



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo**

MODELO ELÁSTICO

**PMI 3309 - Mecânica de Rochas Aplicada à Mineração II
Prof. Eduardo César Sansone**

MODELO ELÁSTICO



A teoria da elasticidade é largamente utilizada para o cálculo de tensões, deformações infinitesimais e deslocamentos induzidas na rocha após a execução de uma escavação ou carregamento.

Resultados que podem ser obtidos utilizando o modelo de comportamento elástico:

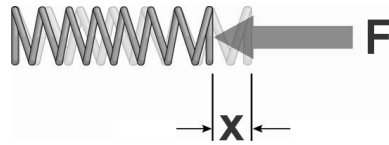
- **Tensões máximas e mínimas no contorno da escavação.**
- **Deslocamentos no contorno da escavação.**
- **Zona de influência de uma escavação.**
- **Regiões com concentração de tensões.**
- **Energia de deformação armazenada.**



TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

Lei de Hooke:

$$F = k x$$



Ou termos de tensões e deformações:

$$\sigma = E \varepsilon$$

Onde:

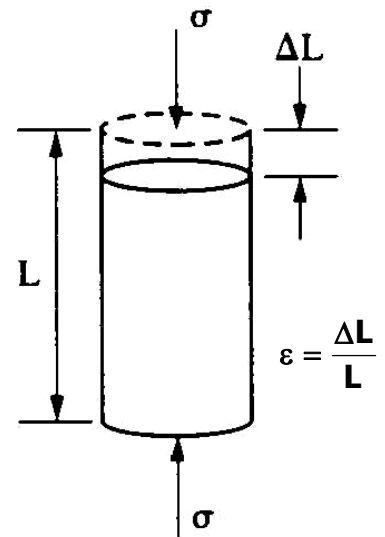
σ = Tensão normal

E = Módulo de Deformabilidade ou de Elasticidade

ε = Deformação normal específica

É mais comum expressar a relação da seguinte maneira:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$



3



Forma generalizada da Lei de Hooke:

$$[\varepsilon] = [D]^{-1}[\sigma] \quad (F = k x \rightarrow x = k^{-1} F)$$

Onde:

$[\varepsilon]$ = Vetor de Deformações

$[\sigma]$ = Vetor de Tensões

$[D]$ = Matriz de Rigidez do Material (matriz simétrica com 21 constantes independentes no caso anisotrópico)

Para o caso isotrópico a relação se reduz a:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

4

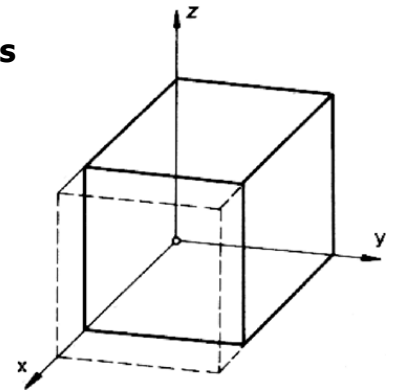


De onde derivam 3 equações para as deformações normais

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

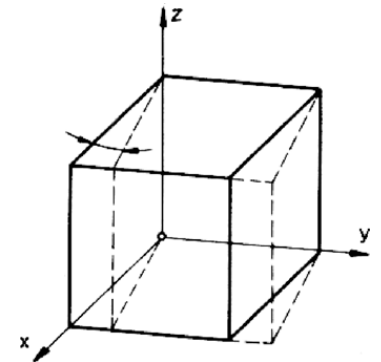


E 3 equações para as deformações de cisalhamento:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} \frac{2(1 + \nu)}{E}$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} \frac{2(1 + \nu)}{E}$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx} \frac{2(1 + \nu)}{E}$$



5



Onde:

E = Módulo de Elasticidade ou Módulo de Young

ν = Coeficiente de Poisson

Também utilizadas:

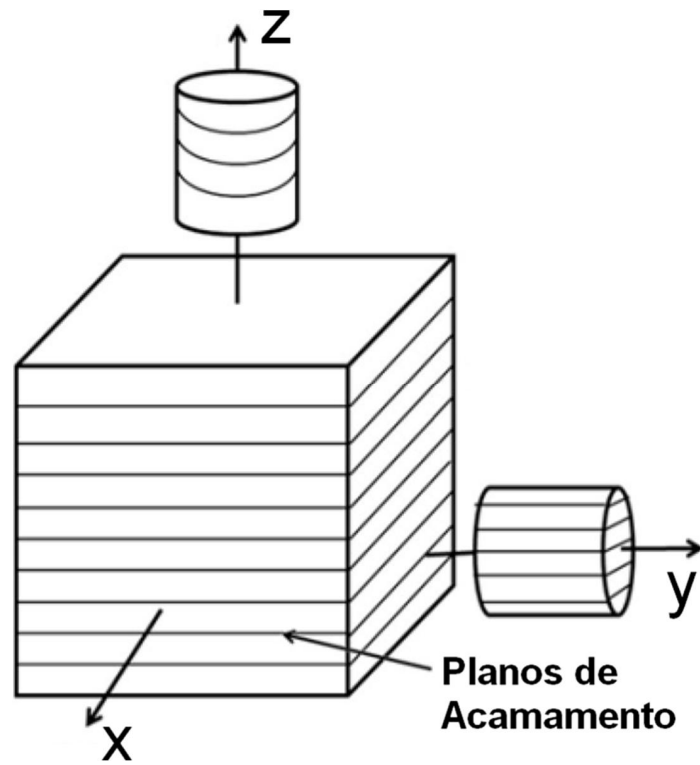
G = Módulo de Rigidez ou Módulo de Cisalhamento

λ = Constante de Lamé

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

6



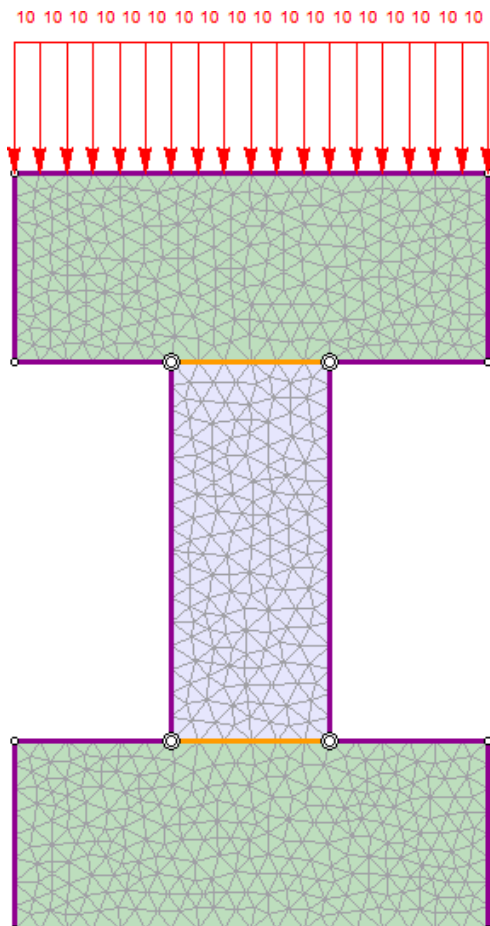
Efeito da estrutura da rocha sobre as propriedades mecânicas



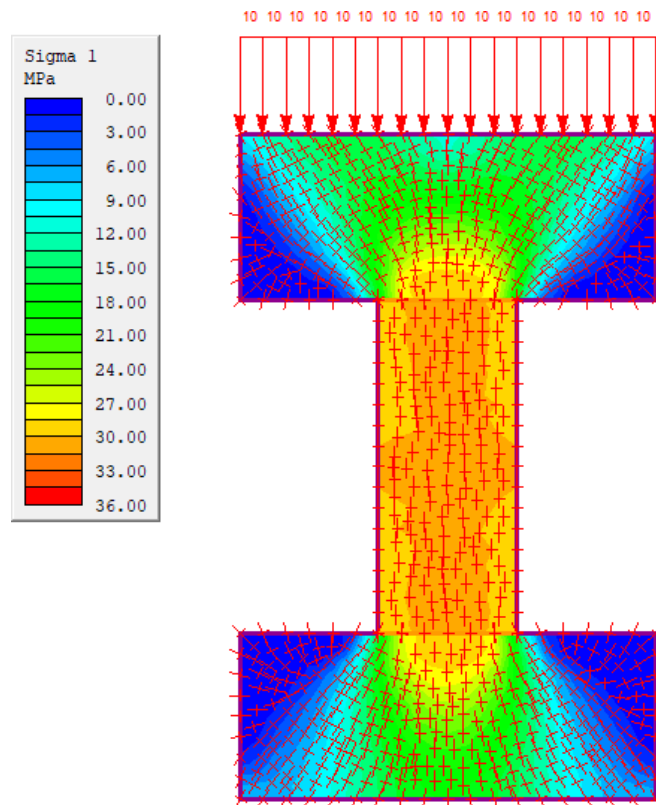
EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MODELO ELÁSTICO



Ensaio de compressão uniaxial em rocha

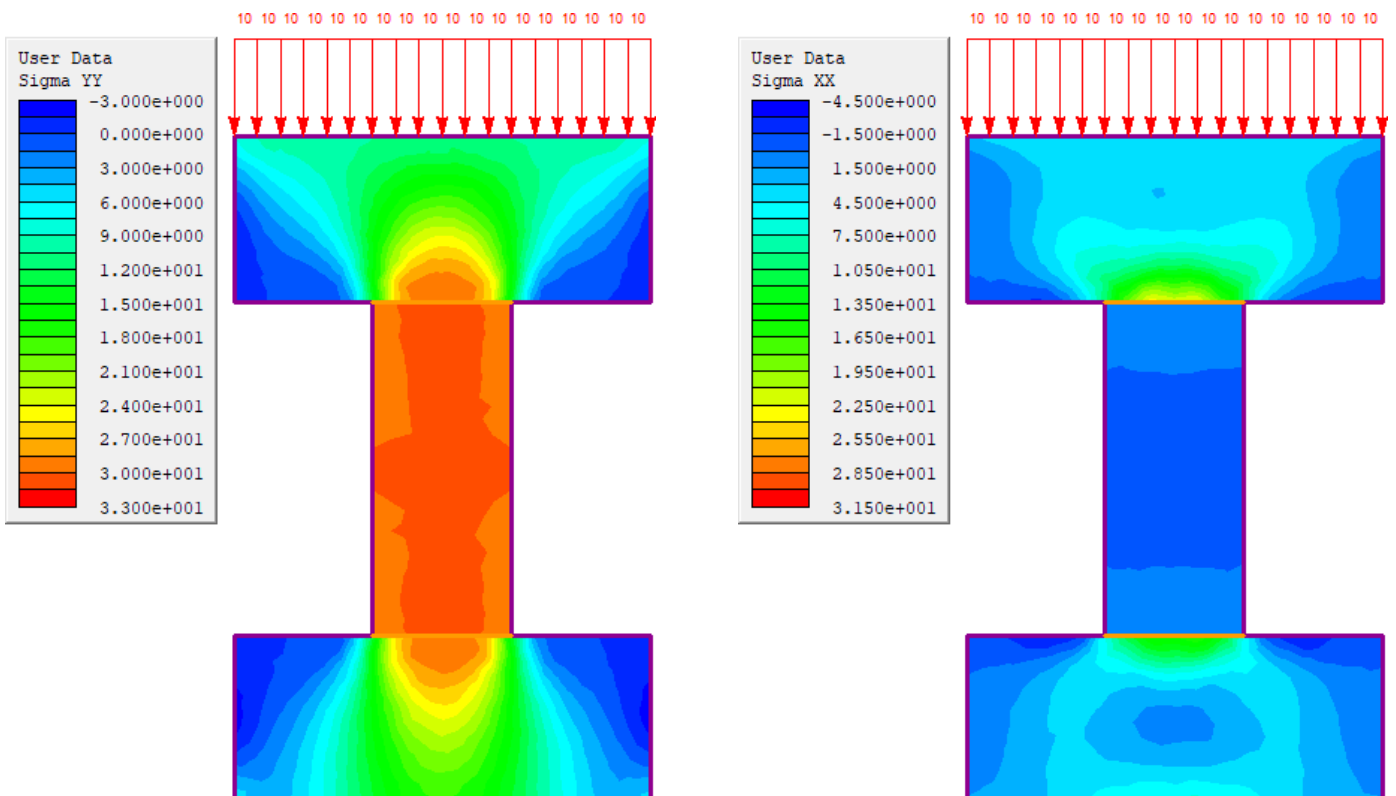


Modelo numérico utilizando o Método dos Elementos Finitos de corpo de prova constituído de material elástico submetido a compressão uniaxial na direção vertical.



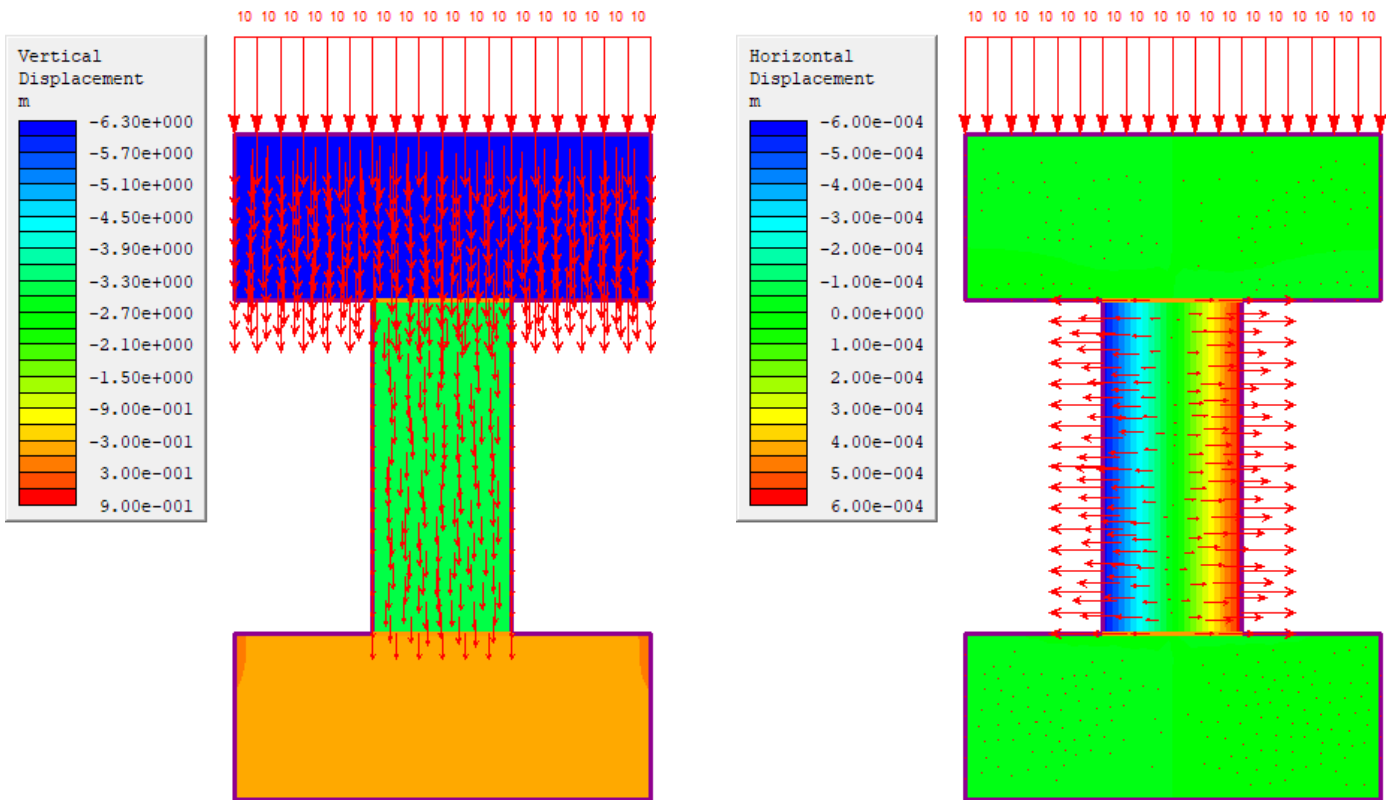
Distribuição da tensão principal maior σ_1

11



Distribuição das tensões nas direções vertical e horizontal

12



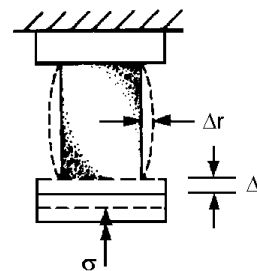
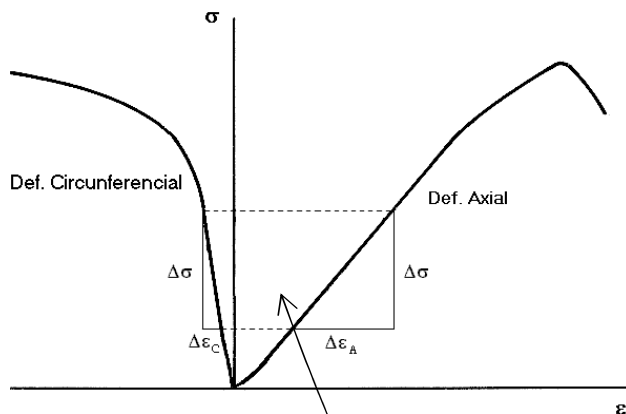
Distribuição dos deslocamentos nas direções vertical e horizontal



DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS ELÁSTICOS DAS ROCHAS



Ensaio de compressão uniaxial em rocha



$$\epsilon_A = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\epsilon_C = \frac{\Delta r}{r_0}$$

Módulo de Elasticidade:

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon_A}$$

Intervalo de tensão interno à Fase II

Coefficiente de Poisson:

$$\nu = -\frac{\Delta\epsilon_C}{\Delta\epsilon_A}$$



BRADY, B. H. G.; BROWN, E. T. Rock mechanics for underground mining. London, Chapman & Hall, 1994.

DESAI, C. S.; SIRIWARDANE, H. J. Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials. New Jersey, Prentice-Hall, 1984.

GOODMAN, R. E. Introduction to rock mechanics. New York, Wiley, 1980.

JAEGER J. C.; COOK, N. G. W. Fundamentals of rock mechanics. Chapman and Hall, 3 ed, London 1976.



OBRIGADO!

**Contato:
Prof. Eduardo César Sansone
esansone@usp.br**