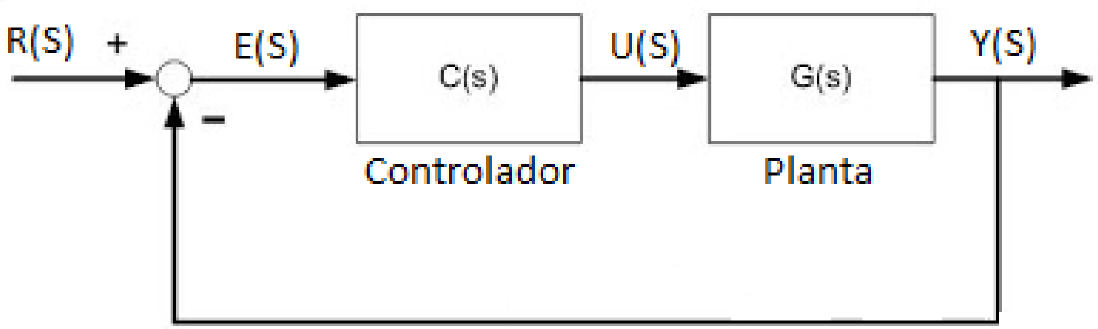
Sintonia PID

Método de Ziegler-Nichols
Ajuste Manual
Equação recursiva

Controle por Realimentação

Objetivo: Levar a saída y(t) a ser igual ao sinal de referência r(t)



$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{C(S)G(S)}{1+C(S)G(S)}$$

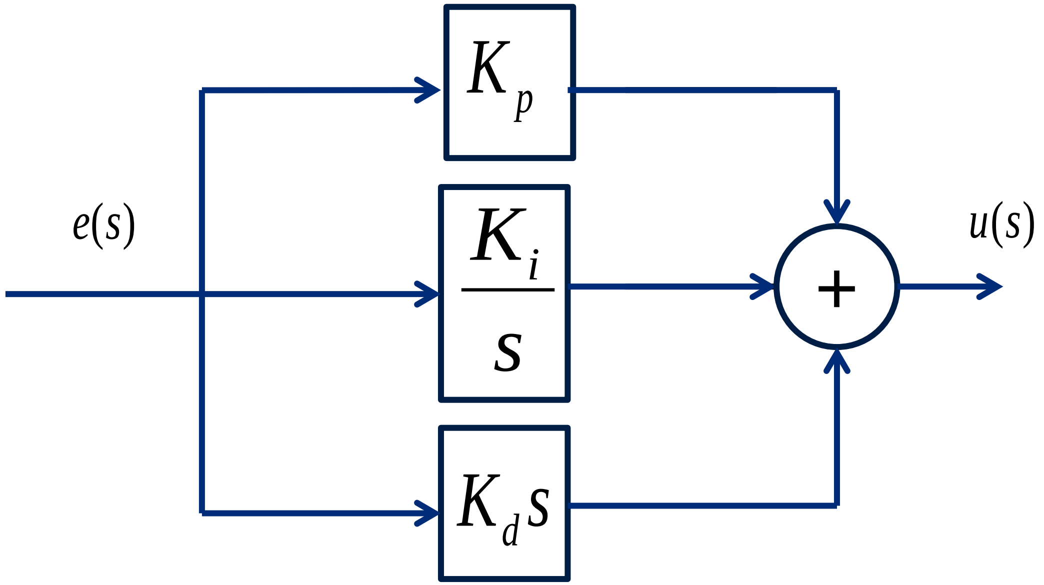
Controlador PID ideal

$$u(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

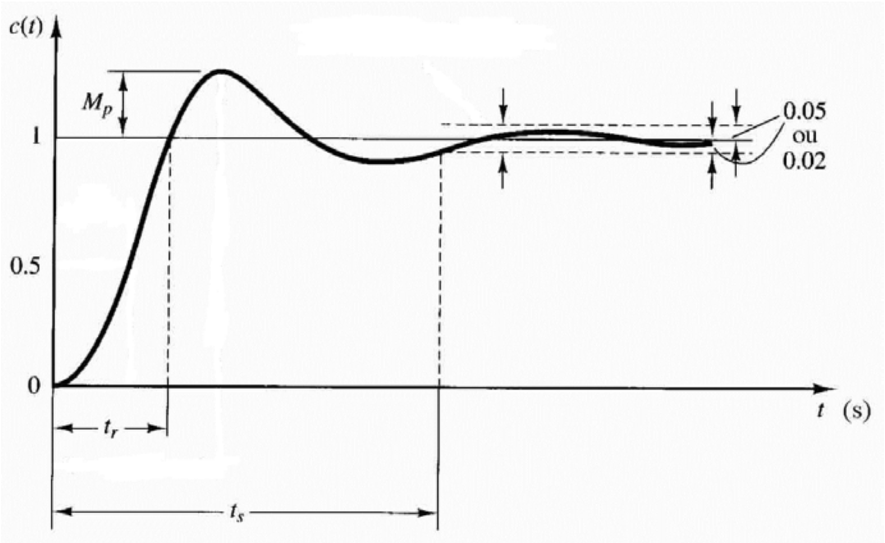
$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

$$K_d = K_p T_d$$



Controlador PID -Influência dos parâmetros sobre a resposta ao degrau



	Aumenta K_p	Aumenta K_i	Aumenta K_d
Erro de regime	Diminui	Diminui	Muda pouco
Tempo de subida	Diminui	Diminui	Diminui pouco
Sobressinal	Aumenta	Aumenta pouco	Diminui
Tempo de acomodação	Aumenta	Aumenta	Diminui
Estabilidade	Diminui	Diminui	Aumenta

Método de Ziegler-Nichols para sintonia de PID

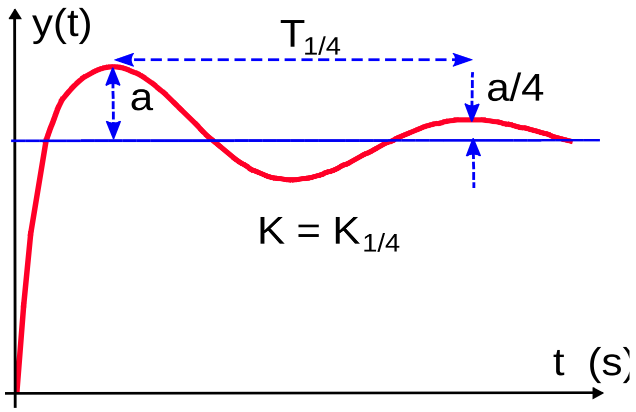
Ziegler Nichols propuseram este método pioneiro, também conhecido como o método de malha fechada ou de sintonização on-line, em 1942. O método consiste em dois passos:

1. Determinação experimental das características dinâmicas da malha de controle.
2. Fazer uma estimativa dos parâmetros de sintonização do controlador que produzem uma resposta desejada para as características dinâmicas determinadas.

Dois métodos:

1. Método da resposta ao degrau.
2. Método da resposta em frequência.

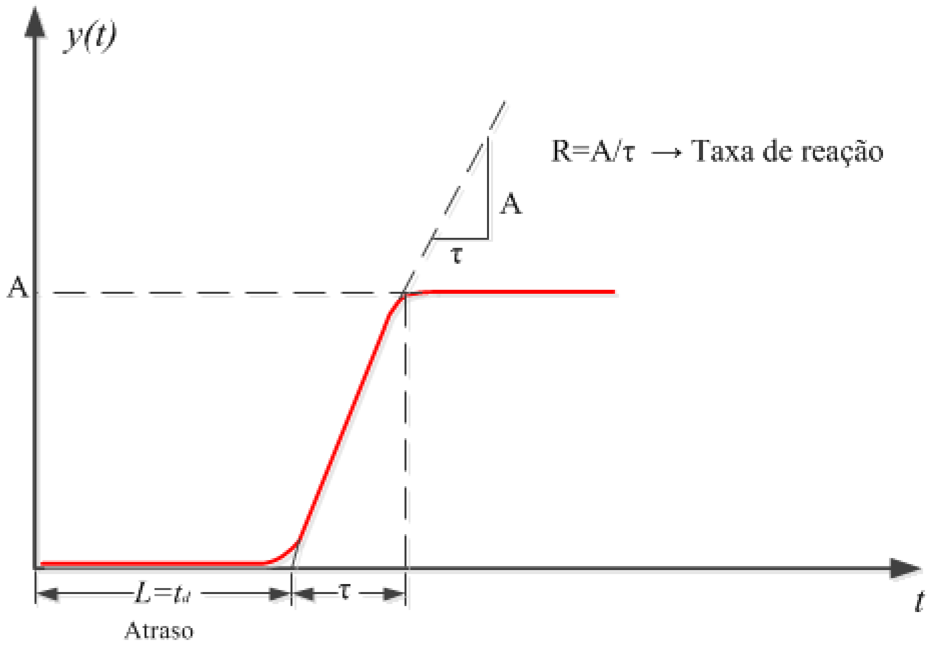
A escolha dos parâmetros é feita de tal forma que a taxa de decaimento de amplitude é de 0,25. Ou seja, o sobresinal cai para 1/4 do seu valor original após uma oscilação.



Método de Ziegler-Nichols para sintonia de PID

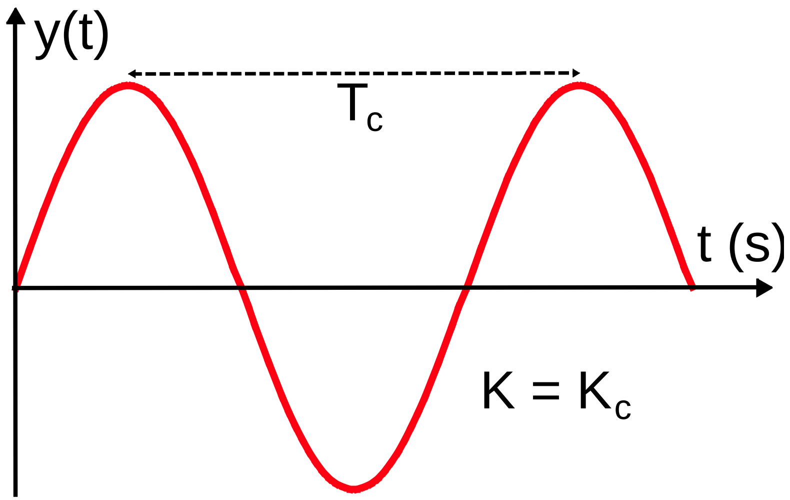
Método de Ziegler–Nichols via resposta ao degrau

$$G(s) = \frac{Ae^{-sL}}{\tau s + 1}$$



	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{RL}$		
PI	$\frac{0{,}9}{RL}$	$\frac{L}{0{,}3}$	
PID	$\frac{1{,}2}{RL}$	$2L$	$0{,}5L$

Método de Ziegler-Nichols para sintonia de PID



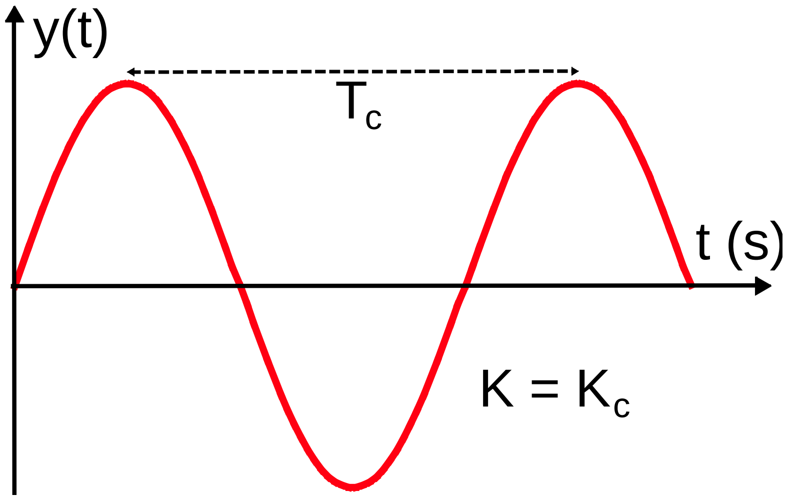
Neste método, as características dinâmicas do processo são representadas pelo ganho final de um controlador proporcional $K_{critico}$ e o periodo final de oscilação da malha $T_{critico}$.

Procedimento Ziegler-Nichols para sintonia de PID

1. Desligue as ações integral *Ki=0* e derivativa *Kd=0*, para que se tenha um controlador proporcional.
2. Aumente o ganho proporcional (ou reduza a banda proporcional) até que a malha oscile com amplitude constante. Registre o valor do ganho que produz oscilações sustentadas como K_c, o ganho final.
3. A partir de um registro de tempo da variável controlada, o período de oscilação é medido e registrado como T_c, o período final.

Método de Ziegler-Nichols para sintonia de PID

Método de Ziegler–Nichols via oscilação limite

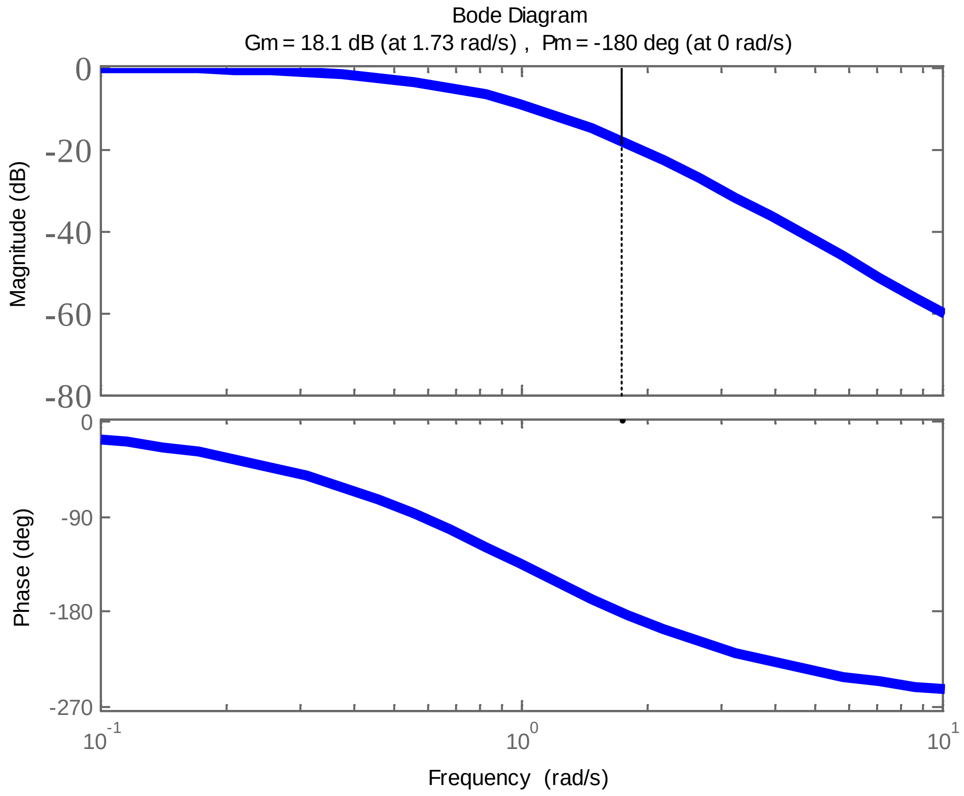


	K_p	T_i	T_d
P	$0{,}5K_c$		
PI	$0{,}45K_c$	$\frac{T_c}{1{,}2}$	
PID	$0{,}6K_c$	$0{,}5T_c$	$0{,}125T_c$

Procedimento Ziegler-Nichols para sintonia de PID

Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$



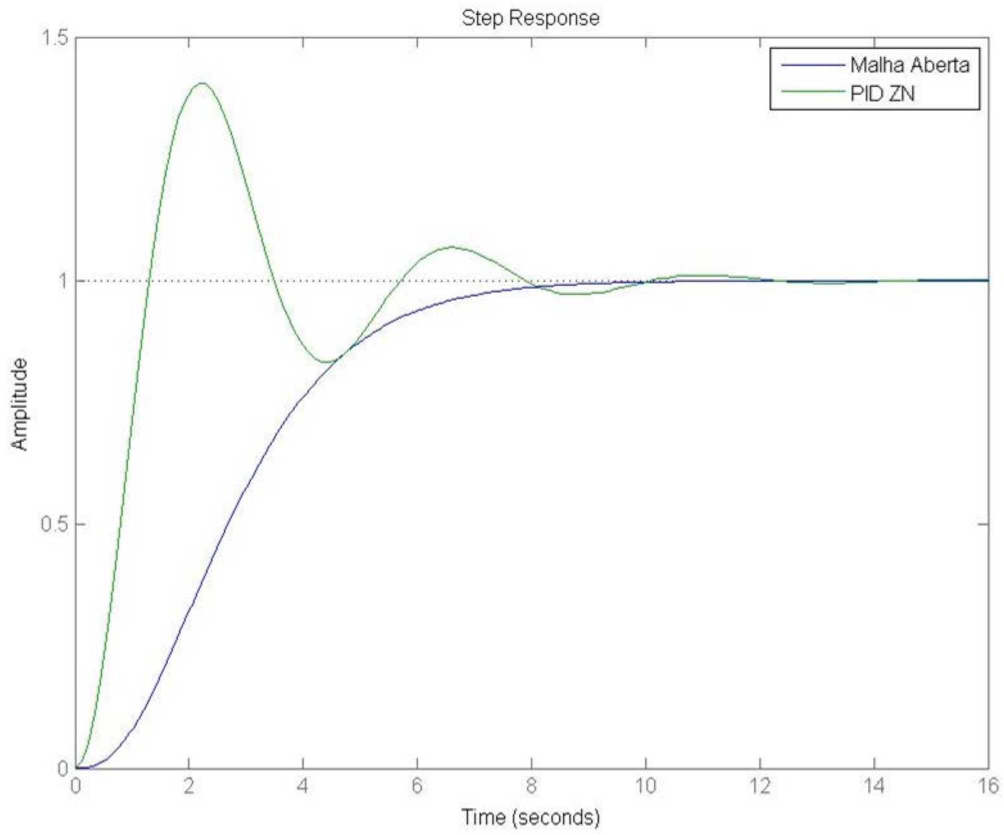
$K_{crit} = 8$
$f_{crit} = 0{,}276$ Hz
$T_{crit} = 1/f_{crit} = 3{,}623$ s

Procedimento Ziegler-Nichols para sintonia de PID

Exemplo:

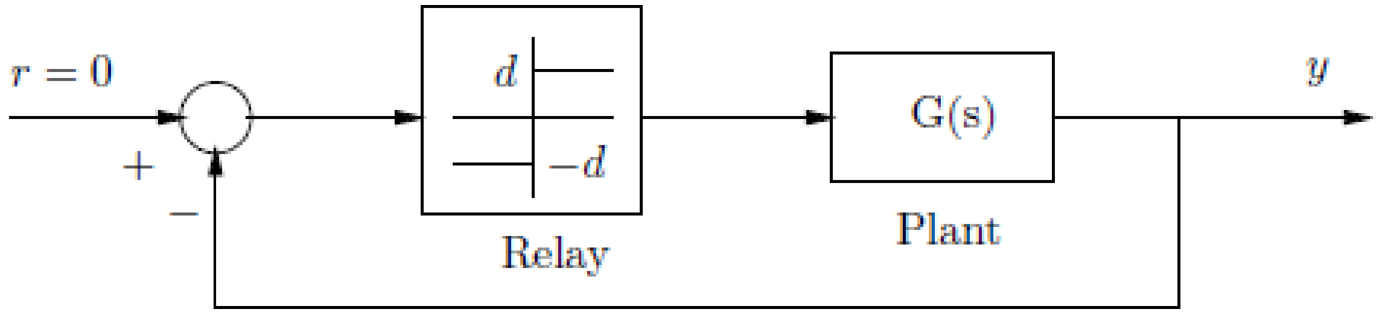
K_p=4,8
K_d=2,18
K_i=2,65

T_s = 9,37 s
T_r = 0,876 s
Sobressinal = 41%



Método alternativo (Åström e Hägglund)

O método de resposta em frequência de Ziegler–Nichols exige que o sistema seja levado à margem da instabilidade o que pode causar danos ao sistema físico. Portanto, Åström e Hägglund propuseram um método alternativo para a determinação de Kc e Tc usando uma não linearidade tipo relê.

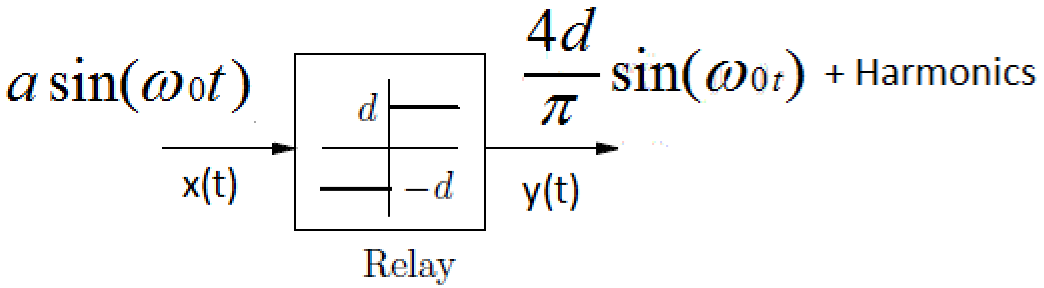


Método baseado na oscilação auto-induzida causada pelo relé.

Método alternativo (Åström e Hägglund)

O relé é um elemento não linear (não possui função de transferência racional).

No entanto podemos achar uma função de transferência aproximada.



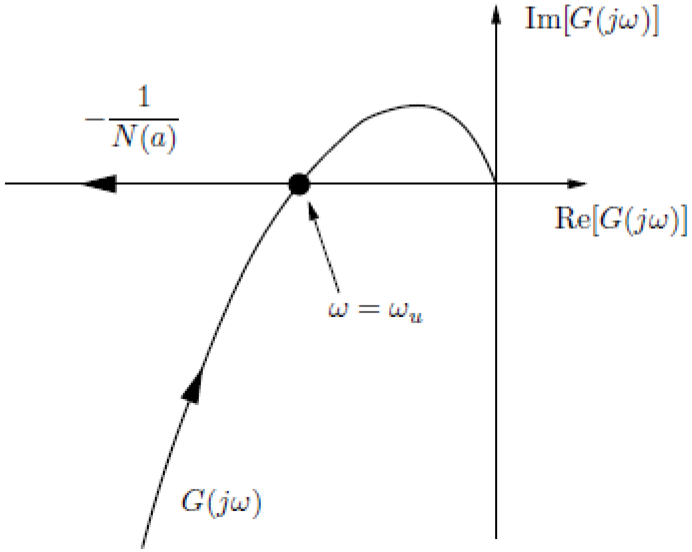
$$\frac{Y(S)}{X(S)} \cong \frac{4d}{a\pi} = N(a)$$

Método alternativo (Åström e Hägglund)

- A planta G(s) funciona como um filtro passa baixa atenuando as harmônicas de mais alta frequência.

- A condição de oscilação é dada por: $G(j\omega)N(a) = -1$
- A equação acima pode ser resolvida através da intersecção

do diagrama de Nyquist de G(s) e a reta -1/N(a):



Método alternativo (Åström e Hägglund)

Como $G(jw_c)$= (-1/Kc , 0):

$$|G(jw_c)| = \frac{a\pi}{4d} = \frac{1}{K_c}$$

$$\arg[G(jw_c)] = -\pi$$

$$w_c = 2\pi/T_c$$

portanto podemos determinar Kc e Tc através da medição das características da oscilação sem correr o risco de colocar o sistema em um regime instável!

Método de Ajuste Manual

- Ajuste iterativo de K_p,K_i, e K_d para eliminar o erro e atingir a saída transitória e o sobressinal desejado
- Ajustado com a sensibilidade do projetista
- Método de tentativa e erro

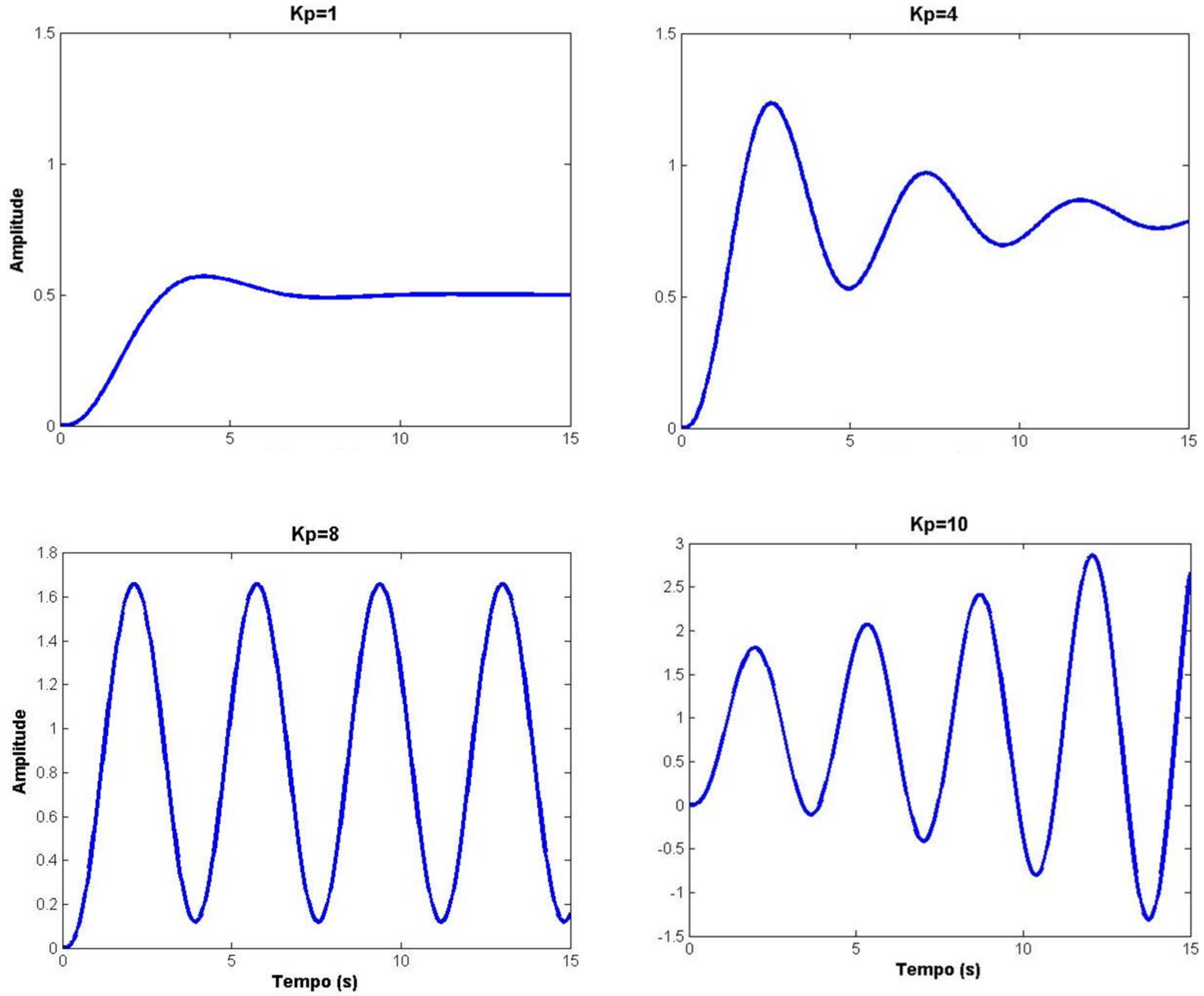
Procedimento:

1. K_d=0 e K_i=0
2. Selecionar K_p para fornecer a resposta transitória desejada;
3. Aumentar K_p e ajustar K_d para reduzir sobressinal;
4. Ajustar K_i para eliminar erro de regime;
5. Repetir passo 3 até K_p atingir o máximo valor possível

Método de Ajuste Manual

Ilustração da variação de Kp

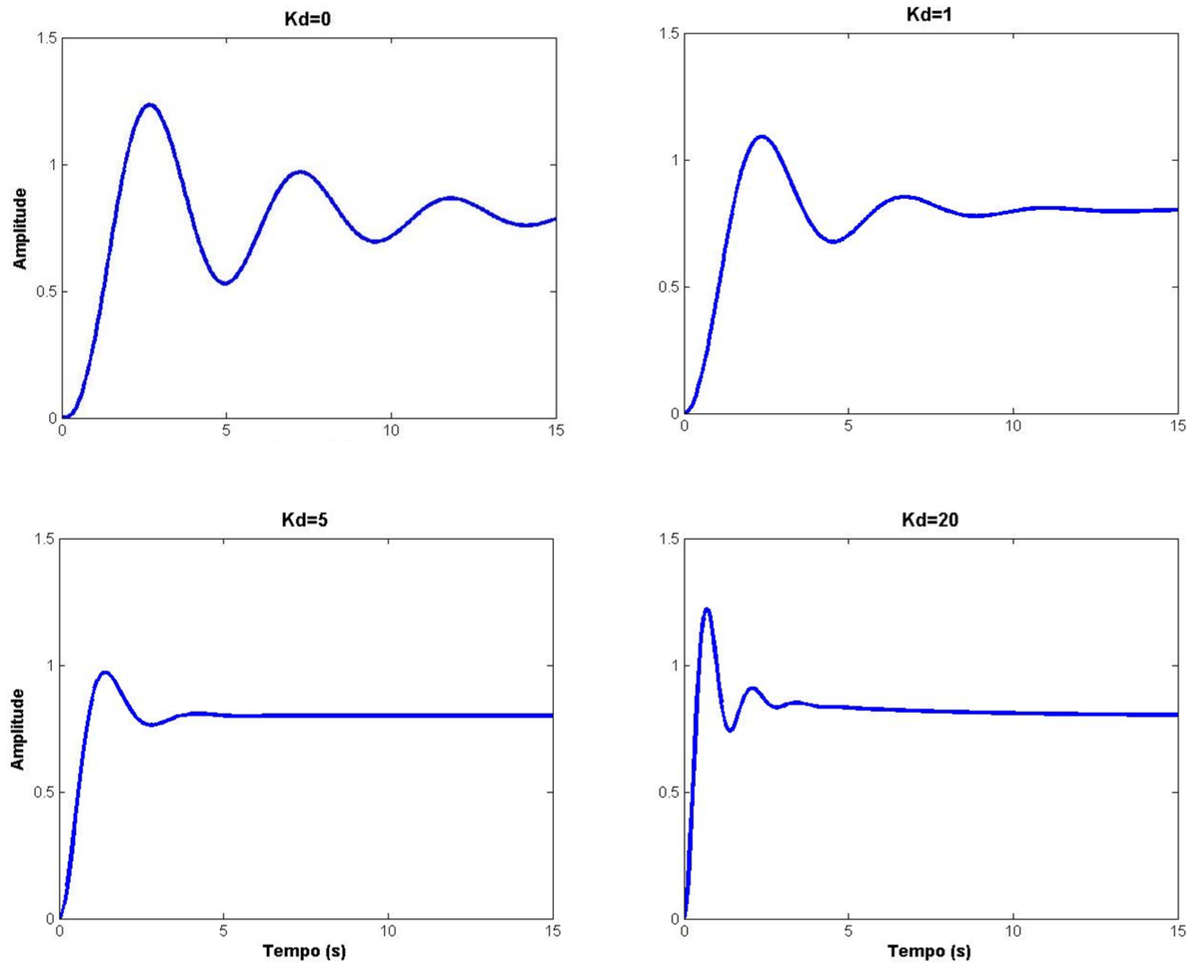
$$K_d = 0$$
$$K_i = 0$$



Método de Ajuste Manual

Ilustração da variação de Kd

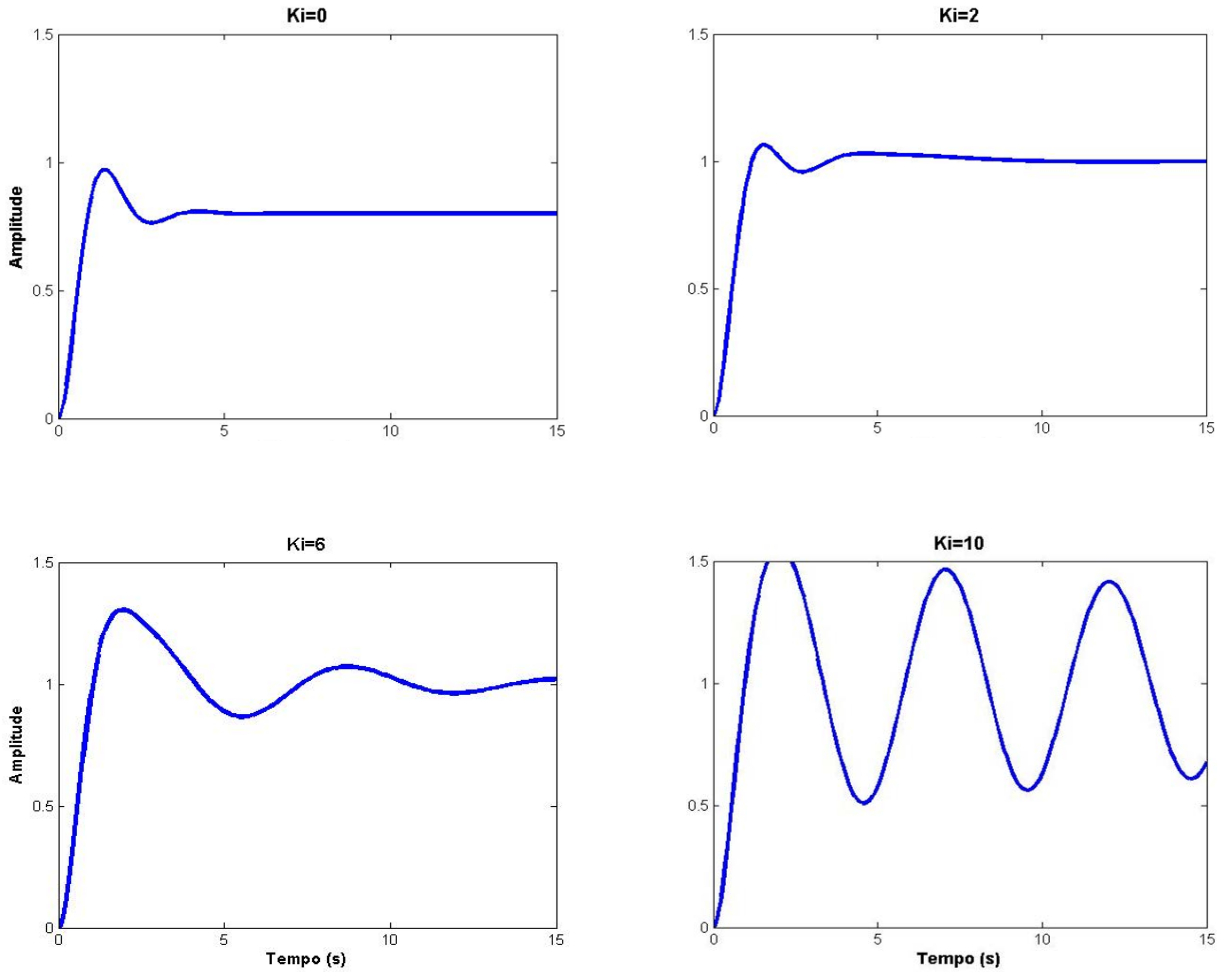
$$K_p = 4$$
$$K_i = 0$$



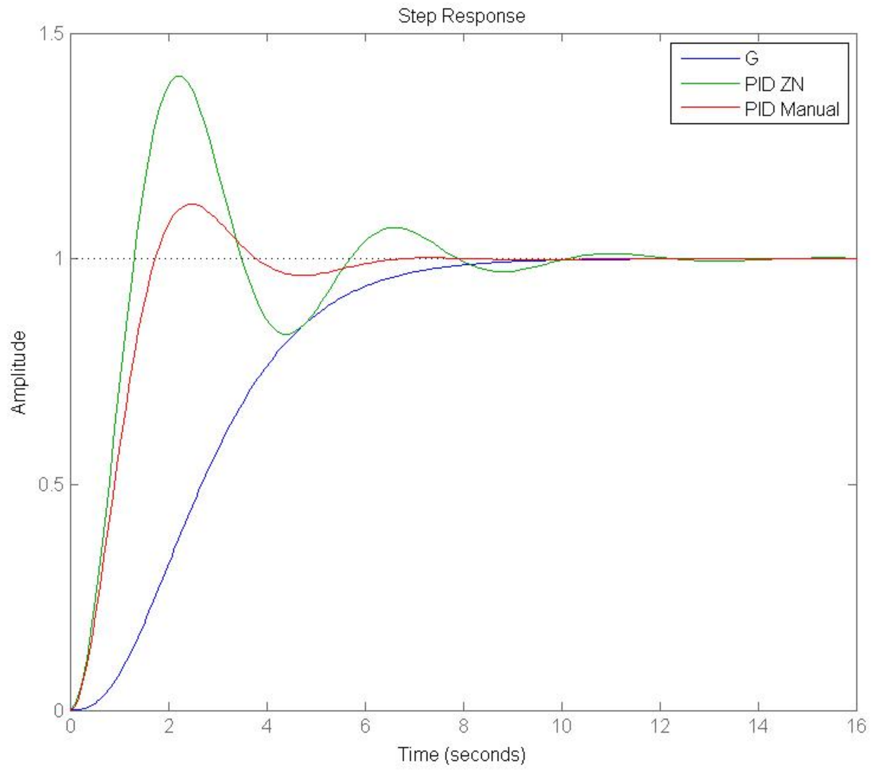
Método de Ajuste Manual

Ilustração da variação de Ki

$$K_p = 4$$
$$K_d = 5$$



Método de Ajuste Manual



K_p=3,284
K_d=2,056
K_i=1,216

T_s=5,64 s
T_r=1,17 s
Sobressinal=12,1%

Controlador PID discreto

Discretização termo integral do erro

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t)dt + T_d \frac{de_f(t)}{dt} \right)$$

$$e_f = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e(s)}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right]$$

fórmula forward Euler ou diferença anterior

Termo integral
$\frac{1}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} T_s \, e(i)$

fórmula backward Euler ou diferença posterior

Termo integral
$\frac{1}{T_i} \sum_{i=0}^{k} T_s \, e(i)$

Equação recursiva sem filtro

Controlador PID discreto com discretização termo integral via fórmula diferença anterior

Definição transformada $\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathcal{Z}[u(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} \end{aligned}$$

$$u(k) = K_p \left(e(k) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} T_s\, e(i) + \frac{T_d}{T_s} (e(k) - e(k-1)) \right)$$

Diferença anterior

T_s tempo de amostragem

Operador deslocamento

$$\mathcal{Z}\{y(k-1)\} = z^{-1} y(k).$$

Obtendo a equação recursiva

$$u(k) = K_p \left(e(k) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} T_s\, e(i) + \frac{T_d}{T_s} (e(k) - e(k-1)) \right)$$

$$u(k-1) = K_p \left(e(k-1) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=0}^{k-2} T_s\, e(i) + \frac{T_d}{T_s} (e(k-1) - e(k-2)) \right)$$

$$u(k) - u(k-1) = K_p \left(e(k) - e(k-1) + \frac{T_s}{T_i} e(k-1) + \frac{T_d}{T_s} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \right)$$

$$u(z) - z^{-1} u(z) = K_p \left(e(z) - z^{-1} e(z) + \frac{T_s}{T_i} z^{-1} e(z) + \frac{T_d}{T_s} (e(z) - 2z^{-1} e(z) + z^{-2} e(z)) \right)$$

Equação recursiva sem filtro

$$C(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = K_p\left(1 + \frac{T_s}{T_i}\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T_s}(1 - z^{-1})\right)$$

$$(1 - z^{-1})u(z) = K_p\left((1 - z^{-1})e(z) + \frac{T_s}{T_i}z^{-1}e(z) + \frac{T_d}{T_s}\left(e(z) - 2z^{-1}e(z) + z^{-2}e(z)\right)\right)$$
$$= K_p\left((1 - z^{-1})e(z) + \frac{T_s}{T_i}z^{-1}e(z) + \frac{T_d}{T_s}(1 - z^{-1})^2\right)$$

Equação recursiva

$$u(k) - u(k-1) = K_p e(k) - K_p e(k-1) + \frac{K_p T_s}{T_i}e(k-1) + K_p\frac{T_d}{T_s}\left(e(k) - \left(e(k-1)\right)\right) - K_p\frac{T_d}{T_s}\left(e(k-1) + \left(e(k-2)\right)\right)$$

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

$$q_0 = K_p\left(1 + \frac{T_d}{T_s}\right), q_1 = -K_p\left(1 - 2\frac{T_d}{T_s} + \frac{T_s}{T_i}\right), q_2 = K_p\frac{T_d}{T_s}$$

Equação recursiva sem filtro

$$u(k) - u(k-1) \ =$$

$$K_p\left(e(k) - e(k-1) + \frac{T_s}{T_i}e(k) + \frac{T_d}{T_s}\,(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2))\right)$$

Termo integral: Diferença posterior

T_s tempo de amostragem

$$\mathrm{C(z)} = K_p\left(1 + \frac{T_s}{T_i}\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T_s}(1 - z^{-1})\right)$$

$$\mathrm{u(k)} = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

$$q_0 = K_p\left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s}\right), q_1 = -K_p\left(1 + 2\frac{T_d}{T_s}\right),\ q_2 = K_p\frac{T_d}{T_s}$$

Equação recursiva com filtro

Utilizando filtro para implementação do termo derivativo

$$u(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de_f}{dt}\right)$$

$$C(z) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i}\frac{T_s}{1 - z^{-1}} + T_d\frac{1}{\frac{T_d}{N} + \frac{T_s}{1 - z^{-1}}}\right)$$

Diferença posterior
T_s tempo de amostragem

$$e_f = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e(s)}{1 + \frac{T_d}{N}s}\right]$$

Termo proporcional

$$P(k) = K_p e(k)$$

Termo integral

$$I(k + 1) = I(k) + \frac{K_p T_s}{T_i}e(k)$$

Termo derivativo

$$D(k) = \frac{T_d}{T_d + NT_s}D(k - 1) - \frac{K_p T_d N}{T_d + NT_s}(e(k) - e(k - 1))$$

$$u(k) = P(k) + I(k) + D(k)$$

Incremental algoritmo

$$u(k) = u(k - 1) + \Delta P(k) + \Delta I(k) + \Delta D(k)$$

$$\Delta P(k) = P(k) - P(k - 1)$$

$$\Delta D(k) = D(k) - D(k - 1)$$

$$\Delta I(k) = I(k) - I(k - 1)$$

Controlador PID filtrado modificado

Utilizando filtro para implementação do termo derivativo com filtro

$$u(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{dy_f}{dt}\right)$$

$$y_f = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{y(s)}{1+\frac{T_d}{N}s}\right]$$

Controlador PID discreto com discretização termo integral via fórmula diferença anterior

$$u(k) = K_p\left(e(k) + \frac{1}{T_i}\sum_{i=0}^{k-1} T_s\, e(i) + \frac{T_d}{T_s}(y_f(k) - y_f(k-1))\right)$$

Termo derivativo alterado para

$$D(k) = \frac{T_d}{T_d + NT_s}D(k-1) - \frac{K_pT_dN}{T_d + NT_s}((y_f(k) - y_f(k-1))$$

Referências

[1] Matlab Product Help.

[2]Matlab Demystified. A Self-Teaching Guide, David McMahon, McGraw Hill.

[3] Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall.

[4] Hang, C., Astrom, K. J. e Ho, W. K. (1991). Refinements of the Ziegler-Nichols formula, IEE Proceedings-D 2: 111–117.

[5] Oliveira et al. 2016, Engenharia de Controle: Fundamenttos e Aulas de Laboratório, Elsevier Ltda.