0313320

Métodos numéricos aplicados à engenharia civil

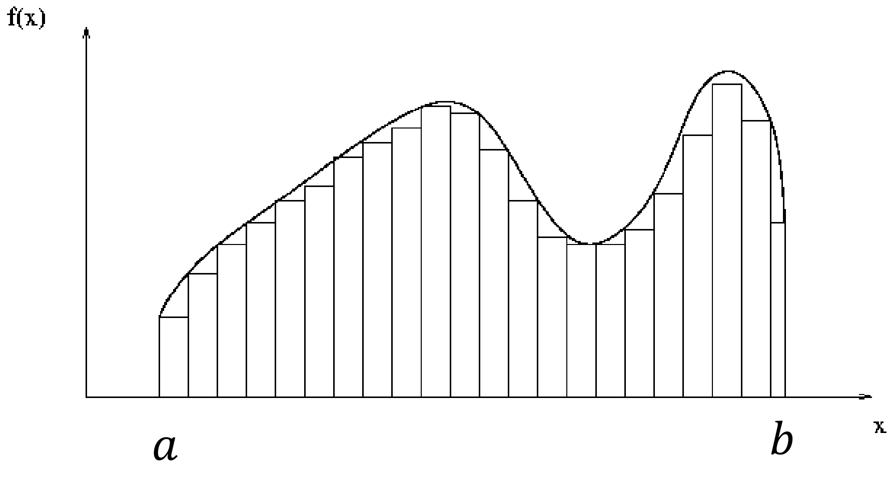
Integração Numérica

Prof. Dr. Fernando A. Kurokawa

24/10/2023

Integração Numérica

- Ideia
  - Decomposição do domínio em partes(um intervalo contido de sub-intervalos);
  - Integração aproximada da função de cada parte;
  - Soma dos resultados numéricos obtidos.



função peso

$$\int_a^b f(x)\underbrace{\omega(x)}_{\text{função peso}}dx \cong \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Fórmula de Newton-Cotes

- São aquelas em que a e b do intervalo são pontos da fórmula de quadratura, isto é: $a = x_0$ e $b = x_n$;
- Os pontos x_k são igualmente espaçados de uma quantidade fixa h, isto é:

$$x_{k+1} - x_k = h, \qquad k = 0,1,2 \ldots, n-1$$

- A função peso $\omega(x)$ é constante igual a 1;
- O intervalo de integração é finito;
- Baseado nos Polinômios de Lagrange: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos no intervalo [a, b] e sejam $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n+1$ valores $y = f(x)$ sobre $x = x_k, k = 1,2,\ldots,n$.

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)}$$

Fórmula de Newton-Cotes

- Assim:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_{x_0}^{x_n} l_k(x)dx}$$

- Fazendo $u = \frac{x-x_0}{h}$ tem-se que:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n} f(x_k)h \int_0^n \lambda_k(u)du}$$

Em que λ_k são os polinômios usados na fórmula de Lagrange:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

Fórmula de Newton-Cotes (n=1)

- Portanto:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n} f(x_k)hA_k$$

- Para $n = 1$ tem-se dois pontos consecutivos x_0 e x_1. Usando o polinômio de Lagrange de primeiro grau:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{1} f(x_k)h\,A_k$$

$$A_k = \int_0^1 \lambda_k(u)du$$

Dos polinômios usados na fórmula de Lagrange, para $n = 1$:

$$\int_0^1 \lambda_0(u)du = \int_0^1 \frac{(u-1)}{(0-1)}du = \frac{1}{2}$$

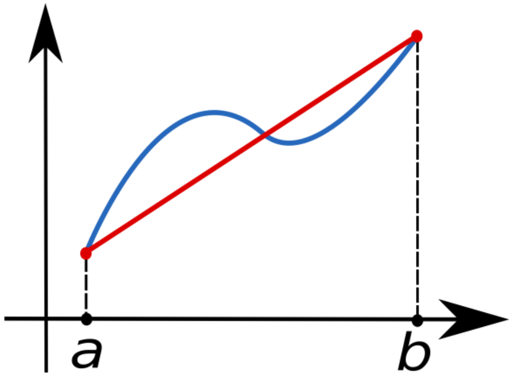
Regra do Trapézio

$$\int_0^1 \lambda_1(u)du = \int_0^1 \frac{(u-0)}{(1-0)}du = \frac{1}{2}$$

- Logo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1)\right] = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

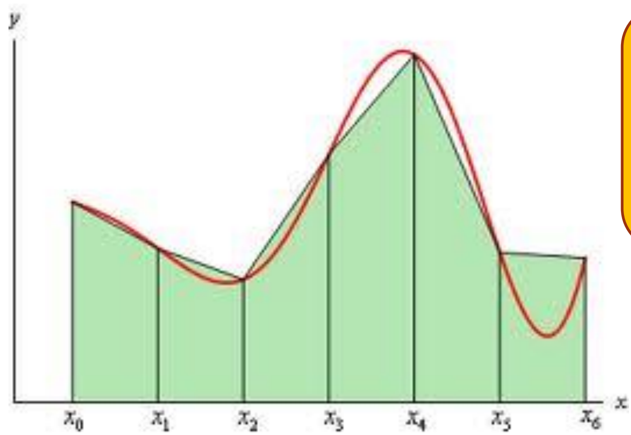
que é a fórmula de Newton-Cotes conhecida como Regra do Trapézio.



Se o intervalo [a, b] é pequeno a aproximação é razoável; mas se [a, b] é grande o erro também pode ser grande.

Regra do Trapézio Generalizada

- Se o intervalo de integração é grande podemos dividir o intervalo [a, b] em N sub-intervalos de amplitude $h = \frac{(b-a)}{N}$ de tal forma que $x_0 = a$ e $x_n = b$ e em cada sub-intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, aplica-se a Regra do Trapézio.
- O erro agora é a soma das áreas entre a curva e as retas.



$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$$

- Regra do Trapézio Generalizada (ou Compostas)

Exemplo

- Calcular, usando a Regra do Trapézio

$$\int_0^{1.2} e^x \cos(x) dx$$

Solução: Temos que:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
e^x	1	1.221	1.492	1.822	2.226	2.718	3.320
$\cos\ x$	1	0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362
$e^x\ \cos\ x$	1	1.197	1.374	1.503	1.552	1.468	1.202

Aplicando Trapézio Generalizada:

$$\begin{aligned}\int_0^{1.2} e^x \cos\ x\ dx &= \frac{h}{2}\left[f\left(x_0\right)+2\left(f\left(x_1\right)\ +\ \ldots\ +\ f\left(x_5\right)\right)+f\left(x_6\right)\right]\\ &= \frac{0.2}{2}[1+2\ (1.197+1.374+1.503+1.552+1.468)+1.202]\\ &= 0.1[1+2(7.094)+1.202]\\ &= 0.1[1+14.188+1.202]\ =\ 0.1[16.39]\ =\ 1.639.\end{aligned}$$

Aplique agora apenas a Regra do Trapézio Simples e compare!

Fórmula de Newton-Cotes (n=2)

- Lembrando que:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n} f(x_k)hA_k$$

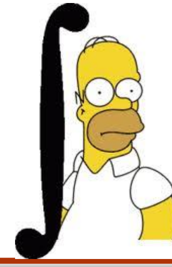
- Para $n=2$ tem-se dois pontos consecutivos x_0, x_1, x_2. Usando o polinômio de Lagrange de segundo grau:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{2} f(x_k)h\,A_k$$

$$A_k = \int_0^2 \lambda_k(u)du$$

Dos polinômios usados na fórmula de Lagrange, para $n=2$:

$$\int_0^2 \lambda_0(u)du = \int_0^1 \frac{(u-1)(u-2)}{(0-1)(0-2)}du = \frac{1}{3}$$

Regra de Simpson 

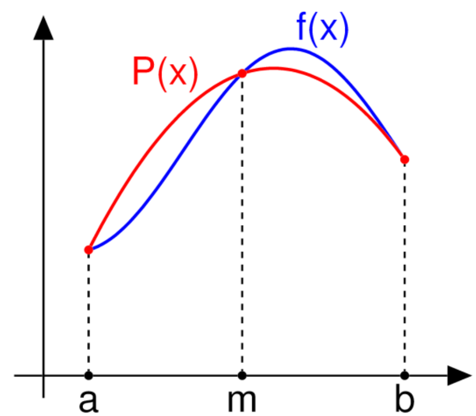
$$\int_0^2 \lambda_1(u)du = \int_0^2 \frac{(u-0)(u-2)}{(1-0)(1-2)}du = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^2 \lambda_2(u)du = \int_0^2 \frac{(u-0)(u-1)}{(2-0)(2-1)}du = \frac{1}{3}$$

- Logo:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong h\left[\frac{1}{3}f(x_0) + \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2)\right]$$
$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

que é a fórmula de Newton-Cotes conhecida como Regra 1/3 de Simpson.



Regra 1/3 Simpson Generalizada

- Usando a Regra 1/3 de Simpson ao longo do intervalo $[x_j, x_{j+2}], j = 0, 1, \ldots, 2N - 2$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_2)]$$
$$+\frac{h}{3}[f(x_2) + 4(f(x_3) + f(x_4)$$
$$+\ldots.+\frac{h}{3}[f(x_{2N-2}) + 4(f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4)$$
$$+\ldots.+2f(x_{2N-2}) + 4(f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})]$$

- Regra 1/3 Simpson Generalizada (ou Compostas)

Exemplo

- Calcular, usando a Regra 1/3 de Simpson

$$\int_{0}^{1.2} e^{x}\cos(x)dx$$