Disciplina: 0313320 - Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Civil
Curso: Engenharia Civil
Horário: Terças-feiras das 15h00 às 16h40 e sextas-feiras das 13h10 às 14h50
Data: 24/11/2023
Assunto: Notas de Aula – Equações Diferenciais Ordinárias

Problemas de Valor Inicial (PVI)

O objetivo é resolver numericamente o Problema de Valor Inicial (PVI) para equações diferenciais de 1ª ordem:

$$PVI \begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = \eta \end{cases} \qquad (1)$$

em que $a \leq x \leq b$, $-\infty \leq y \leq \infty$ com a e b finitos e $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

A solução desse problema é uma função contínua e derivável.

Note que, f em (1) pode ser uma função qualquer (linear e não-linear).

Teorema (Existência e Unicidade): Assumindo que:
a) $f(x, y)$ seja definida e contínua em D definida por

$$x_0 = a \leq x \leq b, -\infty \leq y \leq \infty$$

com a e b finitos.
b) Existe uma constante L (constante de Lipschitz) tal que, dados (x, y) e (x, y^*) em 0, vale:

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L\,|y - y^*|.$$

<u>**Observação**</u>**:** A condição inicial $y(xo) = \eta$ é arbitrária.

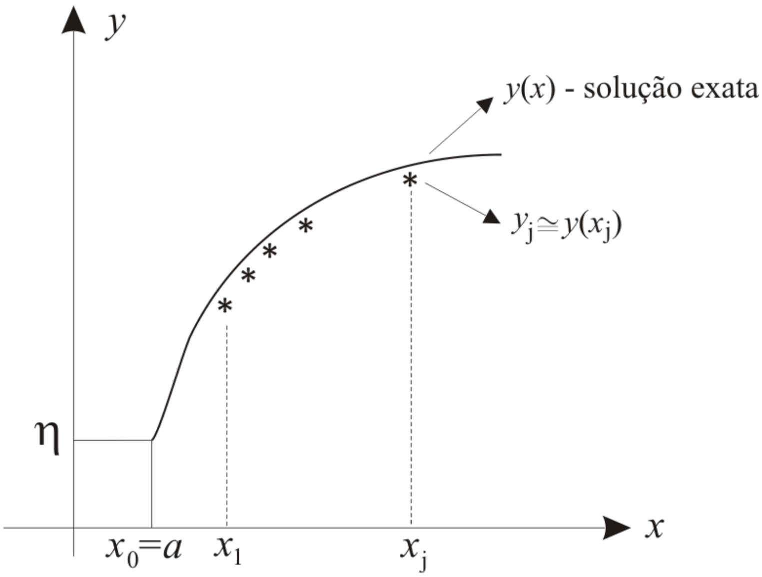
A demonstração do teorema de Existência e Unicidade pode ser encontrada em "*Henrici, P. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equation, John Wiley S. Sons. 1962".*

O objetivo em resolver PVI (1) é encontrar y numa sequência $\{x_n\}$ definida como:

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, \quad N = \frac{(b-a)}{h}$$

na qual h é o tamanho do passo $\left(h = x_{j+1} - x_j\right)$.

Interpretação Geométrica:



$$y_n \cong y(x_n)$$
$$f_n \cong f(x_n, y_n)$$

A sequência de valores $\{y_n\}$, a qual aproxima o PVI (1) nos pontos de discretização $\{x_n\}$, constitui uma solução numérica do PVI (1). Geralmente, pode-se considerar o PVI (1) como um sistema de m equações de 1ª ordem, em que y, f e η representam vetores com m componentes. Assim,

$$\begin{cases} Y(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = \eta \ , \end{cases}$$

em que

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ \vdots \\ f_m(x,y) \end{pmatrix} \qquad e \qquad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

Redução de uma equação de ordem elevada a um sistema de equações de 1ª ordem

Seja equação

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y", \dots , y^{(m-1)})$$

com as condições iniciais:

$$y^{(a)} = y^{(0)}(a) = \eta_0$$
$$y^{(1)}(a) = \eta_1$$
$$y^{(2)}(a) = \eta_2$$
$$\vdots$$
$$y^{(m-1)}(a) = \eta_{m-1}$$

Definindo-se a mudança de variável:

$$\begin{gathered} y_1 = y = y^{(0)} \\ y_2 = y_1' = y^{(1)} \\ y_3 = y_2' = y^{(2)} \\ \vdots \\ y_{m-1} = y_{m-2}' = y^{(m-2)} \\ y_m = y_{m-1}' = y^{(m-1)} \\ y_{m+1} = y_m' = y^{(m)} \end{gathered} \qquad (2)$$

De (2), têm-se:

$$\begin{gathered} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \vdots \\ y_{m-2}' = y_{m-1} \\ y_{m-1}' = y_m \\ y_m' = y_{m+1} = y^{(m)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{gathered}$$

Isto constitui um sistema de m equações de 1ª ordem com condições iniciais dadas por

$$\begin{gathered} y_1(a) = \eta_0 \\ y_2(a) = \eta_1 \\ \vdots \end{gathered}$$

Exemplo 1: $y''' = -y'' + y$

$$\begin{array}{c|c} \begin{gathered} y_1 = y \\ y_2 = y_1' = y' \\ y_3 = y_2' = y'' \\ y_4 = y_3' = y''' \end{gathered} & \begin{gathered} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_3 + y_1 \end{gathered} \end{array}$$

Métodos Lineares de Passos Múltiplos
(Métodos de k - passos)

Definição: Um método linear de Passo Múltiplo é definido por

$$\alpha_k\, y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y_n = h\{\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n\} \qquad (3)$$

onde α_j e β_j , $j = 0, 1, \dots, k$ são constantes reais e h é o tamanho do passo.

Tem-se ainda que (3) pode ser dado por

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

ou

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} = 0.$$

<u>Observação</u>: Seja $\alpha_k = 1$. Como $f_j = f(x_j, y_j)$ então

a) Se $\beta_k \neq 0$, o método é implícito;

b) Se $\beta_k = 0$, o método é explícito.

<u>**Exemplo 2**</u>: Considere a equação

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}[f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 3f(x_n, y_n)].$$

Tem-se que

$k = 2$

$\alpha_2 = 1$ $\quad\quad$ $\beta_2 = {}^{1}/_{4}$ → Implícito

$\alpha_1 = 1$ $\quad\quad$ $\beta_1 = 2$

$\alpha_0 = -2$ $\quad\quad$ $\beta_0 = {}^{3}/_{4}$

<u>**Exemplo 3**</u>**:** Considere a equação

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3}[3f_{n+1} - 2f_n]$$

Tem-se que $k = 2$ e

$\alpha_2 = 1$ $\quad\quad$ $\beta_2 = 0$ → Explícito

$\alpha_1 = -1$ $\quad\quad$ $\beta_1 = 1$

$\alpha_0 = 0$ $\quad\quad$ $\beta_0 = -{}^{2}/_{3}$

<u>**Exercício 1**</u>**:** Considere agora, a seguinte equação:

$$y_{n+4} + \frac{1}{4}y_{n+3} - \frac{1}{2}y_{n+2} - \frac{3}{4}y_{n+1} = \frac{h}{8}[19f_{n+3} + 5f_{n+1}].$$

Analise o método se é explícito ou implícito. Justifique!

Derivação de M.L.P.M por Série Taylor

Desenvolvendo em série Taylor a função $y(x+h)$ tem-se

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + 0(h^3) \qquad (4)$$

Truncando a série no termo de h^2:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) \qquad ou \quad y(x_n+h) = y(x_n) + hy'(x_n)$$

em que, o erro de truncamento local é $O(h^2)$.

A partir dessa aproximação, define-se:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

que é chamada de Método de Euler.

Neste caso $k = 1$ (método de 1 passo), onde

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & \beta_1 = 0 \rightarrow Explícito \\ \alpha_o = 0 & \beta_0 = 1 \end{array}$$

Desenvolvimento agora,

$$y(x_n - h) = y_n - \tfrac{h}{1!}y'(x_n) + \tfrac{h^2}{2!}y''(x_n) - \tfrac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots \qquad (5)$$

e, fazendo (4) - (5), obtem-se

$$y(x_n+h) - y(x_n-h) = 2\,hy'(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots$$

Truncando esta série no termo h^3, tem-se:

$$y(x_n+h) - y(x_n-h) \cong 2\,hy'(x_n)$$

Assim,

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf_n = f(x_n, y_n)$$

Considerando $n = n+1$, chega-se na seguinte expressão:

$$y_{n+2} - y_n = 2hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Neste caso, tem-se que $k = 2$ e

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 = 1 & \beta_2 = 0 \rightarrow Explícito \\ \alpha_1 = 0 & \beta_1 = 2 \\ \alpha_o = -1 & \beta_o = 0 \end{array}.$$

Essa derivação é chamada de Regra do ponto médio cujo erro é $O(h^3)$.

Exemplo 4: Seja o PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = xy^{1/3} \\ y(1) = 1 \end{cases}, \qquad x \in [1,2]$$

Resolver numericamente usando o método de Euler e comparar com a solução analítica: $y(x) = \left(\frac{x^2+2}{3}\right)^{3/2}$.

Solução: Sabe-se que $f(x,y) = xy^{1/3}$. Tomando-se $N = 10$, tem-se que $h = \frac{b-a}{N} = 0{,}1$.

Logo,

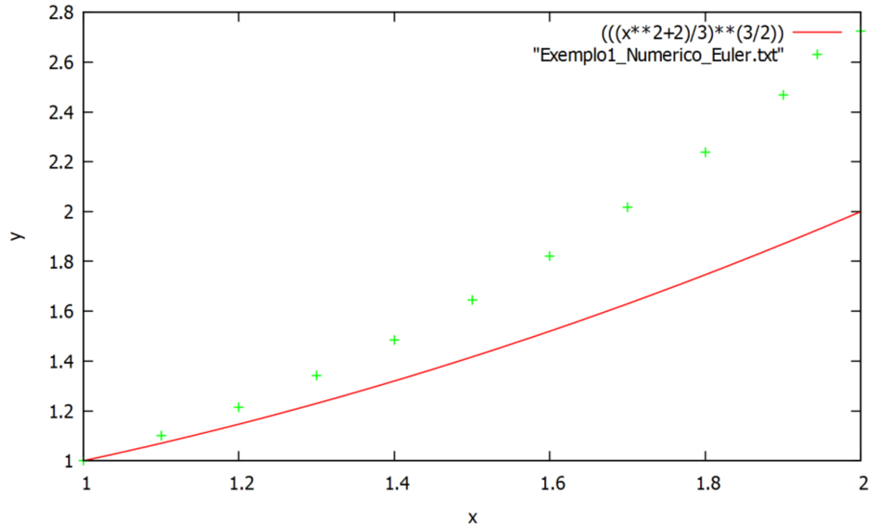
$n = 0, \quad y_1 = y_o + hf(x_o, y_o) = 1 + 0{,}1\left(1 \cdot 1^{1/3}\right) = 1.1$

$n = 1, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0{,}1\left(1.1 \cdot 1.1^{1/3}\right) = 1.214$

$n = 2, \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.214 + 0.1\left(1.214 \cdot (1.214)^{1/3}\right) = 1.342$

$\vdots$

x_n	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
y_n	1.0	1.1	1.214	1.342	1.485	1.645	1.822	2.017	2.238	2.467	2.724
$y_E(x_n)$	1.0	1.187	1.228	1.364	1.517	1.686	1.874	2.081	2.308	2.557	2.828



Exercício 2: Repetir o exemplo numérico usando a regra do ponto médio. (Pegar um ponto do P.V.I. e o segundo de Euler).

Exercício 3: Considere o PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = 1/(1 + \tan^2(y)) \\ y(0) = 0 \end{cases}, \qquad x \in [0,1]$$

cuja solução exata é dada por $y(x) = tan^{-1}(y)$.

a) Resolva o PVI pelo método de Euler. Tome $N = 5$ e $N = 10$ e compare.

b) Resolva o PVI pelo método do Ponto Médio, e, compare com os resultados do item a).

Ordem de precisão de um M.L.P.M.

<u>Motivação:</u> Dentre os M.L.P.M. de 1º passo, qual é o mais preciso, isto é, qual possui o menor erro de truncamento local?

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\beta_1 f_{n+1} + h\beta_0 f_n.$$

Sabe-se que $f_{n+1} = f(x_n + h, y_n + h)$ e $f_n = f(x_n, y_n)$. Logo,

$$y(x_n + h) + \alpha_0 y(x_n) \cong h\beta_1 f(x_n + h, y_n + h) + h\beta_0 f(x_n, y_n)$$
$$\Rightarrow y(x_n + h) + \alpha_0 y(x_n) - h\beta_1 \underbrace{f(x_n + h, y(x_n + h))}_{y'(x_n+h)} - h\beta_0 \underbrace{f\big(x_n, y(x_n)\big)}_{y'(x_n)} \cong 0. \quad (6)$$

Desenvolvendo (6) em série de Taylor em torno do ponto x_n obtêm-se:
$$\left[y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots\right] + \alpha_0 y(x_n) - h\beta_1\left[y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2!}y'''(x_n) + \cdots\right] - h\beta_0 y'(x_n) \cong 0.$$
ou ainda,
$$R_{n+1} = (1 + \alpha_0)y(x_n) + h(1 - \beta_1 - \beta_0)y'(x_n) + h^2\left(\frac{1}{2} - \beta_1\right)y''(x_n) + h^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\beta_1\right)y'''(x_n) + O(h^4) \cong 0.$$

O objetivo é que $R_{n+1} \cong 0$, para isso,
$$1 + \alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_o = -1;$$
$$1 - \beta_0 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_0 = {}^1\!/_2\,;$$
$${}^1\!/_2 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = {}^1\!/_2,$$

Assim, chega-se no seguinte método:
$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} - f_n)$$

conhecido como Regra do Trapézio, em que:

$$R_{n+1} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)h^3 y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3).$$

Portanto, $R_{n+1} = O(h^3)$ com constante do erro $-\frac{1}{12}$.

Seja
$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}.$$

<u>Definição:</u> (Operador de diferença $\mathcal{L}$ associado aos M.L.P.M.) O operador linear de diferença $\mathcal{L}$, associado a um M.L.P.M., é definido por:

$$\mathcal{L}[y(x);h] = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j y(x+jh) - h(\beta_j y'(x+jh)\right],$$

em que $y(x)$ é uma função arbitrária, não necessariamente solução do PVI e continuamente diferenciável em $[a,b]$.

Expandindo $y(x+jh)$ e $y'(x+jh)$ em série, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[y(x);h] \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left\{\alpha_j \left[y(x) + jhy'(x) + \frac{(jh)^2}{2!}y''(x) + \frac{(jh)^3}{3!}y'''(x) + \cdots\right]\right. \\
&\left. - h\beta_j \left[y'(x) + jhy''(x) + \frac{(jh)^2}{2!}y'''(x) + \frac{(jh)^3}{3!}y^{(IV)}(x) + \cdots\right]\right\} \\
&= [\alpha_o y(x) - h\beta_o y'(x)]_{j=0} \\
&+ \left[\alpha_1\left(y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \cdots\right)\right. \\
&\left. - h\beta_1\left(y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2}y'''(x) + \cdots\right)\right]_{j=1} + [\,]_{j=2} + \cdots + [\,]_{j=k-1} \\
&+ \left[\alpha_k\left(y(x) + khy'(x) + \frac{(kh)^2}{2!}y''(x) + \frac{(kh)^3}{3!}y'''(x) + \cdots\right)\right. \\
&\left. - h\beta_k\left(y'(x) + khy''(x) + \frac{(kh)^2}{2!}y'''(x) + \cdots\right)\right]_{j=k} \\
&= \left(\underbrace{\alpha_o + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k}_{c_o}\right)y(x) + h\left[\underbrace{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_o + \beta_1 + \cdots + \beta_k)}_{c_1}\right]y'(x) \\
&+ h^2\left[\underbrace{\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{2^2}{2!}\alpha_2 + \cdots + \frac{k^2}{2!}\alpha_k - (\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + k\beta_k)}_{c_2}\right]y''(x) + \cdots \\
&+ h^q\left[\underbrace{\frac{1}{q!}\alpha_1 + \frac{2^q}{q!}\alpha_2 + \cdots + \frac{k^q}{q!}\alpha_k - \left(\frac{1}{(q-1)!}\beta_1 + \frac{2^{(q-1)}}{(q-1)!}\beta_2 + \cdots + \frac{k^{(q-1)}}{(q-1)!}\beta_k\right)}_{c_q}\right]y^{(q)}(x) + \cdots
\end{aligned}$$

Então o operador $\mathcal{L}$ fica,

$$\mathcal{L}[y(x);h] = c_o y(x) + hc_1 y'(x) + h^2 c_2 y''(x) + \cdots + h^q c_q y^{(q)}(x) + \cdots$$

Definição: (Ordem de precisão ou simplesmente ordem). O operador $\mathcal{L}[y(x);h]$ tem ordem q se:

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_q = 0 \text{ e } c_{q+1} \neq 0$$

O termo c_{q+1} é a constante do erro.

Exemplo 5: Determinar a ordem de precisão e a constante do erro da regra do Ponto Médio:

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$$

Solução: Tem-se que $k = 2$ e

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 = 1 & \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 & \beta_1 = 2 \\ \alpha_0 = -1 & \beta_0 = 0 \end{array}$$

Logo,

$$c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 0 + 1 = 0$$
$$c_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_o - \beta_1 - \beta_2 = 0 + 2 - 0 - 2 - 0 = 0$$
$$c_2 = 0$$
$$c_3 = {}^1/_3$$

Portanto, a ordem é $q = 2$ e $c_{q+1} = c_3 = {}^1/_3$.

Exercício 4: Determinar a ordem de precisão e a constante do erro da regra do Trapézio:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}].$$

Exercício 5: Considere o método:

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$$

para resolver o PVI: $\begin{cases} y'(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, cuja solução exata é $y(x) = x$.

a) Resolver numericamente o PVI.

b) Calcule a ordem de precisão e a constante de erro.

Definição: (Erro de truncamento local) O erro de truncamento local em x_{n+k} de um M.L.P.M. é definido como sendo a expressão $\mathcal{L}[y(x_n): h]$ onde $\mathcal{L}$ é o operador de diferenças associado e $y(x)$ é a solução teórica do PVI: $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Notação:

$$T_{n+k} = R_{n+k} = \mathcal{L}[y(x): h] = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(x_n + jh) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j y'(x_n + jh).$$

Hipótese: Assume-se que erros de truncamento anteriores são desconsiderados, isto é,

$$\begin{matrix} y_{n+j} = y(x_{n+j}) \\ y_{n+k} \neq y(x_{n+k}) \end{matrix}, \; j = 0,1,2,\dots,k-1$$

Se o método tem ordem q, então:

$$T_{n+k} = \mathcal{L}[y(x);h] = c_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(x_n) + O(h^{q+2}).$$

Observação 1: Note agora que, é exigido que $y(x)$ tenha derivadas até ordem $q+1$. O termo $c_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(x_n)$ é chamado erro de truncamento local principal. A medida de precisão local é da ordem q com constante de erro c_{q+1}.

Quando não se impõe que

$$y_{n+j} = y\left(x_{n+j}\right), \; j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

trata-se do erro de truncamento global (ou truncamento acumulado) definido por:

$$e_{n+k} = y(x_{n+k}) - y_{n+k}$$

Observação 2: As medidas de precisão local são as ordens p do método e a constante do erro. A ordem p de M.L.P.M. indica a rapidez com que o erro tende a zero quando $h \to 0$. Entretanto, métodos de mesma ordem não correspondem erros iguais, o que os distinguem é a constante do erro c_{p+1}.