MAT-2127 — CÁLCULO II PARA A QUÍMICA
PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS-2023

I. Curvas no Plano e no Espaço

Exercícios 0.1.

1 - Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

a. $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ **b.** $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t), t \in \mathbb{R}$
c. $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\ \sin t), t \in [-\pi, \pi]$ **d.** $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t\ \sin t), t \geq 0$
e. $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ **f.** $\gamma(t) = (2 + \mathrm{e}^{-t}, 3 - \mathrm{e}^t), t \geq 0$

2 - Esboce e parametrize cada conjunto C como uma curva:

a. $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq -x \text{ e } y \geq x\right\}$
b. $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\right\}$

3 - Considere $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$.

a. *Mostre que a função f não é derivável em $x = 0$.*
b. *Determine uma curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.*
c. *Interprete geometricamente o fato de f não ser derivável em $x = 0$, mas a curva γ ser derivável em t_0, onde $\gamma(t_0) = (0, 0)$.*

4 - Esboce uma família de curvas de nível das seguintes funções:

a. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$; **b.** $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$;
c. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$; **d.** $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$.

5 - Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

a. $f(x, y) = x + 2y - 3, k = -2$; **b.** $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}, k = 5$; **c.** $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}, k = 1$.

6 - Esboce os gráficos de:

a. $f(x, y) = 1 - x - y$; **b.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; **c.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$;
d. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$; **e.** $f(x, y) = y^2 - x^2$; **f.** $f(x, y) = y^2 + 1$;
g. $f(x, y) = y^2 + x$; **h.** $f(x, y) = xy$; **i.** $f(x, y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$;
j. $f(x, y) = \dfrac{1}{4x^2 + 9y^2}$; **k.** $f(x, y) = (x - y)^2$; **l.** $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$;
m. $f(x, y) = \dfrac{1}{(x^2 + 2y^2)^2}$; **n.** $f(x, y) = \ln(9x^2 + y^2)$; **o.** $f(x, y) = 2 - \sqrt[4]{x^2 + 4y^2}$;
p. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$; **q.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$; **r.** $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$.

7 - Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

a. $x + 2y + 3z = 1$; **b.** $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$; **c.** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
d. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$; **e.** $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; **f.** $x^2 - y^2 = 1$;
g. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

Quais dessas superfícies é gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

8 - Desenhe a imagem de cada uma das seguintes curvas:

a. $\gamma(t) = (1, t, 1)$; **b.** $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$;
c. $\gamma(t) = (\mathrm{e}^{-t} \cos t, \mathrm{e}^{-t} \sin t, \mathrm{e}^{-t}), t \geq 0$; **d.** $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \geq 0$;
e. $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2} \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$; **f.** $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$.

9 - Em cada caso, encontre uma parametrização para C e para a reta tangente a C no ponto P:

a. $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\right\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.
b. $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\right\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

c. $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=y^2-x^2 \text{ e } x^2+y^2=1\}$ e $P=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.
d. $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-2z^2=1 \text{ e } y=2z+1\}$ e $P=(-\sqrt{2},-1,-1)$.
e. $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z \text{ e } x^2+y^2=z\}$ e $P=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
f. $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{4x^2+y^2} \text{ e } z=2x+1\}$ e $P=(0,1,1)$.

10 - Seja $f(x,y)=\dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.
a. *Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c=1$, $c=2$ e $c=3$.*
b. *Encontre uma curva derivável γ, definida num intervalo $I\subset\mathbb{R}$, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c=1$.*
c. *Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.*
d. *Seja $\Gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t)=(\sin t,\cos t,z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.*

Respostas 0.2.

2 - **a.** $\gamma(t)=(2\cos t,2\sin t), t\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ **b.** $\gamma(t)=(1+2\tan t,3\sec t), t\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$;

4 - **a.** $\gamma(t)=(t,\frac{1}{2}(1-t)), t\in\mathbb{R}$, $X=(\frac{1}{2},\frac{1}{4})+\lambda(2,-1),\lambda\in\mathbb{R}$
b. $\gamma(t)=(5+\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t), t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $X=(6,0)+\lambda(0,1),\lambda\in\mathbb{R}$
c. $\gamma(t)=(\sec t,\tan t), t\in]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$, $X=(\sqrt{2},1)+\lambda(\sqrt{2},2),\lambda\in\mathbb{R}$

9 - **a.** $\gamma(t)=\frac{1}{2}(\cos t-1,\sqrt{2}\sin t,\cos t+1)$, $t\in[0,2\pi[$, $X=(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})+\lambda(-1,0,-1),\lambda\in\mathbb{R}$
b. $\gamma(t)=\frac{1}{2}(1-\cos t,\sqrt{2}\sin t,\cos t+1)$, $t\in[0,2\pi[$, $X=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})+\lambda(1,0,-1),\lambda\in\mathbb{R}$
c. $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,-\cos(2t)), t\in[0,2\pi[$, $X=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)+\lambda(-1,1,2\sqrt{2}),\lambda\in\mathbb{R}$
d. $\gamma(t)=(\sqrt{2}\cos t,-1+2\sin t,-1+\sin t)$, $t\in[0,2\pi[$, . $X=(-\sqrt{2},-1,-1)+\lambda(0,2,1),\lambda\in\mathbb{R}$
e. $\gamma(t)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\frac{1}{2}\sin t,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t)$, $t\in[0,2\pi[$, $X=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})+\lambda(1,0,1),\lambda\in\mathbb{R}$
f. $\gamma(t)=(\frac{1}{4}(t^2-1),t,\frac{1}{2}(t^2+1))$, $t\in\mathbb{R}$, . $X=(0,1,1)+\lambda(1,2,2),\lambda\in\mathbb{R}$.

10 - **a.** $c=1$: $x^2+3y^2=1$; $c=2$: $y=1$ e $y=-1$; $c=3$: $-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}=1$;
b. $\gamma(t)=(\sin t,\frac{\cos t}{\sqrt{3}}), t\in[0,2\pi]$; **c.** $(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$; **d.** $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

II. Limites e Continuidade

Exercícios 0.3.
1 - Calcule os seguintes limites, caso existam. Justifique quando não existam:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$; **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;
c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; **d.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$;
e. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$; **f.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$;
g. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^3-y}$; **h.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$;
i. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$; **j.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$;
k. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$; **l.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$;
m. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$; **n.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$.

2 - Decida se os limites abaixo existem, determinando seu valor em caso afirmativo:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)ln(x^2+y^2)$;

c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)$; **d.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)$.

3 - Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^4+y^2}\sin\left(e^{-\dfrac{1}{x^2+y^2}}\right), & se\ (x,y)\neq(0,0);\\ L, & se\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Existe algum número real L para o qual f seja contínua em (0,0)? Justifique.

4 - Seja $f(x,y)=\dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2}$.

a. *Esboce as curvas de nível de f nos níveis $k=1$ e $k=3$.*

b. *Existe* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? Justifique.

Respostas 0.4.

1 - **a.** *não existe;* **b.** 0; **c.** 0; **d.** *não existe;* **e.** *não existe;* **f.** *não existe* **g.** *não existe;* **h.** 0; **i.** 0; **j.** 0; **k.** *não existe;* **l.** *1;* **m.** *não existe;* **n.** 0.

2 - **a.** *1;* **b.** *0;* **c.** *0;* **d.** *não existe.*

3 - $L=0$.

4 - **b.** *O limite não existe.*

III. Derivadas Parciais, Diferenciabilidade e Plano Tangente

Exercícios 0.5.

1 - Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

(a) $f(x,y)=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y)=\ln(1+\cos^2(xy^3))$

2 - Dada a função $f(x,y)=x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,e^{sen\,(x^2y)}$, *ache* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

Sugestão: *Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.*

3 - Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(a) *Mostre que as derivadas parciais* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existem em todos os pontos.*

(b) *f é contínua em (0,0)?*

(c) *f é diferenciável em (0,0)?*

4 - Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(a) *Mostre que f é contínua em (0,0).*

(b) *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) *É f diferenciável em* $(0,0)$?

(d) *São* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *contínuas em* $(0,0)$?

5 - Seja $g(x,y)=\sqrt[3]{3x^4+2y^4}$. *Mostre que g é de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^2$.

6 - Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ *onde* f **não** *é diferenciável, sendo:*

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$

(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = cos(\sqrt{x^2+y^2})$

7 - Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, *no ponto* $(0,0,1)$ (b) $z = \mathrm{e}^x \ln(\frac{y}{2})$, *no ponto* $(3,2,0)$

8 - Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *e* $g(x,y) = \frac{1}{10}(x^2+y^2) + \frac{5}{2}$ *se intersectam no ponto* $(3,4,5)$ *e têm o mesmo plano tangente nesse ponto.*

9 - Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ *e* $(0,0,6)$ *e é tangente ao gráfico de* $g(x,y) = x^3y$. *Existe um só plano?*

10 - Determine $k \in \mathbb{R}$ *para que o plano tangente ao gráfico de* $f(x,y) = ln(x^2+ky^2)$ *no ponto* $(2,1,f(2,1))$ *seja perpendicular ao plano* $3x+z=0$.

IV. Regra da Cadeia

Exercícios 0.6.

1 - Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ *e* $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ *pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.*

(a) $w = x^2+y^2;\ x = t^2+u^2,\ y = 2tu.$

(b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2};\ x = t\cos u;\ y = t\,sen\,u.$

2 - Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *diferenciável em* $\mathbb{R}^2$, *com* $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ *e*

$$g(t) = f(2t^3-4t, t^4-3t).$$

Determine a *para que a reta tangente ao gráfico de* g *no ponto de abscissa* 1 *seja paralela à reta* $y = 2x+3$.

3 - Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f *com derivadas parciais contínuas em* $\mathbb{R}^2$ *e tal que* $2x+y+z=7$ *é o plano tangente ao gráfico de* f *no ponto* $\big(0,2,f(0,2)\big)$. *Seja*

$$g(u,v) = u\,f\big(sen\,(u^2-v^3), 2u^2v\big).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ *para que o plano tangente ao gráfico de* g *no ponto* $\big(1,1,g(1,1)\big)$ *seja paralelo ao vetor* $(4,2,a)$.

4 - Seja $f = f(x,y)$ *uma função de classe* C^2 *e seja* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(u,v) = uf(u^2-v, u+2v).$$

Sabendo que $3x+5y = z+26$ *é uma equação do plano tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(1,4,f(1,4))$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, *calcule* $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

V. Vetor Gradiente e Aplicações

Exercícios 0.7.

1 - Se $f(x,y) = x^2+4y^2$, *ache o vetor gradiente* $\nabla f(2,1)$ *e use-o para achar a reta tangente à curva de nível* 8 *de* f *no ponto* $(2,1)$. *Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.*

2 - Seja r *a reta tangente à curva* $x^3+3xy+y^3+3x = 18$ *no ponto* $(1,2)$. *Determine as retas que são tangentes à curva* $x^2+xy+y^2 = 7$ *e paralelas à reta* r.

3 - Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}^2$. *Fixado um certo* $P = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, *sabe-se que o plano tangente ao gráfico de* f *no ponto* $\big(x_0,y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ *tem equação* $-2x+2y-z+3=0$. *Determine, entre as curvas abaixo, uma que* **não pode** *ser a curva de nível de* f *que contém o ponto* P:

(a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$; (b)$\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3}+3t\right)$; (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3+t)$.

4 - Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Suponha que:
(i) a imagem da curva plana $\gamma(t) = (\mathrm{cotg(t)}, \mathrm{sec}^2\mathrm{(t)})$, para $t \in]0, \pi/2[$, esteja contida numa curva de nível de f.
(ii) a imagem da curva no espaço $\sigma(u) = \left(\sqrt[3]{u},\ u^2+1,\ \dfrac{u^3}{2} - \dfrac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1\right)$, com $u > 0$, esteja contida no gráfico de f.

(a) Determine $\nabla f(1, 2)$.
(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2)$, onde $\vec{v} = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.
(c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

5 - O gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Considere a curva de nível de f que contém P. Encontre a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

6 - Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2), t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f. Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2, 8)$. Sabendo que a reta r contém o ponto $(1, -4)$, determine o vetor gradiente de f no ponto $(2, 8)$ e a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 8, f(2, 8))$.

7 - Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja π o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e seja $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{t}, t), t \neq 0$ uma parametrização para a curva de nível 1 de f. Suponha que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ para algum t_0. Determine uma equação para o plano π sabendo que ele contém os pontos $\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$ e $(4, 1, 2)$.

8 - Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0, 0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$. A função f é diferenciável em $(0, 0)$?

9 - Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
(a) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-y} + 3y$, $(1, 0)$; *(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$;*

10 - Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é a do vetor $(1, 1)$.

11 - Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

12 - Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de ambas curvas $\gamma(t) = \left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}\right)$ e $\sigma(u) = \left(u + 1, u, u + 2 + \dfrac{1}{u}\right)$, $u \neq 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

VI . Aproximação Linear

(1) 1 - Seja $f(x, y) = \ln(x + y)$. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Mostre que para todo (x, y) com $x + y > 1$,

$$|\ln(x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2.$$

(2) 2 - Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(1, 1)$. Mostre que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $|x - 1| < 1$ e $|y - 1| < 1$,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 5(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2.$$

Usando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(1,001,\ 0,99)$ e estime o erro cometido com essa aproximação.

(3) 3 - Seja a função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 8$.
(a) Determine o polinômio de Taylor $P_1(x,y)$ de ordem 1 de f, em torno do ponto $(1,1)$.
(b) Escreva a Fórmula de Taylor para o resto $E_1(x,y) = f(x,y) - P_1(x,y)$.
(c) Usando o ítem (b), mostre que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $x > 1/2$ e $y > 1/2$, vale que

$$E_1(x,y) \geq \tfrac{3}{2}(x-y)^2.$$

VII. Exemplos Adicionais

Exercícios 0.8.

1 - Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

2 - Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

3 - Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

(b) Mostre que $\dfrac{d}{dt}f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (m,n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(d) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

4 - Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Mostre que existem as derivadas direcionais de f em todas as direções no ponto $(0,0)$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle$ para todo vetor unitário $\vec{u}$. A f é diferenciável em $(0,0)$?

5 - Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e responda se as afirmações abaixo são **falsas** *(nesse caso exiba um contra-exemplo) ou* **verdadeiras** *(nesse caso, justifique claramente):*

(a) (1 ponto) Se, para todo vetor unitário $\vec{v}$, a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ existe, então f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) (1 ponto) Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem, então f é contínua em $(0,0)$.

(c) (1 ponto) Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem, então a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ existe, para todo o vetor unitário $\vec{v}$.

(d) (1 ponto) Se f é diferenciável em $(0,0)$ e o gradiente $\vec{\nabla} f(0,0) = (1,1)$, então a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \alpha + 2\beta$, para todo vetor unitário $\vec{v} = (\alpha, \beta)$.

Respostas – Parte III.

1 - (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$; e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y^3 \text{sen}\,(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-3xy^2 \text{ sen}\,(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$.

2 - -2

3 - (b) Não é contínua em (0,0) (c) Não é diferenciável em (0,0).

4 - (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (c) Não. (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

6 - (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.

(b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$.

(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

(d) O mesmo que o item (c).

7 - (a) $z = 1$ e a reta $X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $e^3 y - 2z - 2e^3 = 0$ e a reta $X = (3,2,0) + \lambda(0,e^3,-2), \lambda \in \mathbb{R}$.

9 - $6x - y - z + 6 = 0$ (sim, só um) 10 - $k = 8$

Respostas – Parte IV

2 - $a = 3$ 3 - $a = -4$ 4 - 21

Respostas – Parte V.

1 - $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

2 - $4(x-1) + 5(y-2) = 0$ e $4(x+1) + 5(y+2) = 0$. 3 - (c)

4 - (a) $\nabla f(1,2) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$; (b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ e (c) $2x + y - 2z - 2 = 0$.

5 - $X = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

6 - $\nabla f(2,8) = (12,-1)$ e $12x - y - z = 12$, 7 - $x + y - 2z = 1$

8 - f não é diferenciável em $(0,0)$. 9 - (a) $\sqrt{5}$ e $(1,2)$; (b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.

10 - Em todos os pontos da reta $x - y + 1 = 0$. 11 - $\dfrac{4}{5}$, $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Respostas – Parte VI

2 - $P_1(x,y) = 3x + 7y - 5$; $f(1{,}001; 0{,}99) = 4{,}931$; O erro é de 10^{-3}.

3 - (a) $P_1(x,y) = 7$; (b) $E_1(x,y) = 3\left(c(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + d(y-1)^2\right)$, para algum ponto (c,d) interno ao segmento que une (x,y) a $(1,1)$.

Respostas – Parte VII

1 - (b). A $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em (0,0), mas a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ o é.

3 - (a) $\nabla f(0,0) = (1,0)$ **(c)** $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = m^2$ **(d)** f não é diferenciável em $(0,0)$.

4 - f não é diferenciável em $(0,0)$.