UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

ZEB0562
CÁLCULO NUMÉRICO

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

ZEB0562 – TÓPICO 04: PARTE 2/5

SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES: MÉTODO DIRETO

- MÉTODO DIRETO DE SOLUÇÃO $\rightarrow$ 2 ETAPAS
- ETAPA #1: ESCALONAMENTO / ELIMINAÇÃO
- ETAPA #2: SUBSTITUIÇÃO RETROATIVA
- EXEMPLO DE APLICAÇÃO: SISTEMA ORDEM 3

Método direto: solução em 2 etapas

Etapa 0: matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Etapa 1: escalonamento (método de eliminação de Gauss)

matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

Etapa 2: substituição regressiva (*back-substitution*)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

vetor das soluções

Etapa 1: eliminação de Gauss

- Tarefa: matriz aumentada $\rightarrow$ matriz triangular superior
  - 1ª coluna: manipulações p/ zerar elementos abaixo da 1ª linha
  - 2ª coluna: manipulações p/ zerar elementos abaixo da 2ª linha

$\downarrow$

$\therefore$ Manipulações p/ zerar todos os elementos abaixo da “diagonal”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{manipulações algébricas}} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

- Ocorrência $\rightarrow$ eventualmente pivô nulo na “diagonal”
  - Se há elemento não-nulo abaixo $\rightarrow$ trocar linha-pivô c/ tal linha
  - Se todos elementos abaixo são nulos $\rightarrow$ $\det(\mathbf{A}) = 0$ $\rightarrow$ parar!

Etapa 2: substituição regressiva

- Tarefa: obter valores de todas as incógnitas no vetor $\mathbf{x}$
  - Obter o valor de x_n a partir da última equação
  - Substituir x_n na penúltima equação e obter o valor de x_{n-1}
  - Substituir x_n e x_{n-1} na antepenúltima equação e obter x_{n-2}

$\downarrow$ **regressivamente**

  - Substituir x_n , x_{n-1} , ... , x_3 e x_2 na 1ª equação e obter x_1

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Exemplo: sistema linear de ordem 3

- Etapa 0: obtenção da matriz aumentada

$$\begin{array}{ccccccc} & & 8x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 26 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{bmatrix}$$

  – OCORRÊNCIA ! (no presente exemplo)

$\downarrow$

Elemento $a_{11} = 0$ $\rightarrow$ trocar 1ª linha c/ 3ª linha (ou 2ª linha)

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{troca de linhas}: 1 \leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Exemplo: sistema linear de ordem 3

- Etapa 1: manipulações p/ zerar elementos sob diagonal
  - Coluna 1: manipulações p/ zerar elementos abaixo da 1ª linha

multiplicador

(–)

$$\frac{3}{6} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{6 \quad 2 \quad 8 \quad 26} \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{} \ \mathbf{-3 \quad -1 \quad -4 \quad -13} \\ (+) \\ \xrightarrow{} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

  - Coluna 2: manipulações p/ zerar elementos abaixo da 2ª linha

multiplicador

(–)

$$\frac{8}{4} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & \boxed{4 \quad -2 \quad -5} \\ 0 & 8 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{} \ \mathbf{-8 \quad +4 \quad +10} \\ (+) \\ \xrightarrow{} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo: sistema linear de ordem 3

- Etapa 2: substituição regressiva (*back-substitution*)
  - Recuperando o sistema a partir da matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 26 \\ & & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \\ & & & & 6x_3 & = & 3 \end{array}$$

  - Substituição regressiva para obter os valores das incógnitas

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & & & 6x_3 & = & 3 \\ & & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 26 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{4}(-5 + 2x_3) = -1 \\ x_1 = \frac{1}{6}(26 - 2x_2 - 8x_3) = 4 \end{cases}$$

  - SOLUÇÃO: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1/2$