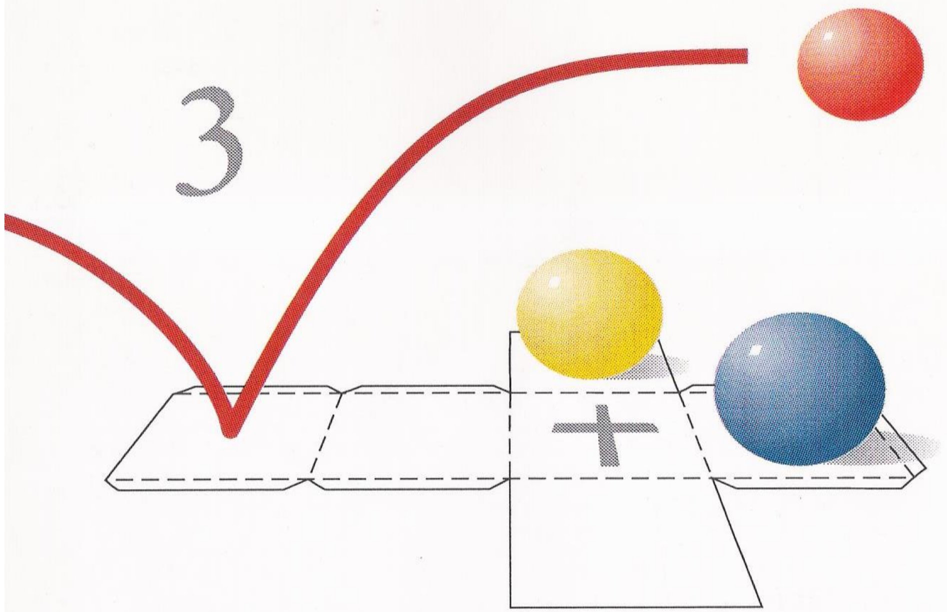
DESVENDANDO A ARITMÉTICA

IMPLICAÇÕES DA TEORIA DE PIAGET

5ª Edição



CONSTANCE KAMII
COM SALLY JONES LIVINGSTON

PAPIRUS

DESVENDANDO A ARITMÉTICA
IMPLICAÇÕES DA TEORIA DE PIAGET

Com base no construtivismo de Piaget que explica como o conhecimento é elaborado, especialmente o conhecimento lógico-matemático, a autora analisa como as crianças lidam com os problemas matemáticos.

Este livro dá continuidade a outros três títulos já publicados no Brasil e que tratam respectivamente da pré-escola e da 1ª e 2ª séries do 1º grau, está dividido em quatro partes:

1) fundamentos teóricos do conhecimento lógico-matemático;
2) os objetivos e as metas da aritmética na 3ª série;
3) atividades para sala de aula, jogos em grupos e outras atividades;
4) avaliação do ensino construtivista.

Escrito com a colaboração de Sally Livingston, esta é mais uma obra de Constance Kamii de grande valor para professores e pesquisadores da área educacional.

ISBN 85-308-0355-8
9 788530 803551

PAPIRUS EDITORA

Constance Kamii é natural de Genebra, Suíça. Bacharelou-se em Sociologia no Pomona College (1955), concluiu seu mestrado em Educação na Universidade de Michigan (1957) e doutorou-se em Educação e Psicologia em 1965 pela mesma universidade.

Foi docente da Faculdade de Educação da Universidade de Illinois em Chicago e da Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Genebra, Suíça, além de pesquisadora da equipe de Jean Piaget no Centro Internacional de Epistemologia Genética na Universidade de Genebra. É professora titular na Escola de Educação da Universidade de Alabama em Birmingham.

É autora de várias obras sobre o ensino das noções aritméticas e sobre a aquisição das estruturas lógico-matemáticas pelas crianças.

DESVENDANDO A ARITMÉTICA

IMPLICAÇÕES DA TEORIA DE PIAGET

CONSTANCE KAMII
com Sally Jones Livingston

tradução
Marta Rabioglio
Camilo F. Ghorayeb
Marina Célia D. Morais

revisão técnica
Marcelo Cestari Lellis

DESVENDANDO A ARITMÉTICA
IMPLICAÇÕES DA TEORIA DE PIAGET

PAPIRUS EDITORA

Equipe de digitalização:
Leon Dunkel Weiss S.
Alexei C. M.
Shien S. Y.
Chandra Kali
Kotsu Yamato H.
Leonardo Manzo
Lisandra Aurora Alves

Com a liberdade,
Pela liberdade,
Para a liberdade,
Viva a liberdade.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O termo *construir* praticamente não era ouvido quando o livro *Young children continue to reinvent arithmetic, 2nd grade* (Kamii 1989a) foi escrito, mas nos últimos anos ele vem se tornando muito popular. Essa adoção repentina do termo tem pelo menos um lado positivo e um outro negativo. O bom é que evidencia uma nova disposição para a mudança. O ruim, no entanto, é que há muita gente dizendo *construir* sem ter qualquer compreensão de que construtivismo é uma teoria sobre como o conhecimento é elaborado, tanto pela espécie humana através dos séculos, como por cada criança em particular.

Nós acreditamos que o construtivismo de Jean Piaget explica a natureza do conhecimento lógico-matemático melhor do que qualquer outra teoria. Ele descreve cientificamente a gênese do conhecimento lógico-matemático na infância, como pode ser visto nos livros *Origins of intelligence in children* (Piaget 1937/1952) e *Play, dreams and imitation in childhood* (Piaget 1945/1962). Estas obras constituem o verdadeiro início do setor psicológico na teoria de Piaget, muito embora ele nunca tenha deixado de lado seu principal objetivo epistemológico, que era o de explicar de que modo a humanidade como um todo constrói conhecimentos, o que o levou a ter uma visão muito particular da história da ciência.

Retomemos a questão levantada no início do primeiro capítulo: "Por que queremos que as crianças reinventem a aritmética?" Os algoritmos atuais são fruto de séculos de construção por matemáticos adultos. Ao tentarmos simplesmente transmitir o resultado de tão longo tempo de reflexão adulta aos alunos, estamos privando-os da oportunidade de elaborar seu próprio raciocínio. As crianças de hoje inventam os mesmos tipos de procedimentos que nossos antepassados e para que possam compreender nossos algoritmos devem passar por um processo semelhante de construção.

É certo que os primeiros métodos que as crianças criam são ineficientes. Contudo, se tiverem a liberdade de seguir suas próprias hipóteses, elas irão incrementando seus procedimentos no sentido de buscar outros mais eficientes, da mesma forma que fizeram nossos antepassados. Se tentarmos passar por cima desse processo, estaremos tirando-lhes o sentido da aritmética. Os efeitos nocivos do ensino dos algoritmos convencionais são o assunto do próximo capítulo.

3
OS EFEITOS NOCIVOS DOS ALGORITMOS

Nos Capítulos 1 e 2 defendemos a reinvenção da aritmética pelas crianças porque, primeiro, o conhecimento lógico-matemático é o tipo de conhecimento que cada um pode e deve construir por meio de seu próprio raciocínio, e, segundo, as crianças têm que passar por um processo construtivo semelhante ao de nossos ancestrais, a fim de compreender os algoritmos usados atualmente. A terceira razão pela qual acreditamos que as crianças devam inventar procedimentos próprios é que o ensino dos algoritmos nas 1ª^as^ séries do primeiro grau é prejudicial pelos motivos que apresentamos a seguir.

1. Os algoritmos forçam o aluno a desistir de seu raciocínio numérico.
2. Eles "desensinam" o valor posicional e obstruem o desenvolvimento do senso numérico.
3. Tornam a criança dependente do arranjo espacial dos dígitos (ou de lápis e papel) e de outras pessoas.

Este capítulo trata de cada um desses aspectos e apresenta os dados que nos levaram a essas conclusões.

Figura 3.1
Procedimentos inventados por crianças para resolver as quatro operações aritméticas.

18 +17	10 + 10 = 20	10 + 10 = 20	10 + 10 = 20
	8 + 7 = 15	8 + 2 = outro dez	7 + 7 = 14
	20 + 10 = 30	20 + 10 = 30	14 + 1 = 15
	30 + 5 = 35	30 + 5 = 35	20 + 10 = 30
			30 + 5 = 35

44 −15	40 − 10 = 30	40 − 10 = 30	40 − 10 = 30
	4 − 5 = 1 abaixo de 0	30 − 5 = 25	30 + 4 = 34
	30 − 1 = 29	25 + 4 = 29	34 − 5 = 29

135 x 4	4 x 100 = 400	4 x 100 = 400
	4 x 30 = 120	4 x 35 = 70 + 70 = 140
	4 x 5 = 20	400 + 140 = 540
	400 + 120 + 20 = 540	

23)285

23 + 23 + 23 + 23 . . . até chegar próximo a 285

46 + 46 + 46 + 46 . . . até chegar próximo a 285

10 x 23 = 230, e a partir daí, por adição até chegar a um total próximo a 285

As crianças desistem de seu próprio pensamento numérico

Quando não ensinamos algoritmos à criança, e, em vez disso, a encorajamos a pensar e inventar procedimentos de cálculo, seu raciocínio segue um caminho diferente daquele dos algoritmos convencionais. Em adição, subtração e multiplicação, por exemplo, os algoritmos operam da direita para a esquerda, enquanto as crianças inicialmente vão sempre da esquerda para a direita. Na divisão, ao contrário, os algoritmos ditam procedimentos da esquerda para a direita, enquanto o aluno de 3ª série segue sempre da direita para a esquerda. A Figura 3.1 mostra exemplos daquilo que a criança inventa para cada uma das quatro operações.

Os exemplos acima mostram claramente que, quando a criança é obrigada a seguir algoritmos, ela tem que abrir mão de sua maneira própria de pensar numericamente. Já que não há como conciliar o "ir da direita para a esquerda" com o "ir da esquerda para a direita", a criança acaba por se submeter ao professor e abandonar suas próprias idéias. Esta razão já é suficiente para justificar o mal causado pelo ensino dos algoritmos.

As crianças não consideram o valor posicional e desenvolvem um senso numérico pobre

Quando crianças utilizam o algoritmo tradicional para resolver problemas como o que segue

$$\begin{array}{r} 987 \\ +345 \\ \hline \end{array}$$

elas se esquecem do valor posicional e começam a pensar e falar da seguinte forma: "Sete mais cinco dá doze, fica o dois e vai um (ou dez). Um mais oito e mais quatro dá treze, fica o três e vai um (ou dez). Um mais nove e mais três, dá treze."

O algoritmo é conveniente para os adultos, se já compreenderam o valor posicional dos números. Para as crianças no primário, contudo, que têm tendência para pensar em cada coluna como unidade, o algoritmo acaba por reforçar essa idéia.

Em contrapartida, se as crianças são incentivadas a inventar maneiras próprias de resolver problemas, elas pensam e dizem: "Novecentos mais trezentos dá mil e duzentos. Oitenta mais quarenta dá cento e vinte; então fica mil trezentos e vinte. Com mais doze, dá mil trezentos e trinta e dois". Os alunos aos quais se permite o exercício do raciocínio dessa forma fortalecem e ampliam suas idéias sobre valor posicional.

O efeito nocivo do algoritmo tornou-se evidente para nós quando examinamos os dados obtidos na Escola Hall-Kent em dois tipos de situações. A primeira foi uma entrevista individual com os alunos, tanto com aqueles que haviam recebido ensino sobre algoritmos, como com os que não tinham essa informação. A segunda foi a observação em classes com professores construtivistas. Embora a maioria dos professores da escola Hall-Kent seguisse os princípios construtivistas, alguns ainda trabalhavam com o ensino de técnicas e regras, sobretudo nos anos escolares mais avançados. No período entre 1989 e 1991, quando coletamos os dados, a situação era a seguinte:

Pré-escola: Nenhum dos quatro professores ensinava algoritmos.

Primeira série: Nenhum dos quatro professores o fazia.

Segunda série: Um dentre três professores o fazia.

Terceira série: Dois dentre três professores o faziam.

Quarta série: Os quatro professores o faziam.

Todas as classes podiam ser consideradas heterogêneas e comparáveis, pois a cada início de ano o diretor misturava as crianças da série e as dividia por meio de sorteio. Alunos de outras escolas, transferidos para a Hall-Kent, também entravam no sorteio. A maioria dos alunos transferidos conseguia resolver grande parte dos exercícios usando algoritmos, mas demonstrava grande dificuldade em relação ao valor posicional, como será visto no Capítulo 11.

Dados das entrevistas

Nas entrevistas individuais realizadas em maio de 1990 apresentávamos às crianças da 2ª série uma folha com 19 problemas computacionais e pedíamos que resolvessem cada problema sem usar papel e lápis, que nos dissessem a resposta e, finalmente, que nos explicassem como a tinham obtido. O entrevistador tomava notas do que cada criança dizia.

Adição: A maioria dos problemas apresentados na entrevista não produziu grandes diferenças, sobretudo quando eram apresentados armados (conta em pé). A adição 7 + 52 + 186 foi apresentada duas vezes, uma em pé e outra na horizontal. Os três grupos de alunos de 2ªs séries deram praticamente a mesma resposta por escrito em relação à conta armada. Na forma horizontal, no entanto, emergiram várias diferenças.

A Tabela 3.1, mostrada a seguir, traz as respostas dadas pelos alunos das três classes. O professor da primeira classe (denominada "Algoritmos" na tabela) ensinava algoritmos, enquanto os outros dois professores não o faziam. Esses dois professores tinham uma importante diferença no procedimento: apenas um deles, o da classe marcada "Não-algoritmos", impedia que os pais treinassem as crianças em casa, conversando com eles sempre que necessário.

A maioria das crianças da classe "Não-algoritmos" começava tipicamente dizendo: "Cento e oitenta mais cinqüenta dá duzentos e trinta." Esta é a razão pela qual elas acertaram quase quatro vezes mais do que os alunos da classe "Algoritmos" (45% contra 12%). (Os traços "—" indicam que a criança sequer tentou resolver o problema, dando respostas do tipo "Não sei", "Eu não consigo", "Não me lembro do que o professor ensinou", "Eu preciso de lápis para resolver este problema", "Nós não aprendemos isso na classe" etc.)

A diferença mais importante, no entanto, encontra-se nas respostas incorretas dadas pelas crianças. As linhas pontilhadas nas tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 foram feitas para assinalar as respostas menos racionais, tanto para mais (acima) quanto para menos (abaixo). Essas respostas revelam um

Tabela 3.1
Respostas para a adição 7 + 52 + 186
dadas por três classes de 2ª série em maio de 1990
(os traços indicam que a criança sequer tentou trabalhar com o problema).

Algoritmos n = 17	Alguns algoritmos n = 19	Não-algoritmos n = 20
	Percentual de respostas corretas	
12	26	45
	Respostas incorretas	
9.308		
1.000		
989		
986		
938	989	
906	938	
838	810	
295	356	617
. . . .	. . . .	. . . .
		255
		246
		243
		236
		235
. . . .	. . . .	. . . .
200	213	138
198	213	—
30	199	—
29	133	—
29	125	—
—	144	
—	—	
	—	
	—	
	—	

conhecimento equivocado do valor posicional, bem como um senso numérico pobre. Duas crianças da classe "Algoritmos", por exemplo, responderam 29 na adição 7 + 52 + 186! Essas crianças somaram todos os dígitos como unidades (7 + 5 + 2 + 1 + 8 + 6 = 29). Aquelas que deram respostas perto de 900 somaram o 7 com o 1 do 186 e levaram mais 1 da coluna das dezenas. Todas as respostas incorretas da classe "Algoritmos" caíram acima ou abaixo das linhas pontilhadas.

A classe intitulada "Alguns algoritmos" ficou entre as outras duas. A porcentagem de acertos foi de 26%, para os 12% e os 45% das outras classes. A amplitude de respostas erradas não é tão grande quanto a da classe "Algoritmos", nem tão pequena quanto a "Não-algoritmos", que só apresentou duas respostas muito inadequadas (617 e 138).

Em maio de 1991, um ano mais tarde, foi dado um problema muito parecido (6 + 53 + 185) para os alunos de 3ª e 4ª séries. Os resultados desta entrevista são apresentados nas Tabelas 3.2 e 3.3.

Todas as colunas das duas tabelas, exceto uma da Tabela 3.2, são chamadas "Algoritmos", o que indica que quase todos os professores das 3as e 4as séries ensinavam algoritmos. A terceira coluna da Tabela 3.2, intitulada "Não-algoritmos", refere-se à classe de Sally Livingston. Embora em sua classe houvesse 22 crianças, apenas dez foram incluídas na tabela, por serem as únicas que nunca tinham aprendido algoritmos. As 12 restantes haviam aprendido técnicas e regras de computação, quer na própria Hall-Kent, quer em outras escolas de onde vieram.

Conforme pode ser observado na Tabela 3.2, as crianças da classe "Não-algoritmos" foram muito melhor do que as das classes "Algoritmos". Tanto a percentagem de respostas certas foi maior, quanto as respostas erradas foram muito mais razoáveis. As respostas inadequadas das classes "Algoritmos" revelaram, mais uma vez, o não-entendimento do valor posicional, bem como um pobre senso numérico.

Todas as 4$^{\underline{as}}$ séries da Tabela 3.3 aprenderam algoritmos durante um tempo variável de um a quatro anos. A tabela mostra que a performance dos quartanistas foi pior que a dos terceiranistas das classes "Algoritmos". O percentual de acertos foi semelhante, mas o leque de erros foi maior e caracterizou-se por um novo fenômeno: respostas do tipo "Oito, três, sete" lidas da direita para a esquerda, que indicavam que cada coluna era considerada isoladamente no pensamento desses alunos. Isto significa que, além de um conhecimento inadequado do valor posicional, os algoritmos estavam servindo para fortalecer uma idéia mecânica de colunas isoladas pelos quartanistas.

Tabela 3.2
Respostas para 6 + 53 + 185 dadas pelas três 3$^{\underline{as}}$ séries em maio de 1991 (os traços indicam que as crianças sequer tentaram resolver o problema).

Algoritmos n = 19	Alguns algoritmos n = 20	Não-algoritmos n = 10
	Percentual de respostas corretas	
32	20	50
	Respostas incorretas	
	800 + 38	
838	800	
768	444	
533	344	284
. . . .	. . . .	. . . .
246	243	245
235	239	243
234	238	238
	234	
. . . .	. . . .	. . . .
213	204	221
194	202	
194	190	
74	187	
29	144	
—	139	
—	—	
	—	

Tabela 3.3
Respostas para 6 + 53 + 185
dadas pelas quatro 4$^{\underline{as}}$ séries em maio de 1991
(os traços indicam que as crianças sequer
tentaram resolver o problema).

Algoritmos n = 20	Algoritmos n = 21	Algoritmos n = 21	Algoritmos n = 18
	Percentual de respostas corretas		
30	24	19	17
	Respostas incorretas		
	1.215		
	848		
	844		
	783		
1.300	783		10.099
814	783		838
744	718	791	835
715	713	738	745
713 + 8	445	721	274
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
243	245		234
	234		234
	224		234
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
194	194	144	225
177	127	138	"8, 3, 8"
144	—	134	"4, 3, 2"
143	—	"8, 3, 7"	"4, 3, 2"
134		"8, 1, 7"	—
"4, 4, 4"		—	—
"1, 3, 2"		—	—
—		—	
		—	
		—	
		—	
		—	
		—	
		—	

Nossa expectativa era de que, na 4ª série, as crianças ficassem pelo menos incomodadas ao obter para a adição de 6 + 53 + 185 respostas maiores que 400 ou menores que 200. Contudo, 39% dos alunos mostraram-se indiferentes diante de totais entre 445 e 1.215, ou 134 e 194. Outros 19% sequer tentaram somar os três números. Isso mostra que os quartanistas a quem foram ensinados algoritmos por um, dois, três ou quatro anos foram mais prejudicados que os segundanistas que não receberam tais técnicas.

Subtração: O problema de adição discutido anteriormente foi apresentado em forma de sentença matemática, o que o tornou mais difícil para as crianças acostumadas aos algoritmos. Um outro problema usado na entrevista de maio de 1991 foi a subtração mostrada a seguir:

$$\begin{array}{r} 504 \\ \underline{-306} \end{array}$$

A maioria dos segundanistas e dos terceiranistas que inventavam procedimentos próprios dizia: "Tirando 300 de 500 dá 200. Tirando 6 de 4 dá dois menos que zero;[1] então a resposta é 198." O percentual de crianças da 2ª série na classe "Não-algoritmos" que responderam corretamente foi de 74% (n = 19) e na 3ª foi de 80 % (n = 10). As respostas erradas dadas por elas, por outro lado, não se distanciaram muito do 200 (320, 202, 202, 200 e 194 na 2ª e 202 e 190 na 3ª).

Já nas classes "Algoritmos" as respostas corretas foram de 42% e 35% nas 3ªs séries e 55%, 39%, 38% e 29% nas 4ªs. Tais índices foram todos mais baixos que os das classes de 2ªs e 3ªs séries "Não-algoritmos". As respostas incorretas dadas pelas 3ªs e 4ªs séries "Algoritmos" estão resumidas na Tabela 3.4. Como pode ser observado, novamente, a amplitude das respostas erradas é enorme, muito maior que a das classes "Não-algoritmos".

1. "Dois menos que zero" é "dois negativos" ou "menos dois", mas as crianças não conheciam vocabulário referente a números negativos. (N.T.)

Tabela 3.4
Respostas erradas para 504 – 306 dadas em maio de 1991 por alunos de 3ªs e 4ªs séries que aprenderam algoritmos (o traço significa que a criança recusou-se a resolver o problema).

Terceiras séries		Quartas séries			
n = 19	n = 20	n = 20	n = 21	n = 21	n = 18
			898		
			808		
			498	308	
			298	298	
	1.106		298	298	
	708		298	208	
	298	410	208	208	408
406	207	208	208	205	208
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
202			199	202	202
196			194	196	196
194				192	192
192					
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
108	164	189	189	148	108
106	113	108	189	108	108
"8, 0, 2"	109	108	108	108	"8, 0, 1"
"8, 0, 2"	108	108	108	"8, 0, 2"	"8, 0, 1"
"8, 10, 1"	108	19	108		"2, 0, 2"
"2, 0, 2"	108	"8, 0, 2"			—
	108	"2, 0, 2"			
	108				
	22				

Conforme foi comentado, problemas apresentados verticalmente, geralmente, são mais fáceis para as crianças acostumadas a seguir algoritmos. Na subtração apresentada acima, no entanto, o arranjo vertical não ajudou as crianças das classes "Algoritmos". Justamente por terem um senso numérico bastante precário, várias conseguiram a resposta 108 emprestando 10 do 5 do 504 e subtraindo 3 de 4. Outras chegaram a 208 somando 10 ao 4, sem emprestá-lo de lugar algum! A grande quantidade de diferentes resultados terminados em 8, que a Tabela 3.4 mostra, indica que as crianças aprenderam a subtrair 6 de 14 sem saber de onde vinha o 10.

O parco senso numérico das crianças que aprenderam algoritmos tem sua origem não apenas na incompreensão do valor posicional, como também no hábito de pensar em cada coluna isoladamente. Esse hábito mostra-se evidente sobretudo nas crianças da Tabela 3.4, que deram respostas do tipo "Oito, zero, um", lendo as colunas da direita para a esquerda. Se elas pensassem no número como um todo, e subtraíssem algo como 300 de algo como 500, teriam certeza de que o resultado daria em torno de 200.

Quando alunos de 2ª e de 3ª séries vão muito melhor que os de 4ª, temos que concluir que há algo realmente errado no ensino dos algoritmos nas 1ªs séries do 1º grau.

Multiplicação: A multiplicação de números de dois dígitos por outro número de dois dígitos, como 13 x 11, não é introduzida nos livros didáticos antes da 4ª série.[2] O problema, que apresentamos na entrevista, foi, assim, de certa forma injusto para os terceiranistas, pois apenas as classes "Não-algoritmos" haviam entrado em contato com ele. Nós o trouxemos justamente para investigar o senso numérico das crianças e a sua habilidade para inventar soluções diante de problemas não-familiares. Alguns alunos de 2ªs séries das classes com professores construtivistas resolviam problemas de multiplicação como este por meio de adição, somando 13 + 13 (para dois 13), dobrando o resultado (para quatro 13), e então 52 + 52 (para oito 13), e finalmente mais 39 (para os últimos três 13), somados aos 104.

Sessenta por cento dos alunos de 3ªs séries, os quais não tinham entrado em contato com algoritmos, deram a resposta certa para 13 x 11. Em contrapartida, apenas 11% e 5% das classes de 3ªs séries "Algoritmos" chegaram ao resultado 143. A importante diferença, contudo, encontra-se nas respostas erradas dadas pelos três grupos. No grupo "Não-algoritmos", as respostas erradas foram: 79, 113, 146 e "Eu quero pular esse". Já nas duas classes "Algoritmos", juntas as respostas incorretas foram: 13, 13, 13, 13, 23, 33, 33, 42, 93, 113, 113, 130, 131, 131, 133, 133, 133, 133, 133, 133, 133, 133, 155, 330, 1.013 e dez crianças recusaram-se a tentar. Estes resultados demonstram, novamente, um senso numérico muito pobre nas classes "Algoritmos".

Todas as crianças das 4ªs séries conseguiam chegar ao resultado desse problema, sem dificuldade, desde que usassem lápis e papel e seguissem o algoritmo. Quando lhes era permitido usar apenas a cabeça, entretanto, o percentual de respostas certas caía para 5%, 6%, 14% e 15% em cada uma das quatro classes. As respostas erradas, considerando-se as quatro classes juntas, foram: 11, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 23, 23, 23, 26, 26, 26, 26, 33, 34, 42, 42, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 64, 66, 113, 123, 131, 133, 133, 133, 133, 133, 133, 133, 133, 133, 135, 140, 141, 141, 141, 144, 153, 443, 1.300, 1.313, 1.313 e 1.326. Vinte crianças recusaram-se a tentar resolver o problema.

Os exemplos a seguir mostram alguns caminhos usados pelas crianças para obter as respostas acima: "Treze vezes 1 é 13, e 13 vezes outro 1 é 13. Então a resposta é 13 13. Um três, um três." "Treze vezes 10 é 130, mais 1 é 131." "Treze vezes 1 é 13. Abaixa o 3 e vai o 1. Treze vezes 1 é 13, então dá 133." "Uma vezes 3 é 3. Uma vezes 3 dá outro 3, e uma vezes 1 é 1. Então fica 133."

Dados de observação em sala de aula

Como afirmamos anteriormente, o desempenho de crianças que passaram por classes onde aprenderam a seguir algoritmos, antes de estar com professores construtivistas, também convenceu-nos dos prejuízos causados pelo seu ensino. Essas crianças geralmente conseguiam resolver os problemas no papel, com facilidade, seguindo as regras aprendidas, mas tinham dificuldades enormes em relação ao valor posicional e ao senso numérico, como será visto no Capítulo 11. Nós lhes permitimos usar quaisquer procedimentos que quisessem, desde que soubessem explicá-los passo a passo.

Diante da pressão de ter que justificar os procedimentos usados, os alunos acima da média, vindos de outras escolas, concluíam que o método da esquerda para a direita utilizado por seus colegas era mais fácil. Em contrapartida, os alunos medianos continuavam a usar algoritmos e eventualmente chegavam a compreender o valor posicional. Já os

2. Nos Estados Unidos, é claro. (N.T.)

alunos abaixo da média agarravam-se com veemência aos algoritmos, sem demonstrar um progresso significativo em relação ao valor posicional. Os algoritmos promoviam a segurança de produzir respostas corretas, o que fazia com que os alunos com maior dificuldade funcionassem como máquinas pré-programadas. Seu raciocínio, por outro lado, permanecia bloqueado e paralisado pelo programa.

O efeito nocivo dos algoritmos tornou-se ainda mais evidente quando uma professora de 4ª série, Cheryl Ingram, decidiu tentar uma postura construtivista em 1991-1992. Após dez anos lecionando na 4ª série, Cheryl decidiu mudar seu trabalho porque os alunos que estavam em classes construtivistas por um, dois ou três anos pareciam ser melhores estudantes em matemática. Eu (CK) sentei-me em sua sala de aula, durante praticamente todo o ano, nos horários de matemática, a fim de ajudá-la a tornar-se uma professora construtivista, e fiquei realmente surpresa ao constatar a dificuldade que era desprogramar esses alunos de 4ª série. A operação a seguir mostra o quanto as crianças tinham dificuldades em compreender o valor posicional e tratavam cada coluna isoladamente, considerando-as da direita para a esquerda.

Uma das maneiras usadas por Cheryl para afastar as crianças dos algoritmos era escrever horizontalmente problemas como 876 + 359 na lousa e pedir aos alunos que inventassem diferentes maneiras de resolvê-los, sem usar lápis e papel. Quando eles se ofereciam para explicar como chegaram à resposta 1.235 usando o algoritmo em suas cabeças, ela seguia cada explicação dada (6 + 9 = 15, vai 1, 7 + 5 + 1 = 13, vai 1, 8 + 3 + 1 = 12) e anotava os números para cada coluna como mostramos abaixo:

$$\begin{array}{r} 15 \\ 13 \\ +12 \\ \hline 40 \end{array}$$

Assim que as crianças acabavam de explicar como chegaram ao 1.235, Cheryl dizia: " Mas eu anotei cada passo de sua explicação e meu resultado foi 40. Como você conseguiu 1.235?" Muitas crianças tomavam um susto e ficavam em silêncio. Uma criança, porém, rapidamente explicou à professora que o 13 era na verdade 130, e o 12 era 1.200.

Esse tipo de problema com o valor posicional era relativamente fácil de ser sanado. A dificuldade que persistia, porém, era resultado do tratamento coluna por coluna, que impedia que as crianças pensassem nos números como um todo. Diante da adição acima apresentada, por exemplo, os alunos continuavam a dar respostas fragmentadas, da direita para a esquerda, do tipo " 5 (para 6 + 9), 130 (para 10 + 70 + 50) e 1.200 (para 100 + 800 + 300)".

Num esforço para levar as crianças a pensar sobre os números como um todo, realizamos um experimento em 28 de outubro de 1991. Cheryl ia colocando na lousa um problema seguido do outro, como por exemplo: 366 + 199, 493 + 99 e 601 + 199. Durante uma hora inteira, Cheryl deu apenas problemas desse tipo para que a classe resolvesse de diferentes maneiras.

Quase todas as crianças da classe continuaram a usar os algoritmos durante todo tempo, somando primeiro as unidades, levando o 10, somando as dezenas e levando o 100. Uma das crianças, no entanto, que chamaremos Joe, que havia sido aluna de classes construtivistas desde a 1ª série, dava soluções do tipo: " Eu mudei de 366 + 199 para 365 + 200 e minha resposta é 565." Após uma hora de " interação", apenas três crianças estavam imitando o Joe! O restante da classe continuava a lidar com cada coluna separadamente.

Nesse meio tempo, por volta de meados de outubro, Cheryl havia se dado conta de que, em dez anos como professora de 4ª série, nunca tinha visto tanta empolgação e entusiasmo pela matemática. No início de novembro ela sentiu que precisava anunciar aos alunos que eles tinham que inventar maneiras de adicionar e subtrair, sem empréstimos ou reservas. Essa solicitação trouxe alguma criatividade à classe e uma aluna até então passiva começou a levantar a mão, sentindo-se segura para expor suas idéias. No dia 19 de novembro, ela inventou uma solução para 606 – 149, que indicava que ela estava trabalhando com os números como um todo, que é a seguinte:

$$600 - 100 = 500$$
$$6 - 49 = 43 \text{ negativos}$$
$$500 - 43 = 457$$

O ano caracterizou-se por pontos altos e baixos e o dia 20 de dezembro foi um bom exemplo de decepção. Cheryl disse à classe que tinha 50 dólares para gastar com presentes de natal e queria saber se tinha dinheiro suficiente para comprar os itens abaixo:

3 Batalhas navais (jogos)	U$ 7,99
2 suéteres	U$ 11,99
1 carteira	U$ 15,00
2 bonecas	U$ 8,95

O primeiro voluntário começou a responder dizendo: "Nove mais 9 mais 5 é igual a 23."

O dia 25 de janeiro trouxe o primeiro procedimento realizado da esquerda para a direita, pelos usuários dos algoritmos. Cheryl colocou os seguintes preços na lousa e pediu às crianças que dessem o total:

Blusa	U$ 5,00
Camiseta	U$ 1,95
Suéter	U$ 37,90

Como de costume um aluno perguntou: "Posso começar pela direita?" E um outro, Andrew, reagiu imediatamente dizendo: "É mais fácil começar pela esquerda". Rob rapidamente concordou. Andrew explicou que 37 + 1 + 5 davam 43 dólares, e que 90 centavos mais 10 centavos era mais 1 dólar, e que a resposta então era 44 dólares e 85 centavos.

O dia 29 de janeiro trouxe outro desapontamento. Cheryl escreveu a operação seguinte na lousa, com os números desalinhados, e Andrew espontaneamente chegou à resposta 160, com base no procedimento mostrado abaixo:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 3 \\ 4 \\ +65 \\ \hline \end{array}$$

$$20 + 30 = 50$$
$$40 + 60 = 100$$
$$150 + 10 = 160$$

Quando Cheryl perguntou quem estava de acordo com Andrew, cinco levantaram a mão.

No final do ano, contudo, as crianças tinham progredido consideravelmente. As entrevistas realizadas em maio de 1992 trouxeram resultados melhores que os das entrevistas do ano anterior. O percentual de respostas corretas para 6 + 53 + 185 subiu de 17% em 1991 (veja a última coluna da Tabela 3.3) para 75% em 1992. A amplitude de erros também decresceu para 28, 202, 234, 238 e 243. A Figura 3.2 mostra a relação entre o uso do algoritmo e a freqüência de respostas certas. Pode ser visto que 13 (75%) dos 17 alunos de Cheryl, que usavam o algoritmo em 1991, chegaram a respostas erradas. No ano seguinte, em contrapartida, 15 (75%) das 20 crianças inventaram outros métodos de resolução e conseguiram acertar nas respostas. Essa análise indica que as crianças têm mais chance de acertar se seguirem seu próprio raciocínio.

No problema de subtração, 504 – 306, escrito verticalmente, o percentual de respostas corretas subiu de 39% (em 1991) para 80% (em 1992). As respostas erradas em 1992 foram 90, 108, 200 e 202. Estes números são muito mais razoáveis que os do ano anterior, que podem ser vistos na última coluna da Tabela 3.4. A Figura 3.3 mostra que todas as crianças usaram o algoritmo convencional em 1991 e apenas sete entre 18 alunos (39%) conseguiram a resposta correta. Já em 1992, 16 das 20 crianças inventaram procedimentos, sendo que 15 delas chegaram a respostas certas. Essa análise também demonstra que quando as crianças usam seu próprio raciocínio, elas conseguem ter mais êxito em solucionar problemas.

Figura 3.2
A relação entre usar o algoritmo tradicional e chegar à resposta correta para 6 + 53 + 185.

1991*

	Algoritmo	Procedimentos inventados
Resposta correta	3	0
Resposta errada	13	1

* Uma criança foi excluída dessa análise porque disse que estava pensando que se pedia 185 x 53 + 16.

1992

	Algoritmo	Procedimentos inventado
Resposta correta	0	15
Resposta errada	2	3

Figura 3.3
A relação entre o uso do algoritmo tradicional e a solução do problema 504 – 306.

1991

	Algoritmo	Procedimentos inventado
Resposta correta	7	0
Resposta errada	11	0

1992

	Algoritmo	Procedimentos inventado
Resposta correta	1	15
Resposta errada	3	1

O percentual de respostas certas para 13 x 11 cresceu de 6% (em 1991) para 55% (em 1992). As respostas erradas produzidas em cada ano são as seguintes:

1991: 11, 13, 42, 64, 113, 133, 133, 141, 144 e mais oito crianças que se recusaram a tentar.
1992: 113, 133, 144, 233 e 300.

Muito embora os dados mostrem-se muito melhores em 1992, ainda não pode ser dito que esses quartanistas superaram os danos causados pelo ensino dos algoritmos. Vários deles, na classe, continuavam a resolver cada problema de adição e subtração mecanicamente, tratando cada coluna isoladamente. As crianças mais avançadas cognitivamente chegaram perto de ser desprogramadas no final do ano letivo. Os alunos medianos, no entanto, continuaram atados aos algoritmos e com dificuldades em compreender o valor posicional. É muito mais difícil desprogramar seres humanos que computadores, e os alunos mais fracos foram os que mais sofreram os malefícios dos algoritmos.

As crianças tornam-se dependentes de arranjos espaciais dos dígitos e de outras pessoas

Nas entrevistas, as crianças das classes "Algoritmos" e das classes "Não-algoritmos" deram razões diferentes para não tentar operar com os números. A maioria das respostas das classes "Algoritmos" eram do tipo "Eu preciso de um lápis", "Nós ainda não tivemos desse aí" ou "Não consigo lembrar o que a professora disse". Enquanto essas crianças davam respostas que indicavam dependência em relação a lápis e papel, à disposição espacial dos dígitos e ao professor, alunos que nunca tinham aprendido algoritmos diziam: "Eu não consigo fazer esse", "Eu não sei como" ou davam outra resposta que expressava sua incapacidade para resolver aquele problema dado.

Algumas crianças das classes construtivistas realmente não conseguiam resolver certos problemas. Contudo, elas pelo menos não aprendiam a se tornar dependentes de um outro para resolver suas

questões. Os algoritmos, ao contrário, capacitam o aluno a produzir respostas corretas, mas, por outro lado, corroem sua autoconfiança.

Conclusão

A discussão sobre o ensino de algoritmos, ou a opção por outros métodos mais "informais" ou "alternativos", vem há muito sendo tratada de diversas maneiras. Algumas pessoas defenderam o ensino dos algoritmos com o encorajamento de métodos "alternativos" (Lankford 1974; Conselho Nacional de Professores de Matemática 1989). Outros, no Brasil (Carraher, Carraher & Schliemann 1987; Carraher & Schliemann 1985) e na Inglaterra (Jones 1975), têm questionado a adequação do ensino de algoritmos. Um terceiro grupo defende o fim do ensino dos algoritmos, com urgência, sob diferentes perspectivas. Essa posição pode ser encontrada não apenas nos Estados Unidos (Burns 1992a, 1992/1993; Madell 1985), como também na Dinamarca (Bennedbek 1981), na Inglaterra (Plunkett 1979), na Holanda (Treffers 1987) e na África do Sul (Murray & Olivier 1989; Murray, Olivier & Human 1992; Olivier, Murray & Human, 1990, 1991). Nós concordamos com o terceiro grupo e damos um passo a mais, ao dizer que o ensino dos algoritmos é nocivo para as crianças das séries iniciais.