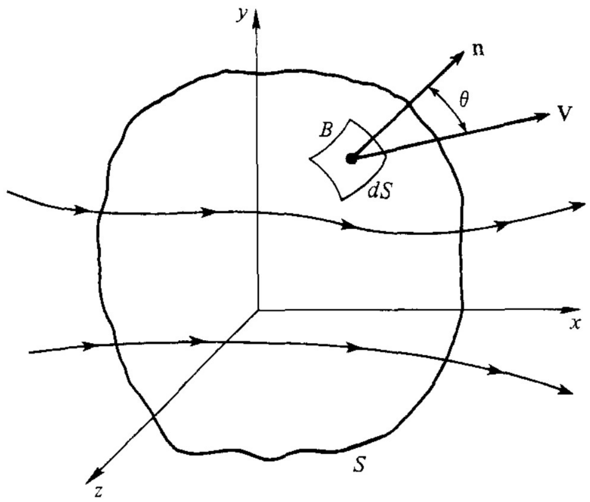
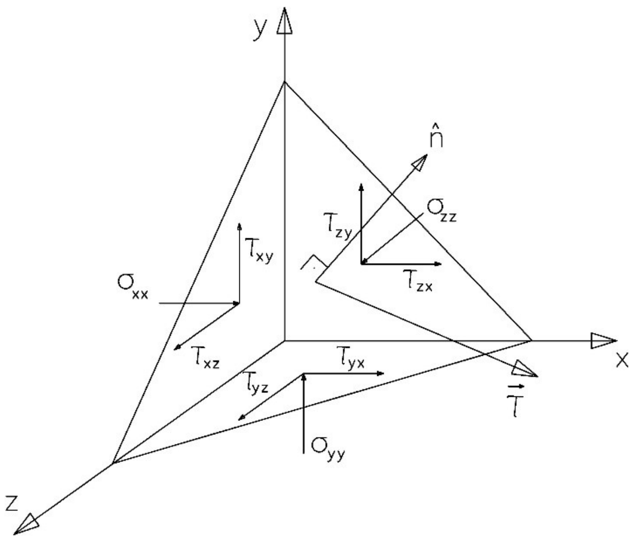
DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DOS FLUIDOS

Considere um volume de controle arbitrário mas fixo (estático), $\mathcal{V}$, delimitado por uma superfície de controle, S, em um campo tridimensional com coordenadas cartesianas. O fluido pode atravessar a superfície de controle e tem uma certa velocidade, $\vec{V}$, em cada elemento de superfície, dS, e tem componentes cartesianas u, v e w nas direções x, y e z, respectivamente. A direção normal ao elemento de superfície é dada por um versor, $\hat{n}$, que é definido como positivo no sentido de dentro para fora do volume de controle. O fluido está sujeito a um campo de tensões de cisalhamento, $\tilde{\tau}$, e a um campo de pressões, p.



$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad , \quad \hat{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad , \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

A correspondência entre o tensor de tensões de cisalhamento, $\tilde{\tau}$, e um vetor de tensões de cisalhamento, $\vec{\tau}$, é dada através do versor normal $\hat{n}$. Considerando um volume tetraédrico infinitesimal de fluido



a correspondência é dada por

$$\vec{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \tilde{\tau}\, \hat{n}$$

1) Conservação da massa (continuidade):

A variação da massa, contida no volume de controle, é igual à diferença entre a massa saindo e entrando através da superfície de controle (vazão mássica resultante).

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \, d\mathcal{V} = -\iint \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, dS$$

onde ρ é a densidade local (massa específica).

2) Equação da quantidade de movimento (momentum):

Da Segunda Lei de Newton: a variação da quantidade de movimento, contida no volume de controle, é igual à diferença entre a quantidade de movimento saindo e entrando através da superfície de controle mais o somatório das forças externas.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \vec{V} \, d\mathcal{V} = -\iint \rho \vec{V} \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) dS - \iint p \hat{n} \, dS + \iint \tilde{\tau}\, \hat{n} dS + \iiint \rho \vec{f} \, d\mathcal{V}$$

onde p é a pressão local e $\vec{f}$ é chamado de força de campo (uma aceleração, na verdade). Essa força de campo inclui a aceleração da gravidade.

3) Equação da energia (1ª Lei da Termodinâmica):

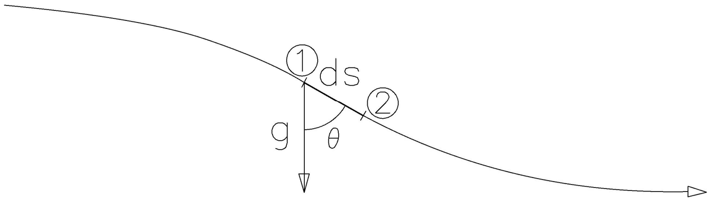
A variação da energia, contida no volume de controle, é igual à diferença entre a energia saindo e entrando através da superfície de controle (convecção), mais o somatório de potências relacionadas às forças externas, e outras formas de troca de calor (condução, radiação, reações químicas, etc.).

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho E \, d\mathcal{V} = -\iint \rho E \vec{V} \cdot \hat{n} \, dS - \iint p \hat{n} \cdot \vec{V} \, dS + \iint \tilde{\tau} \hat{n} \cdot \vec{V} \, dS + \iiint \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \, d\mathcal{V}$$
$$+ \iiint \rho \dot{q} \, d\mathcal{V} + \iint \kappa \nabla T \cdot \hat{n} \, dS$$

onde a energia total $E = e + V^2/2$, e é a energia interna, κ é um coeficiente de difusividade térmica, T é a temperatura local e $\dot{q}$ é uma taxa de calor sendo injetada ou retirada por radiação, reações químicas, etc.

A equação de Bernoulli

Considerando uma linha de corrente (paralela à velocidade local), para um escoamento incompressível (densidade uniforme e constante), invíscido (viscosidade nula) e estacionário (sem variação na distribuição de velocidade e pressão), e olhando para um elemento infinitesimal, ds, da linha de corrente, temos



Considerando a equação de momentum

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\vec{V}\,d\mathcal{V} = -\iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dS - \iint p\hat{n}\,dS + \iint \tilde{\tau}\,\hat{n}dS + \iiint \rho\vec{g}\,d\mathcal{V}$$

para esse caso estacionário, incompressível, invíscido e unidimensional na direção da linha de corrente, para um elemento ds fica

0 (estacionário) diferença entre 2 e 1 0 (invíscido) integral ao longo de ds

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\vec{V}\,d\mathcal{V} = -\iint \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dS - \iint p\hat{n}\,dS + \iint \tilde{\tau}\,\hat{n}dS + \iiint \rho\vec{g}\,d\mathcal{V}$$

$$0 = -[(\rho V)_2 V_2 - (\rho V)_1 V_1] - (p_2 - p_1) + \int_1^2 \rho g\cos\theta ds$$

Para não violar a equação da conservação de massa

$$(\rho V)_2 = (\rho V)_1 = \rho V$$

e considerando uma variação infinitesimal na velocidade e na pressão ao longo de ds

$$p_1 = p \quad , \quad p_2 = p + dp \quad , \quad V_1 = V \quad , \quad V_2 = V + dV$$

Então, como no elemento ds temos θ constante,

$$\rho V^2 - \rho V(V + dV) + p - (p + dp) + \rho g\cos\theta ds = 0$$

Simplificando

$$-\rho V dV - dp + \rho g\cos\theta ds = 0$$

e integrando

$$-\int \rho V dV - \int dp + \int \rho g\cos\theta ds = cte$$

temos

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z = cte$$

onde $z = -\int \cos\theta ds$ é a variação de altura da linha de corrente (positivo para cima).