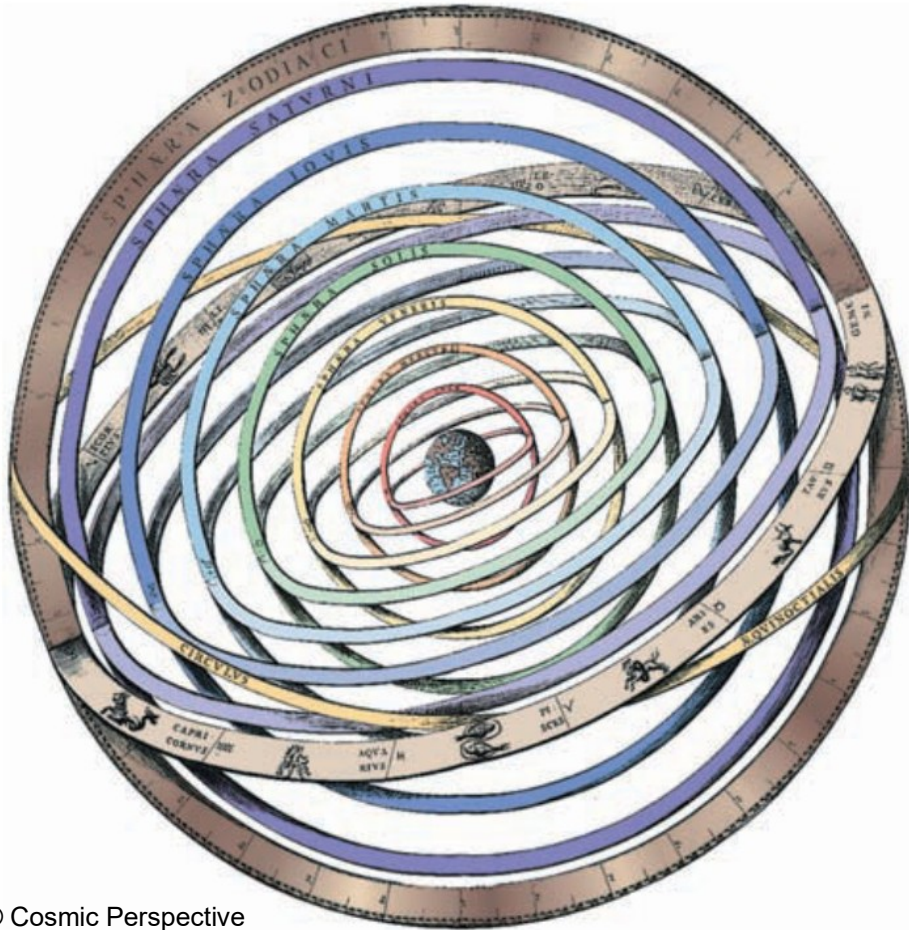


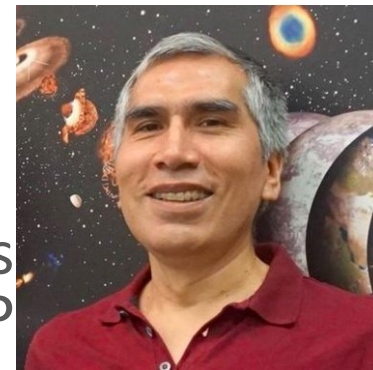
3. Movimentos Planetários



© Cosmic Perspective

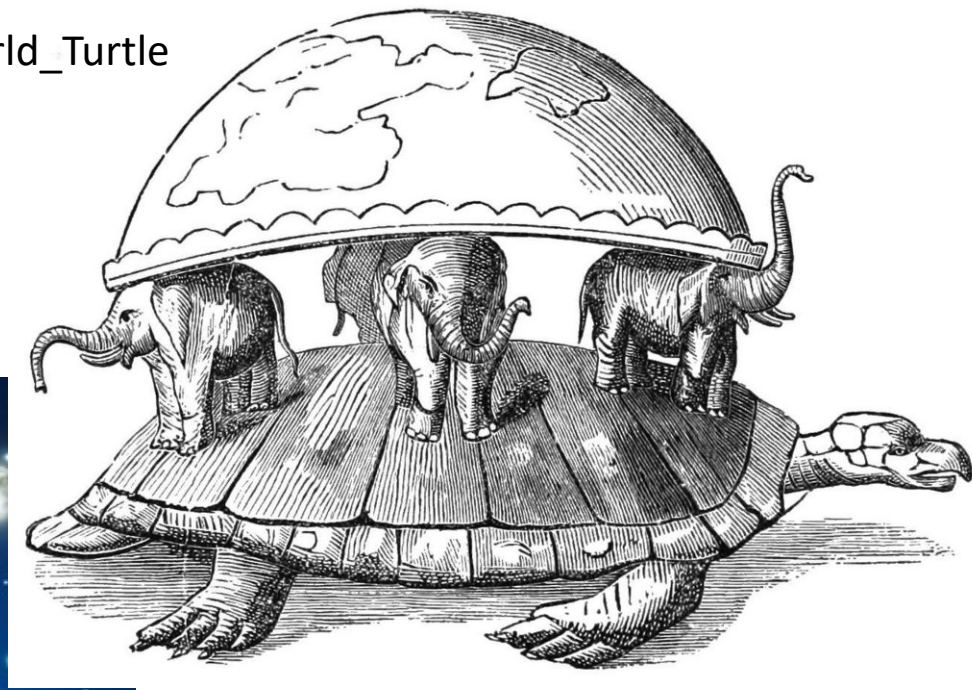


Marte, © NASA



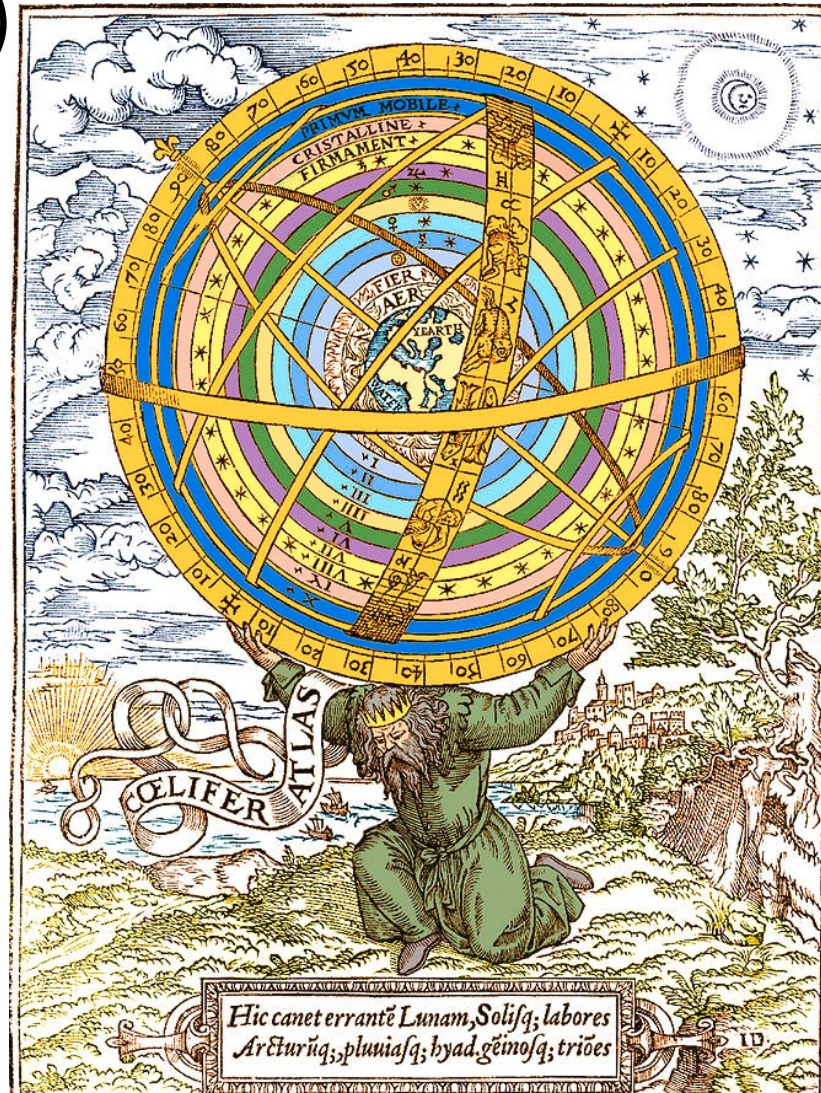
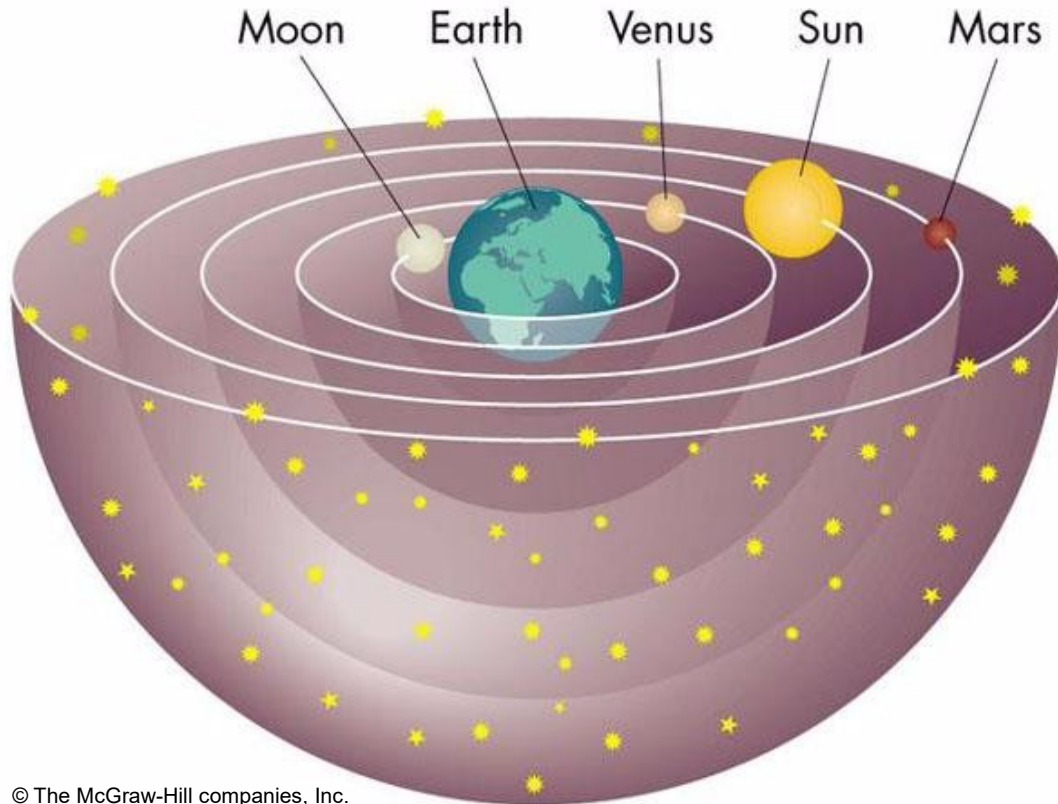
AGA0502, Planetas e Sistemas Planetários
Prof. Jorge Meléndez, IAG-USP

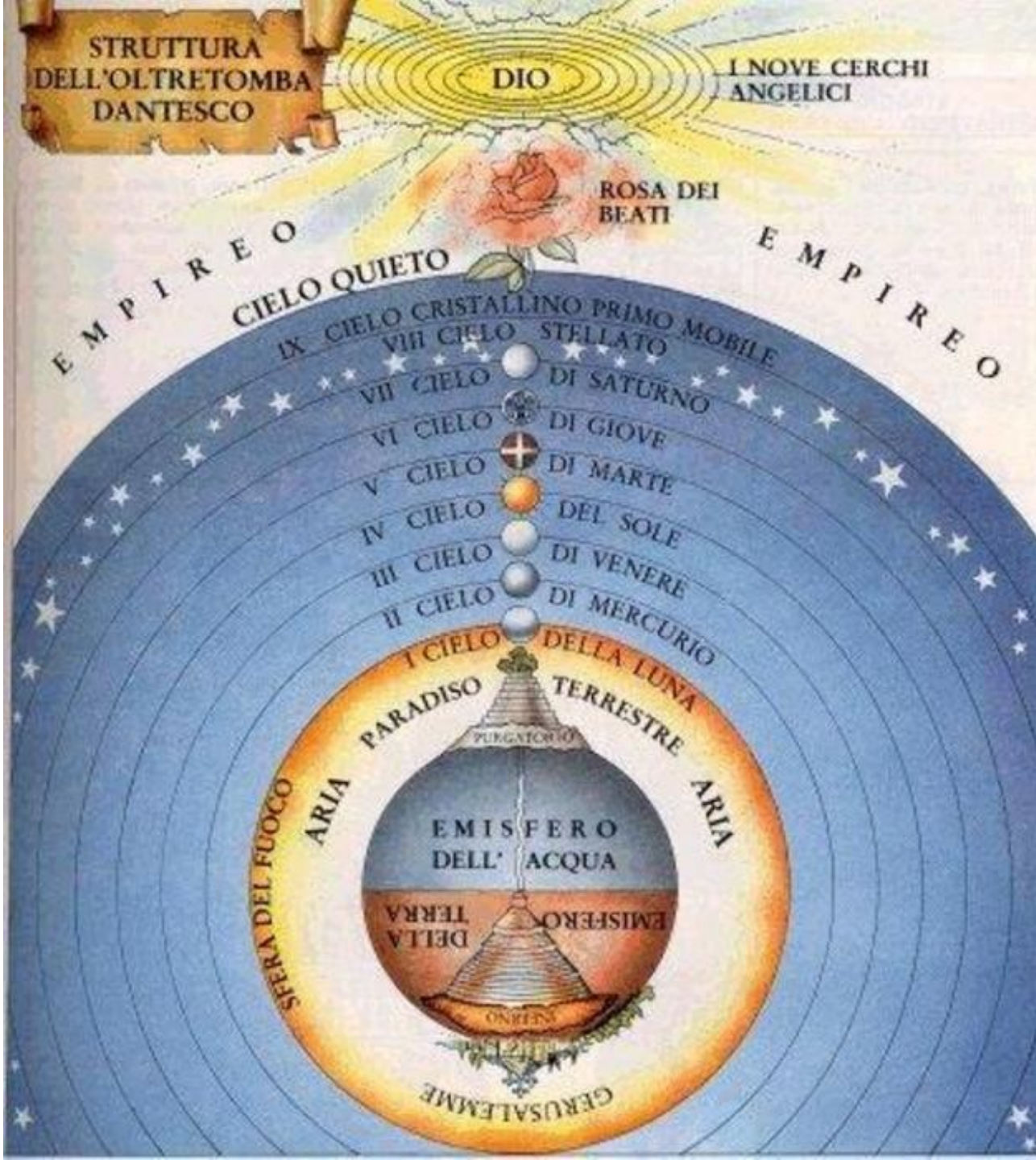
World Turtle



Em algumas mitologias (chinesa, hindu, indígenas americanos), o mundo era carregado por uma tartaruga, ou por elefantes sobre uma tartaruga

Embora Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.) tenha proposto um modelo heliocêntrico, **o modelo geocêntrico** defendido por Aristóteles (384 - 322 a.C.) e outros, e refinado por Ptolomeu (~100 - 170) **predominou até o século XVI**



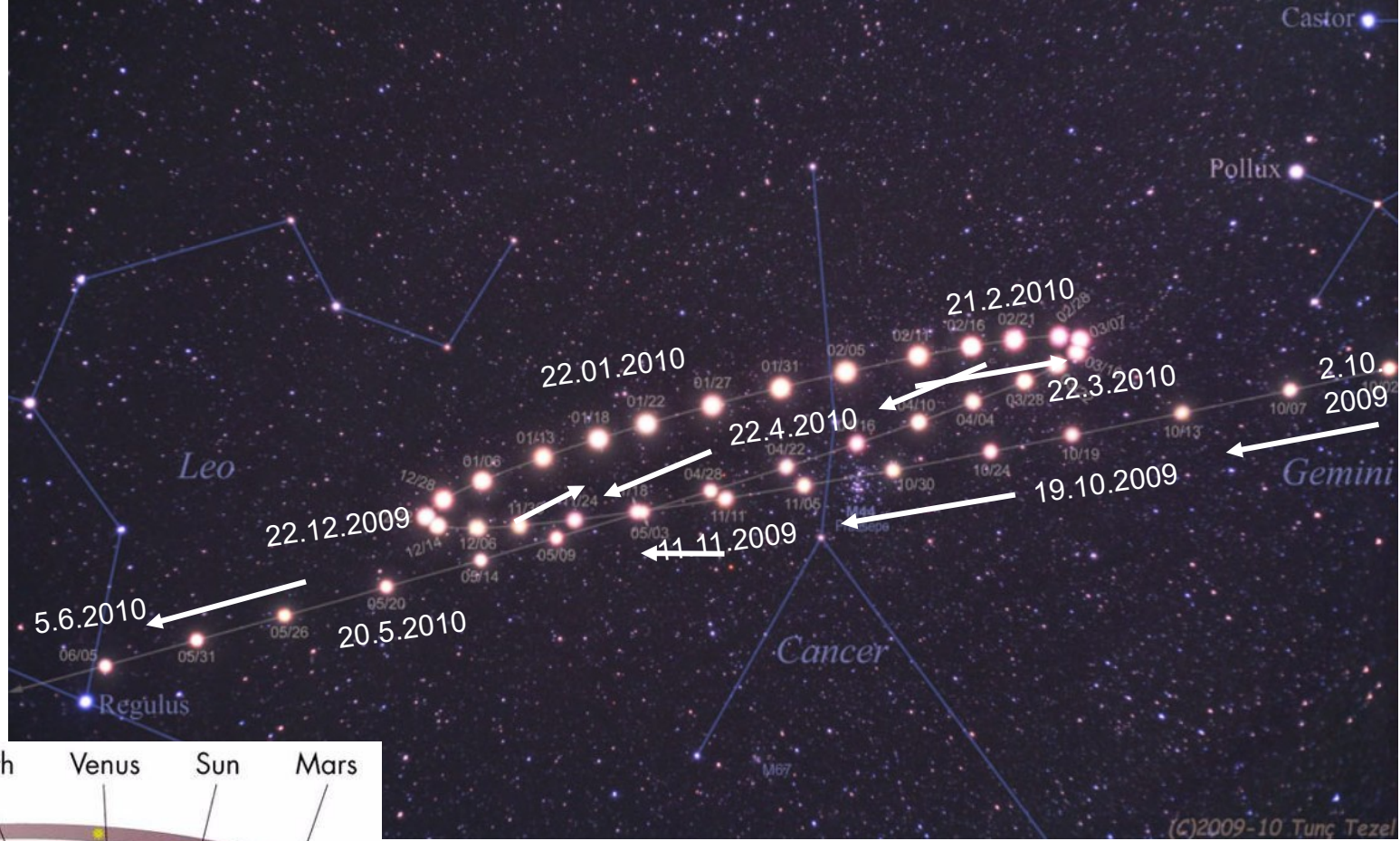


Paraíso geocêntrico da Divina Comédia (Dante Alighieri, 1321)

O paraíso de Dante é uma viagem pelas esferas celestes do universo geocêntrico ptolomaico.

Terra esférica rodeada por esferas concêntricas:

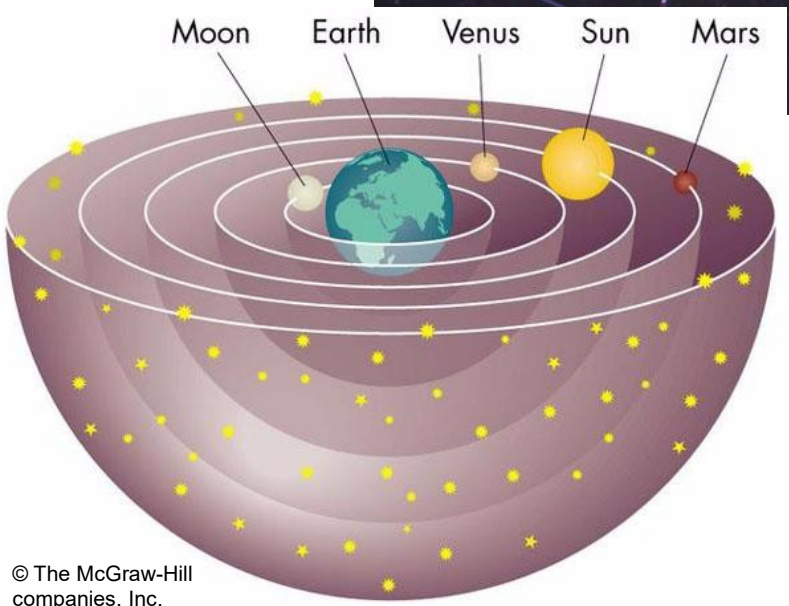
- 1: Lua, 2: Mercúrio, 3: Vênus, 4: Sol, 5: Marte, 6: Júpiter, 7: Saturno.
- 8: Estrelas fixas
- 9: Primum Mobile
- 10: Empíreo (morada de Deus)



(C)2009-10 Tunc Tezel

<https://apod.nasa.gov/apod/ap100613.html>

Modelo geocêntrico de esferas celestes simples, não pode explicar o movimento retrógrado de Marte





Marte, © NASA



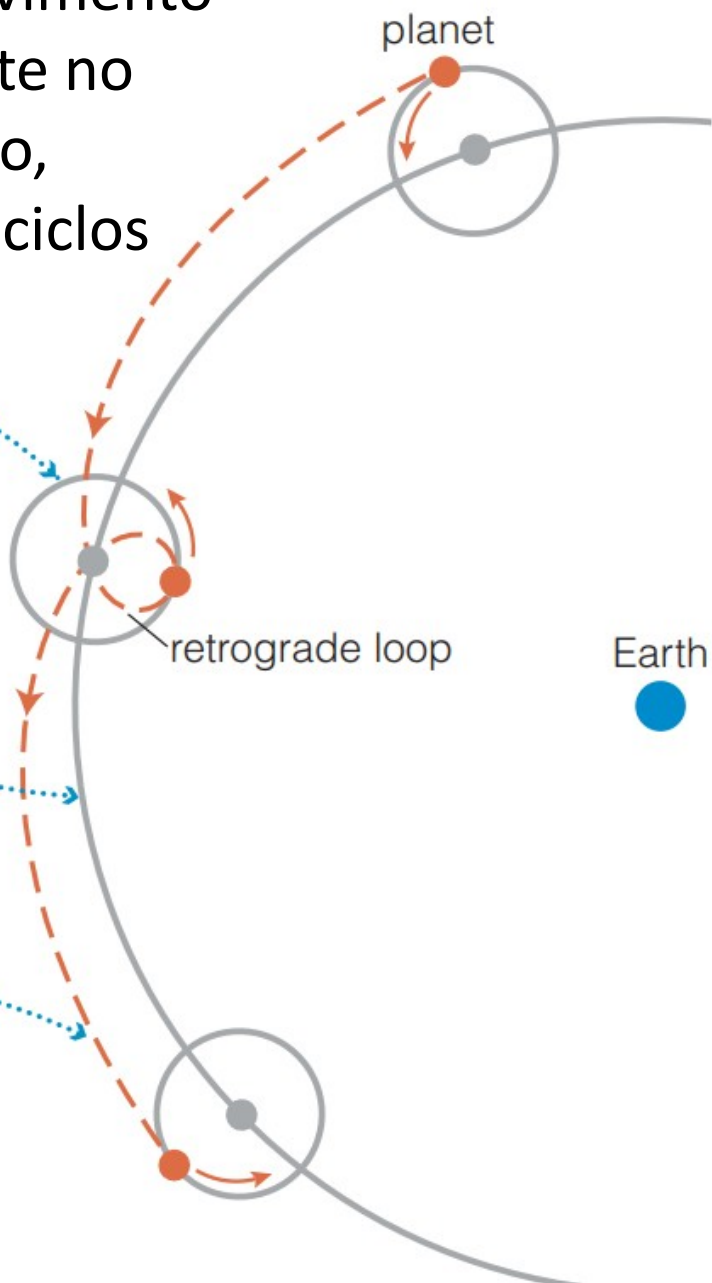
Ptolomeu (~100 - 170)

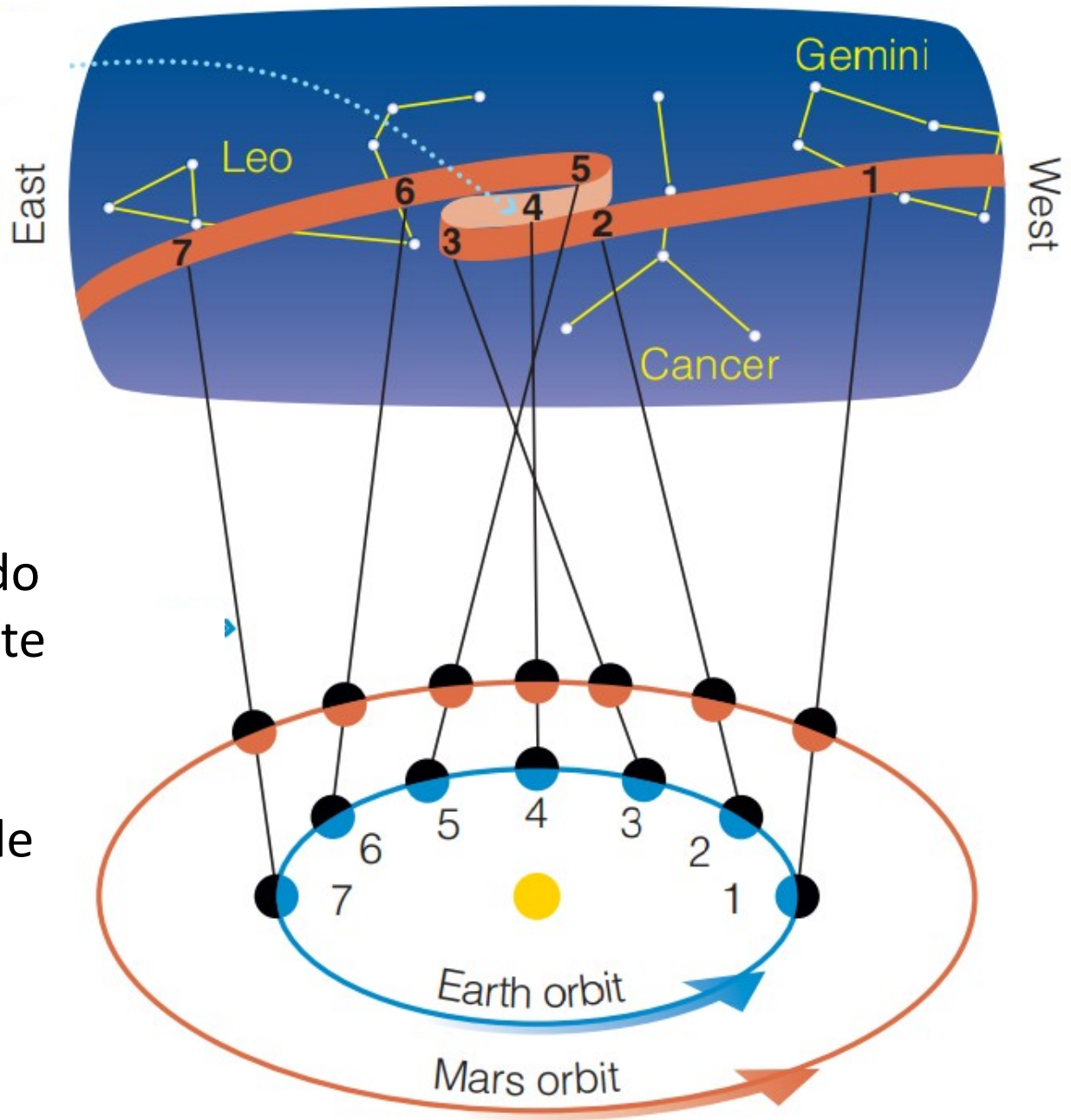
Para explicar o movimento retrógrado de Marte no sistema geocêntrico, Ptolomeu usou epiciclos

In Ptolemy's model, the planet goes around this small circle...

... while the small circle goes around the big one.

Result: planet follows this dashed path.

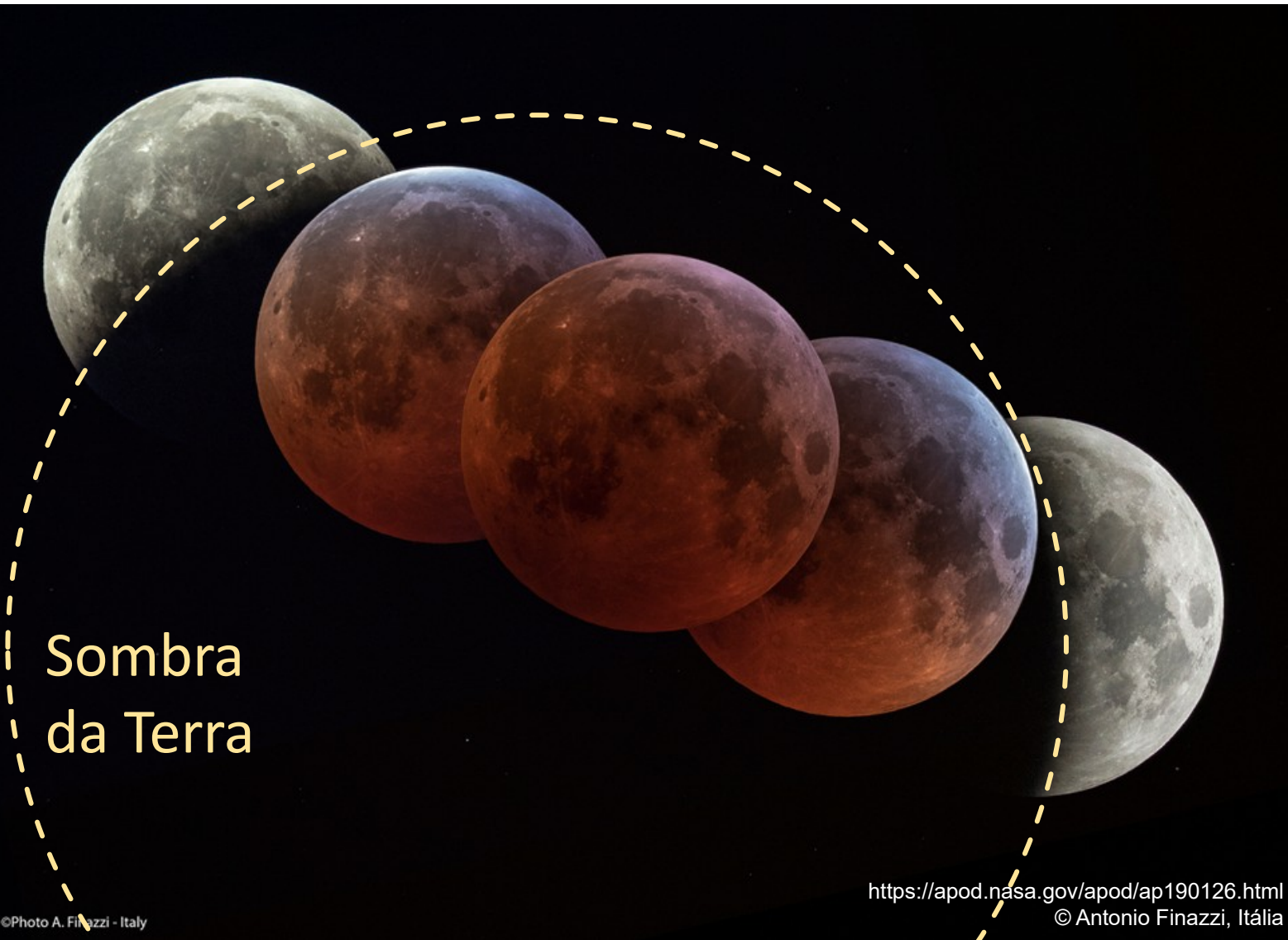




O movimento retrógrado de Marte é naturalmente explicado no sistema heliocêntrico, pela velocidade mais lenta de Marte (planetas mais distantes orbitam o Sol mais lentamente).

Aristóteles (384 - 322 a.C.): Terra redonda

Durante um eclipse lunar, a sombra da Terra projetada na Lua é sempre circular, sugerindo que a Terra é esférica.

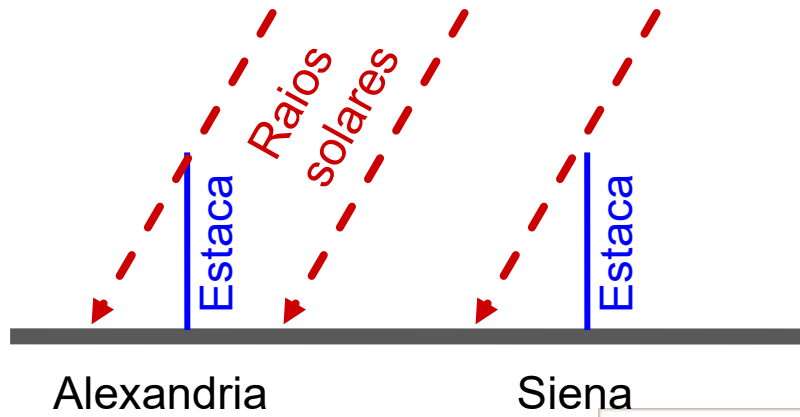


Sombra
da Terra

Eclipse
lunar
total
21/1/2019

Eratóstenes (276 - 194 a.C.): circunferência da Terra

Prof. Jorge Meléndez, IAG-USP



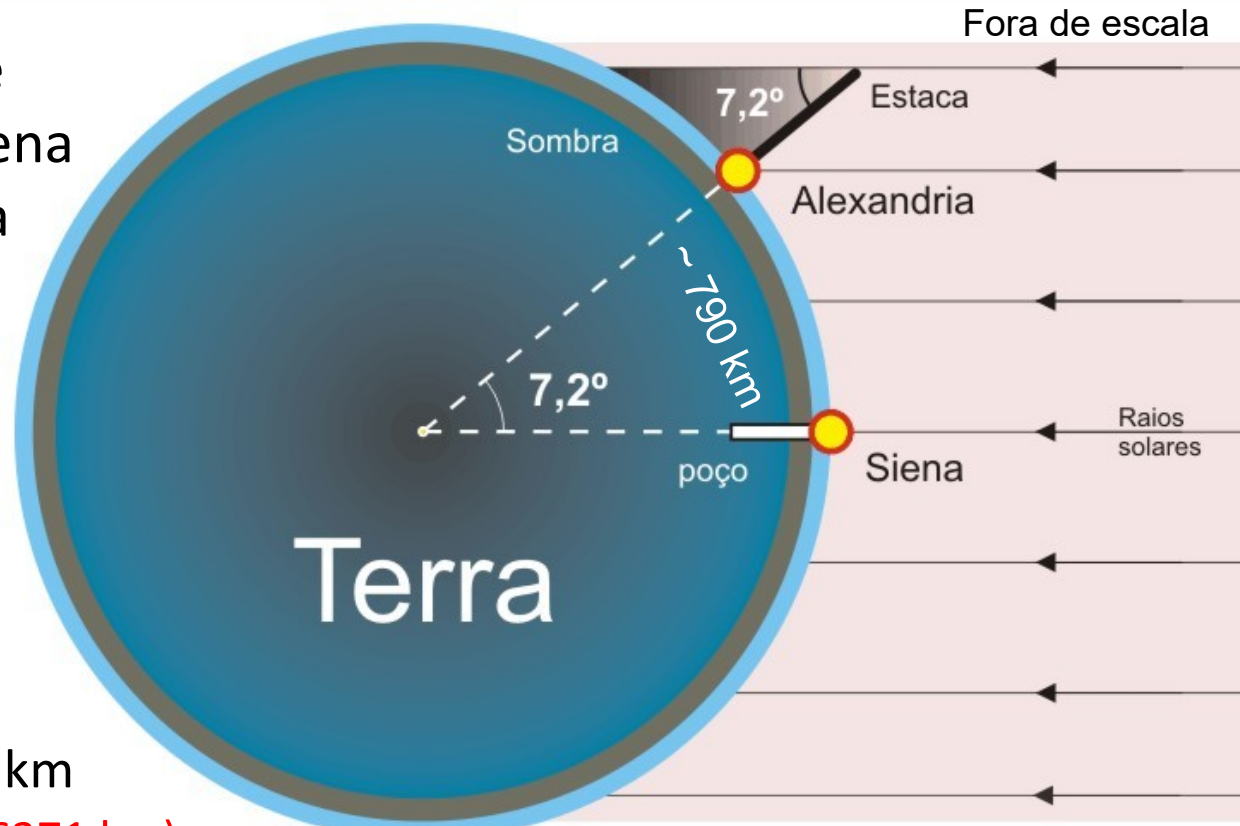
Se a Terra fosse plana, o ângulo de incidência dos raios solares seria igual em diferentes cidades

Eratostenes percebeu que enquanto na cidade de Siena (Assuã) o Sol não produzia sombra ao meio-dia do solstício (21/6), em Alexandria gerava sombra

$$\frac{\text{distância cidades}}{\text{circunfer. Terra}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

Rpta: 39500 km \rightarrow R = 6287 km

(perto do raio médio da Terra, 6371 km)



Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.): heliocentrismo

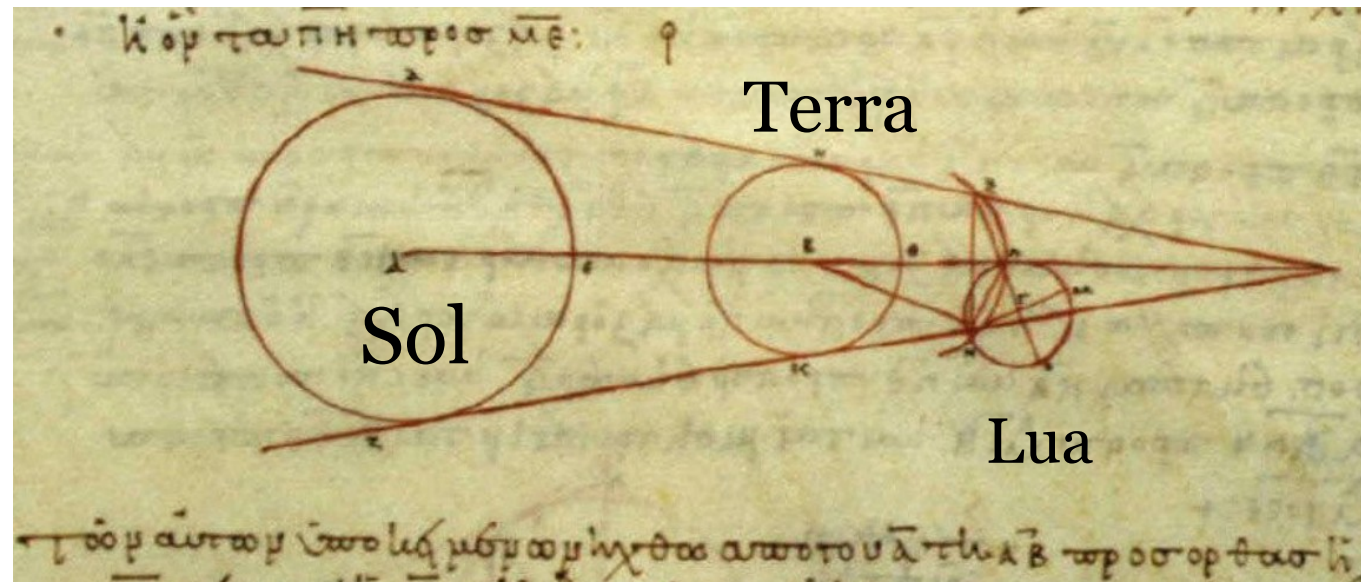
Estimou as distâncias relativas ao Sol e a Lua, e os tamanhos relativos entre a Terra, Lua e o Sol.

Heliocentrismo:

- Sol é muito maior que a Terra
- Geometria mais simples para explicar órbitas e fenômenos astronômicos

Cálculos de Aristarco usando um eclipse lunar. Cópia grega do século X.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aristarchus_working.jpg

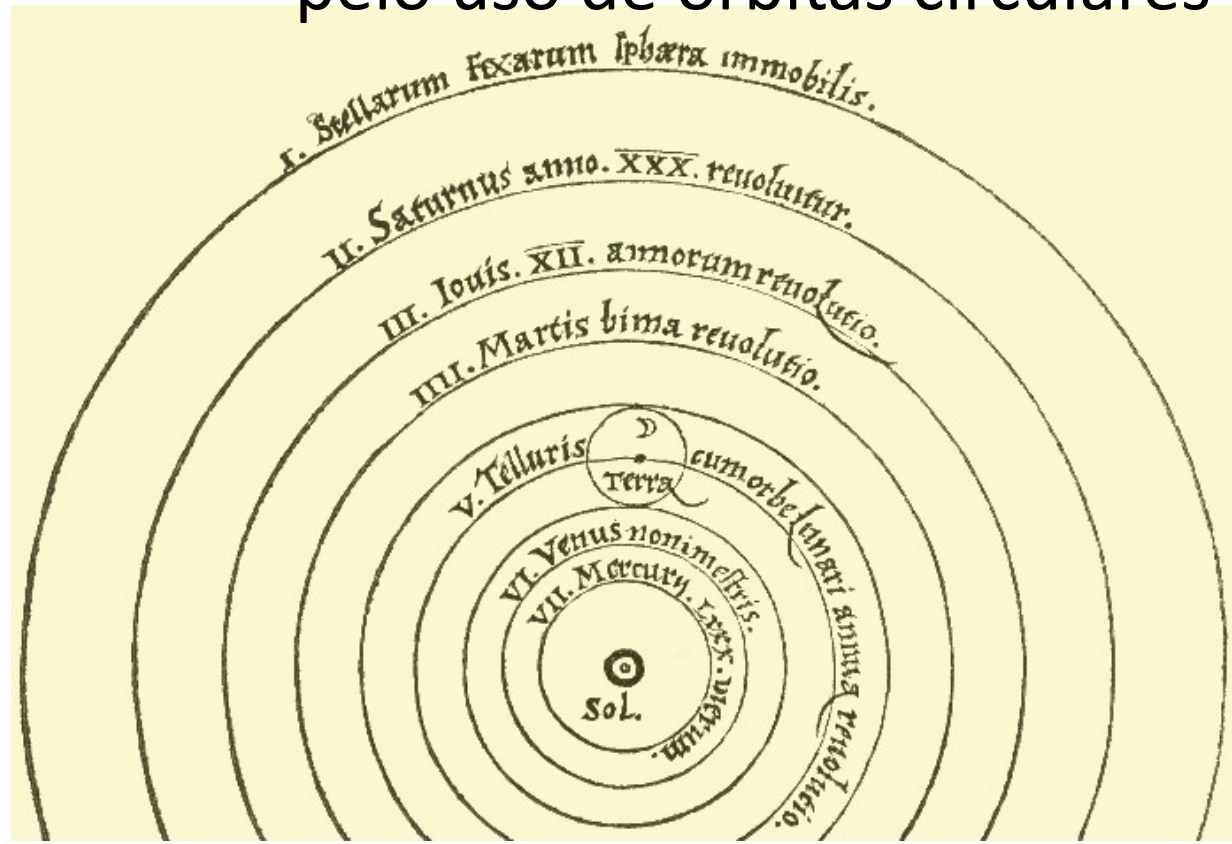
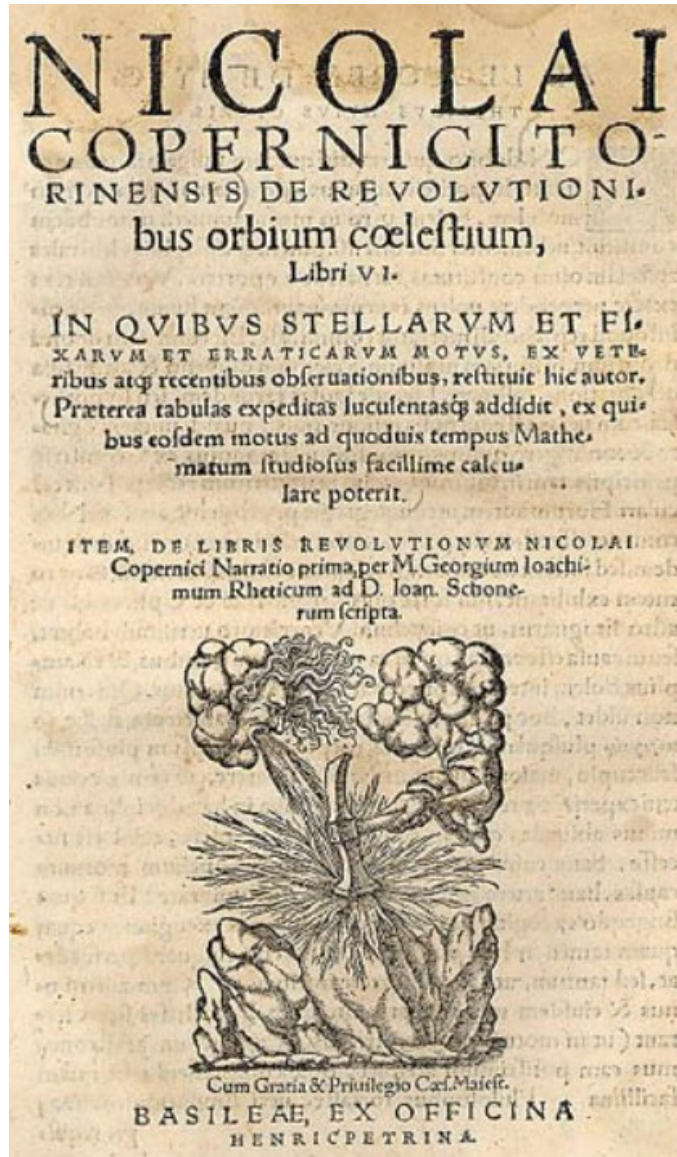
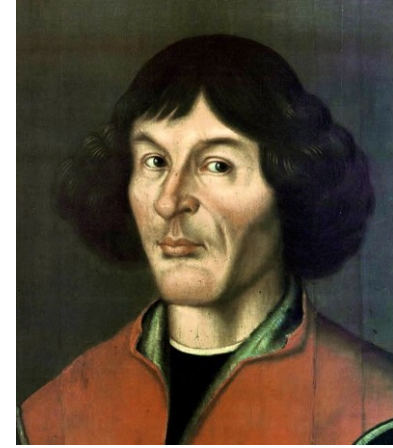


Nicolau Copérnico (19/2/1473 - 24/5/1543):

- Cálculos detalhados do modelo heliocêntrico

- Publicado no dia da sua morte

- Problema para explicar os dados, pelo uso de órbitas circulares



Tycho Brahe (1546 - 1601)



Construiu observatório Uraniburgo, o mais preciso do mundo (1-2'')

Suas observações foram fundamentais para determinar a órbita de Marte e as leis do movimento planetário de Kepler.

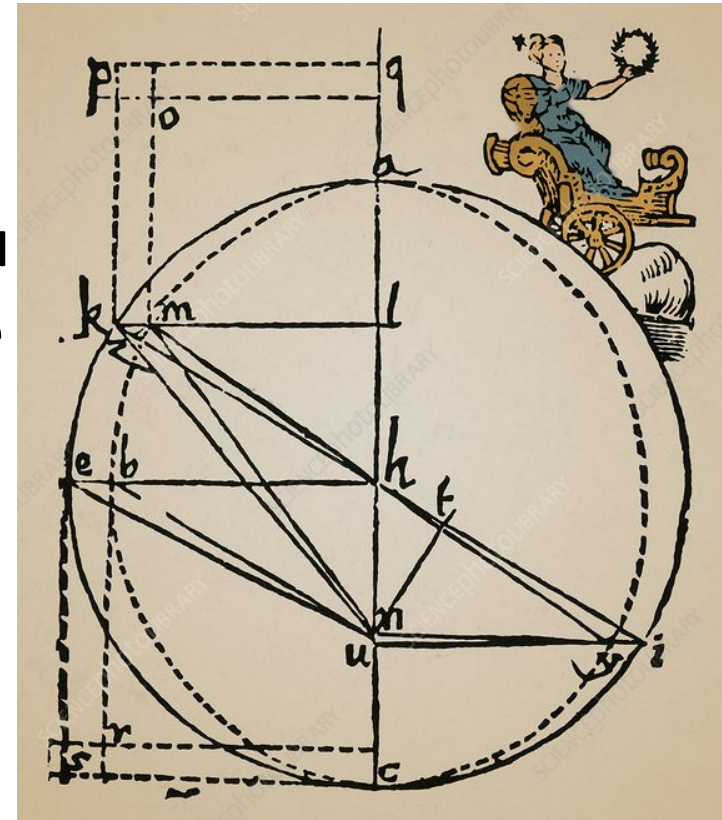
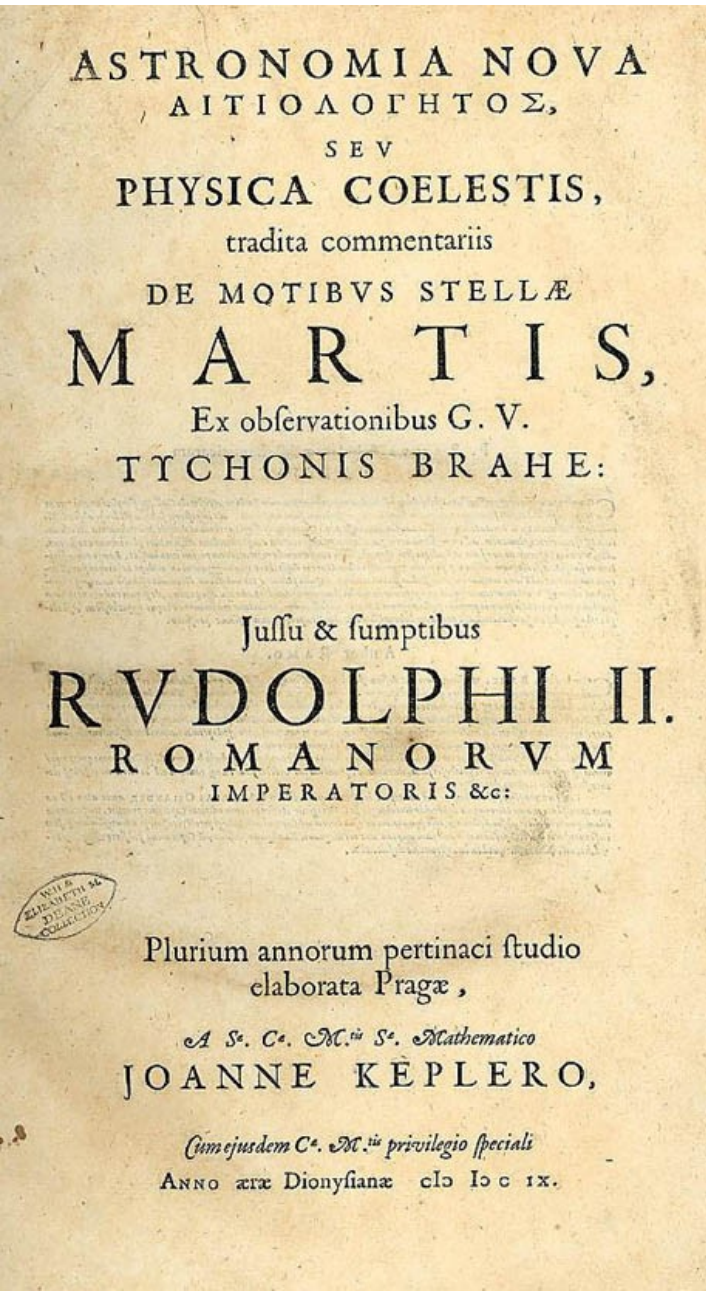


Johannes Kepler (1571 - 1630)

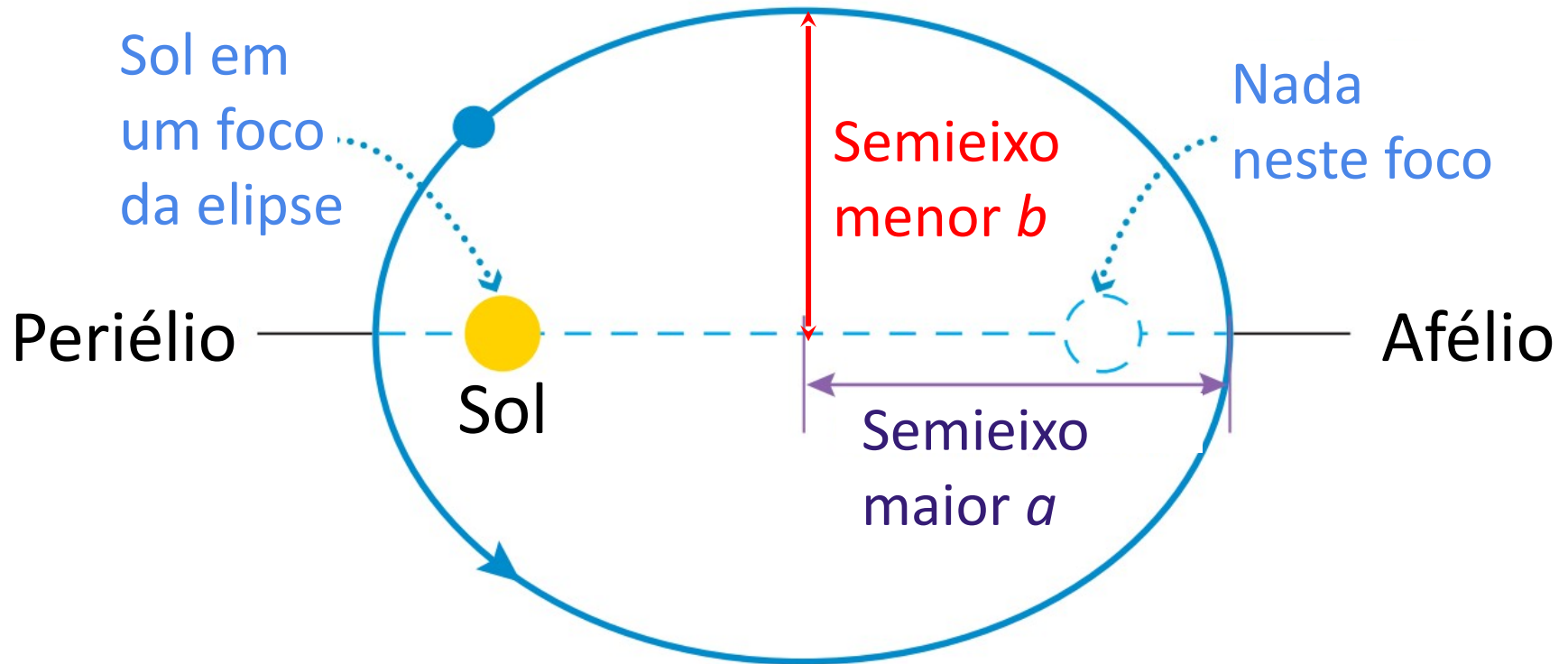


Foi contratado por Tycho em 1600 (um ano antes do seu falecimento, em 1601).

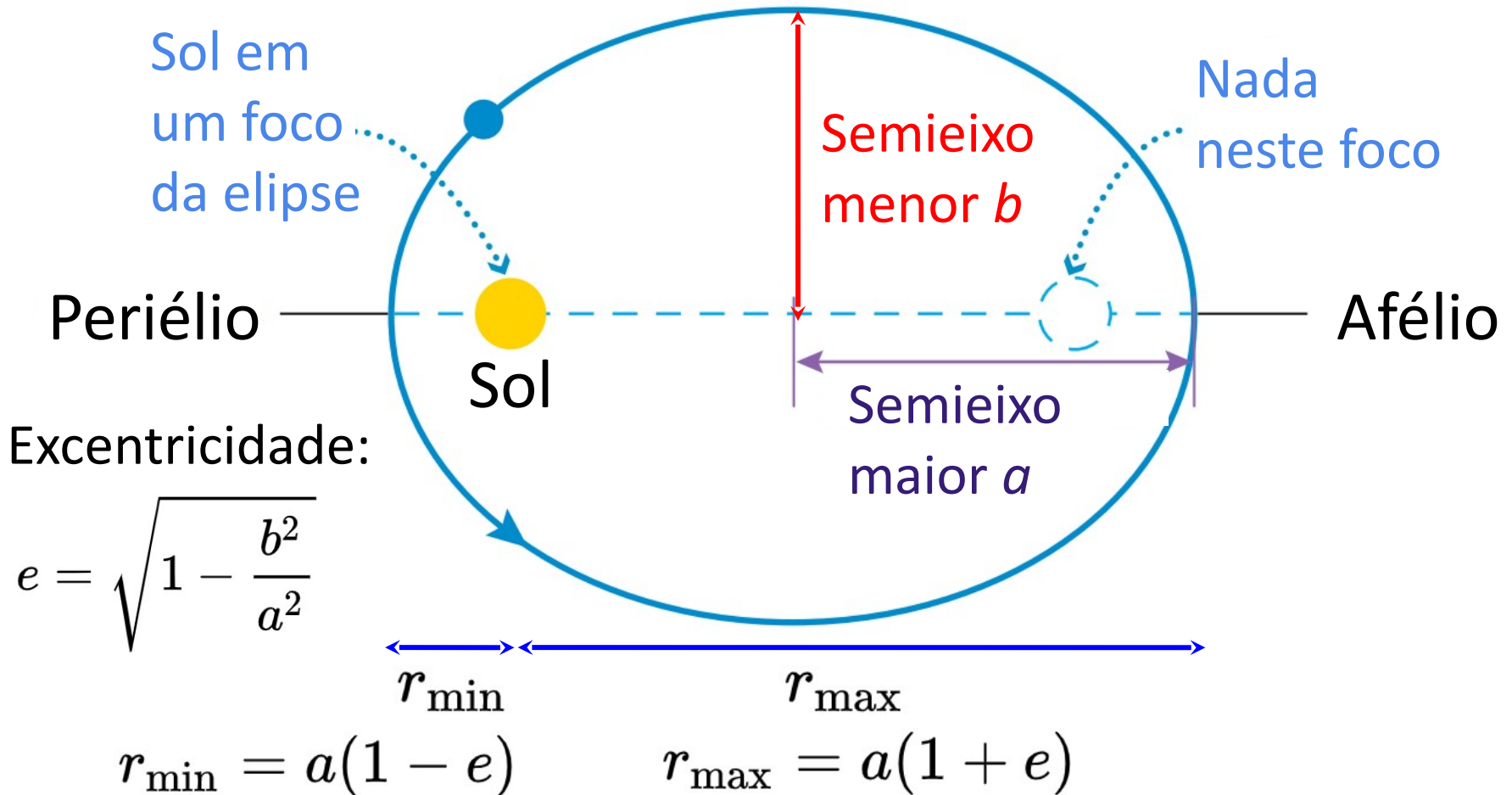
Usando os dados de Tycho, mostrou que uma elipse ajusta perfeitamente a órbita de Marte.



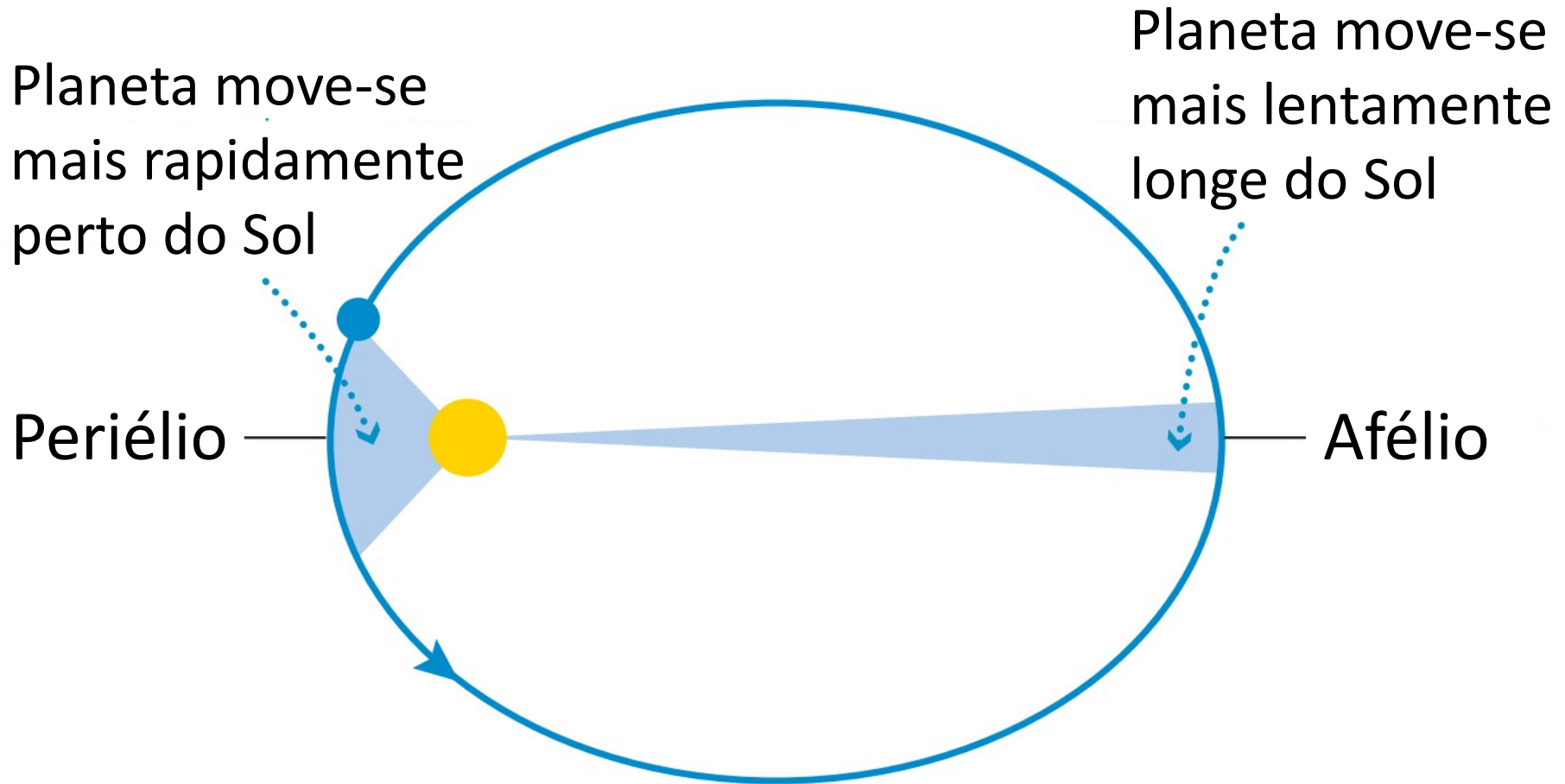
1a lei de Kepler (1609): os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.



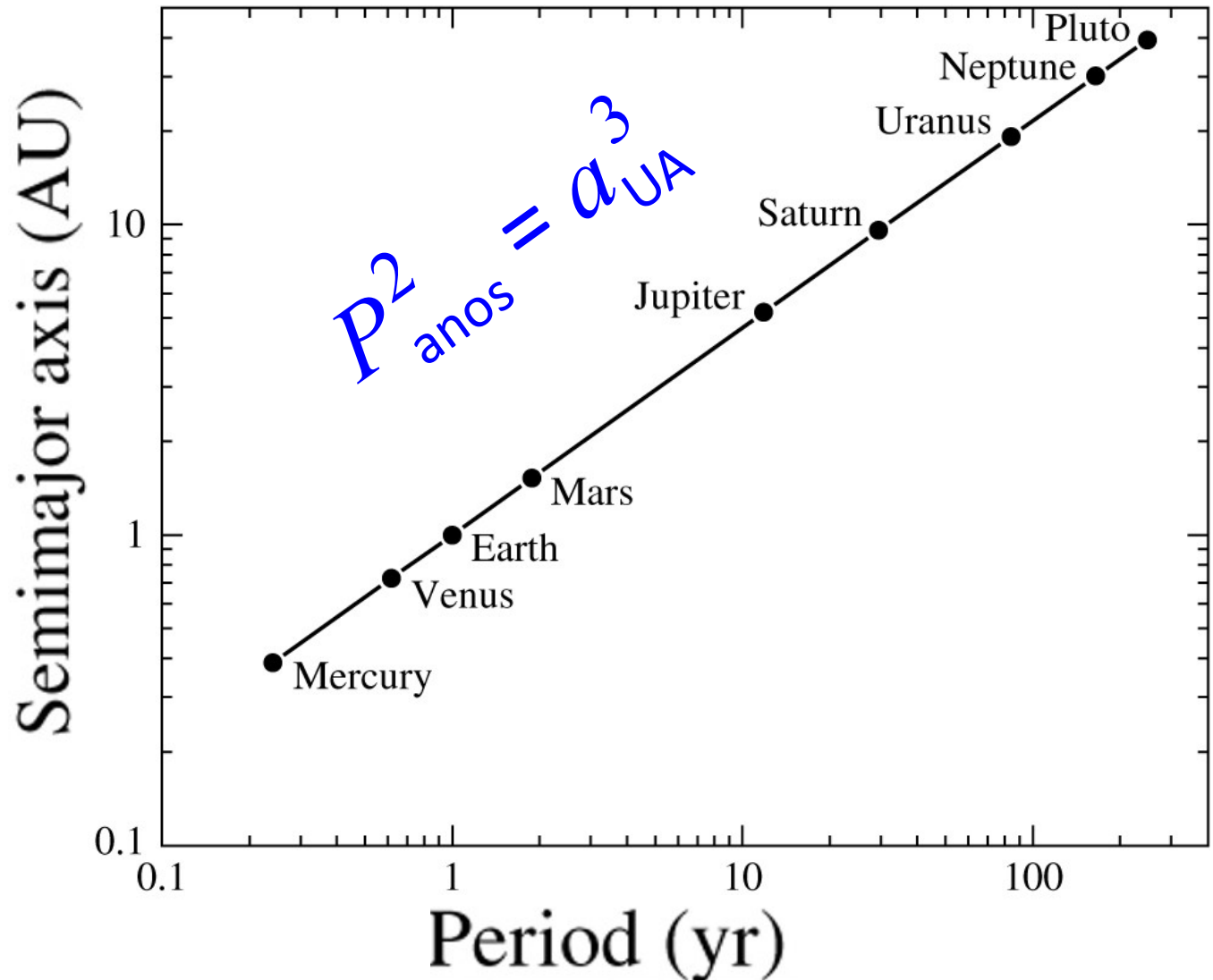
1a lei de Kepler (1609): os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.



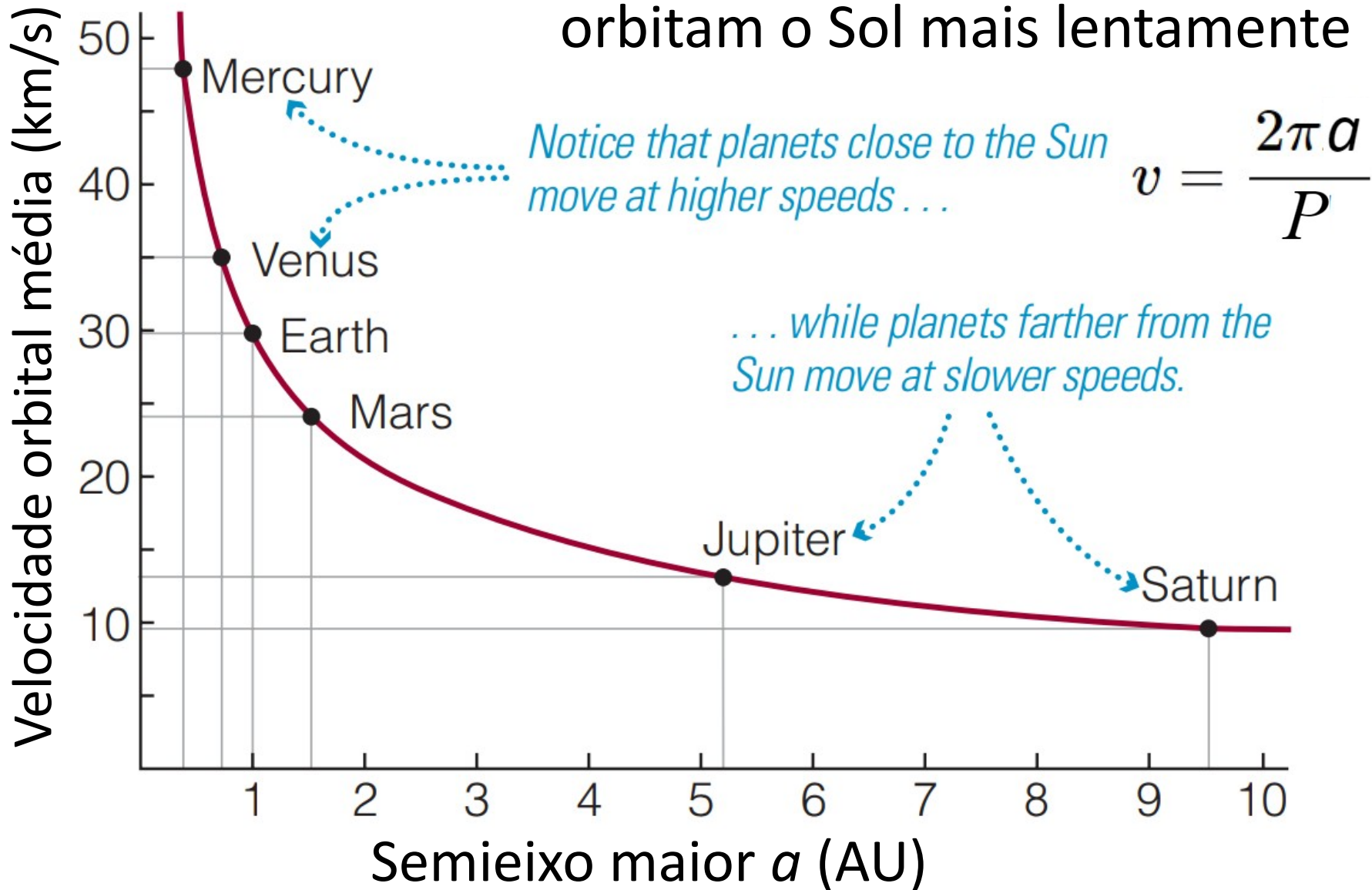
2a lei de Kepler (1609): os planetas descrevem áreas iguais em tempos iguais.



3a lei de Kepler (1609): o quadrado do período orbital (em anos) é igual ao cubo do semieixo maior (em UA) da órbita



A 3a lei de Kepler implica que planetas mais distantes orbitam o Sol mais lentamente



Exemplo 1 de aplicação da 3a lei de Kepler

O maior asteróide, Ceres, orbita o Sol a uma distância média (semieixo maior) de 2,77 UA. Qual é o seu período orbital?

Podemos usar diretamente a 3a lei de Kepler, pois a distância orbital é dada em UA.

$$p^2 = a^3 \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{a^3} = \sqrt{2.77^3} = 4.6$$

Resposta: Ceres tem um período orbital de 4,6 anos

Exemplo 2 de aplicação da 3ª lei de Kepler

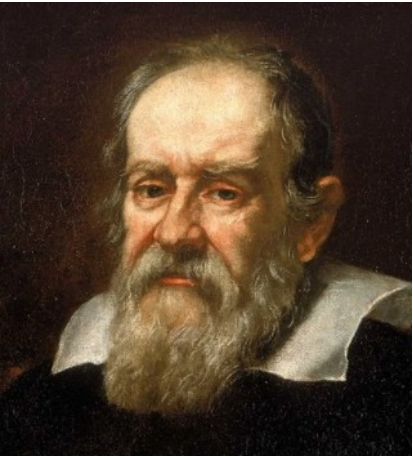
Um planeta é descoberto orbitando a cada 3 meses em torno de uma estrela com a mesma massa do nosso Sol. Qual é a distância orbital média do planeta?

O período está em meses. Primeiro precisamos transformar para anos: $P = 3 \text{ meses} = 0,25 \text{ ano}$. Agora aplicando a 3ª lei para a distância média:

$$p^2 = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{p^2} = \sqrt[3]{0.25^2} = 0.40$$

Resposta: O planeta orbita sua estrela com $a = 0,40 \text{ UA}$, que é igual à distância média de Mercúrio ao Sol.

Galileu (1564-1642) consolidou a revolução copernicana



Uma 1a. objeção ao heliocentrismo era a antiga crença de Aristóteles, que a Terra não poderia estar se movendo porque objetos como pássaros e nuvens seriam deixados para trás.



Princípio de Inércia.

Galileu realizou diversos experimentos que derrubaram a visão aristotélica. Ele demonstrou que um objeto em movimento permanece em movimento, a menos que uma força aja para pará-lo (1a lei de Newton).

Isso explica por que objetos que compartilham o movimento da Terra através do espaço (como pássaros e nuvens) ficam com a Terra em vez de ficar para trás.

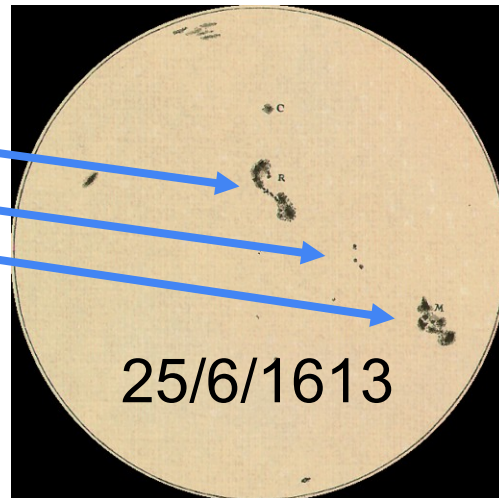
Galileu (1564-1642) consolidou a revolução copernicana



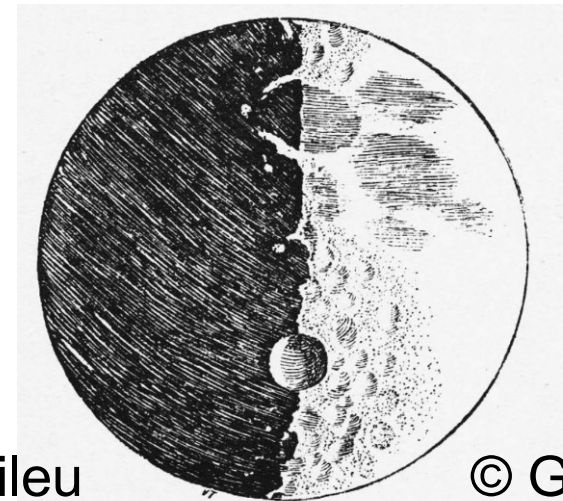
Uma 2a. objeção era que as órbitas não poderiam ser elípticas, pois segundo crença de Aristóteles, os céus - o reino do Sol, Lua, planetas e estrelas - devem ser perfeitos (circulares) e imutáveis.

Observações de 'imperfeições' usando o telescópio.

Se a Lua e o Sol não eram 'perfeitos' e imutáveis, talvez as órbitas planetárias não precisavam ser circulares



Sol
© Galileu



Lua
© Galileu

Galileu (1564-1642) consolidou a revolução copernicana

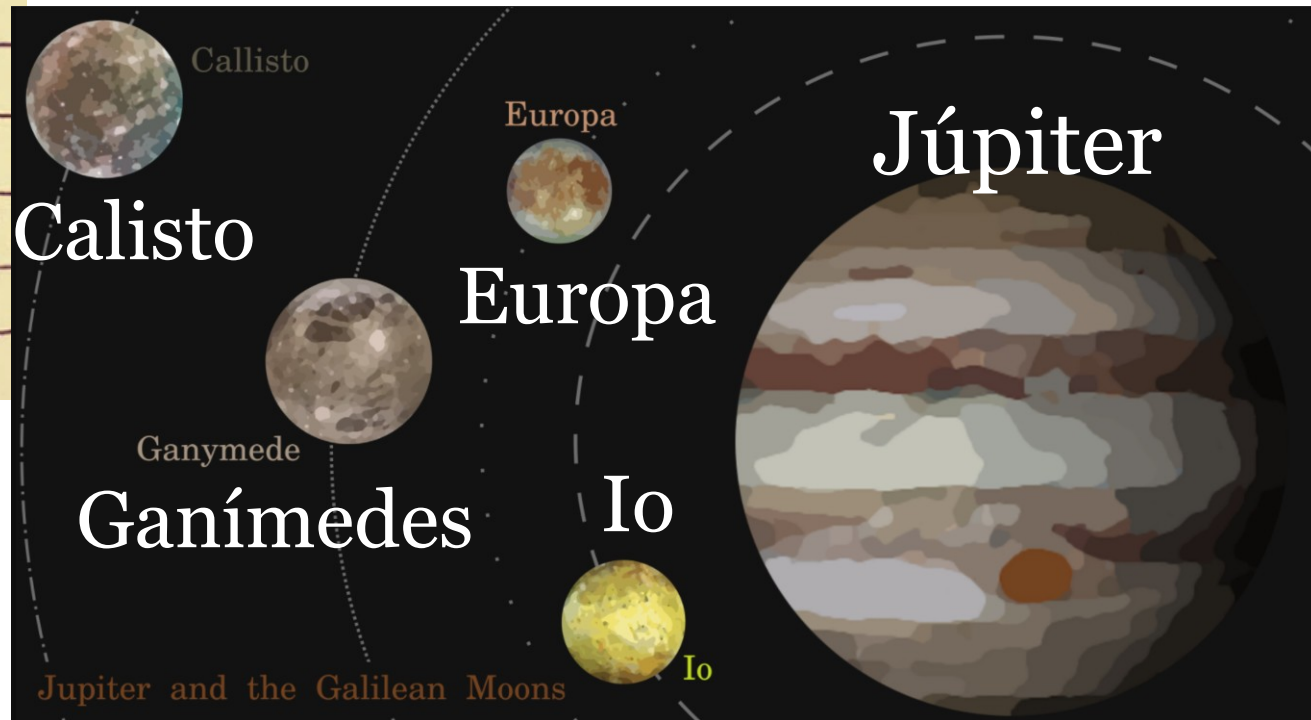
Outra observação fundamental de Galileu foi a de 4 luas orbitando Júpiter.

Golpe duro para o geocentrismo, que propunha que todos os corpos celestes orbitavam a Terra.

https://www.reddit.com/r/space/comments/jdfp5i/jupiter_and_the_galilean_moons/

Observationes Jovianae
1610

2. Jovis març H. 12	○ **
30. març	** ○ *
2. Abril:	○ ** *
3. març	○ * *
3. Ho. 5.	* ○ *
4. març	* ○ **
6. març	** ○ *
8. març H. 13.	* * * ○
10. març	* * * ○ *
11.	* * ○ *
12. H. 4. uesp.	* ○ *
13. març	* ** ○ *



Calisto

Europa

Ganímedes

Io

Jupiter and the Galilean Moons

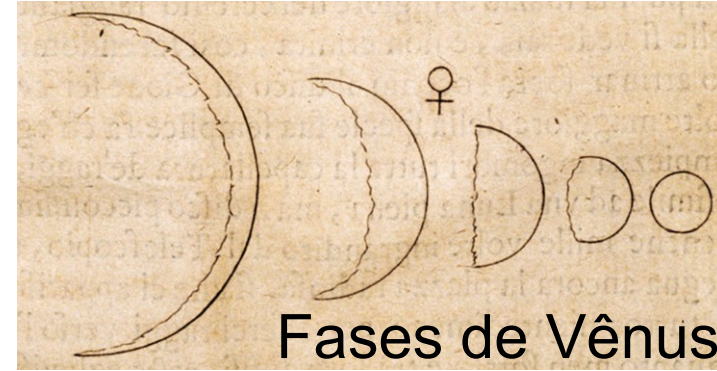
Júpiter e 4 luas

© Galileu 1610

Galileu (1564-1642) consolidou a revolução copernicana



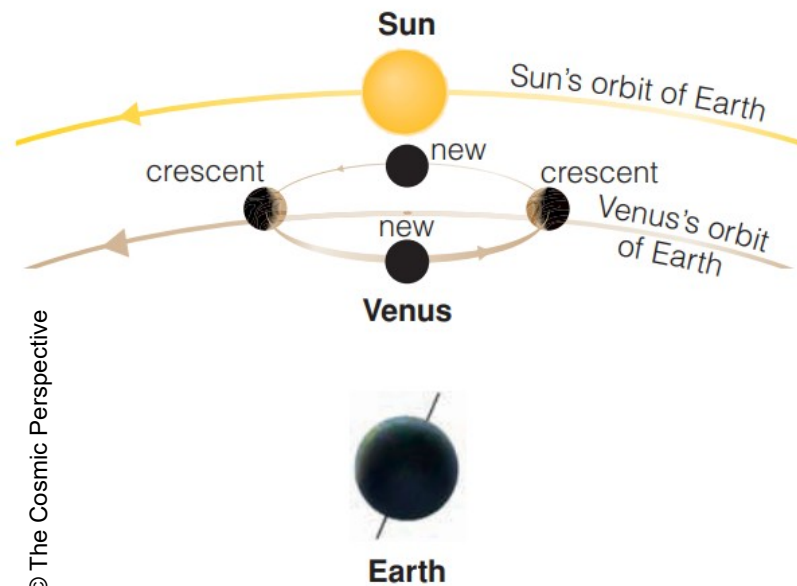
Galileu descobriu que Vênus apresenta todas as fases → orbita o Sol (heliocentrismo) e não a Terra.



Fases de Vênus

© Galileu 1610-11

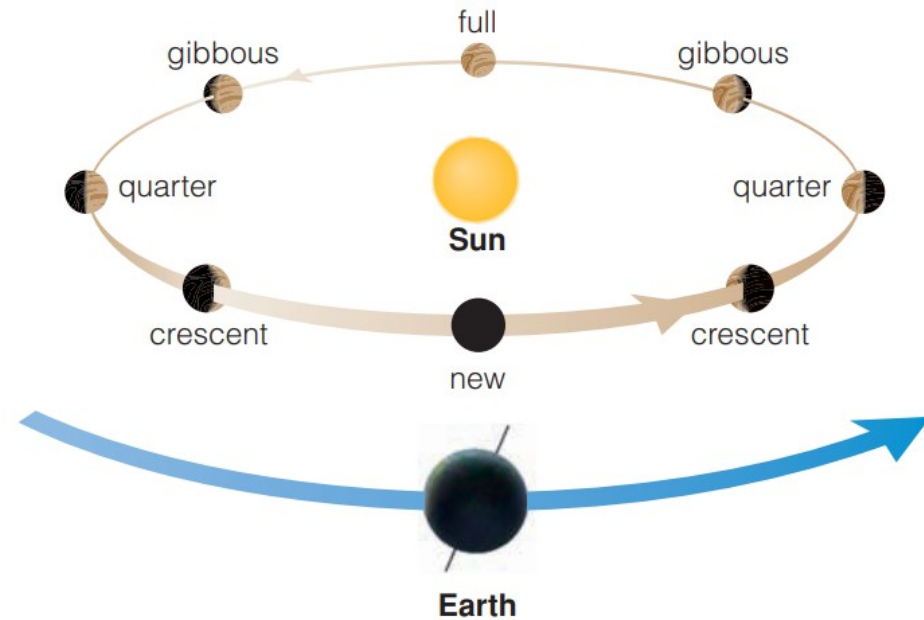
Visão geocêntrica de Vênus



© The Cosmic Perspective

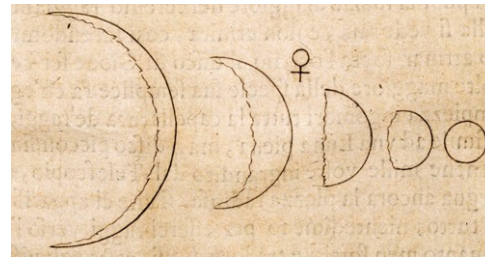
a In the Ptolemaic model, Venus orbits Earth, moving around a smaller circle on its larger orbital circle; the center of the smaller circle lies on the Earth-Sun line. If this view were correct, Venus's phases would range only from new to crescent.

Visão heliocêntrica de Vênus



b In reality, Venus orbits the Sun, so from Earth we can see it in many different phases. This is just what Galileo observed, allowing him to prove that Venus orbits the Sun.

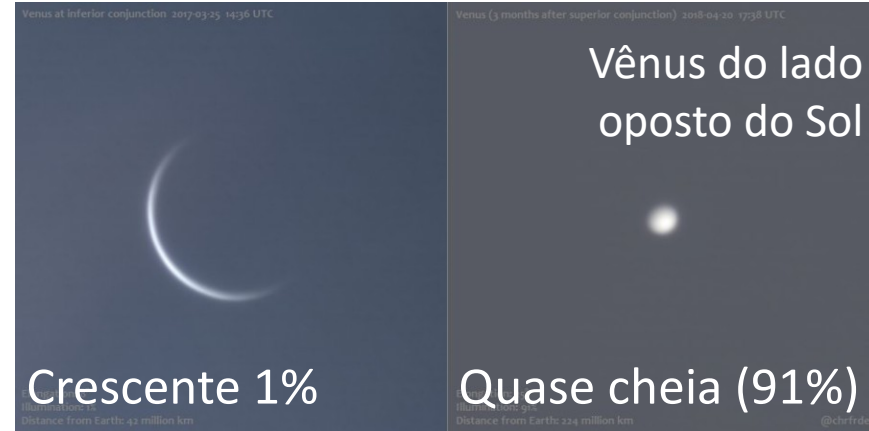
Notar que Vênus não apenas apresenta fases, mas também tamanhos muito diferentes (crescente: próximo da Terra; cheia: lado oposto do Sol).



Fases de Vênus
© Galileu 1610-11

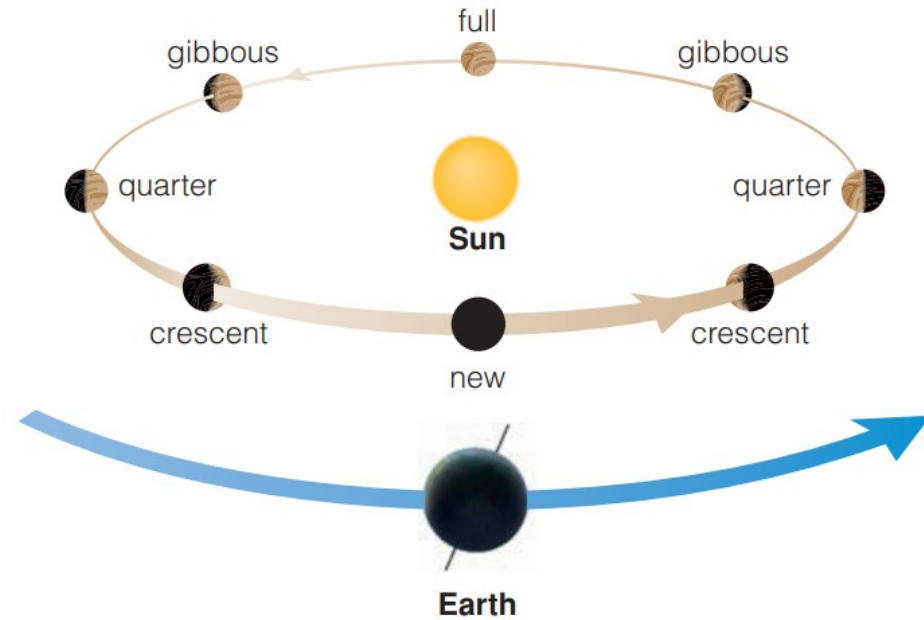
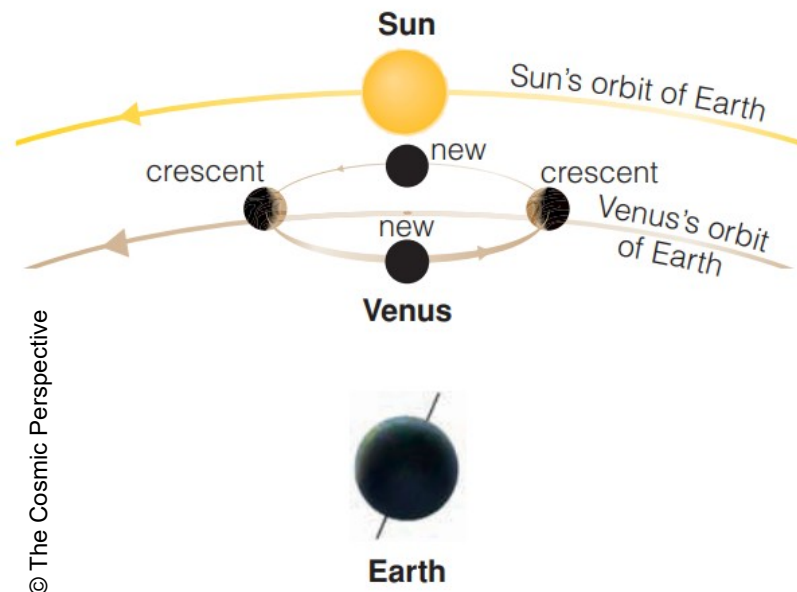
Fase crescente Cheia

© Christian Fröschlin, 2017-18



Visão geocêntrica de Vênus

Visão heliocêntrica de Vênus



© The Cosmic Perspective

a In the Ptolemaic model, Venus orbits Earth, moving around a smaller circle on its larger orbital circle; the center of the smaller circle lies on the Earth-Sun line. If this view were correct, Venus's phases would range only from new to crescent.

b In reality, Venus orbits the Sun, so from Earth we can see it in many different phases. This is just what Galileo observed, allowing him to prove that Venus orbits the Sun.

Phases of Venus 2019/2020

Size Difference:
11.64-57.58 arc sec



Dec/1/19

88.7%

Jan/20/20

76.8%

Feb/8/20

70.8%

Mar/15/20

55.9%

Mar/31/20

47.2%

Apr/11/20

40.1%

Apr/18/20

35.0%

May/1/20

24.2%

May/7/20

18.6%

May/13/20

12.8%

May/20/20

6.5%

May/23/20

4.2%

May/27/20

1.8%

May/31/20

0.3%

Chris Illidge

Solar system geometries

Vênus como estrela da tarde ou da manhã no sistema heliocêntrico

$$P_{\text{orb}}(\text{Vênus}) = 224,701 \text{ d}$$

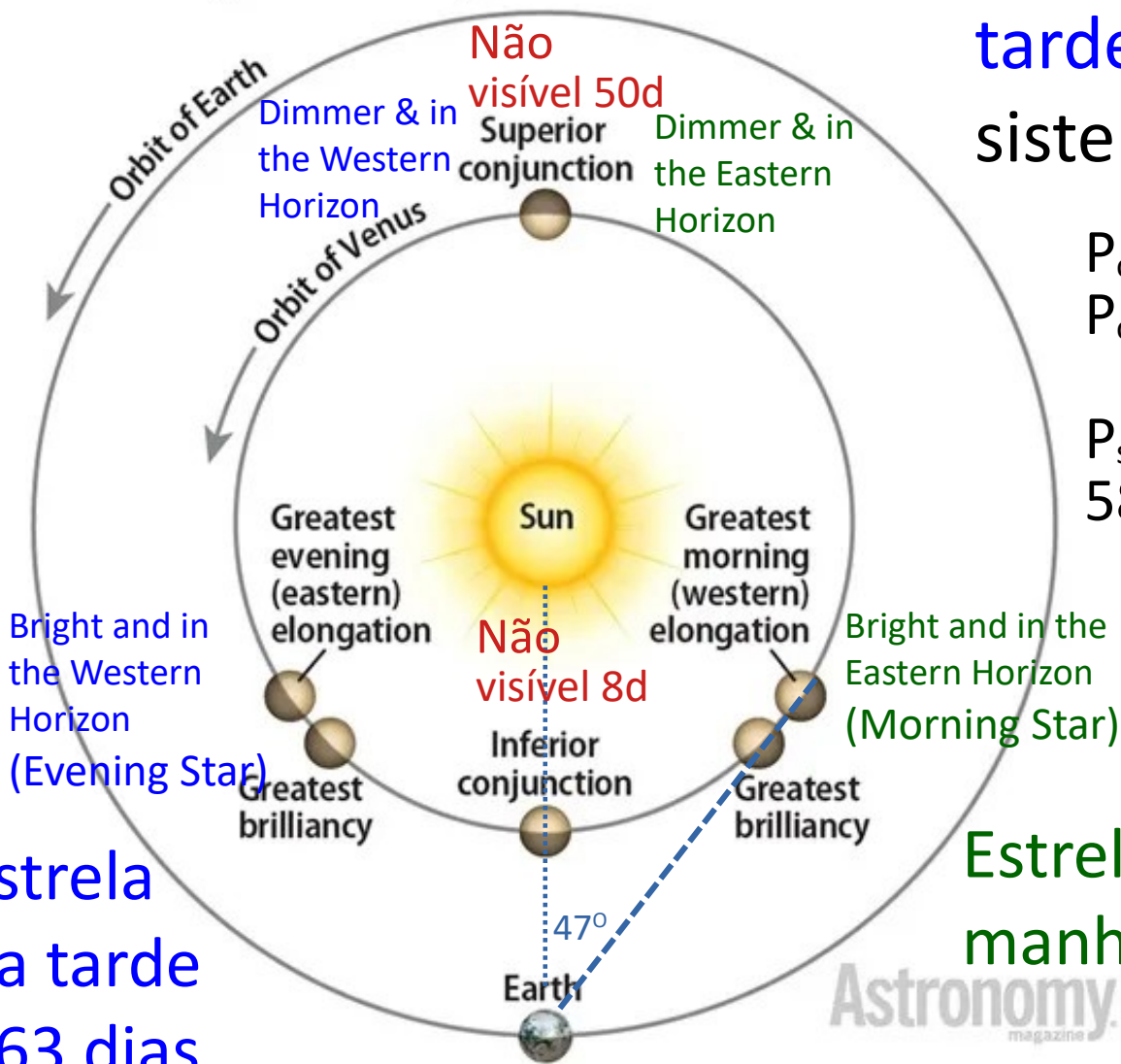
$$P_{\text{orb}}(\text{Terra}) = 365,256 \text{ d}$$

$$P_{\text{sinódico}}(\text{Vênus}) = 583,92 \text{ d}$$

$$584 \text{ d} = 263 + 50 + 253 + 8$$

Estrela da tarde
263 dias

Estrela da manhã
263 d





DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STUDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR. DVCA DI TOSCANANA.

Doce ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO,
Propoendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali
tanto per l'una, quanto per l'altra parte.

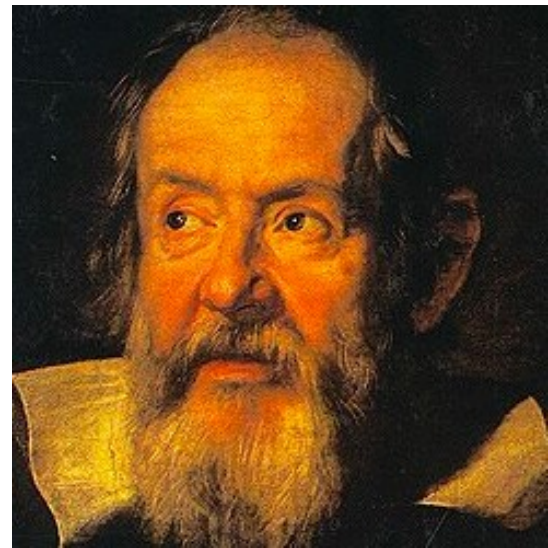


CON PRI
VILEGI.
IN FIORENZA, Per Gio:Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.



Com o intuito de divulgar as suas pesquisas,
Galileu escreveu em italiano em vez de latim,
para que seja acessível a pessoas comuns.

Galileu Galilei
5/feb/1564, Pisa – 8/jan/1642, Arcetri





Jorge Melendez @DrJorgeMelendez · Aug 3

Dois grandes cientistas injustiçados por defender o conhecimento científico: o renomado Físico Brasileiro Ricardo Galvão em 2019 e o grande cientista Italiano Galileu há 4 séculos

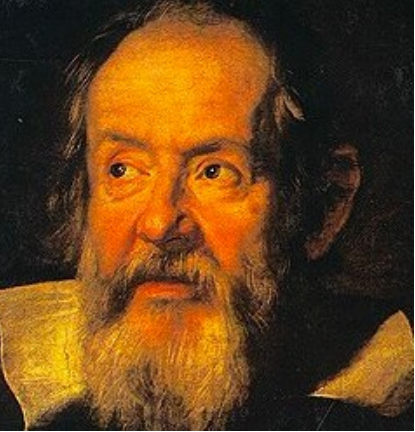


**Desmatamento da
amazônia
aumentou em 2019**

Ricardo Galvão, INPE, 2019

E pur si muove

Galileu diante do Inquisição, 1633



"Ao negar princípios científicos, pode-se manter qualquer absurdo."

Galileu Galilei



"Sempre que os cientistas recuaram não foi bom para a humanidade."

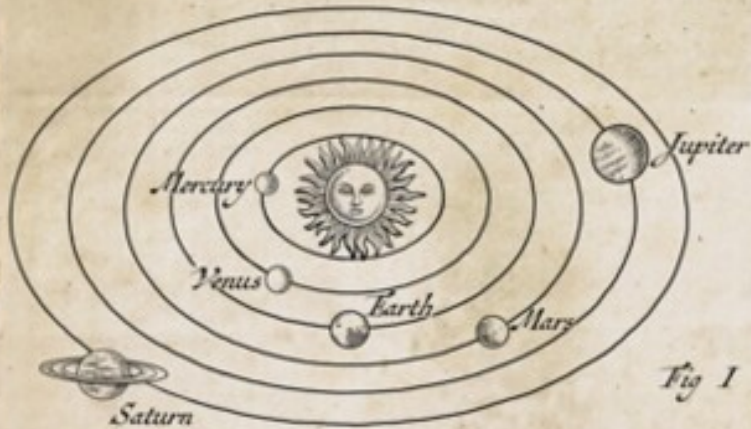
Físico Ricardo Galvão, Professor do IF-USP e ex-diretor do INPE

Newton (1643 – 1727):
Gravitação universal

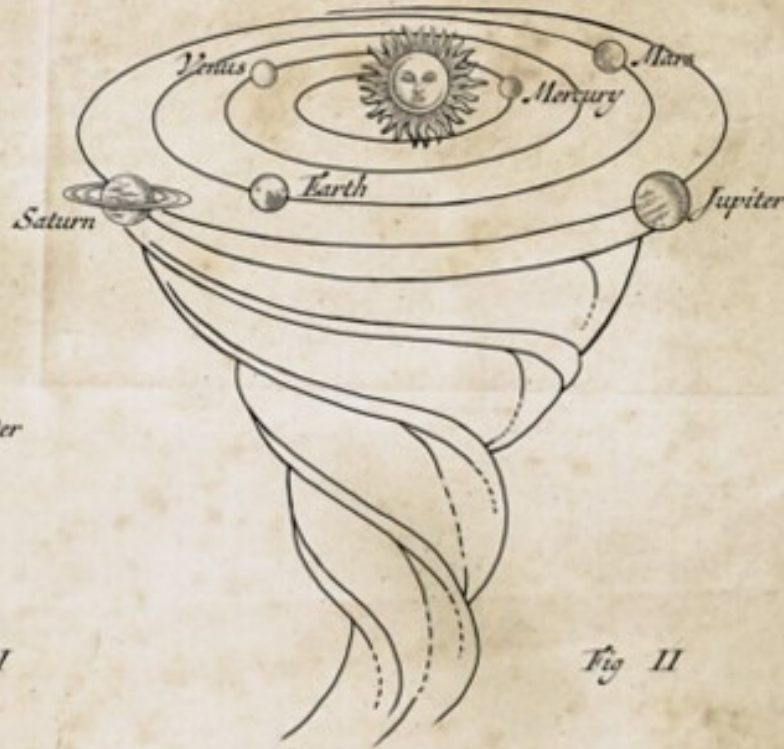
René Descartes (1596 – 1650): teoria
de vórtices giratórios de éter invisível

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

NEWTONIAN



CARTESIAN





“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Newton (1643 -
1727)

1687 (1ª ed.), 1713 (2ª), 1726 (3ª)

1ª edição em Inglês: 1728

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.



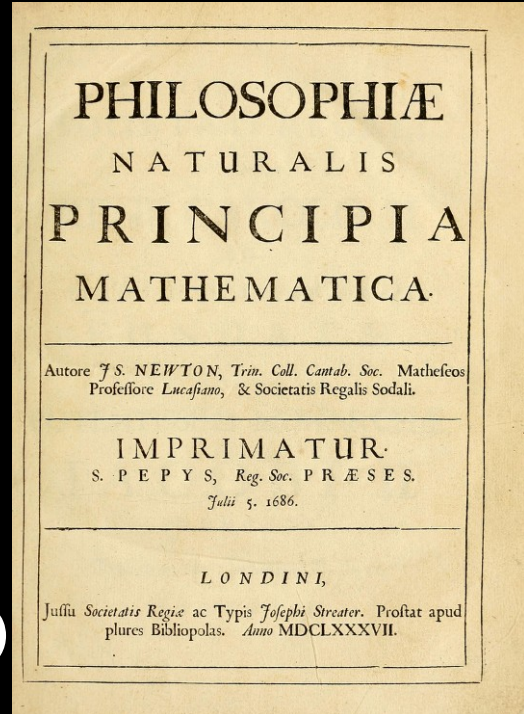
“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Newton (1643 - 1727)

1687 (1ª ed.), 1713 (2ª), 1726 (3ª)

1ª edição em Inglês: 1728



Émilie du Châtelet (1706 – 1749)

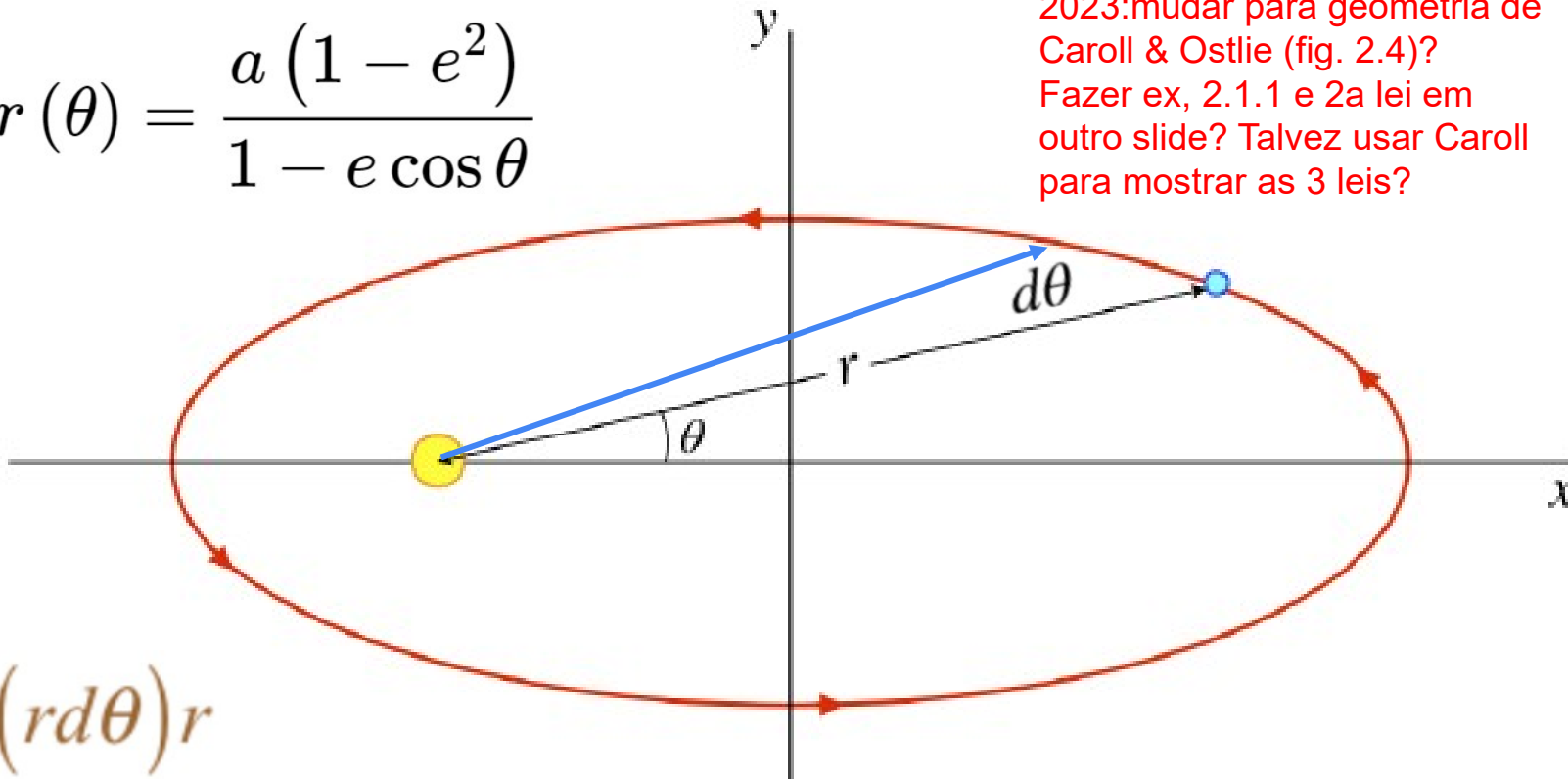
1740: divulgou a obra de Newton

1745 – 1749: tradução do Principia para francês a partir do latim, até o dia da sua morte. Foi como uma “4ª edição” melhorada e com o jeito moderno de ensinar, com derivadas e integrais

Representação matemática (Newton) das leis de Kepler

$$\text{1a lei: } r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

2023:mudar para geometria de Carroll & Ostlie (fig. 2.4)?
Fazer ex, 2.1.1 e 2a lei em outro slide? Talvez usar Carroll para mostrar as 3 leis?



2a lei:

$$dA = \frac{1}{2}(rd\theta)r$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \omega = \frac{mr^2 \omega}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{constante}$$


(conservação do momento angular L)

Representação matemática (Newton) das leis de Kepler

3a lei (órbita circular):

$$v = \frac{2\pi R}{P}$$

Força gravidade = Força centrípeta

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}$$


$$\left(\frac{2\pi R}{P} \right)^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow \frac{R^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{constante}$$

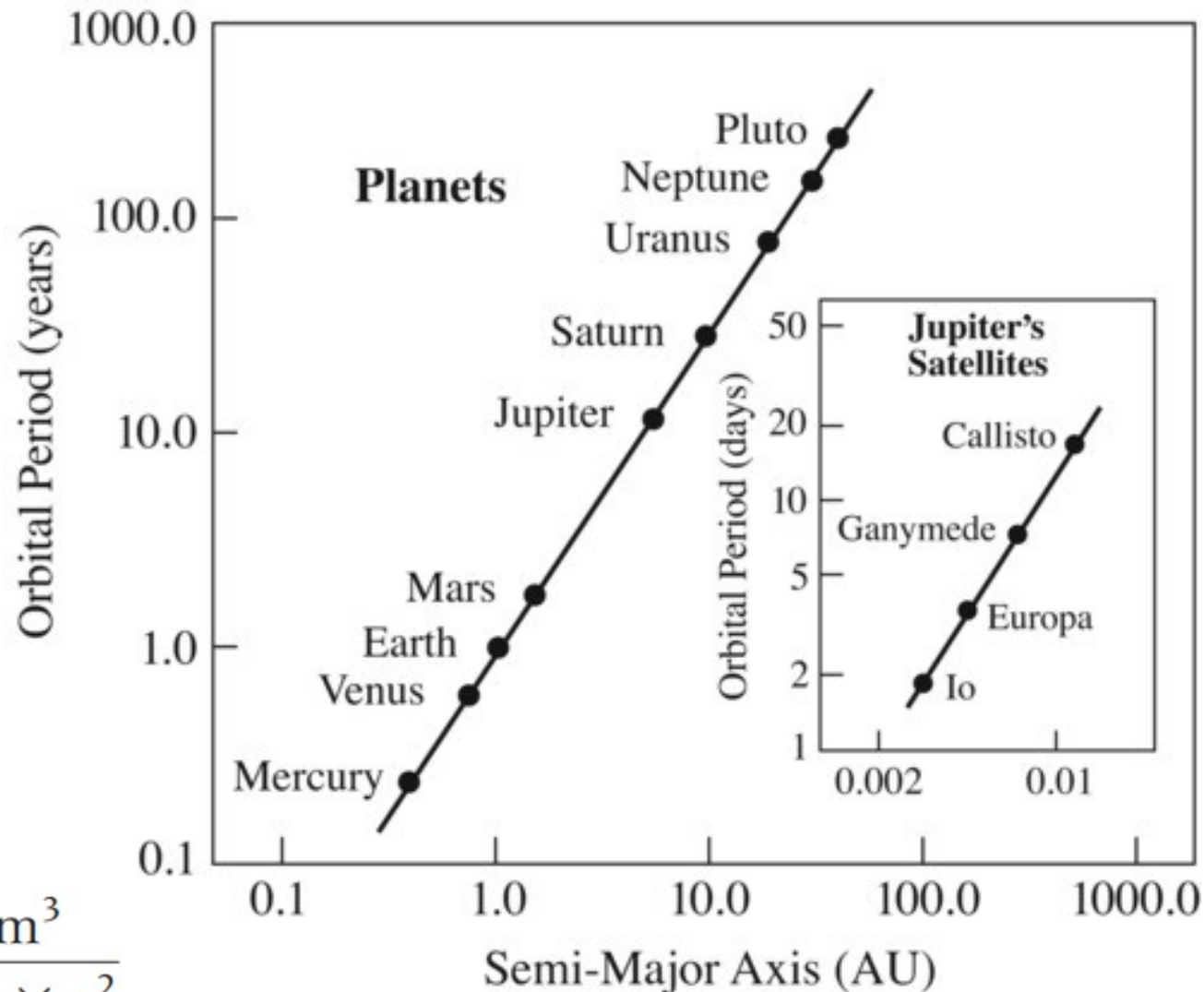
$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \times \text{s}^2} \quad (\text{constante gravitacional})$$

Forma geral da 3a lei de Kepler segundo Newton:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2}$$

A 3a lei de Kepler pode ser aplicada a outros corpos, por exemplo para os satélites de Júpiter, usando $M = M_{\text{Júpiter}}$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \times \text{s}^2}$$



Exemplo. Calcule a massa do Sol sabendo que a Terra orbita o Sol em 1 ano a uma distância média de 1 UA.

Versão de Newton
da 3a lei de Kepler:

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3$$

Para a Terra e Sol:

$$p_{\text{Earth}}^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_{\text{Sun}} + M_{\text{Earth}})} a_{\text{Earth}}^3$$

$$M_{\text{Terra}} + M_{\text{Sol}} \sim M_{\text{Sol}} \rightarrow p_{\text{Earth}}^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Sun}}} a_{\text{Earth}}^3$$

$$M_{\text{Sun}} \approx \frac{4\pi^2 a_{\text{Earth}}^3}{G p_{\text{Earth}}^2} \approx \frac{4\pi^2 (1.5 \times 10^{11} \text{ m})^3}{\left(6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \times \text{s}^2}\right) (3.15 \times 10^7 \text{ s})^2} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$p_{\text{Earth}} = 1 \text{ year} \approx 3.15 \times 10^7 \text{ s}$$

$$a_{\text{Earth}} = 1 \text{ AU} \approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$\text{Rpta: } M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

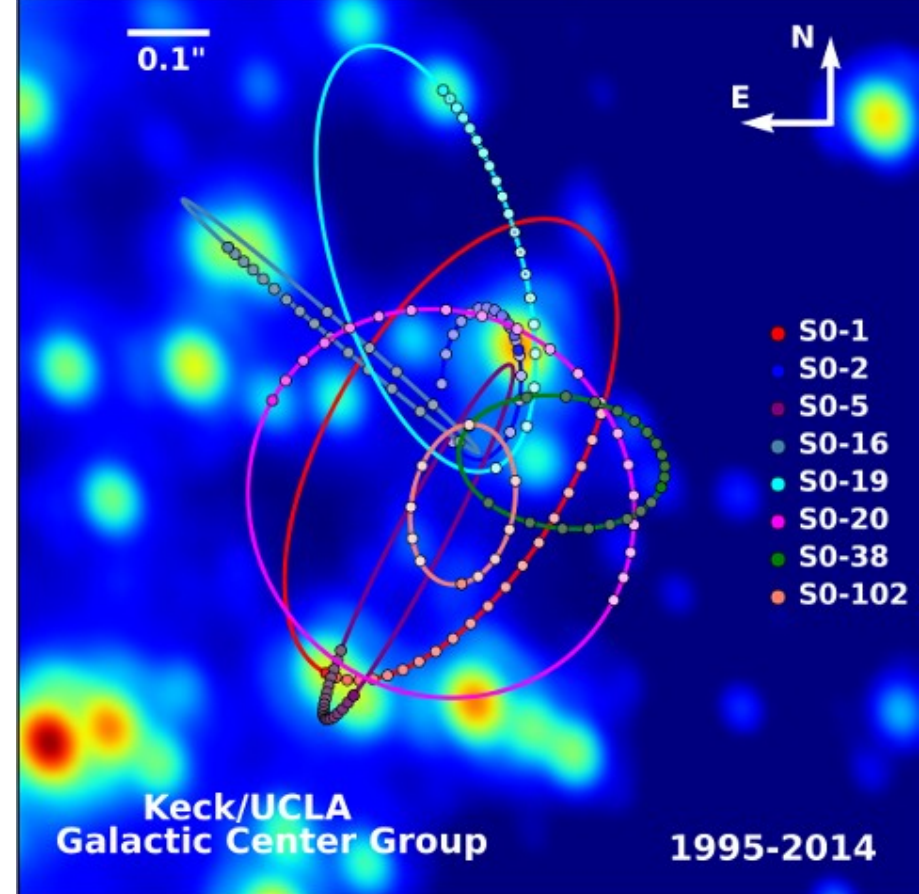
Exemplo. Calcule a massa do buraco negro supermassivo no centro de nossa galáxia, sabendo que a estrela SO-2 tem $a = 919$ UA e $P = 14,53$ anos

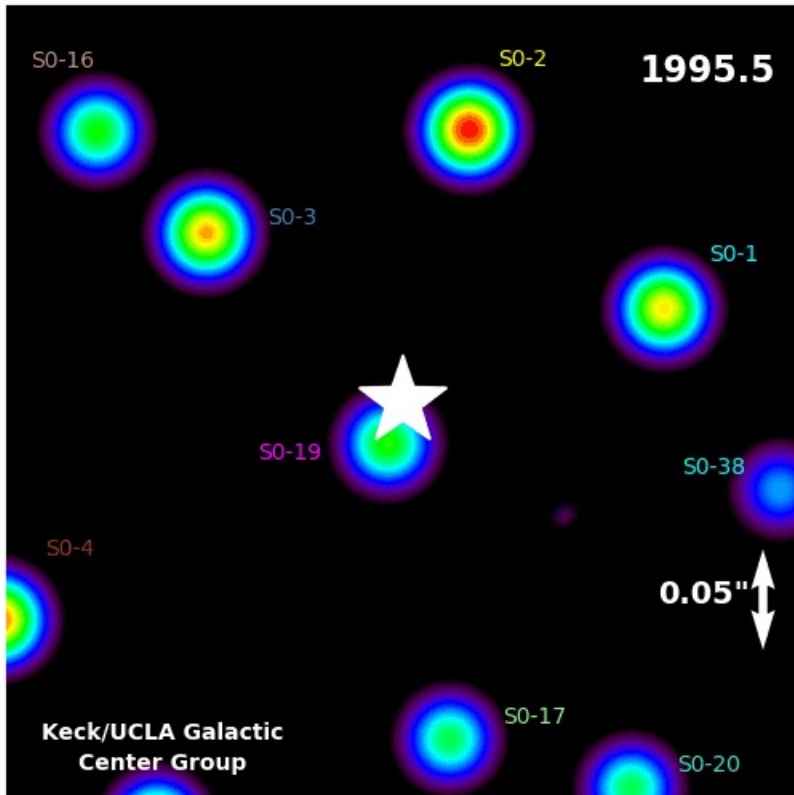
Podemos desprezar a massa da estrela:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}$$

$$M = \frac{4\pi^2 \times (919 \times 1.50 \times 10^{11} \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}) \times (14.53 \times 3.16 \times 10^7 \text{ s})^2}$$
$$= 7.3 \times 10^{36} \text{ kg} = 3.7 \times 10^6 M_{\odot}$$

Rpta: 4 milhões de vezes a massa do Sol !





Estrelas orbitando o centro da Galáxia, usando observações do telescópio Keck pelo grupo da Profa. Andrea Ghez



Pelo estudo do buraco negro supermassivo no centro de nossa galáxia, a Profa. Andrea recebeu o Nobel de Física em 2020

Illustrations: Niklas Elmehed

THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2020



Roger Penrose

“for the discovery that black hole formation is a robust prediction of the general theory of relativity”

Reinhard Genzel

“for the discovery of a supermassive compact object at the centre of our galaxy”

Andrea Ghez

THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

Conservação de energia

Émilie du Châtelet
 $E \sim mv^2$ (Newton
sugeriu $E \sim mv$)



Energia total = E. cinética + E. potencial

$$E = E_C(r) + E_P(r) = \frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{mMG}{r} \right)$$

Corpo não ligado para $E = 0 \rightarrow E_C(r) = -E_P(r)$

Velocidade de escape v_e :

$$0 = \frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{mMG}{r} \right) \rightarrow \frac{v^2}{2} = \left(\frac{MG}{r} \right) \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2MG}{r}}$$

Hipérbole

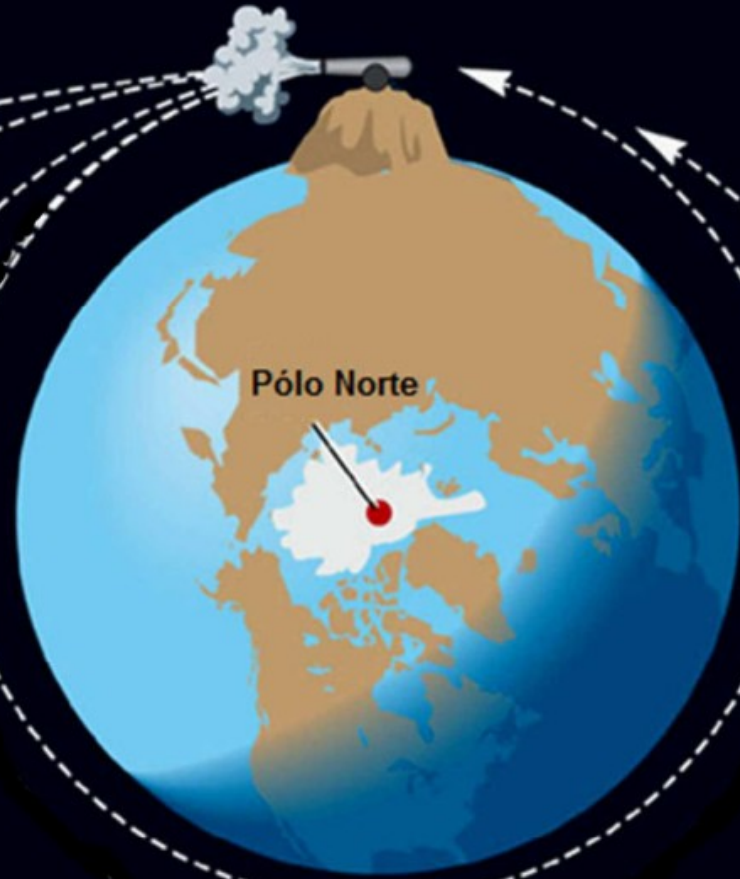
$$V_L > V_e$$

Parábola

$$V_L = V_e$$

Elipse

$$V_L < V_e$$



V_L = velocidade de lançamento

V_e = velocidade de escape

$$V_e = \sqrt{\frac{2MG}{r}}$$

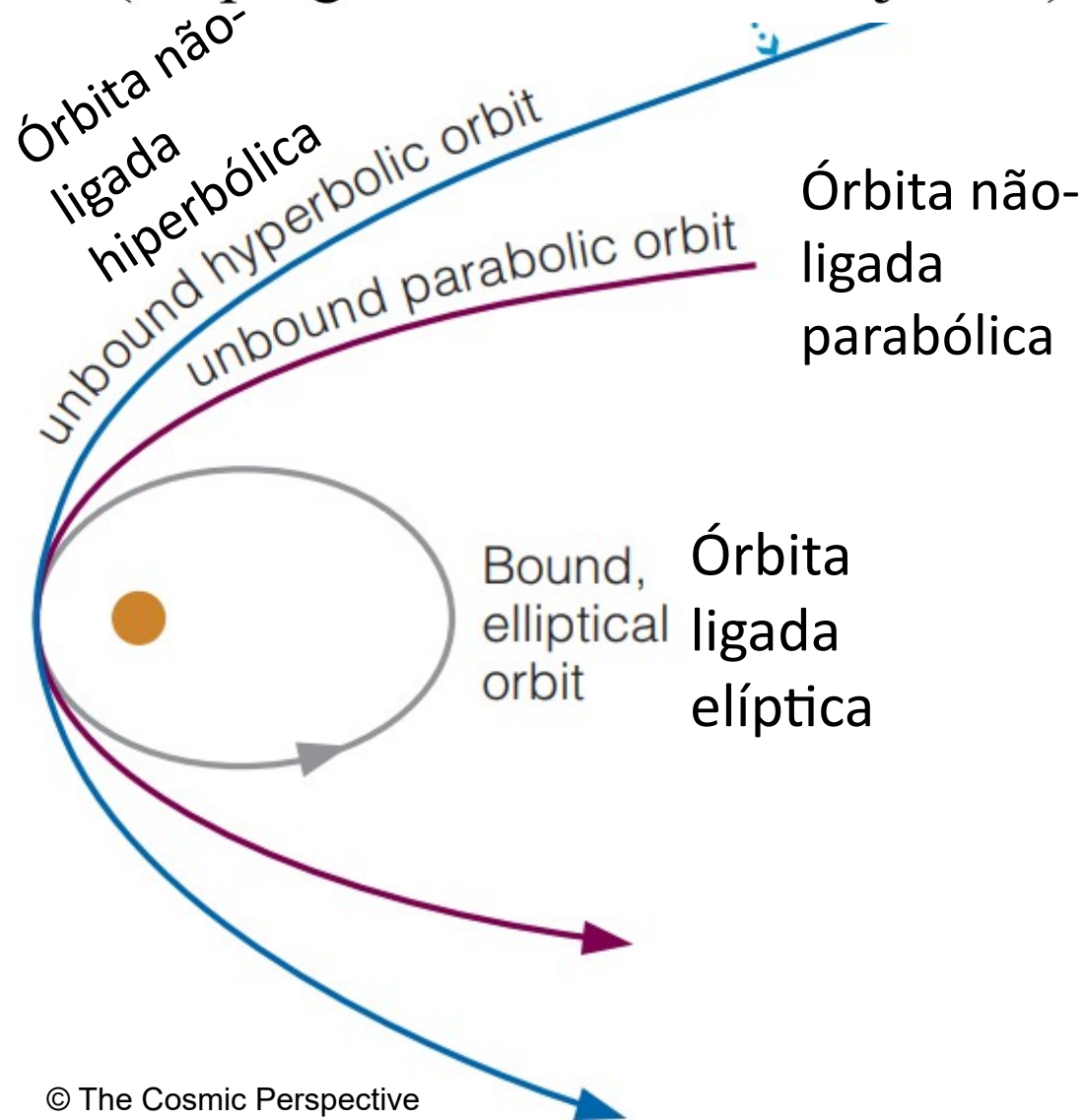
$0 \leq e < 1$ (elipse) $\Rightarrow E < 0$ (corpo gravitacionalmente preso)

$e = 1$ (parábola) $\Rightarrow E = 0$ (corpo gravitacionalmente solto)

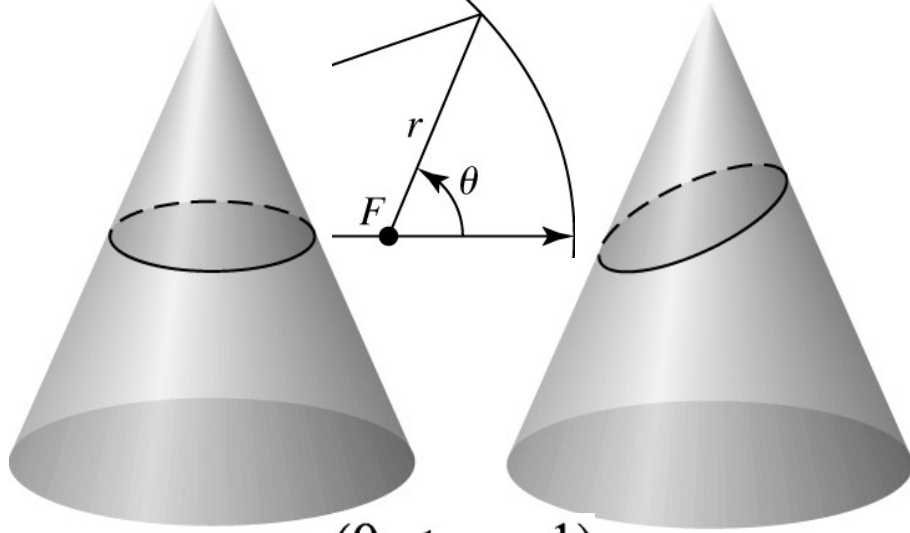
$e > 1$ (hipérbole) $\Rightarrow E > 0$ (corpo gravitacionalmente ejetado)

$$E = E_C(r) + E_P(r)$$

Newton mostrou que a órbita elíptica de Kepler é apenas uma das possibilidades.

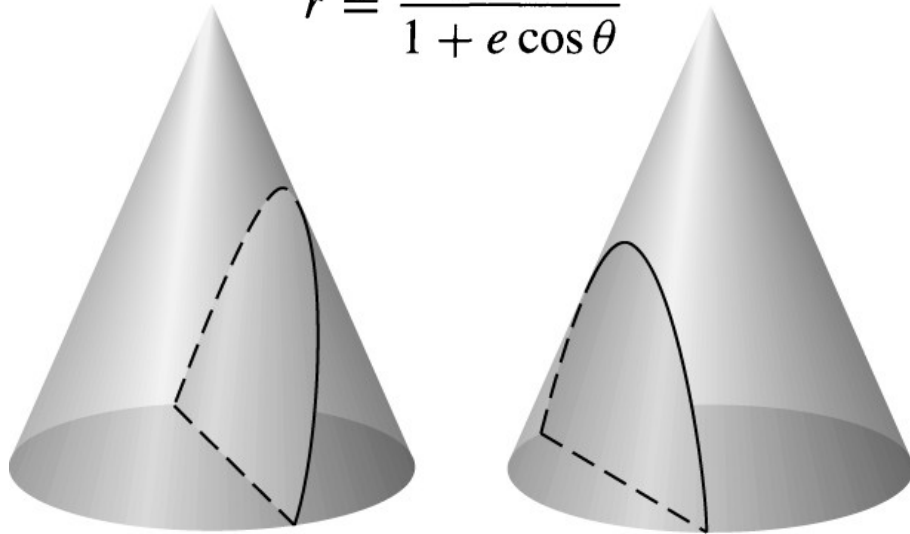


Círculo, elipse, hipérbole e parábola são cônicas (secções cônicas), obtidas pela intersecção de um plano com um cone. A curva depende da inclinação do plano.



Circle $(0 \leq e < 1)$ Ellipse

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$



Parabola $(e = 1)$

$$r = \frac{2p}{1 + \cos \theta} \quad (a)$$

Hyperbola $(e > 1)$

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}$$

Parabola
 $e = 1.0$
 $a = 1.0$

Hyperbola
 $e = 1.4$
 $a = 2.5$

Ellipse
 $e = 0.6$
 $a = 2.5$

Circle
 $e = 0.0$
 $a = 1.0$

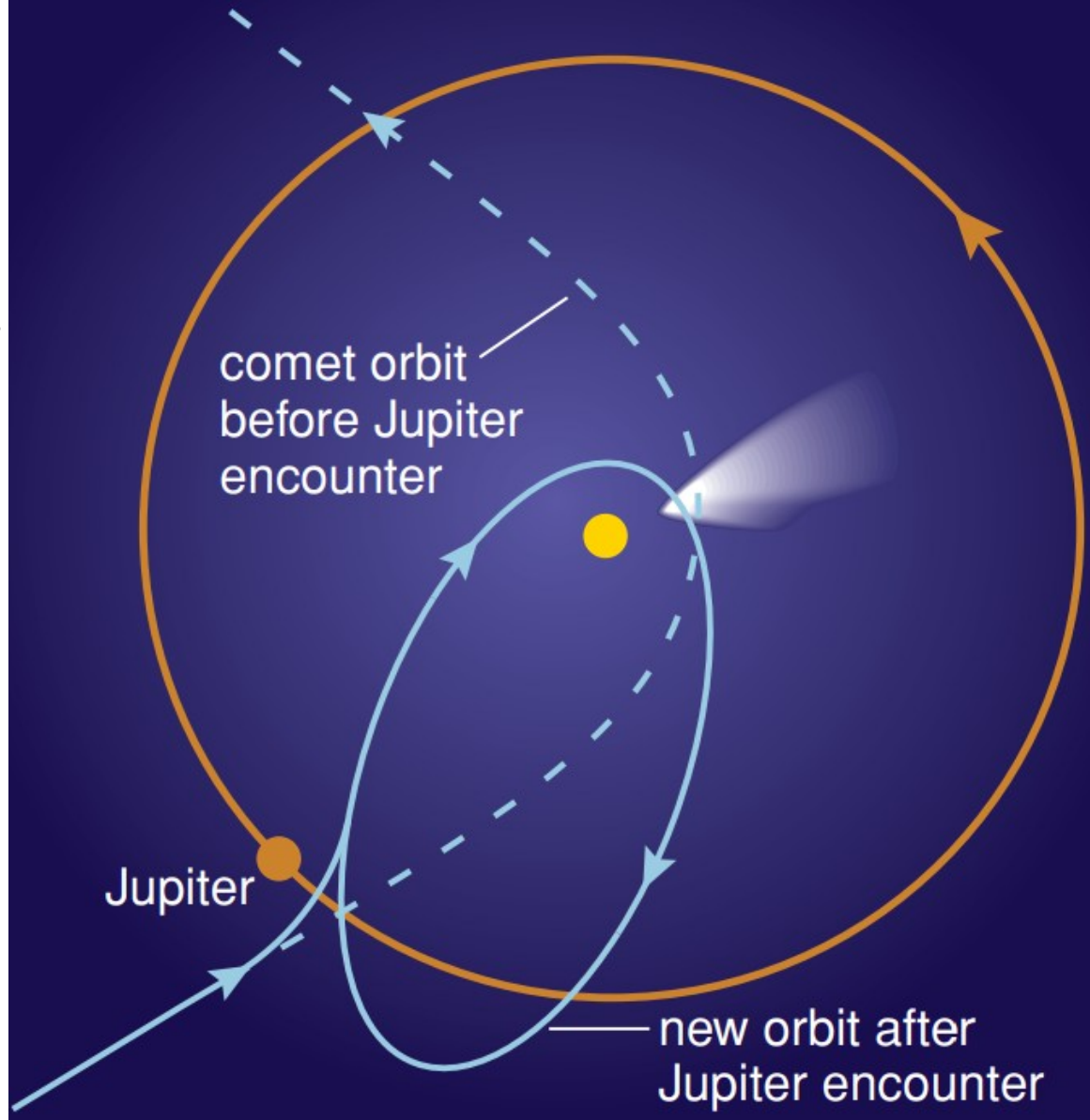
Focus

(b)

Órbitas podem mudar via intercâmbios de energia durante encontros gravitacionais.

Por exemplo, a figura mostra um cometa em direção ao Sol em uma órbita não ligada. A passagem do cometa perto de Júpiter permite que o cometa e Júpiter troquem energia.

O cometa perde tanta energia orbital que sua órbita muda de não-ligada para ligada (elíptica). Júpiter ganha a energia que o cometa perde, mas o efeito é imperceptível por causa de sua maior massa.



Problema dos 3 corpos: estudar as órbitas de 3 corpos sujeitos a interações gravitacionais entre eles

Segundo Newton, para 2 corpos de massa m e M separados por uma distância r :

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} \quad \rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \times \text{s}^2} \quad (\text{constante gravitacional universal})$$

Problema dos 3 corpos

Equações que descrevem o movimento de 3 corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 , com vetores de posição e aceleração \vec{r}_i e $\ddot{\vec{r}}_i$

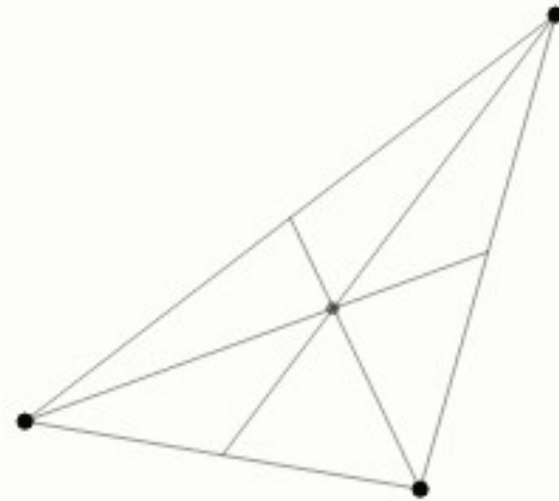
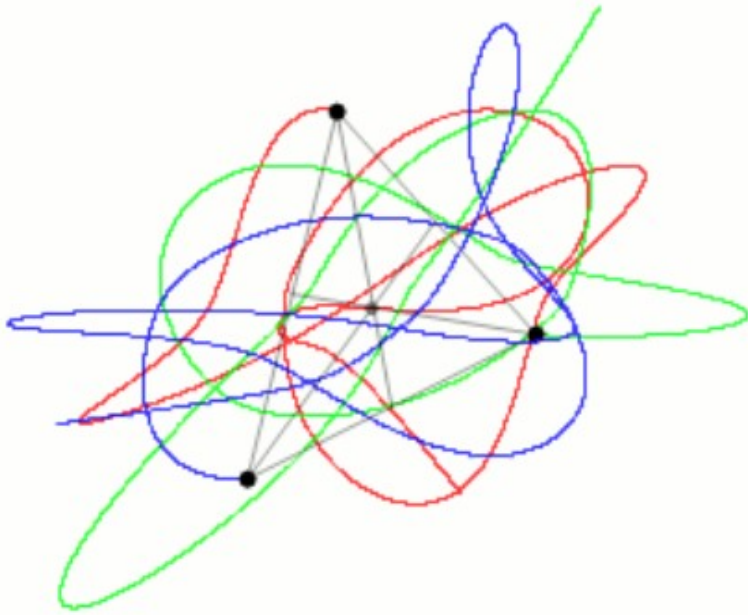
$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3},$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}.$$

Problema dos 3 corpos

No geral é muito difícil de ser resolvido analiticamente, especialmente quando as massas dos 3 corpos são similares.



Trajetórias de três corpos idênticos localizados nos vértices de um triângulo escaleno e com velocidade inicial zero. O centro de massa permanece no local.

Problema dos 3 corpos: simplificações

1. A massa do terceiro corpo (m_3) é considerada nula comparada às outras duas massas
2. Órbitas circulares para as primárias
3. Terceiro corpo se move no plano orbital das primárias

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -G m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3},$$

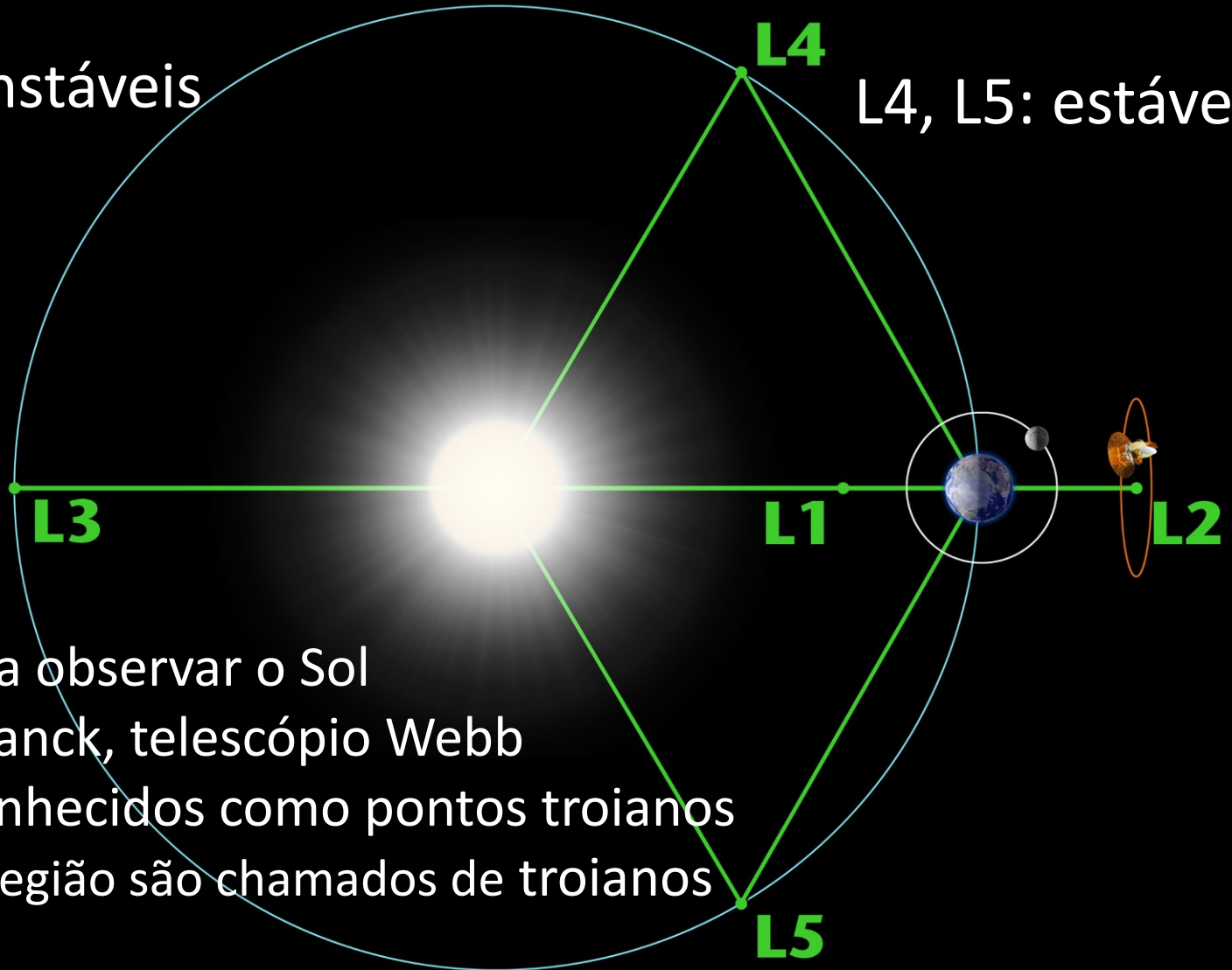
$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G m_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -G m_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - G m_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}.$$

Pontos de Lagrange: regiões onde as forças gravitacionais de 2 massas cancelam a aceleração centrípeta.

L1, L2, L3: instáveis

L4, L5: estáveis



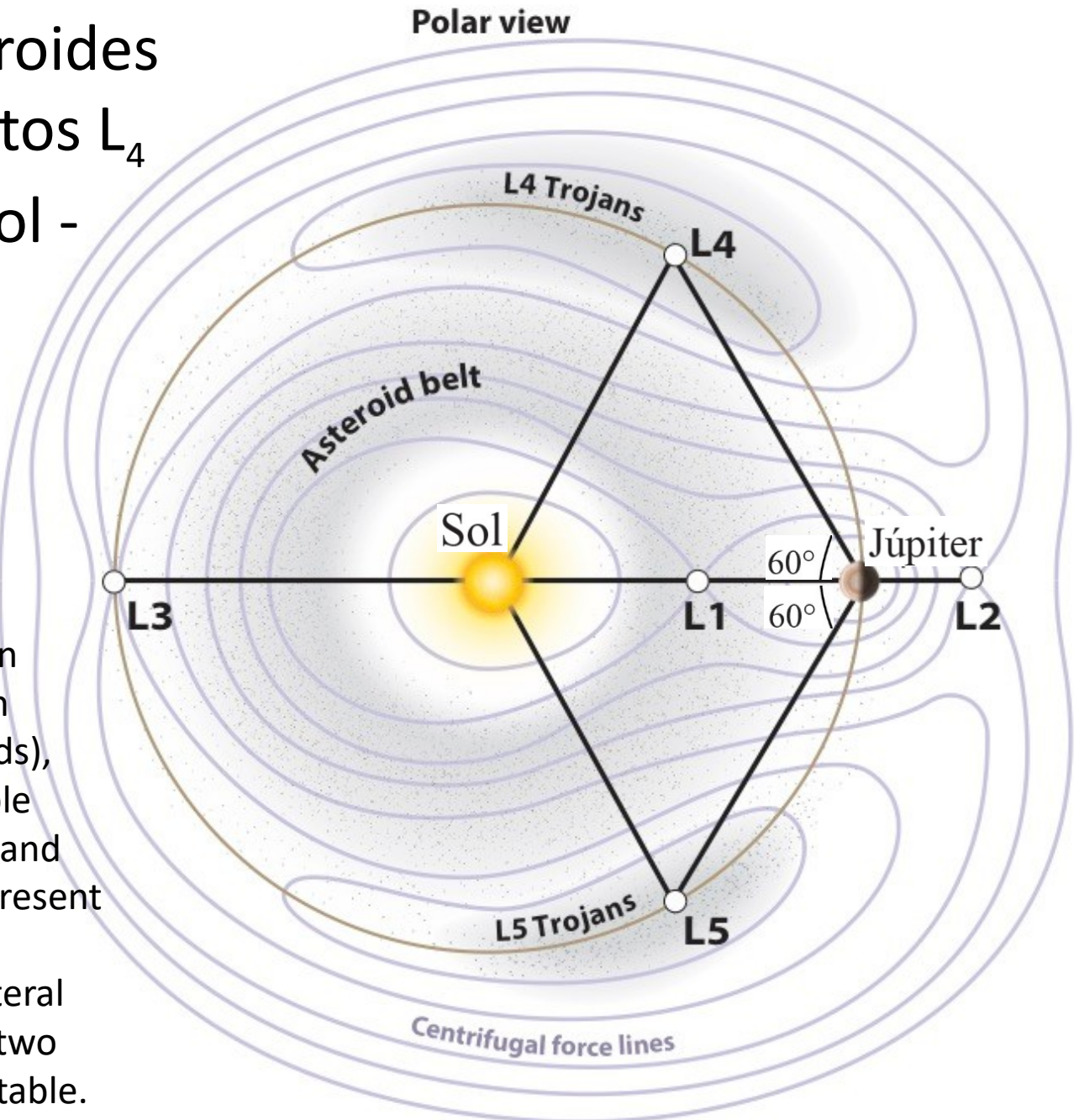
L1: ótimo para observar o Sol

L2: WMAP, Planck, telescópio Webb

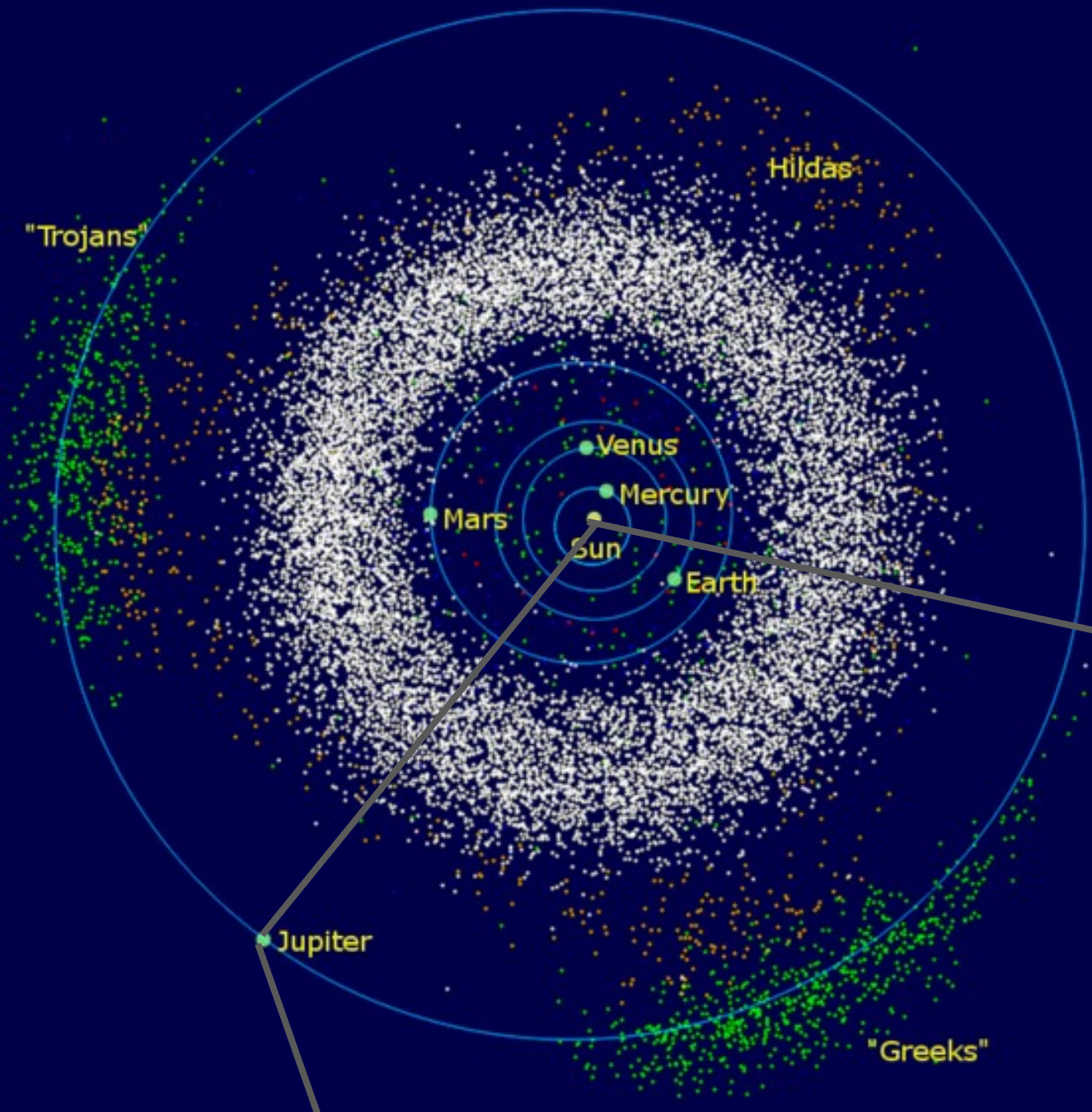
L4, L5: são conhecidos como pontos troianos

Corpos nessa região são chamados de troianos

Regiões dos asteroides troianos nos pontos L_4 e L_5 do sistema Sol - Júpiter

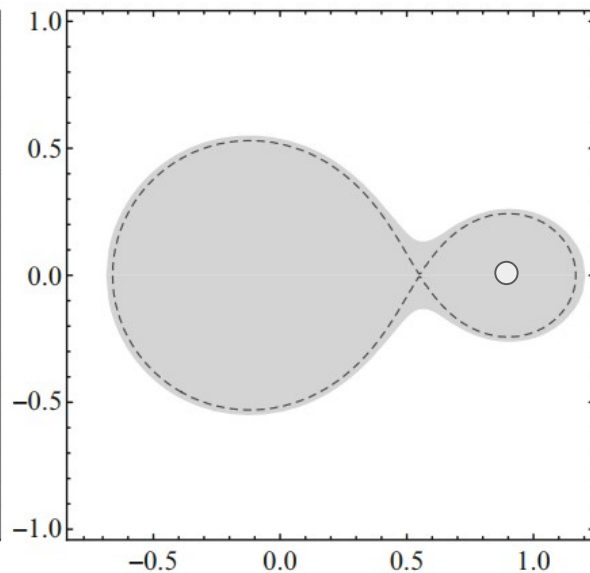
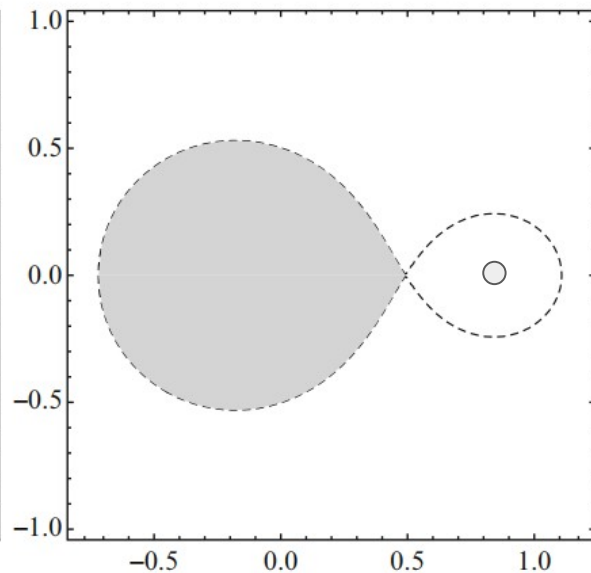
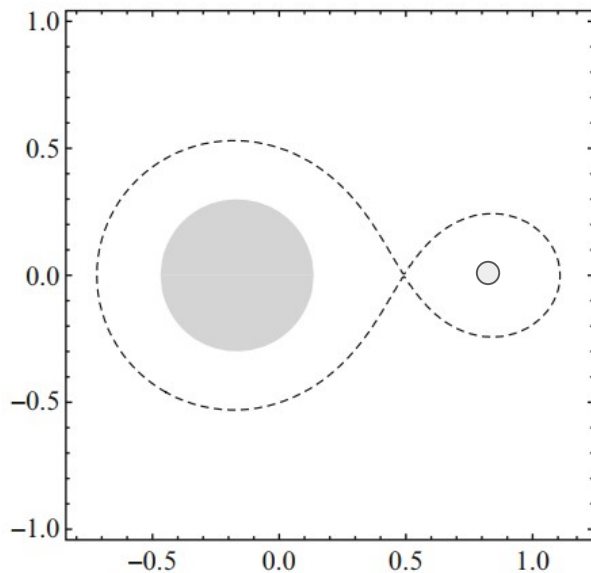
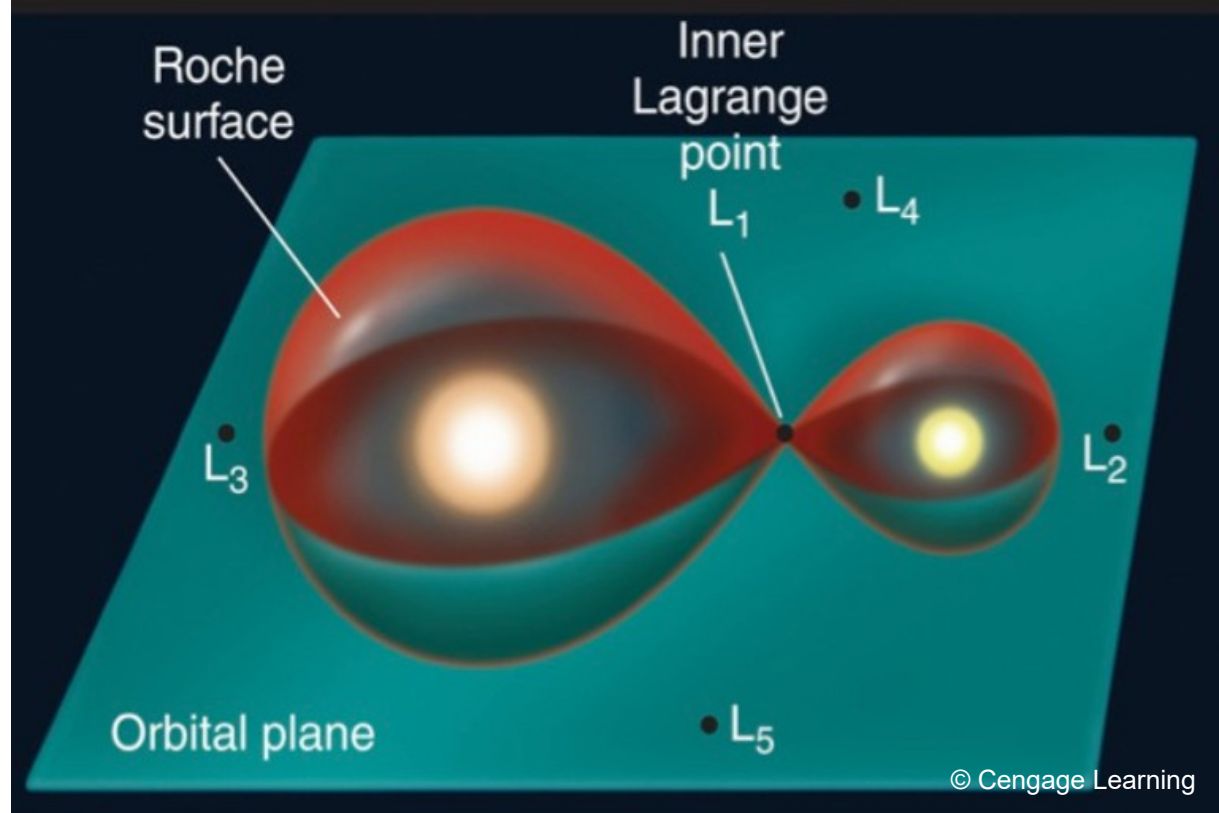


Every planet has 5 Lagrangian points (L_1 to L_5) where much smaller objects (e.g., asteroids), can maintain somewhat stable positions relative to the Sun and the planet. The contours represent equal gravitational potential energy. L_4 & L_5 make equilateral triangles in the plane of the two large objects, and both are stable.



Além do cinturão de asteroides, observamos esses objetos também na região dos pontos de Lagrange L4 e L5 (Troianos) da órbita de Júpiter.

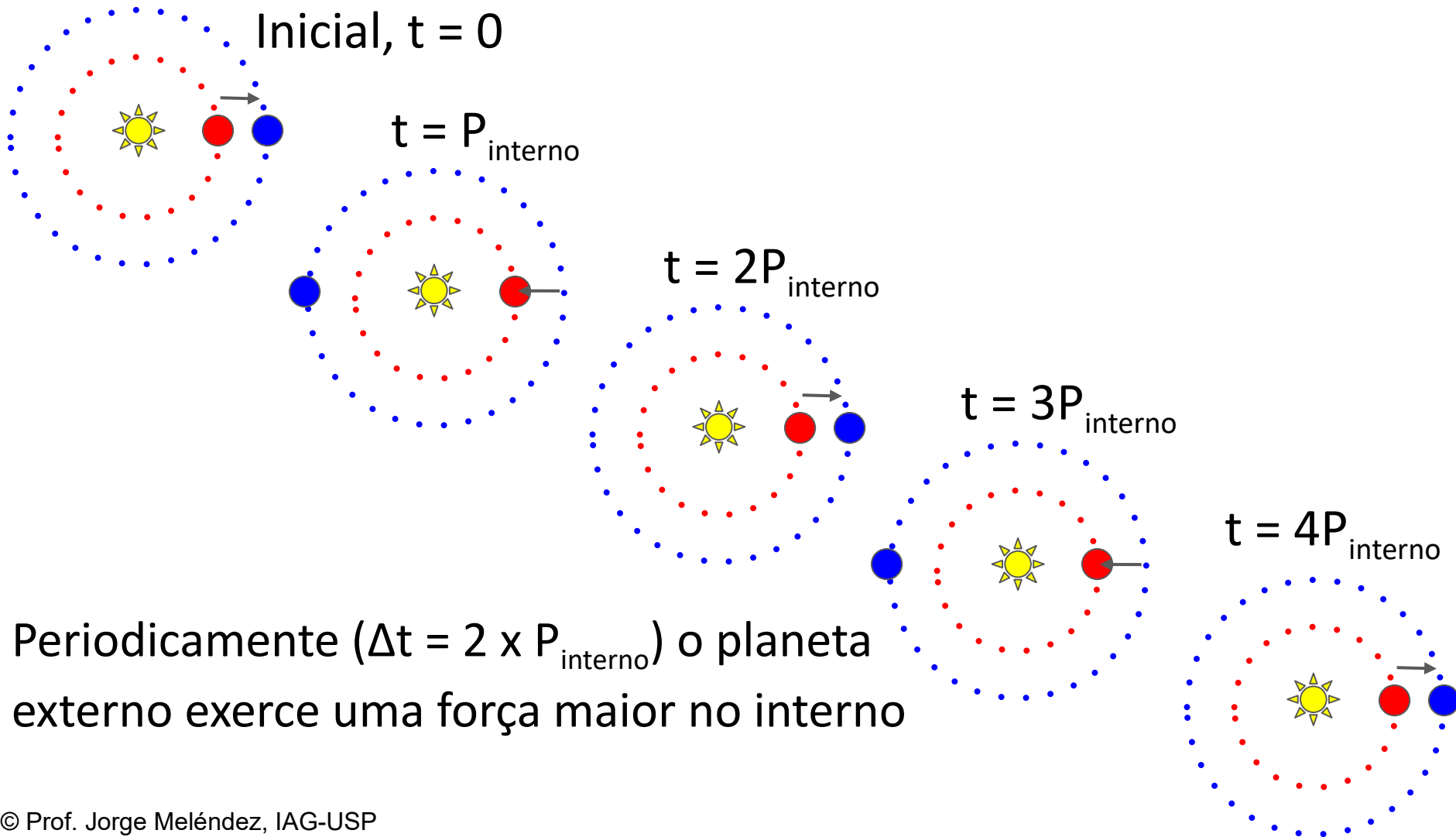
Transferência de massa via ponto L1, se a estrela se expandir durante fase de gigante e preencher o lóbulo de Roche (limite do material vinculado à estrela).



Ressonância: quando períodos têm uma razão entre inteiros

Ex.: Dois planetas com períodos orbitais em ressonância 1:2.

O planeta mais afastado tem período $P_{\text{externo}} = 2 P_{\text{interno}}$



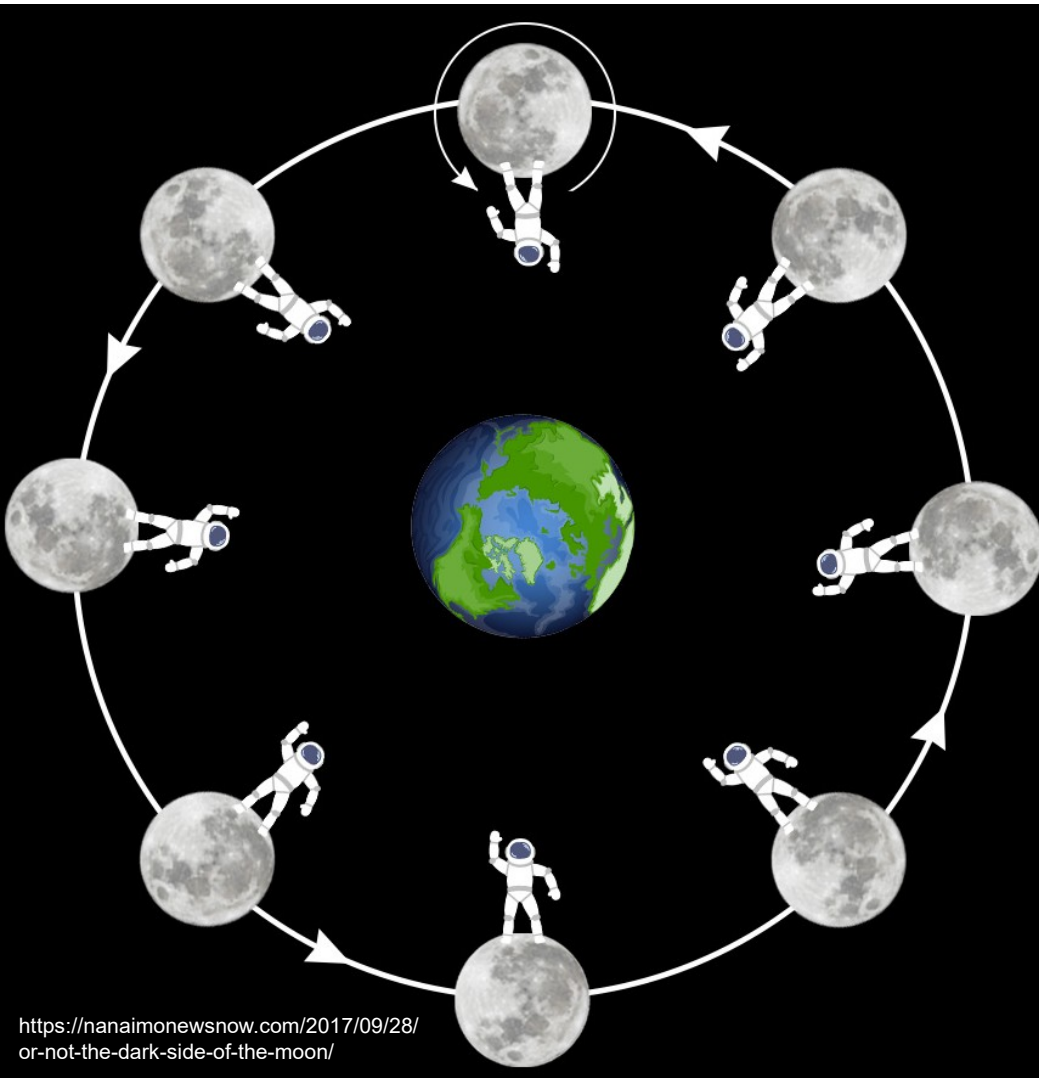
Ressonâncias no Sistema Solar: **Ressonância orbital**, quando períodos de revolução têm uma razão entre inteiros

Exemplo: as 3 (das 4) luas galileanas mais internas de Júpiter, têm ressonância 1:2:4 entre si.



Lua	diâm. km	massa kg	a km	período dias	razão lua/Io
Io	3660	$8,9 \times 10^{22}$	421800	1,769	1
Europa	3122	$4,8 \times 10^{22}$	671100	3,551	2
Ganímedes	5268	$1,5 \times 10^{23}$	1070400	7,151	4
Calisto	4821	$1,1 \times 10^{23}$	1882700	16,69	9,4

Ressonâncias no Sistema Solar: **Ressonância spin-órbita**, quando o período de rotação está relacionado com o período orbital, via uma razão entre inteiros.



Exemplo: sempre olhamos a mesma face da nossa Lua, devido a ressonância de órbita giratória 1: 1

Período orbital: 27,3 d

Período de rotação: 27,3 d

