **D**, podemos usar a primeira equação de Maxwell para obtermos a densidade de carga, ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

Assim,

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho D_0) = \frac{D_0}{\rho} \quad \mathrm{C/m^3}$$

b) Carga total no cilindro:
De novo, da Lei de Gauss, sabemos que,

$$\oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho dv = Q_{env}$$

Podemos usar qualquer uma das duas integrais acima para calcular a carga envolvida. Assim,

$$Q_{env} = \iiint \rho dv$$

$$Q_{env} = \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{D_0}{\rho} \rho d\rho d\phi dz = 2\pi ab D_0 \quad \mathrm{C}$$

Ou também,

$$Q_{env} = \oiint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_0^b \int_0^{2\pi} D_0 \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho a d\phi dz = 2\pi ab D_0 \text{ C}$$

Capítulo 4

4.2 Uma carga pontual positiva, de intensidade q_1, repousa na origem. Deduza uma expressão para o trabalho incremental realizado para mover uma segunda carga pontual q_2 por uma distância dx da posição inicial (x, y, z) no sentido $-\mathbf{a}_x$.

$$dW = -q_2 \mathbf{E}_{12} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Onde $\mathbf{E}_{12}$ é o campo elétrico devido a q_1 avaliado na posição de q_2.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -dx\mathbf{a}_x$$

Em coordenadas esféricas,

$$dW = \frac{-q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \cdot (-dx)\mathbf{a}_x$$

com $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = sin\theta cos\phi$. Logo,

$$dW = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = \frac{q_2 q_1 x dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Onde o termo em amarelo vem de $sin\theta$, e o azul de $cos\theta$, ou também da relação $x = rsin\theta cos\phi$. Ver tabelas da Aula 1.

4.4 Um campo elétrico, no espaço livre, é dado por $\mathbf{E} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ V/m. Determine o trabalho realizado para deslocar uma carga de 1 μC através deste campo (a) de (1, 1, 1) para (0, 0, 0); (b) de (ρ = 2, φ = 0) para (ρ = 2, φ = 90°); (c) de (r = 10, θ = θ_0) para (r = 10, θ = θ_0 + 180°).

a) de (1, 1, 1) para (0, 0, 0)

$$W = -\mathrm{q}\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -10^{-6}\left[\int_1^0 xdx + \int_1^0 ydy + \int_1^0 zdz\right] = 1.5\ \mu\mathrm{J}$$

b) de (ρ = 2, φ = 0) para (ρ = 2, φ = 90°)

Primeiro vamos definir o caminho incremental, em coordenadas cilíndricas (estamos andando apenas em ϕ):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$W = -10^{-6}\int_0^{\pi/2} (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z) \cdot \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$$

Das tabelas da Aula 1, temos que:

$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -sin\phi$ $\qquad$ $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = cos\phi$ $\qquad$ $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$

$x = \rho cos\phi = 2cos\phi$ $\qquad$ $y = \rho sin\phi = 2sin\phi$

Assim,

$$W = -10^{-6} \int_{0}^{\pi/2} [-(2)^2 cos\phi sin\phi + (2)^2 cos\phi sin\phi] d\phi = 0$$

c) de (r = 10, $\theta = \theta_0$) para (r = 10, $\theta = \theta_0$ + 180°)

Estamos andando apenas em $\mathbf{a}_\theta$, em coordenadas esféricas, logo

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = rd\theta\mathbf{a}_\theta$$

$$W = -10^{-6} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} \left(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z\right) \cdot rd\theta\mathbf{a}_\theta$$

$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = cos\theta cos\phi$ $\quad\quad$ $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta = cos\theta sin\phi$ $\quad\quad$ $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -sin\theta$

$x = rsin\theta cos\phi = 10sin\theta cos\phi$ $\quad\quad$ $y = rsin\theta sin\phi = 10sin\theta sin\phi$ $\quad\quad$ $z = rcos\theta$

Fazendo as substituições, temos,

$$W = -10\mathrm{e}^{-6} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} (10)^2[sin\theta cos\theta \cos^2\phi + sin\theta cos\theta \sin^2\phi - cos\theta sin\theta]d\theta = 0$$

4.6 Um campo elétrico, no espaço livre, é dado por $\mathbf{E} = x\mathbf{a}_x + 4z\mathbf{a}_y + 4y\mathbf{a}_z$ V/m. Dado V(1, 1, 1) = 10 V, determine V(3, 3, 3).

Da definição de potencial, temos que,

$$V_{(3,3,3)} - V_{(1,1,1)} = -\int_{1,1,1}^{3,3,3} (x\mathbf{a}_x + 4z\mathbf{a}_y + 4y\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z)$$

$$V_{(3,3,3)} - V_{(1,1,1)} = -\left[\int_1^3 xdx + \int_1^3 4zdy + \int_1^3 4ydz\right]$$

Atenção: veja que você tem que definir o caminho a ser seguido.

Assim, moveremos ao longo de *x* partindo de *x*=1 para *x*=3.

Ao longo de *y* partindo de *y=1* para *y*=3. Veja que o integrando em *y* é função de *z*. Portanto, fixamos valores de *x* e *z* (nesse caso, tome *x*=3 e *z*=1).

Ao longo de *z* (mesma coisa aqui) partindo de *z*=1 para *z*=3, fixando *x*=3 e *y*=3.

Veja se outro caminho é possível.

Continuando, temos,

$$V_{(3,3,3)} - V_{(1,1,1)} = -\left[\int_1^3 xdx + \int_1^3 4(1)dy + \int_1^3 4(3)dz\right] = -36$$

Assim,

$$V_{(3,3,3)} = -36 + V_{(1,1,1)} = -36 + 10 = -26\,V$$

4.8 Dado $\mathbf{E} = -x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$ V/m, (a) calcule o trabalho envolvido no deslocamento de uma carga unitária positiva por um arco circular do círculo centrado na origem, de $x = a$ até $x = y = a\sqrt{2}$; (b) mostre que o trabalho realizado no movimento da carga ao redor do círculo inteiro de $x = a$ é zero.

a) Como a ideia é mover ao longo de um arco, então podemos definir esse caminho de $\phi = 0$ a $\phi = \pi/4$.

Assim,

$$W = -\int \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_0^{\pi/4} \mathbf{E}\cdot a d\phi \mathbf{a}_\phi = -\int_0^{\pi/4} \left(-x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y\right)\cdot a d\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathrm{W} = -\int_0^{\pi/4} \left(-x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi + y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi\right)\cdot a d\phi$$

Das tabelas da Aula 1, temos,

$\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi = -sin\phi$ $\quad$ $\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi = cos\phi$ $\quad$ $x = acos\phi$ $\quad$ $y = asin\phi$

Assim,

$$\mathrm{W} = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 sin\phi cos\phi d\phi = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin(2\phi)\,d\phi = \frac{a^2}{2}\cos(2\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{a^2}{2}$$

b) Nesse caso temos que,

$$\mathrm{W} = -\int_0^{2\pi} a^2\sin(2\phi)\,d\phi = \frac{a^2}{2}\cos(2\phi)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

4.10 Uma esfera, de raio a, contém uma densidade superficial de carga de ρ_{s0} C/m^2. (a) Determine o potencial absoluto na superfície da esfera. (b) Uma casca condutora aterrada, de raio b, onde $b > a$, é agora posicionada ao redor da esfera carregada. Qual é o potencial na superfície esférica interna neste caso?

a) Da equação do potencial temos que,

$$V = -\int_\infty^a \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_\infty^a \mathbf{E}\cdot\mathbf{a}_r dr$$

Da Lei de Gauss, temos,

$$\mathbf{E} = \frac{a^2\rho_{s0}}{\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \quad \text{V/m}$$

$$V = -\int_{\infty}^{a} \frac{a^2\rho_{s0}}{\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r dr = \frac{a^2\rho_{s0}}{\varepsilon_0 r}\bigg|_{\infty}^{a} = \frac{a\rho_{s0}}{\varepsilon_0} \ \text{V}$$

b) A esfera externa está aterrada. Com isso, só existe campo entre as superfícies a e b, sendo que o campo é zero para $r > b$. Logo,

$$V = -\int_{b}^{a} \frac{a^2\rho_{s0}}{\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r dr = \frac{a^2\rho_{s0}}{\varepsilon_0 r}\bigg|_{b}^{a} = \frac{a^2\rho_{s0}}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] \ \text{V}$$

4.12 Em coordenadas esféricas, $\mathbf{E} = 2r/(r^2 + a^2)^2\, \mathbf{a}_r$ V/m. Calcule o potencial em qualquer ponto, usando a referência (a) $V = 0$ no infinito; (b) $V = 0$ em $r = 0$; (c) $V = 100$ V em $r = a$.

a) Como $V = 0$ no infinito, temos que

$$V(r) = -\int \frac{2rdr}{(r^2 + a^2)^2} + C = \frac{1}{r^2 + a^2} + C$$

Quando $r \to \infty$, $C = 0$, logo,

$$V(r) = \frac{1}{r^2 + a^2} \quad \text{V}$$

b) $V = 0$ em $r = 0$. Podemos partir da derivação acima,

$$V(0) = \frac{1}{0^2 + a^2} + C = 0$$

$$C = -\frac{1}{a^2}$$

Logo,

$$V(r) = \frac{1}{r^2 + a^2} - \frac{1}{a^2} = -\frac{r^2}{a^2(r^2 + a^2)}$$

c) $V = 100$ V em $r = a$.

$$V(a) = \frac{1}{a^2 + a^2} + C = 100$$

$$C = 100 - \frac{1}{2a^2}$$

Assim,

$$V(r) = \frac{1}{r^2 + a^2} - \frac{1}{2a^2} + 100 = \frac{a^2 - r^2}{2a^2(r^2 + a^2)} + 100 \quad \mathrm{V}$$