Disciplina: Métodos Numéricos Aplicados a Engenharia Civil (2023)
Professor: Fernando
Horário: Terças-feiras das 15h00 às 16h50 e sextas-feiras das 13h10 às 14h50
Entrega 19/09/2023
Assunto: **Problemas Aplicados - Trabalho 2**

Problema 1: Uma maneira de se obter a solução da equação de Laplace:

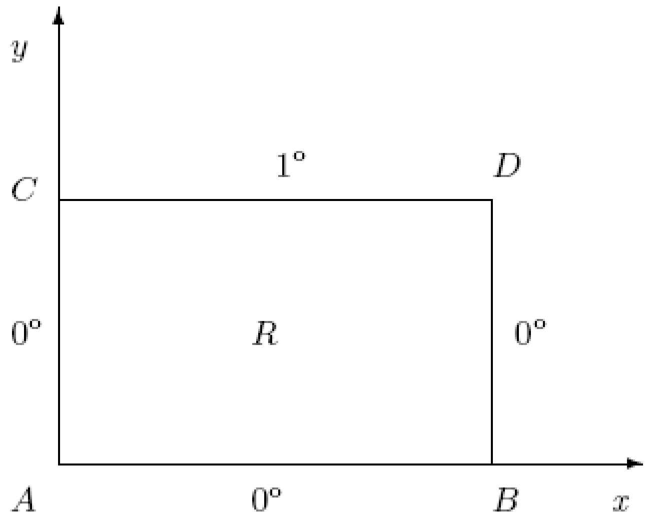
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

em uma região retangular consiste em se fazer uma discretização que transforma a equação em um problema aproximado consistindo em uma equação de diferenças cuja solução, em um caso particular, exige a solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se desejamos a solução com quatro algarismos significativos corretos, qual dos m´métodos iterativos que você conhece poderia ser aplicado com garantia de convergência? Resolva o sistema pelo método escolhido.

Problema 2: Suponha uma barra de metal homogêneo, como na figura a seguir, onde AB = CD = 4 e AC =BD = 3.



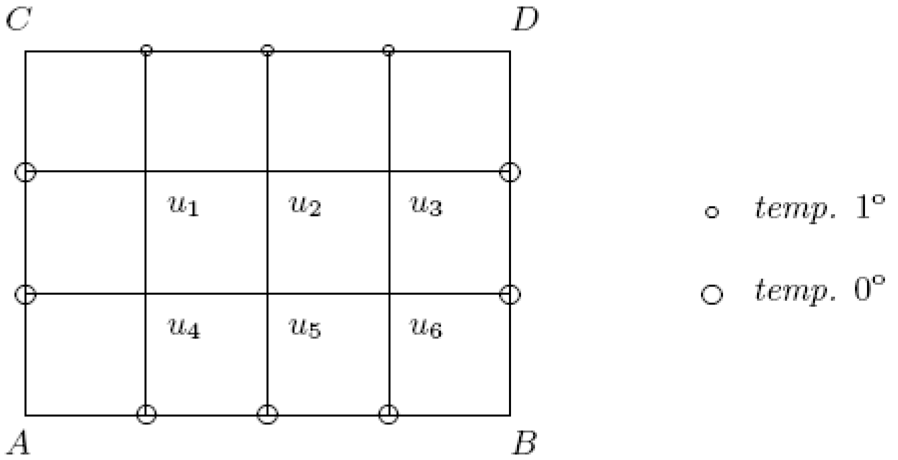
A temperatura ao longo de AB, AC, BD é mantida constante e igual a 0°C, enquanto que ao longo de CD ela é igual a 1°C. A distribuição do calor na barra R obedece à seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

com as condições de contorno:

$$u(x,y) = 1 \text{ para } 0 < x < 4;$$
$$u(x,0) = 0 \text{ para } 0 < x < 4;$$
$$u(0,y) = 1 \text{ para } 0 < y < 3;$$
$$u(x,y) = 1 \text{ para } 0 < y < 3;$$

A solução numérica desse problema pode ser obtida considerando-se uma divisão do retângulo ABCD em retângulos menores a partir de uma divisão de AB em intervalos iguais de amplitude h e de uma divisão de CD em intervalos iguais de amplitude k, como é mostrado na figura a seguir:



Nessa figura estamos considerando $h = k = 1$. A temperatura u nos pontos internos pode ser obtida numericamente simulando as derivadas segundas da Eq. (1), pelas diferenças de segunda ordem $\Delta^2 u$ de modo que para $h = k$, obtemos:

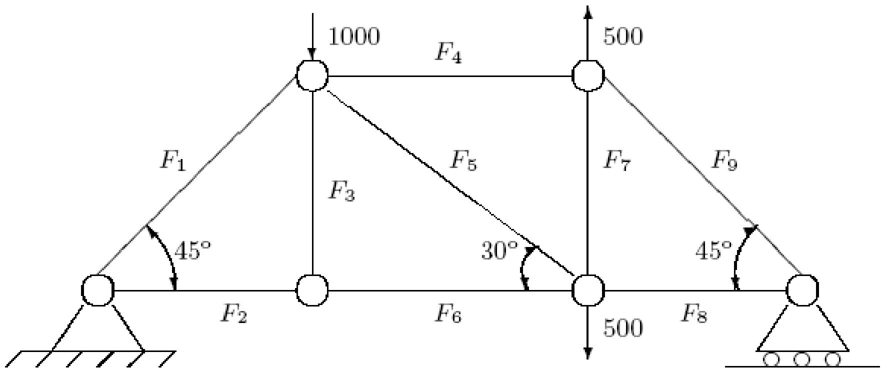
$$\frac{u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)}{h^2} + \frac{u(x,y-h) - 2u(x,y) + u(x,y+h)}{h^2} = 0,$$

para cada par (x,y) em R. Assim, por exemplo, para o ponto $u_1 = u(1,2)$ da figura anterior vale:

$$\frac{u(0,2) - 2u_1 + u_2}{1^2} + \frac{u_4 - 2u_1 + u(1,3)}{1^2} = 0,$$

Considerando todos os pontos da figura anterior obtemos um sistema de 6 equações lineares nas incógnitas: $u_1, u_2, \dots, u_6$. Resolva-o por método numérico à sua escolha, com garantia de convergência.

<u>Problema 3:</u> Numa treliça estaticamente determinada com juntas articuladas, como dada na figura a seguir:



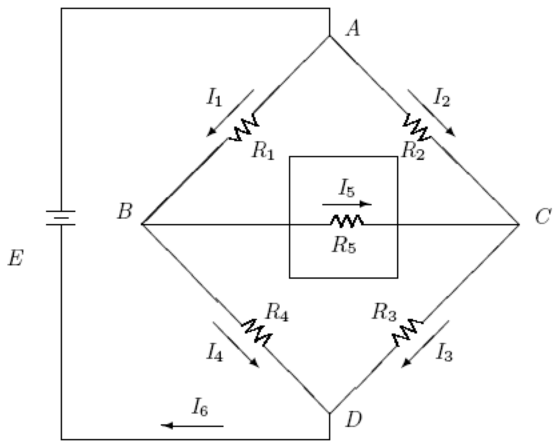
a tensão, (F_i), em cada componente pode ser obtida da seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 0.7071 & 0 & 0 & -1 & -0.8660 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8660 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7071 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que as equações são obtidas fazendo-se a soma de todas as forças horizontais ou verticais em cada junta igual a zero. Além disso a matriz dos coeficientes é bastante esparsa, e assim um candidato natural é o método de Gauss-Seidel.

a) As equações podem ser rearranjadas de modo a se obter uma matriz estritamente diagonalmente dominante?
b) É o sistema convergente se iniciarmos com um vetor com todas as componentes iguais a zero?
c) Resolva o sistema pelo método de Gauss-Seidel, partindo do vetor nulo e obtendo a solução com precisão de 10^{-4}.

<u>Problema 4:</u> O circuito mostrado a seguir é frequentemente usado em medidas elétricas e é conhecido com uma "Ponte de Wheatstone".



As equações que governam o sistema são obtidas a partir da lei de Kirchoff. Para a malha fechada através da bateria e ao longo de ABD, temos:

$$I_1R_1 + I_4R_4 - E = 0,$$

Para a malha fechada ABCA: $I_1R_1 + I_5R_5 - I_2R_2 = 0$.

Para a malha fechada BCDB: $I_5R_5 + I_3R_3 - I_4R_4 = 0$.

Para o nó A: $I_6 = I_1 + I_2$

Para o nó B: $I_1 = I_5 + I_4$

Para o nó A: $I_3 = I_2 + I_5$

onde R_i representam as resistências; I_i as correntes e E a voltagem aplicada. Determinar as correntes no problema proposto quando: $E = 20\,Volts$, $R_1 = 10\,Ohms$ e $R_2 = R_3 = R_4 = 10\,Ohms$.