sa comparação, o professor converter-se-ia em um ator cujo "texto" seria a situação didática por conduzir (evidentemente, não o texto no sentido restrito).

BIBLIOGRAFIA

Artigue, M. (1984): *Contribution à l'étude de la reproductibité des situationes didactiques*, tese de graduação, Universidade de Paris VII.

Brousseau, G. (1986): *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Tese de graduacão, Bordeaux.

Brousseau, G.: "Le contrat didactique: Le milieu", em *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 1990, vol. 9/1, 308-336.

Conne, F. (1990): *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*, em preparação.

Chevallard, Y. (1985): "La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné", La *Pensée sauvage*, Grenoble.

Chevallard, Y. (1988): *Sur l' analyse didactique, Deux études sur les notions de contrat et de situation*, IREM d' Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989): "Le concept de rapport au savoir: rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel", *Séminaire de Didactiques des Mathématiques et de l'Informatique*, Grenoble.

Douady, R. (1984): *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l' enseignement des mathématiques*, tese de graduação, Universidade de Paris VII.

Gras, R. (1979): *Contribution à l' étude expérimental et à l' analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, tese de graduação, Universidade de Rennes.

Laborde, C. (1982): *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l' enseignement mathématique*, tese de graduação, Universidade de Grenoble.

Margolinas, C. (1989): *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d' analyse en didactique des mathématiques*, tesis Universidade de Grenoble.

Perret-Clermont, A.N.; Brun, J.; Conne, F. y Schbauer-Leoni, M. L. (1982): *Décontextualization et recontextualization du savoir dans l' enseignement des mathématiques à des jeunes élèves*, Faculdade de psicologia e de Ciências d Educação, Genebra.

Ratsimba-Rajohn, H. (1981): *Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commesuration et el fractionnement de l'unité, en vue d'élaboration de situations didactiques*, tese do Terceiro Curso, Universidade de Burdeaux.

Rouchier, A. (1991): *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaire: proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation*, Universidade de Orléans, tese de graduação.

Schubauer-Leoni, M.L.(1988): "Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement", em *Interaction didactiques*, n. 8, Seminário de Psicilogía, Facultade de Letras, Universidade de Neuchâtel, Suiça, pp. 63-75.

5

O sistema de numeração: um problema didático

Delia Lerner e *Patricia Sadovsky*,
com a colaboração de *Susana Wolman*

Neste capítulo, desejamos expressar nosso reconhecimento por:

— Emilia Ferreiro, porque suas pesquisas pioneiras — ainda que já clássicas — sobre o sistema de escrita permitiram vislumbrar a reconstrução de outros sistemas de representações por parte das crianças.
— Guy Brousseau, já que suas pesquisas nutrem nosso trabalho e nos obrigam a repensar cada vez mais a didática da matemática.
— Todos aqueles que — como G. Sastre, M. Moreno, e sobretudo, Anne Sinclair — estudaram a representação numérica de uma perspectiva psicogenética.
— Os professores e crianças que, com suas afirmações e suas perguntas, fazem crescer dia a dia a proposta que levamos à prática.
— As escolas que abrigam nosso trabalho: Aequalis, Martin Buber, Numen, Jardin de Infantes Municipal de Wilde.
— Raquel Gutman, por sua colaboração na primeira etapa desta pesquisa.

I

Como e porque se iniciou a pesquisa que é o objetivo destas páginas

O problema:

Tínhamos que encontrar uma resposta. Apesar dos diversos recursos didáticos utilizados, o acesso das crianças ao sistema de numeração continuava sendo um problema. Apesar de nossos esforços para materializar a noção de agrupamentos — não só em base dez, mas também em outras bases —, a relação entre estes e a escrita numérica continuava sendo um enigma para as crianças.

problema 2

Porém, a questão era mais grave ainda: ao entrevistar crianças com as quais não trabalhávamos didaticamente, constatamos uma ou outra vez que os famosos "vai um" e "peço emprestado" — ritual inerente das contas escolares — não tinham vínculo nenhum com as "unidades, dezenas e centenas" estudadas previamente. Esta ruptura manifestava-se tanto nas crianças que cometiam erros ao resolver as contas como naqueles que obtinham o resultado correto: nem umas nem outras pareciam entender que os algarismos convencionais estão baseados na organização de nosso sistema de numeração (Lerner, D., 1992).

P/ resolver? (a)

Estas dificuldades, longe de ser uma particularidade das crianças com as que temos trabalhado, foram detectadas e analisadas no âmbito de estudos realizados em outros países (Kamii, C. e Kamii, M., 1980/1988; Sellares, R. e Bassedas, M., 1983; Bednarz, B. e Janvier, B., 1982). Ao constatar que as crianças não compreendem rigorosamente os princípios do sistema, diversos pesquisadores propuseram alternativas didáticas também diferentes. Desta maneira, Kamii sugere deixar para depois o ensino das regras do sistema de numeração, enquanto Bernarz e Janvier tentam aperfeiçoar o trabalho sobre o agrupamento, explicitando-o através de distintas materializações e formulando situações nas quais agrupar seja significativo, por ser um recurso econômico para contar rapidamente grandes quantidades.

ignoram?

Nenhuma destas duas propostas leva em conta um fato que a didática construtivista não pode ignorar: como a numeração escrita existe não só dentro da escola, mas também fora dela, as crianças têm oportunidade de elaborar conhecimentos acerca deste sistema de representação muito antes de ingressar na primeira série. Produto cultural, objeto de uso social cotidiano, o sistema de numeração se oferece à indagação infantil desde as páginas dos livros, a listagem de preços, os calendários, as regras, as notas da padaria, os endereços das casas...

A pergunta

Como é que as crianças se aproximam do conhecimento do sistema de numeração? Averiguá-lo era um passo necessário para projetar situações didáticas que dessem oportunidade às crianças de colocar em jogo suas próprias conceitualizações e compará-las com as das outras crianças, o que lhes permitiria elaborar diversos procedimentos e explicitar argumentos para justificá-los, descobrir lacunas e contradições em seus conhecimentos, e ofereceria-lhes elementos para detectar os próprios erros — em suma — as obrigaria a questionar e reformular suas idéias para aproximar-se progressivamente da compreensão da notação convencional.

Aqui

Era necessário, então, — antes de elaborar uma proposta didática e submetê-la à prova em aula — realizar um estudo que permitisse descobrir quais os aspectos do sistema de numeração que as crianças consideram relevantes ou de seu interesse, quais as idéias que elaboram acerca dos números, quais os problemas que formulam, quais as soluções que constroem, quais os conflitos que podem gerar-se entre suas próprias conceitualizações ou entre estas e determinadas características do objeto que estão tentando compreender.

método e resultados

As entrevistas clínicas que realizamos com duplas de crianças de cinco a oito anos[1] não só confirmaram nossas expectativas — ao evidenciar a relevância dos conhecimentos construídos pelas crianças, a respeito da numeração escrita —, mas representaram uma agradável surpresa: desde o começo foi possível estabelecer regularidades ao analisar os dados que obtínhamos.

resposta

A aparição e reaparição de determinadas respostas — idéias, justificações, conflitos — foi o detonador que nos levou a esboçar, antes do previsto, possíveis linhas de trabalho didático. É por isso que, enquanto continuávamos realizando entrevistas clínicas, começamos a colocar à prova, em aula, algumas atividades. Como geralmente acontece, quando levávamos à prática cada uma destas atividades, a proposta ia-se ajustando e enriquecendo: por um lado, descobríamos novos problemas que era necessário resolver; por outro, as crianças estabeleciam relações e nos surpreendiam com perguntas ou com procedimentos que abriam novas perspectivas para o trabalho didático.

Resta muito caminho a percorrer: é necessário dar respostas a novas interrogações — surgidas a partir do que agora sabemos — acerca do processo de aproximação da numeração escrita; também é imprescindível que a proposta

[1] Entrevistamos 50 crianças; os integrantes de cada dupla pertenciam à mesma série.

projetada seja objeto de uma pesquisa didática rigorosa que permita elaborar afirmações válidas sobre o ensino e aprendizagem do sistema de numeração, no contexto escolar.

Ainda assim, os resultados já obtidos são suficientes para julgar o enfoque que até agora se tem dado ao ensino do sistema de numeração e para mostrar a eficácia de outra modalidade de ensino, que favoreça uma compreensão muito mais profunda e operacional da notação numérica.

II

História dos conhecimentos que as crianças elaboram a respeito da numeração escrita

Que conclusões poderiam tirar as crianças a partir de seu contato cotidiano com a numeração escrita? Que informações relevantes poderiam obter ao escutar seus pais queixar-se do aumento dos preços, ao tentar entender como é que sua mãe sabe qual das marcas de determinado produto é mais barata, ao ver que seu irmão recorre ao calendário para calcular os dias que ainda faltam para seu aniversário, ao alegrar-se porque na fila da padaria "já estão atendendo a ficha trinta e..." e seu pai tem a trinta e quatro, ao perguntar-se o que tem a ver o endereço que escreveu sua mãe (Rua Córdoba 4859) com a indicação que ela dá a sua irmã ("tens que descer na altura do quatro mil e oitocentos")...? Dito de outro modo: o que poderiam aprender as crianças ao presenciar situações nas quais os usuários do sistema de escrita que as rodeiam denominam, escrevem e comparam números? Perguntas como estas nos fazíamos antes de iniciar a pesquisa.

As perguntas...

Acreditávamos que as crianças construíam desde cedo critérios para comparar números; pensávamos que — muito antes de suspeitar da existência de centenas, dezenas e unidades — alguma relação elas deveriam estabelecer entre a posição dos algarismos e o valor que eles representam; acreditávamos que as crianças detectavam regularidades ao interagir com a escrita de fragmentos da seqüência numérica. Algumas produções não-convencionais que tínhamos visto reiteradamente nas aulas nos levaram a formular duas suposições: que as crianças elaboram critérios próprios para produzir representações numéricas e que a construção da notação convencional não segue a ordem da

hipótese...

10 grupo

seqüência (numérica), ainda que esta desempenhe um papel importante dessa construção.

Para verificar — e também para precisar — estas suposições, projetamos uma situação experimental centrada na comparação de números e outra centrada na produção destes.

método

A primeira era uma variante do jogo da guerra (ou batalha). Utilizamos um baralho de vinte cartas com números compreendidos entre o 5 e o 31 e com um único desenho em cada carta — o que identificava o naipe —, de maneira tal que a comparação se baseasse exclusivamente na escrita numérica. Ao finalizar cada mão, pedíamos as crianças que justificassem as decisões tomadas durante o jogo.

O enunciado que dava inicio à segunda situação era: "Pensem em um número muito alto e escrevam-no". Começava logo uma discussão em que as crianças opinavam sobre a escrita do colega e decidiam qual dos dois tinha escrito um número maior. O que acontecia depois dependia muito das respostas e argumentos proporcionados pelas crianças, e ainda que com a aparência de um "ditado de quantidades", tratava-se de um ditado cuja característica central era o debate das escritas produzidas.

Os dados que recolhemos mostraram uma alentadora coincidência com os obtidos no contexto da pesquisa que estão realizando Bressan, Rivas e Sheuer, e nos permitiram delinear o percurso das crianças em sua tentativa de conhecer o sistema de numeração. Tentaremos explicar os aspectos essenciais desse percurso.

Quantidade de algarismos e magnitude do número ou "Este é maior, você não está vendo que tem mais números?"

A afirmação das crianças entrevistadas mostram que elas elaboraram uma hipótese que poderia explicitar-se assim: "quanto maior a quantidade de algarismos de um número, maior é o número".

compreen. da crianç. 1

Vejamos alguns exemplos:

- Alina (6 anos, primeira série), ao justificar suas decisões no jogo da guerra, afirma que 23 é maior que 5 "porque este (23, porém ela não o nomeia porque desconhece sua denominação oral) tem dois números e tem mais, e este (5) tem um só número".
- Loli (6 anos, primeira série) afirma — na mesma situação — que 12 é maior que 6 "porque tem mais números".

— Alan (6 anos, primeira série) comprova que a hipótese referente à quantidade de algarismos que constitui um número é muito mais forte que qualquer outra consideração vinculada ao valor absoluto de cada algarismo:

(O pesquisador faz uma contra-argumentação que estava prevista no projeto da situação e que foi rejeitada por todas as crianças quando compararam números de um ou dois algarismos.)

Pesquisador	*Alan*
Outro dia uma criança me falou que o maior era este (9), porque aqui havia um dois e um um, e o nove era maior que o dois e o um.	
	(Ri) Quantos anos tinha essa criança?
Depois eu conto. Primeiro diga o que pensas do que falou a criança.	
	Nada a ver. A criança tinha um ano!
Por quê?	Porque o que tem que ver o dois e o um! *Se eles formam um número só.*
Formam um número só?	É sim, por exemplo, *cem são três números* e *formam um número só.*

— No caso de Jonathan e Sebastian (primeira série), a hipótese que vincula a quantidade de algarismos à magnitude do número não se refere só a números de um ou dois algarismos, mas já se generalizava à comparação de números maiores:

Pesquisador	*Jonathan*	*Sebastian*
Agora vou pedir a vocês que escrevam o mil e cinco.	(Ambos escrevem convencionalmente 1005)	
(A Sebastian.) Olha como escreveu		
Se tivessem que explicá-lo a outra criança, o que diriam?	Diria que é com um um, um zero, outro zero e um cinco.	
Outro dia uma criança me disse que o mil e cinco se escrevia assim: 1000 5 / mil cinco		Porque este (1000) é mil e este é cinco.
Acha que está certo assim? Por quê?		Não. Porque o cinco tem que ir aqui (mostra o último zero do mil).
Por que tem que ir aqui?		Porque em vez do zero vai o cinco.
E este (10005) então?	É outro número.	Sim.
E é mais ou menos que 1005?		É mais.
Como é que você sabe?	Porque tem mais números, tem um zero a mais.	Porque tem mais.
Os que têm mais números são maiores?	Sim.	Sim.

Como se pode observar nas últimas linhas do exemplo anterior, o critério de comparação que as crianças construíram funciona ainda quando elas não conhecem a denominação oral dos números que estão comparando.[2] Trata-se, então, de um critério elaborado fundamentalmente a partir da interação com a numeração escrita e de maneira relativamente independente da manipulação da seqüência dos nomes dos números. Trata-se também de uma ferramenta poderosa no âmbito da notação numérica, já que permitirá comparar qualquer par de números cuja quantidade de algarismos seja diferente.

No entanto, esta ferramenta — que já era manipulada por todas as crianças entrevistadas para estabelecer comparações entre números de um ou dois algarismos e que muitas usavam também para comparar números compostos por mais algarismos —[3] não se generaliza de maneira imediata a todas as situações.

Foi um de nossos entrevistados que nos mostrou algumas das dificuldades pelas quais deve atravessar esta generalização: Pablo (6 anos, primeira série) depois de ter afirmado — como as crianças anteriormente citadas — que é maior "o que tem mais números" sempre que se referia a comparar um número de um algarismo com outro de dois e também em algumas situações onde comparavam-se números de dois e três algarismos (824 e 83, 138 e 39, etc.), faz afirmações contraditórias quando trata-se de comparar 112 e 89. De fato, ele diz no começo que 112 é maior que 89 (mostrando-os, não reconhece as denominações) "porque têm mais números", porém logo muda de opinião: "Não, é maior este (89), porque 8 mais 9 é 17, então é mais".

cuidado...

Já que nos outros casos Pablo não tinha recorrido à soma dos valores absolutos dos algarismos e tinha tomado a quantidade de algarismos como critério único para estabelecer a comparação, pensamos que tenha sido a grande diferença entre os valores absolutos dos algarismos o que o levou a colocar em dúvida o critério de comparação que tinha utilizado de maneira estável em todos os casos anteriores, a renunciar a ele e a elaborar outro critério específico para essa situação. É válido perguntar-se porque Pablo não apela explicitamente ao valor dos algarismos que compõem esses números, mas ao resultado que é obtido somando-os.[4]

Questões que ficam...

Ainda que Pablo tenha sido o único dos entrevistados a colocar em jogo outro critério de comparação além daquele baseado na quantidade de algarismos, consideramos significativa a informação que ele aporta porque confirma que — como acontece com outros objetos do conhecimento — a generalização está longe de ser imediata. Ainda mais, o critério alternativo utilizado por Pablo mostra um problema que provavelmente todas as crianças formulam, em determinado momento da construção: como se pode explicar que um número cujos algarismos são todos "baixinhos" (1110, por exemplo) seja maior que outro formado por algarismos "muito altos" (999, por exemplo)?

problema...

Mesmo que seja necessário se aprofundar no estudo do processo através do qual se constrói este critério de comparação — como se concebe, como se

[3] A informação de que dispomos acerca do processo de generalização é ainda insuficiente: nem todos os nossos entrevistados tiveram a oportunidade de comparar números de três ou mais algarismos, porque esta questão foi formulada só em determinadas situações, em função das respostas que as crianças forneciam.

[4] Esta é uma das questões que será necessário continuar pesquisando.

generaliza, que conflitos deve enfrentar —, não existe dúvida que sua elaboração constitui um passo relevante para a compreensão da numeração escrita.

2º grupo

A posição dos algarismos como critério de comparação ou "o primeiro é quem manda"

Ao comparar números de igual quantidade de algarismos, as crianças exibem argumentos através dos quais evidencia-se que elas já descobriram que a posição dos algarismos cumpre uma função relevante em nosso sistema de numeração:

— Lucila (5 anos, jardim), depois de afirmar que 21 é maior que 12, o justifica assim: "Porque o um (no 12) é primeiro e o dois é depois; porque (no 21) o dois é primeiro e o um é depois".
— Nádia (6 anos, primeira série) não consegue explicar como se deu conta de que 31 é maior que 13. Pergunta-se-lhe então como poderia explicá-lo a outra criança e ela responde: "Que preste atenção onde está o 3 e onde está o 1, ou onde está o 1 e onde está o 3".
— Alina, e sobretudo Ariel (6 anos, primeira série), são mais explícitos:

Pesquisador	*Alina*	*Ariel*
Por que este? (21) (O pesquisador pede justificativa da decisão que as crianças tomaram quando números comparados eram 12 e 21).		Porque este (21) é mais alto que este (12).
Porém são os mesmos números.	Sim, porém ao contrário.	Invertidos.
Invertidos? E o que isso tem a ver?		Tem muito a ver. Este (o 2 de 21) é mais alto que este (o 1 de 12) e
se		diferencia pelo primeiro.
E por que será que se diferencia pelo primeiro?		Porque sim.
Não existe uma razão?		Eu não sei!

Pesquisador	*Alina*	*Ariel*
Vocês sabem que número é este?		Vinte e um.
E este ?		Doze.
E, a partir daí, podem encontrar alguma coisa para descobrir qual é mais alto?	Sim, porque este (21) está depois e este (12) está primeiro.	
Onde está primeiro?		Fazemos a conta. Olha: um, dois, três... (continua contando até doze) aqui está o doze... treze, quatorze... (segue contando até vinte e um) Vinte e um. Viu? Fizemos a conta?
De acordo. Agora você me convenceu.	(Logo após, ao comparar 21 e 23, Ariel diz que este último é maior, porque três é mais que um e, diante de uma pergunta do pesquisador, esclarece que neste caso se fixa no segundo número "porque no primeiro há um dois e um um.")	

Outros alunos explicitam com maior clareza ainda como deve aplicar-se o critério de comparação baseado na posição dos algarismos. Vejamos Guillermo:

Guillermo	*Yael*
	(Já decidido que 21 é maior que 12.)
	Tem os mesmos números. Só que aqui o dois está antes

Guillermo	*Yael*
Sim, os dois têm valor. Você pode olhar o de trás. *Porém em primeiro lugar olha o da frente.* [...] Se o primeiro número de uma carta é igual ao primeiro de outra carta e o segundo é um mais alto que o outro, aí sim tem importância o segundo.	

As crianças citadas já descobriram — além do vínculo entre a quantidade de algarismos e a magnitude do número — outra característica específica dos sistemas posicionais: o valor que um algarismo representa, apesar de ser sempre o mesmo, depende do lugar em que está localizado com respeito aos outros que constituem o número. Sabem também que, se compararem dois números de igual quantidade de algarismos, será necessariamente maior aquele cujo primeiro algarismo seja maior e por isso podem afirmar — como muitas das crianças entrevistadas o fizeram — que "o primeiro é quem manda". Além disso, sabem que, quando o primeiro algarismo das duas quantidades é o mesmo, é preciso se apelar ao segundo para decidir qual é maior.

Chama a atenção o fato de que para muitas crianças os argumentos estritamente relacionados à numeração escrita tenham prioridade sobre os vinculados à seqüência numérica oral. Alina e Ariel, por exemplo, justificam originalmente suas afirmações apelando à posição dos algarismos nos números escritos ("Estão ao contrário", "Diferencia-se pelo primeiro"), e só apontam argumentos referentes à seqüência oral ("sim, porque neste (21) está depois e neste (12) está primeiro") quando o pesquisador as estimula a fazê-lo.

No entanto, tal como o observamos em relação às hipóteses referentes à quantidade de algarismos, o critério de comparação baseado na posição dos algarismos está longe de construir-se de uma vez só e para sempre, já que sua generalização também requer a superação de alguns obstáculos. É o que nos mostra Alina, que — apesar de ter aplicado consistentemente este critério em quase todas as situações — tropeça com uma dificuldade quando se trata de comparar 25 e 16:

(A situação se produz durante o jogo. O naipe de Alina tem o número 25, o de Ariel o número 16.)

Experimentador	*Alina*	*Ariel*
Quem ganhou o jogo?	Ganhou Ariel.	Não, ganhou ela.
	Ele, porque este (25) tem um dois e um quatro (!), e este (16), um um e um seis[...]. Este (25) tem um número a menos, e este (mostrando o 6 do 16), um número a mais.	Não! Porque se conta com o primeiro.

obstáculo ①

Alina parece sustentar aqui que é maior o número que contém o algarismo mais alto, independentemente do lugar em que este esteja posicionado. Parece que, também nesta situação, o valor absoluto dos números pode fazer duvidar da validade de um critério que se considerava válido para muitas outras situações.

Por outro lado, como o mostram claramente algumas respostas de Ariel ("porque sim", "eu não sei!"), o conhecimento que as crianças têm a respeito da variação do valor dos algarismos em função do lugar que ocupam não se faz acompanhar — e muito menos preceder — pelo conhecimento das razões que originam esta variação. Estas crianças não suspeitam ainda que "o primeiro é quem manda" porque representa agrupamentos de 10, se o número tem dois algarismos, de 100, se tem três... enquanto que as seguintes representam potências menores da base 10.

$1 = 10$
$100 = 10^2$
$1000 = 10^3$

Ainda não descobriram as regras do sistema (o agrupamento usando o recurso da base 10), porém isto não lhes impede, em absoluto, de elaborar hipóteses referentes às conseqüências dessa regra — a vinculação entre a quantidade de algarismos ou sua posição e o valor do número — e utilizá-las como critérios válidos de comparação de números. A partir destas hipóteses, as crianças poderão, sem dúvida, formular perguntas — e o professor poderá enunciá-las — questões que as conduzirão, através de aproximações sucessivas, a descobrir a regra do sistema.

De fato, enquanto que Ariel não tenta justificar sua afirmação — contesta com um lacônico "porque sim" quando lhe é perguntado porque "se diferencia pelo primeiro número" —, outras crianças já encontraram uma explicação desse critério que elas mesmas elaboraram. É o que nos mostra, por exemplo, Guillermo (seis anos, primeira série), que se vê obrigado a explicitar sua argumentação para convencer a sua colega:

Aqui!

Pesquisador	*Guillermo*	*Yael*
Qual é o mais alto? (estão sendo comparados 25 e 31).	Este (31).	A mim me parece que é este (25), porque tem um dois e um cinco e este (31) tem um três e um um. Maiores são estes números (mostrando os algarismos de 25).
	Este (31) é maior. Porque? Porque olha: não tem nada a ver o segundo número com o primeiro, porque aqui três e lá (2 de 25) dois. Dois é menos que três. Isto é trinta e um e aquilo é vinte e cinco, não trinta e cinco.	
(A Yael) O que você acha do que ele disse? Você entendeu?		Não (rindo).
Explica melhor, Guillermo.	Olha, primeiro vem o dez e segundo pulas dez, dez, dez, assim, não? Então se conta, dez, vinte, trinta, tiramos cinco e fica vinte e cinco e ali (31) no trinta colocamos um, e fica trinta e um.	

Guillermo ainda não tinha ouvido falar de "dezenas" (acaba de ingressar na primeira série); nem sequer afirma que o primeiro algarismo de um número de dois algarismos se refere a "dezes". Porém, ele sabe muito bem que esse primeiro algarismo refere-se a alguma coisa da ordem dos "vinte", "trinta" ou "quarenta", no lugar de representar simplesmente "dois", "três" ou "quatro", e sabe também que esses números — vinte, trinta, etc. — se obtém contando de dez em dez na ordem da seqüência.

Sem dispor da extraordinária manipulação operatória que reflete este último argumento de Guillermo, outras crianças têm proporcionado argumentos semelhantes ao primeiro que ele deu. Seguramente, este tipo de justificação se torna possível quando as crianças conseguem coordenar o que descobriram na escrita numérica — que o valor de um algarismo varia em função da posição que ocupa — com a informação que lhes dá a seqüência numérica oral, a partir da qual eles podem estabelecer intervalos constituídos por "vintes", "trintas", etc.

Aqui outra pergunta.

No entanto, o que acontece quando as crianças tentam misturar os conhecimentos que elas construíram com os que lhes foram ensinados na escola? Para responder a esta pergunta, usaremos como exemplo as únicas crianças de primeira série que incluíram nas suas respostas a palavra "dezenas".

Pesquisador	*Loli*	*Alan*
(As crianças afirmaram que o vinte e um é maior que doze)		
Como é que vocês sabem que é maior, se os dois têm os mesmos números?	Aqui (21) o dois está na frente e lá (12) está atrás.	Sim.
Eu não entendo muito bem, já que são os mesmos números.	Sim, porém não estão na mesma ordem.	Isto (12) é uma dezena.
Qual?		Ah! Não! É uma dúzia.
E vinte e um?		Eu não sei... O que é vinte e um, uma dezena? Eu não
sei!		
		Acho... ou não?
Uma dezena?	Sim, tem uma, duas. Aqui (mostra o 2 do 21).	Não, não tem nenhuma dezena. O um não é nenhuma dezena e o dois também não.
	O vinte sim, no vinte sim há duas dezenas.	

Por que Alan introduz o termo "dezena"? Talvez porque suspeite da existência de alguma relação entre esse termo e o valor do algarismo que aparece colocado "na frente" nos números de dois algarismos. Porém, esta suspeita é suficientemente vaga, para que ele possa afirmar que 21 "não tem nenhuma dezena, o um não é nenhuma dezena e o dois também não".

No caso de Loli, ocorre algo diferente: ainda que ela não utilize espontaneamente o conceito de dezena — mas a posição dos algarismos — para explicar porque o 21 é maior que 12, parece compreender que o 2 do 21 representa duas dezenas. Sua resposta final mostra claramente como chegou a compreendê-lo: pode entender que em 21 há duas dezenas porque esse 2 não significa para ela "dois", mas sim "vinte".

É válido perguntar então: aprender o conceito de dezena ajuda realmente a conhecer os números? Ou é o conhecimento dos números — e de sua escrita — que ajuda a compreender o conceito de dezena?

A

3º

Alguns números especiais: o papel dos "nós"

A apropriação da escrita convencional dos números não segue a ordem da série numérica: as crianças manipulam em primeiro lugar a escrita dos "nós" — quer dizer, das dezenas, centenas, unidades de mil..., exatas — e só depois elaboram a escrita dos números que se posicionam nos intervalos entre estes nós.

Vejamos primeiro a resposta das crianças:

Pesquisador	*Gisela*
Escreva um número, o que você tiver vontade, que pareça bastante alto.	(Escreve 1000)
Qual é esse número?	O mil.
E o dois mil como se escreve?	(Escreve 200)
Isso é dois mil?	(Agrega um zero a sua escrita anterior.)
E este (200) qual é?	Duzentos.
E este? (cobrindo um 0 do 1000)	O cem.
E o três mil?	(Escreve 3000)
E como você escreveria o dois mil e quinhentos?	(Grande desconcerto.) Não me lembro.
E o quinhentos?	(Escreve 005)
Aqui tem o dois mil (mostrando uma escrita anterior) e ali o quinhentos... Isso poderia servir para você escrever o dois mil e quinhentos?	Sim... (Porém não se anima)

O caso de Nádia (seis anos, primeira série) é ainda mais claro:

Pesquisador	*Nádia*
Agora vou pedir que você escreva um bem alto.	Muito alto?
Sim.	Vou escrever no máximo mil (Escreve 900).
Que número é esse?	Novecentos.
E o mil como é ?	(Escreve 1000)
Como você acha que seria o dois mil?	(Escreve 2000)
E quatro mil?	(Escreve 4000)
Nove mil?	(Escreve 9000)
Dez mil?	(Escreve 10.000)
Me diz... Mil e cem, como acha que é?	(Muito surpresa) Mil e cem? Para mim esse número não existe.
Não existe?	(Pensa um longo tempo e logo escreve 1000100)
E mil e quinhentos?	(Escreve 1000500)

Se bem que a maioria das crianças entrevistadas já escrevesse de forma convencional os "nós" das dezenas, das centenas e das unidades de mil, obtivemos algumas respostas que fornecem indícios sobre o caminho que as crianças percorrem para elaborar essas escritas. Observamos, por exemplo, as produções e reflexões de Christian (5 anos, pré-escolar) na seguinte situação:

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
[...] E como vocês escrevem o cem?	Ah! Não, eu posso escrever muitas vezes o cem.	
Como é?	Um um (escreve) e dois zeros (os escreve).	(Escreve 100)

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
E o duzentos?	Eu não sei escrevê-lo.	Aqui está o duzentos (escreve 200).
E o trezentos?	Eu vou escrever todos os números desde o cem até onde se termina o cem. 100 100 200 cem cento e um cento e dois	(Escreve 300).
Este (marcando o primeiro número escrito por Christian) é o cem ?	Sim.	
E qual é o cento e um?	Este (marca seu segundo número: 100).	
E é igual a este? (mostrando o primeiro)	Sim..., não, porque este (mostrando o primeiro 100) tem o zero mais pequeninho, e aquele (marcando o segundo) tem o zero maior.	
Ah! O que tem o zero maior é o cento e um? (É correto!!)	Sim, e o um também é maior.	
Ahah! E cento e cinco, como seria?	Espera que eu quero escrever desde o um até onde termina o cem.	(Escreve 10Ƨ).
Bom, quando terminar, nos avisa. (Enquanto isso se pede a Rubén que escreva cento e trinta, cento e trinta e oito, duzentos e vinte e três, quinhentos.)	(Christian escreveu: 100 100 200 3000 400)	(Escreve: 130 138 223 Ƨ00.)

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
E você, Christian, poderia escrever quinhentos?	Quem não vai saber escrever o quinhentos? Tomara que o cinco me saia bem. (Escreve 500.)	
Bom, explica-me o que você escreveu antes.	(Lê) 100 100 200 300 400 cem / cento e um / cento e dois / cento e três / cento e quatro	
Você falou antes que ia escrever até se acabar os cem. Quando se acaba o cem?	(Pensa um tempo) Ia escrever até cento e nove. (Agrega a sua série 500.) 100 100 200 300 400 500 É o cento e cinco (mostrando o quinhentos). É mesmo, olha! (mostrando na escrita anterior 500 que ele mesmo tinha produzido.)	
Qual era esse?	Quinhentos.	
E este? (Mostrando o que acaba de produzir).	Cento e cinco.	
E você acha que se pode escrever quinhentos e cento e cinco igual?	Não.	
E como nos damos conta de qual é qual?	Faço um grande e o outro pequeninho.	
Com os mesmos números?	Neste (o que tinha interpretado anteriormente como quinhentos) faço um traço: $\underline{500}$ e o outro deixo sem risco.	

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Com o traço qual é?	Quinhentos.	
E sem o traço?	Cento e cinco.	(Tinha escrito por enquanto, a pedido do pesquisador sempre em forma convencional: 110, 900, 932, 907.)
E o mil?	Eu sei escrevê-lo.	
Vejamos, como escreveriam?	(Escreve 1000.) Como não vou saber escrever o mil se antes escrevi o cem mil! (Efetivamente, o tinha escrito assim: 1001000.)	1000.

Christian já manipulava a escrita convencional da segunda e da terceira potência da base (100 e 1000). Como utiliza o conhecimento da escrita de cem para produzir os números seguintes? Parece que não a utiliza como base para produzir os outros "nós" das centenas — ele diz que não sabe escrever duzentos, e quinhentos parece sempre uma forma fixa, provavelmente conhecida através das notas de 500 australes[5] —, mas para fazer hipóteses acerca da escrita dos números compreendidos entre cem e cento e dez. Ele supõe que estes números terão dois zeros — como cem — e que se diferenciam de cem pelo algarismo inicial. O problema é que esta hipótese não lhe permite diferenciar — utilizando números diferentes — cem de cento e um, e seguramente é por isso que apela ao tamanho para diferenciá-los. Também nos parece surpreendente constatar que o fato de que conhecer a escrita convencional de quinhentos não o leva a duvidar de sua hipótese — entretanto, continua afirmando que quinhentos representa cento e cinco —, mas a empregar um recurso não-numérico para diferenciar as duas escritas.[6]

Por outro lado, várias crianças nos forneceram — trabalhando em aula — escritas aparentemente inversas às de Christian, porém cujo significado nos parece semelhante: elas escrevem quatrocentos como 104, trezentos como 103, seiscentos como 106. Estas crianças pensam que a escrita dos outros "nós" das centenas

[5] Quando Christian foi entrevistado, os australes ainda estavam em circulação.

[6] Ainda que o recurso que utiliza Christian possa parecer exótico, talvez seja mais pertinente ao lembrarmos que outros sistemas de numeração — como por exemplo o romano — tem apelado a grafias do mesmo tipo para diferenciar números (V e $\overline{V}$).

conserva características da escrita de 100: também tem três algarismos, porém, neste caso, são mantidos os dois primeiros — o um e o zero iniciais de cem — e a diferença é expressa variando o último número.

Todos estes dados sugerem que as crianças apropriam-se em primeiro lugar da escrita convencional da potência da base (100, que quer dizer 10 ao quadrado, neste caso), e que a escrita dos outros "nós" correspondentes a essa potência é elaborada a partir desse modelo, conservando a quantidade de algarismos, mantendo dois dos que compõem cem e variando o outro. O caso de Christian indica que um procedimento semelhante poderia ser utilizado — para reconstruir a escrita dos números posicionados entre 100 e 110. O problema que se apresentará então será o de encontrar uma maneira de diferenciar numericamente a escrita de duzentos e a de cento e dois, a de quinhentos e cento e cinco, etc. A busca de diferenciação seguramente conduzirá a descobrir que nos casos de nós (200, 300, etc.) o que varia — em relação com a escrita do cem — é o primeiro número, enquanto que no caso de 101...109, o que varia é o último número.

4º grupo

O papel da numeração falada

As crianças elaboram conceitualizações a respeito da escrita dos números, baseando-se nas informações que extraem da numeração falada e em seu conhecimento da escrita convencional dos "nós". Aqui!

Para produzir os números cuja escritura convencional ainda não adquiriram, elas misturam os símbolos que conhecem, colocando-os de maneira tal que se correspondam como a ordenação dos termos na numeração falada.

Vejamos algumas escritas e justificações das crianças entrevistadas que ilustram claramente o que tentamos dizer:

— Lucila e Santiago (os dois têm cinco anos e estão no jardim de infância) escrevem:

108 109

As duas interpretam suas escritas como "dez e oito" e "dez e nove" respectivamente.

— Yael faz algo semelhante, porém nos explica:
Enquanto está anotando sua pontuação no jogo da guerra, anota, "dez e oito" como 108 e justifica dizendo que dez e oito se escreve assim "porque tem um dez, que é um um e um zero, então se colocam os dois com o oito".

Guillermo — seu colega, que escreve convencionalmente os números de dois algarismos — intervém: "Não! Porque é como acontece com o vinte ou com o trinta... Porque o zero é usado para o trinta, porém não se usa para o trinta e um, nem para o trinta e dois, nem para o trinta e três. [...] De três números não se pode, não se pode [...] porque o cem se escreve assim [100]". Yael o escuta atentamente, porém depois de um tempo escreve trinta e quatro como 304 e — ao olhar a escrita convencional de Guillermo,(34) — afirma: "para mim, se pode fazer das duas maneiras".

— Martín (6 anos, primeira série) escreve:

700 sete- centos	25 vinte e cinco	1000 mil	800 oito- centos	32 trinta e dois
8000 oito mil	200 duzen- tos	6000 seis mil	300 trezen- tos	45 quarenta e cinco

No último caso corrige sua escrita depois de interpretá-la e faz assim: 630045

— Dan (6 anos, primeira série) escreve 600030045; igual a Martín, considera incorreta sua escrita, porém a corrige de outra forma: 63045.

— Daniela (5 anos, pré-escolar), que escreve convencionalmente os números de dois e três algarismos que lhe são propostos, e também um número de quatro algarismos (1036), faz algo diferente quando pedimos a ela que escreva mil quinhentos e trinta e seis. Sua produção original é: 1000 500 36

que ela lê assim:	mil	quinhen- tos	trinta e seis

A seguir escreve oito mil quinhentos e trinta e quatro: 8 1000 50034, depois faz a retificação: 8 1000534. Para quatro mil cento e quarenta e cinco produz: 41000145.

— Christian — que, como vimos anteriormente, escreve de maneira convencional cem e mil, porém produz os números intermediários entre 100 e 110 baseado em uma hipótese que lhe é própria — escreve em forma convencional, também, um milhão (1.000.000). Porém, quando lhe pedimos que escreva quatro números, suas produções são as seguintes:

mil cento e cinco	1000	100	5
dois mil	2	1000	
dez mil	10	1000	
cem mil	100	1000	

Ao fazer a comparação de sua escrita de cem mil com a de Rúbem (100.000), Christian considera possível as duas escritas: "se eu tirasse este (o 1 de 1000) e colocasse um ponto, igual diz cem mil". Mas em seguida afirma: "também sei escrever um milhão e dez" e escreve: 100000010. "Quando você escreve um milhão e dez — acrescenta — não pode tirar o um (do dez), porque não sabes se é esse. E, então, como adivinha que número é? Não sabe que é 10?". (Em outras palavras, este um não pode ser trocado por um ponto, como acontece com o 1 de 1000 em cem mil.)

Aqui!

A hipótese segundo a qual a escrita numérica é o resultado de uma correspondência com a numeração falada, conduz as crianças a resolver notações não-convencionais. Por que isto ocorre? Porque a diferença da numeração escrita da numeração falada está em que está última não é posicional.

Assim, se a organização da numeração falada fosse posicional, a denominação oral correspondente a 4705, por exemplo, seria "quatro, sete, zero, cinco", no entanto, a denominação realmente utilizada para este número explicita, além dos algarismos quatro, sete e cinco, as potências de dez correspondentes a tais algarismos (quatro *mil setecentos* e cinco).

Outra questão que deve ser levada em consideração é a das operações racionais envolvidas na numeração escrita.

Aqui!

Na numeração falada, justaposição de palavras supõe sempre uma operação aritmética, operação que em alguns casos é uma soma (mil e quatro significa 1000 + 4, por exemplo) e em outras situações uma multiplicação (oitocentos significa 8 × 100, por exemplo). Na denominação de um número, estas duas operações em geral aparecem combinadas (por exemplo, cinco mil e quatrocentos significa 5 × 1000 + 4 × 100) e — como que para complicar a vida de quem tente compreender o sistema — uma simples mudança na ordem de enunciação das palavras indica que foi mudada a operação aritmética envolvida: cinco mil (5 × 1000) e mil e cinco (1000 + 5), seiscentos (6 × 100) e cento e seis (100 + 6). Para piorar a situação, a conjunção "e" — que lingüisticamente representa adição — só aparece quando se trata de reunir dezenas e unidades.

Sendo assim, podemos afirmar que as escritas não-convencionais produzidas pelas crianças são efetivamente aditivas e/ou multiplicativas? Quando elas escrevem duzentos e cinqüenta e quatro como 200504, pensam que o valor total desse número se obtém somando 200 + 50 + 4?; quando escrevem 41000 para quatro mil, estão representando a idéia de que o valor total desse número se obtém multiplicando 4 × 1000? Compreendem as crianças as operações que parecem estar envolvidas em sua escrita? Ou então, estas resultam simplesmente do estabelecimento de uma correspondência com a comunicação falada?

Interessa-nos encontrar respostas para as perguntas formuladas, porque a soma e a multiplicação pelas potências da base também estão envolvidas na numeração escrita convencional. Portanto, se as crianças descobrissem as operações envolvidas na numeração falada, este conhecimento seria importante para entender como funciona a numeração escrita.

Pergunta importante

Aqui!

A numeração escrita é ao mesmo tempo mais regular, mas mais hermética que a numeração falada. É mais regular porque a soma e a multiplicação são utilizadas sempre da mesma maneira: se multiplica cada algarismo pela potência da base que corresponde, se somam os produtos que resultaram dessas multiplicações.[7] É hermética porque nela não existe nenhum vestígio das operações aritméticas racionais envolvidas e porque — de modo diferente do que acontece com a numeração falada — as potências da base não são representadas através de símbolos particulares, mas só podem ser deduzidas a partir da posição que ocupam os algarismos.

Temos iniciado pesquisas destinadas a responder às perguntas anteriormente citadas. Os dados recolhidos até agora mostram que as crianças que produzem notações que se vinculam com a numeração falada podem ter descoberto ou não as relações aritméticas subjacentes a tal notação: enquanto que algumas delas vinculam — por exemplo — a escrita 200504 à soma de 200, 50 e 4, outras a justificam apelando exclusivamente às palavras que constituem a denominação

[7] $4815 = 4 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.

oral do número representado. Estes resultados — ainda muito insuficientes — levam a supor uma possível progressão desde uma simples correspondência entre o nome e a notação do número, até a compreensão das relações aditivas e multiplicativas envolvidas na numeração falada.

Pergunta

As escritas numéricas não-convencionais produzidas pelas crianças são feitas, então, à imagem e semelhança da numeração falada. Neste caso, quem adere à escrita não-convencional o faz de maneira definitiva ou é simultaneamente partidário da notação convencional?

Resposta:

Nas escritas numéricas realizadas por cada criança no transcurso das entrevistas, coexistem modalidades de produção diferentes para números posicionados em diferentes intervalos da seqüência. De fato, crianças que escrevem convencionalmente qualquer número de dois algarismos (35, 44, 83, etc.) produzem escritas correspondentes com a numeração falada quando trata-se de centena (10035 para cento e trinta e cinco, 20028 para duzentos e vinte e oito, etc.). Da mesma maneira, crianças que escrevem convencionalmente qualquer número de dois e três algarismos apelam à correspondência que existe com a forma oral quando trata-se de escrever milhares: escrevem — por exemplo — 135, 483 ou 942 em forma convencional, porém representam mil e vinte e cinco como 100025 e mil trezentos e trinta e dois como 100030032 ou 1000332.

No entanto, a coexistência de escritas convencionais e não-convencionais pode também estar presente em números da mesma quantidade de algarismos: algumas crianças escrevem convencionalmente números compreendidos entre cem e duzentos (187, 174, etc.), porém não generalizam esta modalidade às outras centenas (e registrando então 80094 para representar oitocentos e noventa e quatro ou 90025 para novecentos e vinte e cinco). Por outro lado, muitas crianças produzem algumas escritas convencionais e outras que não o são, dentro da mesma centena ou de uma mesma unidade de mil: 804 (convencional), porém 80045 para oitocentos e quarenta e cinco; 1006 para mil e seis, porém 1000324 para mil trezentos e vinte e quatro.

Aqui!

Indiquemos, finalmente, que a relação numeração falada/numeração escrita não é unidirecional: assim como a numeração extraída da numeração falada intervém na conceitualização da escrita numérica, reciprocamente os conhecimentos elaborados a respeito da escrita dos números incidem nos juízos comparativos referentes à numeração falada. Vejamos, por exemplo, o que ocorre com Christian (5 anos) ao comparar cem mil e cem:

Pesquisador	*Christian*
Como você escreveria mil e cem?	Não, cem mil.
Cem mil é um número. Mil e cem é outro número?	Não, é igual. Ao inverso.
Porém é o mesmo número? Por exemplo, se eu disser que eu tenho cem mil australes, é a mesma coisa?	Não, porque está ao contrário.
E quando tenho mais? Quando tenho cem mil ou quando tenho mil e cem australes?	Quando tenho mil e cem.
E como é que você sabe se mil e cem é mais?	Porque em mil e cem o mil está primeiro e o mil é maior que o cem.
	(Respostas semelhantes se produzem depois ao comparar dez mil e mil e dez.)

Christian aplica à numeração falada um critério que, como sabemos, elaborou para a numeração escrita: "O que manda é o primeiro". O raciocínio subjacente ao seu argumento parece ser o seguinte: cem mil e mil e cem estão compostos os dois pelos mesmos símbolos — mil e cem (ou 1000 e 100) —; para saber qual é maior, têm que prestar atenção no que fica na frente. Christian supõe que esta regra — válida para a numeração escrita — também é válida para a numeração falada e é esta suposição, de uma coerência maior que a existente, que o induz ao erro.

Evidentemente, não é tarefa fácil descobrir o que está oculto na numeração falada e o que está oculto na numeração escrita, aceitar que uma coisa não coincide sempre com a outra, determinar quais são as informações fornecidas pela numeração falada que resulta pertinente aplicar à numeração escrita e quais não, descobrir que os princípios que regem a numeração escrita não são diretamente transferíveis à numeração falada...

E, no entanto, apesar de todas estas dificuldades inerentes ao objeto de conhecimento, as crianças apropriam-se progressivamente da escrita convencional dos números que antes realizavam a partir da vinculação com a numeração falada. Como o fazem? É o que tentaremos demonstrar no próximo ponto.

Pergunta

Do conflito à notação convencional

3º grupo

Duas das conceitualizações que descrevemos nos pontos anteriores levaram as crianças a conclusões potencialmente contraditórias:

— por um lado, elas supõem que a numeração escrita se vincula estritamente à numeração falada;
— por outro lado, sabem que em nosso sistema de numeração a quantidade de algarismos está relacionada à magnitude do número representado.

A primeira destas conceitualizações aplica-se fundamentalmente à escrita de números posicionados nos intervalos entre "nós", enquanto que os últimos são representados de maneira convencional. Em conseqüência, as escritas produzidas pelas crianças para os números que se posicionam entre dois "nós" determinados terão mais algarismos que os números que representam os mesmos "nós": elas escreveram convencionalmente, por exemplo, 2000 e 3000, porém dois mil setecentos e oitenta e dois será representado como 200070082 (ou eventualmente 2000782).

A criança poderia aceitar que dois mil setecentos e oitenta e dois se escreva com mais algarismos que dois mil, já que o primeiro é maior que o segundo. Porém, se ela pensa simultaneamente que um número é maior quanto mais algarismos tenha, como é que pode aceitar que dois mil setecentos e oitenta e dois se escreva com mais algarismos que três mil? Deste modo, a escrita produzida a partir de uma de suas conceitualizações — a vinculação com a numeração falada — resulta inaceitável se avaliada a partir de outra de suas conceitualizações — a vinculação entre quantidade de algarismos e magnitude do número.

o conflito

Como a criança manipula esta contradição entre suas conceitualizações? Toma consciência dela de imediato? Em que é que se apóia para resolvê-las?

Os dados recolhidos até agora sugerem que, no princípio, a contradição detectada pelo observador não se constitui em um conflito para as crianças. Vejamos alguns exemplos:

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Agora vou pedir-lhes que escrevam quatro mil cento e três.	410001003	41000103

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Qual é maior, quatro mil ou quatro mil cento e três?	Sempre é maior o de quatro mil.	
Qual é maior?	Porque quatro mil é quatro e três zeros, porém quatro mil cento e três tem mais de três zeros; porque olha, conta: um, dois, três, quatro, cinco (enquanto conta os zeros de sua escrita).	
E o cinco mil, como é?	51000.	5000.
Vamos discutir qual é a diferença que há entre o que vocês dois anotaram.	(Para Christian é o mesmo.)	(Segundo Rubén não é preciso pôr o um).
	Não lembra que antes dissemos que podíamos colocar o mil com o um ou sem o um? Não lembra?	
Parece que Rúbem não está de acordo. Então, entre quatro mil cento e três e cinco mil, qual é maior?	Sempre vai ser maior este. (410001003)	Quatro mil cento e três.
Quatro mil cento e três é maior que cinco mil?	Não..., hum..., sim. Sim, este é maior, porque olha que diferença: Três zeros ali, e aqui... Quantos zeros?	
Ou seja...	(Interrompe) Ah!, porém uma coisa, mais que um milhão NÃO é, não pense que é o último número infinito.	

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Não, não acredito. Podem me explicar um pouco mais por que o quatro mil cento e três é maior que o cinco mil?	Sim, porque este (5100) tem menos zeros.	
E você, Rubén, o que pensa disso?		Este é maior (4000103).
Por quê?		Porque é maior.
Por quê tem mais números?		Sim.

Chistian e Rubén centram-se exclusivamente na quantidade de algarismos das escritas que eles mesmos produziram e parecem ignorar qualquer outra consideração a respeito do valor dos números representados. Pensam realmente que quatro mil cento e três é maior que cinco mil? Ou sabem que cinco mil é maior que quatro mil cento e três, porém não podem fazer uso aqui deste conhecimento? A dúvida momentânea de Christian (Não..., Hum..., Sim [...]), neste caso, é o único indício que ele poderia ter algum motivo para questionar o juízo que emite baseando-se nas quantidades de algarismos.

As respostas de Gisela (5 anos, pré-escolar) mostram mais claramente que não é suficiente conhecer o valor dos números para tomar consciência do conflito, e — menos ainda — para harmonizar as conclusões fundamentadas na quantidade de algarismos:

Pesquisador	*Gisela*
(Se está trabalhando com dinheiro, Gisela contou notas de dez e de cem.)	
E como é que você junta mil e quinhentos?	Com esta e com esta (pega uma nota de mil e outra de quinhentos).
Muito bem. E mil e quinhentos como se escreve?	Não sei.
Tente, como você achar que se faz.	(Pensa um longo tempo.)
Que números você acha que tem mil e quinhentos?	[...]

Pesquisador	*Gisela*
Terá um?	Sim.
E cinco?	Sim.
E zero?	Sim.
Então, escreva como lhe parecer conveniente.	(Escreve 1000500) É muito comprido.
Parece muito comprido para ser mil e quinhentos?	Sim.
É ou não é mil e quinhentos?	Sim, é.
Tá bom. Como você escreveria dois mil e quinhentos?	(Escreve 2000500.)
Escute uma coisa. Qual é maior, dois mil e quinhentos ou três mil (mostrando 3000, que Gisela tinha escrito convencionalmente anteriormente).	Dois mil e quinhentos.
Faz três mil com o dinheiro.	(Pega três notas de mil.)
E dois mil e quinhentos?	(Pega duas notas de mil e uma de quinhentos.)
E qual é maior: duas notas e uma assim (duas de mil e uma de quinhentos) ou três assim (três de mil)?	Três assim (mostrando as notas de mil).
Agora olha bem como estão escritos. Você disse que este (3000) é três mil e este (2000500) é dois mil e quinhentos, não é?	Sim.
E qual é maior?	Este (mostra 2000500).
E com o dinheiro (mostrando as pilhas de notas), qual é maior?	Três mil.
E aqui (mostrando as escritas) qual é maior?	Este (2000500).
E não tem importância que com o dinheiro seja maior este (monte de três mil)?	Não, não importa.

Sem dúvida, Gisele sabe — ao menos com referência ao dinheiro — que três mil representa uma quantidade maior que dois mil e quinhentos. No entanto, quando lhe pedimos que compare os números levando em conta a representação escrita que fez deles, parece "esquecer" o significado e centrar-se unicamente na quantidade de algarismos que produziu. Além disso — e apesar de ela mesma ter indicado que sua escrita "1000500" era muito comprida para representar esse número —, parece não dar-se conta da contradição entre suas afirmações sucessivas. É como se ela pensasse: "se presto atenção nas notas, três mil é maior; se me fixo nos números escritos, 2000500 é maior".

Deste modo, ao centrar-se alternativamente nos números referidos e nos significantes — sem relacionar em momento algum estes dois parâmetros —, Gisela evita tomar consciência do conflito que seria formulado se pudesse levar em conta simultaneamente ambas as questões.

As respostas de outros alunos nos mostram que, cedo ou tarde, terão que enfrentar este conflito:

Pesquisador	*Dany* (6 anos, primeira série)
(Estão se comparando oralmente pares de números, sem referir as comparações a nenhum material específico.)	
Qual será maior, oitocentos ou setecentos e cinqüenta?	Oitocentos é maior.
Como você escreveria oitocentos?	(Escreve 800.)
E setecentos e cinqüenta?	(Escreve 70050.)
	(Fica perplexo, contemplando os números que escreveu.)

— Outras crianças depois de terem produzidos escritas em concordância com a numeração falada, indicam de imediato que "são demasiados números" e — longe de limitar-se a indicá-lo como fez Gisela — fazem reiteradas tentativas de modificar sua produção para conseguir produzir a quantidade de algarismos. É o que fazem, por exemplo, Martín e Dan (citados no ponto anterior) quando transformam sua escrita original para o caso do seis mil trezentos e quarenta e cinco (600030045) em 630045 e 63045 respectivamente. Frente a cada pedido do pesquisador, estas crianças voltam a produzir uma escrita vinculada à numeração falada, porém se mostram insatisfeitos com o resultado e o corrigem, eliminando um ou mais zeros da escrita original. No entanto, o resultado destas correções coincide só em alguns casos com a escrita convencional, porque as crianças sempre deixam "pelo menos" um zero: mil e trinta e seis, por exemplo, chega a ser escrito como 1036 (a partir de 100036), enquanto que a versão final de mil quinhentos e trinta e seis é 10536.

Aqui!

— Luciana também se dá conta do conflito, porém tenta resolvê-lo modificando a leitura do número, em vez de corrigir sua escrita:

Pesquisador	*Luciana*	*Leandro*
Como vocês escreveriam oito mil novecentos e vinte e quatro?	(Escreve 800090024.)	(Escreve 8924.)
Comparem o que vocês escreveram.		(Mostrando a escrita de Luciana) Não! Esse é muito grande.
	Bom... (ri). Então agora eu o leio de outra maneira: oito "milhões" novecentos e vinte e quatro.	

Luciana compreende muito bem — e compartilha — a objeção formulada por Leandro. Seguramente, é por isto que propõe uma nova interpretação de sua escrita, fazendo-a corresponder a um número maior, tão alto que pudesse ser representado por uma escrita de nove algarismos. No entanto, quando lhe é pedido — minutos depois — que escreva sete mil e vinte e cinco e mil quinhentos, ela escreve: 7100025 e 1000500.

A primeira manifestação de que as crianças começam a tomar conta do conflito é, portanto, a perplexidade, a insatisfação diante da escrita por elas mesmas produzida. Esta insatisfação leva logo a efetuar correções dirigidas a "diminuir" a escrita — ou a interpretá-la atribuindo-lhe um valor maior —, porém, estas correções somente são possíveis depois de terem produzido a escrita. Deste modo, os ajustes efetuados pelos alunos antes citados representam uma compreensão local: eles conseguem encontrar uma solução mais ou menos satisfatória reduzindo a quantidade de algarismos, porém, esta solução não funciona ainda de forma antecipatória, e por isso voltam a enfrentar-se com o conflito diante de cada novo número que tentam escrever.

Aqui!

Perguntas

Como chegam as crianças a encontrar uma solução que lhes permita superar o conflito formulado?

O processo evidenciado por Nádia ao longo das duas entrevistas que tivemos com ela, com um intervalo de quinze dias, nos ajudará a responder a esta pergunta. Durante o primeiro encontro, suas respostas são semelhantes às de alguns alunos que já citamos:

Pesquisador	*Nádia*
(Antes, ela escreveu convencionalmente 2000–4000–9000–10000, e produziu outras escritas — 1000100 para mil e cem e 1000500 para mil e quinhentos — estabelecendo correspondência com a numeração falada).	
E novecentos e cinqüenta, como você escreveria?	(Fica pensando, escreve 90050, olha longo tempo sua escrita.) Me enganei!
Como é?	Não sei.
E novecentos e cinco, como o escreves?	Assim (9005) ou assim (905).
Das duas maneiras?	Para mim é assim (indica o 905).
Por que em novecentos e cinco colocas um zero e em novecentos e cinqüenta colocas dois?	Porque aqui (90050), me enganei... Tem que ser assim: 9050.
E novecentos e quarenta e oito?	(Escreve 9048.)
Entre novecentos e quarenta e oito e mil, qual é mais?	Mil.

(Brincando com dinheiro, o experimentador pede a Nádia que lhe entregue três mil australes. Nadia lhe dá três bilhetes de mil; então lhe pede dois mil trezentos e cinqüenta australes. Nadia entrega-os corretamente.)

Que é mais, dois mil trezentos e cinqüenta australes ou três mil?	Três mil!
Como você escreveria três mil?	(Escreve 3000.)
E dois mil trezentos e cinqüenta?	(Escreve 200030050.)

Pesquisador	*Nádia*
Por que este que é menor tem tantos números?	Como é menor?
Você me disse antes que dois mil trezentos e cinqüenta é menor que três mil.	Não, não sei. (Fica muito preocupada, pensa um longo tempo.)
Tens algum problema?	Sim.
Qual é o problema?	Que não entendo nada.
Para mim parece que entendes um monte.	(Ri)... Mas isto é muito esquisito... porque olha: (mostrando sua escrita anterior) 2000 300 50 dois mil trezentos cinqüenta
Se escreve assim? outra	Eu acho que não (ri). Porque não tenho maneira de escrevê-lo... Por agora o escrevo assim.
Então te parece que não é assim, porém como não tens outra maneira, o escreves assim.	Isso mesmo.
E como tu achas que se deveria escrever? Com mais números ou com menos?	Com menos.
Com quantos números te parece que deve ser escrito?	Três... Quatro... Algo assim.
Mais ou menos como qual?	Como este (mostra 9000, depois de ter revisado suas escritas anteriores).

Pode observar-se que Nádia começa a "diminuir" suas escritas: no caso de novecentos e cinco, ela propõe desde o começo duas possibilidades, uma das quais está em correspondência com a numeração falada, enquanto a outra — a que finalmente escolhe e que coincide com a convencional — tem um zero a menos. Depois de corrigir neste mesmo sentido sua escrita original de novecentos e cinqüenta, ela produz diretamente 9048 para novecentos e quarenta e oito, omitindo desta vez "de modo antecipatório" o outro zero (de novecentos) que provavelmente teria incluído se não estivesse tentando controlar suas escritas para que incluíssem menos algarismos do que os que resultam ao estabelecer correspondência com a numeração falada. No entanto, a antecipação com respeito à eliminação de zeros deixa de funcionar quando se trata de escrever dois mil trezentos e cinqüenta. E mais: apesar de ter acabado de afirmar (em relação aos australes) que três mil é maior que dois mil trezentos e cinqüenta, ela parece "esquecer" esta afirmação quando o pesquisador a vincula à quantidade de algarismos de suas escritas e pergunta surpresa: "como que é menor?".

Apesar desse "esquecimento", Nádia está em condições de reconhecer que está se defrontando com um sério problema que, cedo ou tarde, terá que resolver e que a levará a modificar sua conceitualização da escrita numérica. A consciência que ela tem da provisoriedade do conhecimento "*por enquanto* escrevo assim" é francamente notável.

Ainda que desta vez ela não corrija sua escrita (200030050), suas respostas finais indicam que sabe em que direção iria corrigí-la: trata-se de conseguir que esta escrita tenha só quatro algarismos. Como fazer?

Este é o problema que fica formulado ao final da primeira entrevista e Nádia seguirá refletindo acerca dele em nossa ausência. De fato, ao iniciar o segundo encontro, ela indica:

Pesquisador	*Nádia*
	Da outra vez fiz tudo errado, me enganei muito.
Por que você acha que errou muito?	Porque nos números grandes, por exemplo o duzentos... o duzentos e cinco, eu o fiz assim: 2005, e tinha que fazer assim: 205.
Como você descobriu que duzentos e cinco é assim? (205)	Depois fiquei pensando que tinha me enganado... Não sei como explicar.
E duzentos e trinta e cinco como é?	235 (Escreve o zero em cima do três)
Não leva nenhum zero no duzentos e trinta e cinco?	Não.
E no outro dia você tinha escrito 2035?	Sim.
E naquela vez, por que parecia que levava zero?	Não sei.
E como você escreve novecentos e cinqüenta e oito?	958.

Não leva zeros? Nenhum zero?	Não.
Pesquisador	*Nádia*
E novecentos e cinco?	(Escreve 9050, o risca, logo escreve 900 e coloca um cinco sobre o último zero.) 905.
Por que aqui (905) leva zero e ali (958) não leva zero?	Porque aqui (905) é cinco e ali (958) cinqüenta e oito... Porque cinqüenta e oito são dois números e cinco é um só.
E o que acontece se a este (905) não coloco nenhum zero?	Se não colocar nenhum zero, é noventa e cinco. Precisa colocar para que se saiba que é novecentos e cinco.
[...] E o dois mil e quinhentos, como será?	5 2500. (Escreve primeiro 2000, com o 5 sobre o primeiro zero.)
Você pode contar o que pensou?	Não sei.
E o dois mil quinhentos e cinqüenta e oito?	558 2558 (Escreve primeiro 2000 e logo, sobre os zeros, 5, 5 e 8).
Que fantástico! Me explique como fez, assim eu conto a outras crianças: esse método que você utilizou pode servir a outras crianças.	Primeiro coloco dois mil, e depois vou colocando... coloco quinhentos e cinqüenta e oito, porque se me engano e coloco um zero fica "solto".

Nádia elaborou uma estratégia que lhe permite superar o conflito formulado: ela pode agora — ao contrário do que acontecia na entrevista anterior — antecipar com exatidão a quantidade de algarismos que terá o número solicitado. Esta antecipação parece ser possível graças a uma ressignificação da relação entre a escrita dos "nós" e a dos números posicionados nos intervalos entre eles.

De fato, as últimas produções de Nádia apóiam-se — como as anteriores — na escrita convencional dos "nós" (900 ou 2000 neste caso), porém, a maneira em que se utiliza este apoio variou radicalmente: enquanto que antes se justaposicionavam os símbolos correspondentes às partes da denominação oral do número (2000.300.50, por exemplo) — e logo faziam-se correções para "diminuir" o número resultante —, agora a escrita do número se usa como modelo útil para fixar a quantidade de algarismos que deve ter o número a ser representado que então é "recheado", substituindo os zeros pelos números correspondentes.

Notemos que Nádia descobriu a possibilidade de usar de outra maneira uma informação que já possuía. Por que a descobriu neste momento e não antes? Porque esta possibilidade adquire sentido — acreditamos — quando se constitui no instrumento que permite resolver um conflito do qual tomou consciência. A utilização da escrita do "nó" como modelo para a de outros números aparece precisamente quando Nádia está se perguntando como fazer para diminuir a quantidade de algarismos de sua escrita e, mais precisamente ainda, como fazer para reduzí-la à mesma quantidade de algarismos que corresponde aos "nós" entre os quais estão compreendidos os números que tenta representar.

Portanto, quando Nádia antecipa que a escrita de dois mil trezentos e cinqüenta terá quatro algarismos, seguramente não baseia-se só no conhecimento específico de que dois mil se escreve com essa quantidade de algarismos, mas também em uma outra conclusão mais geral que ela — como muitos outros alunos — elaborou a partir da informação fornecida pela escrita convencional: os centos têm três algarismos, os milhares quatro.

para!

Em síntese, as escritas que correspondem à numeração falada entram em contradição com as hipóteses vinculadas à quantidade de algarismos das notações numéricas. Tomar consciência deste conflito e elaborar ferramentas para superá-lo parecem ser passos necessários para progredir até a notação convencional.

Temos tentado descrever os aspectos essenciais do processo através do qual as crianças se aproximam da compreensão sobre a natureza de nosso sistema de numeração; mostramos que as crianças produzem e interpretam escritas convencionais muito antes de poder justificá-las apelando à lei do agrupamento recursivo; colocamos em evidência conceitualizações e estratégias que as crianças elaboram em relação à notação numérica.

É uma opção didática levar em conta ou não o que as crianças sabem, as perguntas que se fazem, os problemas que se formulam e os conflitos que devem superar. É também uma decisão didática levar em consideração a natureza do objeto de conhecimento e valorizar as conceitualizações das crianças à luz das propriedades desse objeto. A posição que em tal sentido temos assumido inspira tanto a análise da relação existente entre as conceitualizações infantis e o sistema de numeração como a crítica ao ensino usual e o trabalho didático que propomos. De todas estas questões falaremos nos pontos seguintes.

III

Relações entre o que as crianças sabem e a organização posicional do sistema de numeração

Segundo afirmam as crianças, um número é maior que outro "porque tem mais algarismos" ou "porque o primeiro é quem manda". O saber que assim se expressa se refere a propriedades dos números ou a propriedades da notação numérica?

A pergunta que antecede pode resultar estranha: estamos tão acostumados a conviver com a linguagem numérica que em geral não distingüimos o que é próprio dos números como tais — quer dizer, do significado — das propriedades do sistema que usamos para representá-los. No entanto, esta distinção é necessária.

Com efeito, enquanto as propriedades dos números são universais, as leis que regem os diferentes sistemas de numeração produzidos pela humanidade não o são.

"Oito é menor que dez" é uma afirmação válida em qualquer cultura, independentemente do sistema de numeração que ela utiliza. Porém, se esta afirmação se justifica afirmando que "oito tem um só algarismo e dez tem dois", se está utilizando uma argumentação que é específica dos sistemas posicionais, já que nos sistemas não-posicionais a quantidade de algarismos não está relacionada com o valor do número.

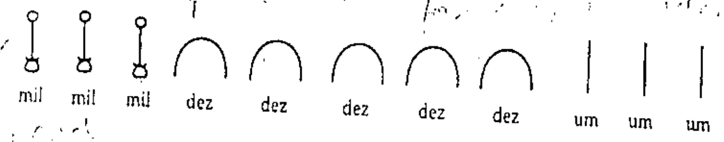
Então, o que tem o sistema posicional que os outros não têm? Justamente, a posicionalidade. Ela é a responsável pela relação quantidade de algarismos-valor do número; dela depende também a validade do "o primeiro é quem manda".

Em nosso sistema de numeração — como é sabido —, o valor que representa cada algarismo se obtém multiplicando esse algarismo por uma determinada potência de base. Se um número tem mais algarismos que outro, necessariamente intervieram em sua decomposição potências de dez de *maior grau* que as envolvidas no outro, e em conseqüência será maior.

Por outro lado, quando se trata de dois números da mesma quantidade de algarismos — com exceção dos que comecem com o mesmo algarismo — é o primeiro quem determina qual é o maior, porque esse algarismo indica por quanto deve ser multiplicada a potência de grau maior que "intervém" no número. Por razões semelhantes, se os primeiros algarismos fossem iguais, a responsabilida-

de de determinar o número maior seria transferida ao algarismo imediatamente posterior, e assim sucessivamente.

O contraste com sistemas não-posicionais contribui para esclarecer a questão. Vejamos, por exemplo, o que acontece no sistema de numeração egípcio (5000 a.C.), que era aditivo e dispunha de símbolos só para representar as potências de 10. O número 3053 se anotava assim:



No sistema egípcio, a quantidade de símbolos de um número não informa a respeito de sua magnitude: para representar, por exemplo, 9999 utilizam-se 36 símbolos, enquanto que 10000 representava-se com um símbolo só.

Além disso, cada símbolo representava sempre o mesmo valor, não importando a posição que ocupasse e mesmo que uma convenção estabelecesse determinada ordem de notação, esta notação podia ser alterada sem que por isso mudasse a interpretação do número representado.

trezentos e vinte e quatro

trezentos e vinte e quatro

É indubitável que, se nossos entrevistados houvessem sido crianças egípcias do ano de 5000 a.C., teríamos obtido resultados muito diferentes. Como se trata de crianças nascidas nos umbrais do século XXI, imersas numa cultura digitalizada, suas conceitualizações apontam à organização posicional de nosso sistema de numeração.

No entanto, como já vimos, nem tudo é posicional na vida das crianças. A numeração falada se interpõe no caminho da posicionalidade e dá origem a produções "aditivas". Estas produções são facilmente interpretadas não só pelos adultos, como também pelos colegas que já escrevem convencionalmente os números em questão, o que coloca em evidência uma indubitável vantagem dos sistemas aditivos: sua transparência.

De fato, para interpretar um número representado de maneira aditiva — seja em um sistema como o egípcio ou nas aproximações de nossas crianças,

baseadas na numeração falada — é suficiente somar os valores dos símbolos utilizados.[8]

Um sistema posicional é ao mesmo tempo muito menos transparente e muito mais econômico que um sistema aditivo.

É menos transparente porque o valor de cada símbolo depende da posição que ocupa, e porque essa posição é o único vestígio da presença de uma potência da base. Ao contrário do que acontece ao interagir com outros sistemas que utilizam símbolos específicos para indicar a potência da base, para interpretar um número representado em um sistema posicional é necessário inferir qual é a potência da base pela qual deve-se multiplicar cada algarismo.

É mais econômico porque, justamente como conseqüência do valor posicional, uma quantidade finita de símbolos dez — em nosso caso — é suficiente para registrar qualquer número.[9] Em um sistema como o egípcio, no entanto, a quantidade de símbolos necessários para que seja possível escrever qualquer número não é finita: se dispõe de símbolos para um, dez, cem, mil, dez mil, cem mil e um milhão — são os que provavelmente existiram na cultura egípcia — e se pode escrever qualquer número até nove milhões, novecentos e noventa e nove mil, novecentos e noventa e nove, porém será necessário criar um novo símbolo para representar dez milhões. A criação deste novo símbolo permite estender a escrita a todos os números menores que cem milhões, porém a representação deste último exigirá um novo símbolo e esta exigência voltará a apresentar-se cada vez que apareça uma nova potência de base.

Economia e transparência não são variáveis independentes: quanto mais econômico é um sistema de numeração, menos transparente se apresenta. Um sistema como o egípcio é quase uma tradução das ações de contar, agrupar e reagrupar; foi necessário ocultar essas ações por trás da posicionalidade para conseguir um sistema cuja economia seja indiscutível.

Quem, como as crianças, tenta apropriar-se de nosso sistema de numeração, deverá descobrir o que ele oculta. Elas começam — como vimos — por detectar aquilo que lhes resulta observável no contexto da interação social. A partir destes conhecimentos, multiplicam suas perguntas a respeito do sistema e com elas chegam à escola. As respostas oferecidas no âmbito escolar correspondem verdadeiramente às perguntas que as crianças formulam?, deveriam sê-lo? É válido o esforço da escola por explicitar tudo aquilo que o sistema de numeração

8 Entendemos que quando as crianças produzem uma escrita como 1000500 (1500), estão usando 1000 e 500 como "símbolos originais".

9 Atualmente estamos tentando estabelecer como e quando as crianças descobrem esta característica de nosso sistema.

oculta? Tem sentido a tentativa de evitar que as crianças enfrentem a complexidade da notação numérica? Por que reduzir a reflexão sobre o sistema ao ritual associado às unidades, dezenas, centenas...?

IV

Questionamento do enfoque usualmente adotado para ensinar o sistema de numeração

A modalidade que o ensino da notação numérica em geral assume pode caracterizar-se assim:

- Estabelecem-se metas definidas por série: na primeira trabalha-se com números menores que cem, na segunda com números menores que 1000 e assim sucessivamente. Só a partir da quinta série manipula-se a numeração sem restrições.
- Uma vez ensinados os dígitos, se introduz a noção de dezena como conjunto resultante do agrupamento de dez unidades, e só depois apresenta-se formalmente para as crianças a escrita do número dez, que deve ser interpretada como representação do agrupamento (uma dezena, zero unidades). Utiliza-se o mesmo procedimento cada vez que se apresenta uma nova ordem.
- A explicação do valor posicional de cada algarismo em termos de "unidades", "dezenas", etc., para os números de determinado intervalo da série considera-se requisito prévio para a resolução de operações nesse intervalo.
- Tenta-se "concretizar" a numeração escrita materializando o agrupamento em dezenas ou centenas.

Dito de outro modo, precisa-se: trabalhar passo a passo e com perfeição, administrar o conhecimento ministrando-o em cômodas quotas anuais, transmitir de uma vez só e para sempre o saber socialmente estabelecido.

É como os números que apresentam-se um a um e o fazem com método; além de dar seu nome, esforçam-se por exibir seu patrimônio em matéria de dezenas e unidades. Fornecem informação exaustiva acerca de seus dados pessoais, porém o âmbito de suas relações é tão limitado que se reduz aos vizinhos mais chegados.

Pretende-se simultaneamente graduar o conhecimento e chegar desde o começo ao saber oficial. São compatíveis estas duas intenções? Se recortamos drasticamente o universo dos números possíveis, se — ao introduzir os números de um em um e predeterminar uma meta para cada série escolar — se obstaculiza a comparação entre diferentes intervalos da seqüência e dificulta-se a descoberta das regularidades, estaremos propiciando realmente o acesso às regras que organizam o sistema de numeração? E se isto não acontece assim, qual é o "saber oficial" que efetivamente se está ministrando?

Saber aprimorado e *graduação do saber* parecem incompatíveis. Teremos que renunciar à esperança de comunicar de imediato o saber definitivo, ou deveremos renunciar à "dosificação" do conhecimento. Ou talvez seja necessário renunciar a ambas.

"Passo a passo e aperfeiçoadamente" é — por outro lado — uma afirmação que as crianças não estão dispostas a aceitar: elas pensam ao mesmo tempo sobre os "dezes", os milhões e os milhares, elaboram critérios de comparação fundamentados no contraste entre categorias de números mais ou menos afastados; podem conhecer a notação convencional de números muito "grandes" e ainda assim não manipular os números menores. As crianças não precisam — lembremos — apelar a "dezenas" e "unidades" para produzir e interpretar escritas numéricas; saber "tudo" acerca dos números não é portanto requisito para usá-los em contextos significativos.

Antecipamos uma possível objeção: ainda que seja possível prescindir de unidades e dezenas quando só se trata de ler e escrever números, não será possível deixá-las de lado no momento de resolver operações. Esta objeção é parcialmente válida, como quando pensamos nos algarismos convencionais — nos famosos "vai um" e "peço emprestado" — como único procedimento possível; deixa de sê-lo quando se admitem algarismos alternativos.

Por que pensar em algarismos alternativos? Porque os procedimentos que as crianças elaboram para resolver as operações têm vantagens que não podem ser depreciadas se comparadas com os procedimentos usuais na escola.

Uma desvantagem evidente dos algarismos convencionais é que — por exigirem que se some ou subtraia "em coluna", isolando cada vez os algarismos que correspondem a um mesmo valor posicional — pode-se perder de vista quais são os números com os quais se está operando. Algo muito diferente acontece com as propostas das crianças, já que — como veremos no próximo ponto — as formas de decomposição que elas colocam em prática permitem conservar o valor dos termos na operação.

Por outro lado, enquanto que a antecipação do resultado se torna difícil (ou impossível) quando se começa a somar ou a subtrair pela direita — isto é, pelo menor valor posicional —, a persistente decisão das crianças de começar pela esquerda explicitando o valor representado pelos algarismos[10] coloca em primeiro plano o cálculo aproximado, o qual permite controlar o resultado.

Desta maneira os procedimentos das crianças fazem desaparecer a diferença entre contas "com dificuldade" e "sem dificuldade".

Se a interpretação dos algarismos em termos de dezenas e unidades não é requisito para a leitura e escrita de números, se também não é condição necessária para resolver operações, por que tomá-la como ponto de partida? Valerá a pena investir tanta energia em uma tentativa cujo resultado quase inevitável é o recitado mecânico dos termos em questão?

O esforço para conseguir que as crianças compreendam algo tão complexo como nosso sistema de numeração — e para evitar o risco de uma simples memorização — tem levado a utilizar diferentes recursos para materializar o agrupamento.

Um destes recursos consiste em criar um código que introduz símbolos específicos — círculos, quadrados, triângulos — para representar aquilo que em nosso sistema só pode inferir-se a partir da posição: as potências de dez. Os símbolos em questão devem somar-se para determinar qual é o número representado.

A semelhança com o sistema egípcio é notável. E a esta semelhança se refere o núcleo de nossa objeção: paradoxalmente, para que as crianças compreendam a posicionalidade, se faz desaparecer a posicionalidade.

Uma crítica semelhante pode aplicar-se a outro dos recursos usuais na escola: colocar em correspondência o algarismo posicionado no lugar das unidades com elementos "soltos", o posicionado no lugar das dezenas com "agrupamentos" de dez, e o que está no lugar das centenas com "agrupamentos de cem". Esta maneira de proceder tem a vantagem de apelar ao agrupamento realizado pelas crianças em vez de partir de um código imposto; no entanto, ao considerar o resultado final da agrupação, apresenta o mesmo inconveniente que a materialização através de figuras geométricas: a posição deixa de ser importante para se entender de que número se trata, já que, seja qual for a ordem em que forem colocados os "agrupamentos" e os "palitinhos" soltos, o total de elementos será sempre o mesmo.

10 Se se trata — por exemplo — de somar 83 e 35, um procedimento possível seria: $80 + 10 = 90$; $90 + 10 = 100$; $100 + 10 = 110$; $110 + 8 = 118$

O pressuposto subjacente aos dois recursos descritos parece ser o seguinte: para que o nosso sistema de numeração resulte compreensível, é necessário transformá-lo em outro sistema de numeração.

Finalmente, analisaremos a utilização do ábaco, um instrumento que — diferentemente dos materiais anteriores — reflete claramente a posicionalidade do sistema.

Duas idéias subjazem ao emprego didático do ábaco: agrupar e reagrupar são ações imprescindíveis para compreender a posicionalidade; a representação de uma quantidade no ábaco pode traduzir-se diretamente à notação numérica convencional, e essa tradução traz luz sobre a organização do sistema.

Os dois pressupostos são objetáveis segundo nossa perspectiva. Por um lado, como vimos, a noção de agrupamento não é a origem da posicionalidade: as crianças descobrem esse princípio de maneira totalmente independente das ações de agrupar e reagrupar objetos, o elaboram a partir de sua ação intelectual sobre as escritas numéricas que as rodeiam. Por outro lado, para que apelar a uma tradução se a versão original está ao alcance da mão?

De qualquer forma, se o ábaco fosse hoje — como o foi na antigüidade — um instrumento de cálculo socialmente vigente, sua utilização na escola estaria com certeza justificada. Dadas as condições atuais, não deveríamos decidir-nos a substituir o ábaco pela calculadora?

Todos os recursos concretizadores que analisamos têm em comum a esperança de reconstruir uma relação entre a notação numérica e as ações de agrupar e reagrupar. Esta relação, que efetivamente possibilitou a invenção dos diversos sistemas de numeração produzidos no transcurso da história, já não está presente no uso social que se faz do sistema. Talvez por isso as crianças não necessitem pensar que alguém formou oito grupos de dez e depois reagrupou formando oito grupos de cem para entender que, em 880, o primeiro oito representa oito centos, e o segundo oito "dezes".

A notação numérica aparece diante das crianças como um dado da realidade: é necessário entender o mais cedo possível como funciona, para que serve, em que contextos se usa; averiguar por que chegou a ser como é não é tão urgente para elas, talvez porque compreendê-lo não seja de maneira nenhuma um ponto de partida e sim possa constituir-se no ponto de chegada que se faz possível depois de um longo e complexo percurso.

Alguma coisa está falhando no jogo de perguntas e respostas que — segundo este enfoque — tem lugar na aula: oferecem-se respostas para aquilo que as crianças não perguntam, se ignora que eles já encontraram algumas respostas e que ainda se fazem muitas perguntas, evita-se formular perguntas que poderiam orientar a busca de novas respostas.

Se não é restringir a numeração, se não é explicitar o valor dos algarismos em termos de dezenas e unidades, se não é apelar exclusivamente aos algoritmos convencionais, se não é apoiar-se em concretizações externas ao sistema, se não é apontar de início para o saber acabado..., qual será então o caminho que pode delinear-se no contexto escolar para andar entre os números?

V

Mostrando a vida numérica da aula

> [...] O ensino direto do saber é impossível. [...] o uso e a destruição dos conhecimentos precedentes fazem parte do ato de aprender. Conseqüentemente, temos que admitir uma determinada reorganização didática do saber, que troca seu sentido, e temos que admitir também — ao menos de modo transitório — uma determinada dose de erros e contradições, não só por parte dos alunos, mas também por parte do ensino."
>
> G. Brousseau

> "Como por enquanto não tenho outra maneira de escrever isso, escrevo assim"
>
> Nádia

Trabalhar com a numeração escrita e só com ela; abordá-la em toda sua complexidade; assumir que o sistema de numeração — enquanto objeto de ensino —passará por sucessivas definições e redefinições antes de chegar a sua última versão. São estas as idéias que desde o princípio orientaram nosso trabalho didático.

Do uso à reflexão e da reflexão à busca de regularidade, esse é o percurso que proporemos reiteradamente.

Usar a numeração escrita é produzir e interpretar escritas numéricas, é estabelecer comparações entre tais escritas, é apoiar-se nelas para resolver ou representar operações.

Usar a numeração escrita — quando alguém está tentando apropriar-se dela — torna possível que apareçam, em um contexto pleno de significado, problemas que poderão atuar como motor para desvendar a organização do sistema.

A busca de soluções levará a estabelecer novas relações, a refletir sobre as respostas possíveis e os procedimentos que conduziram a elas, a argumentar a favor ou contra as diferentes propostas, a validar determinados conhecimentos e a rejeitar outros. No decorrer deste processo, começam a surgir as regularidades do sistema.

As regularidades aparecem ou como justificação das respostas e dos procedimentos utilizados pelas crianças — ao menos para algumas delas — ou como descobertas que é necessário propiciar para tornar possível a generalização de determinados procedimentos ou a elaboração de outros mais econômicos.

A análise das regularidades da numeração escrita é — como todos sabemos — uma fonte insubstituível de progresso na compreensão das leis do sistema por parte das crianças.

Então, se pretendemos que o uso da numeração seja realmente o ponto de partida da reflexão, se esperamos que seja efetivamente possível estabelecer regularidades, torna-se necessário adotar outra decisão: trabalhar desde o começo e simultaneamente com diferentes intervalos da seqüência numérica. Deste modo, será possível favorecer comparações entre números da mesma e de diferentes quantidades de algarismos, promover a elaboração de conclusões — tais como "os cens precisam de três, os mils de quatro" — que funcionaram como instrumentos de autocontrole de outras escritas numéricas, propiciar o conhecimento da escrita convencional dos "nós" e sua utilização como base da produção de outras escritas, conseguir — em suma — que cada escrita se construa em função das relações significativas que mantêm com as outras.

Introduzir na sala de aula a numeração escrita tal como ela é, e trabalhar a partir dos problemas inerentes à sua utilização, são duas regras a que nos submetemos inelutavelmente na complexidade do sistema de numeração.

O desafio que este enfoque produz é evidente: supõe correr o risco de desafiar as crianças com problemas cuja resolução ainda não lhes foi ensinada, obriga a trabalhar simultaneamente com respostas corretas — ainda que às vezes parcialmente — e com respostas erradas, assim como também a encontrar maneiras de articular procedimentos ou argumentos diferentes para tornar possível a socialização do conhecimento. Trata-se, então, de aceitar a coexistência de diferentes conceitualizações a respeito do sistema, de investir todo o esforço necessário para conseguir que a diversidade — no lugar de constituir-se em um obstáculo — opere a favor do processo do grupo e de cada um de seus membros.

O trabalho em aula está assim envolvido pela provisoriedade: não só são provisórias as conceitualizações das crianças como também o são os aspectos do "objeto" que é colocado em primeiro plano, os acordos grupais que são fomentados, as conclusões que vão sendo formuladas, os conhecimentos que se consideram exigíveis.

Complexidade e provisoriedade são pois didaticamente inseparáveis. Se decidimos abordar a complexidade, teremos de renunciar a estabelecer no início todas as relações possíveis, e será necessário optar pela reorganização progressiva do conhecimento. Reciprocamente, se alguém se atreve a abordar a complexidade é precisamente porque aceitou a provisoriedade.

Complexidade e provisoriedade são inevitáveis. O são porque o trabalho didático é obrigado a levar em conta tanto a natureza do sistema de numeração como o processo de construção do conhecimento.

O sistema de numeração na aula

Ao pensar no trabalho didático com a numeração escrita, é imprescindível ter presente uma questão essencial: trata-se de ensinar — e de aprender — um sistema de representação. Será necessário criar, então, situações que permitam mostrar a própria organização do sistema, como descobrir de que maneira este sistema "encarna" as propriedades da estrutura numérica que ele representa.

Já que o sistema de numeração é portador de significados numéricos — os números, a relação de ordem e as operações aritméticas envolvidas em sua organização —, operar e comparar serão aspectos ineludíveis do uso da numeração escrita. Também será imprescindível produzir e interpretar escritas numéricas, já que produção e interpretação são atividades inerentes ao trabalho com um sistema de representação.

Estas quatro atividades básicas — operar, ordenar, produzir, interpretar — constituem eixos ao redor dos quais organizam-se as situações didáticas que propomos.

Pois bem, quando — diante das exigências que nos estabeleceu a escrita deste artigo — tentamos classificar as situações realizadas em aula, descobrimos que não era possível formar simplesmente quatro grupos (um correspondente a cada eixo). De fato, produzir, interpretar, ordenar e comparar são atividades tão estreitamente vinculadas na prática didática que fica difícil diferenciá-las com clareza: por um lado, para comparar números e para realizar operações é em geral necessário produzir ou interpretar notações numéricas; por outro lado, em muitos casos, a relação de ordem intervém na produção e interpretação de escritas numéricas.

É por isso que optamos por construir duas grandes categorias: a primeira abrange todas as situações didáticas que de alguma maneira se vinculam à relação de ordem e a segunda abrange aquelas situações que estão centradas nas operações aritméticas. Produção e interpretação aparecem incluídas em cada uma destas categorias.

Seguramente, esta classificação estará sujeita a sucessivas revisões. Como diria Nádia, "por enquanto fazemos assim".

1. *Situações didáticas vinculadas à relação de ordem*

A relação de ordem está presente nas situações propostas de duas maneiras diferentes: em alguns casos, é o eixo da atividade formulada; em outros, intervém como estratégia para resolver situações que não estão centradas nela.

1.1. Uma proposta: comparar números

Por que propor atividades centradas na comparação? Quando os números são representados através do sistema decimal posicional, a relação de ordem — como vimos — adquire uma especificidade vinculada à ordenação do sistema. É justamente esta especificidade que se tenta mobilizar a partir das situações de comparação que são propostas às crianças.

Suponhamos, por exemplo, que tenhamos decidido instalar na aula diferentes "negócios" — cujo funcionamento servirá como fonte de múltiplos problemas aritméticos — e que estamos organizando a "loja". Dizemos às crianças que, com as balas que temos (todas iguais) faremos pacotes que tenham quantidades diferentes (4, 26, 62, 30, 12 e 40) e que os preços desses pacotes são (em centavos) os seguintes: 45, 10, 40, 60, 25, 85. Pedimos, então, que elas decidam qual é o preço de cada tipo de pacote e o anotem. Então lhes será proposto que, em pequenos grupos, comparem suas anotações com seus colegas e que, em caso de divergências, argumentem a favor ou contra as diferentes anotações. Finalmente, se discutirá com todo o grupo, com a finalidade de estabelecer acordos.

Esta situação requer que as crianças ordenem — seja qual for a estratégia que utilizem para fazê-lo — os dois conjuntos de números apresentados, ordenamento que esteja orientado por uma lógica provavelmente compartilhada pela maioria das crianças: quanto maior seja a quantidade de balas, maior será o preço do pacote.

Os critérios de comparação presentes nesta atividade — "o primeiro é quem manda", "a maior quantidade de números..."[11] — não serão necessariamente colocados em ação por todos os membros do grupo. Surgem então duas perguntas que — com toda justiça — o leitor se estará formulando neste instante: como resolvem a atividade as crianças que não utilizam critérios vinculados ao sistema?, o que aprendem as crianças que elaboraram esses critérios?

A diversidade, como de costume, faz sua aparição através das respostas das crianças: algumas realizam — com maior ou menor esforço — o ordenamento correto, outras ordenam alguns números e aventuram uma seqüência possível para os demais, há as que não se atrevem a fazer nada sem consultar e também há aquelas que limitam-se a copiar as anotações de algum colega.

Para as crianças que realizam o ordenamento sem esforço, o momento da discussão é também o momento da aprendizagem: por um lado, a necessidade de fundamentar sua produção os levará a conceitualizar aquilo que até o momento era um simples recurso que utilizavam, porém sobre o qual seguramente ainda não tinham refletido; por outro lado, a elaboração de argumentos para apoiar as produções de seus colegas enriquecerá sua conceitualização. As crianças que conseguem ordenar os números através de um processo que inclui muitas auto-correções aprendem tanto durante o processo — a tarefa para estes ainda constitui um desafio — como quando têm de defender sua produção frente aos demais.

As crianças que estabelecem uma ordem parcial — seja porque se baseiam só na série numérica oral e ordenam então as escritas numéricas cuja denominação conhecem, seja porque utilizam unicamente o critério que permite comparar números de diferentes quantidades de algarismos — aprendem ao longo de toda a situação. De fato, enquanto ordenam, se vêm obrigadas a formular, talvez pela primeira vez, a pergunta: em que basear-se para estabelecer comparações entre os números que não conseguiram incluir no ordenamento? Durante a discussão, as argumentações de seus colegas abrirão o caminho até a resposta. Formular uma nova pergunta constitui uma aprendizagem, porque é o ponto de partida para a elaboração de um novo conhecimento; escutar as respostas que as outras crianças dão a essa pergunta sempre torna possível algum progresso: pode acontecer que esta resposta — no melhor dos casos — seja assimilada imediatamente como própria, ou que gere novas perguntas, ou que — pelo menos — permita inteirar-se de que essas perguntas têm resposta e descobrir então que vale a pena buscá-las.

[11] Note-se que é necessário escolher os números de maneira tal que efetivamente permitam mobilizar os critérios em questão.

mentalmente

As crianças que não arriscam nenhuma resposta sem consulta prévia também aprendem, porque também se fazem perguntas e, portanto, o que seus colegas lhes contestam adquirirá necessariamente algum significado em relação à pergunta formulada: pode ser que confirme o que elas tinham pensado, mas não se atreviam a afirmar, pode ser que entre em contradição com suas idéias prévias e gere então novas perguntas ou que resulte em uma informação nova que terão que começar a processar. É difícil saber, entretanto, o que aprendem as que se limitam a copiar — são muitas as causas que podem motivar esta atitude — portanto é fundamental incentivá-las a refletir a respeito de suas anotações e a encarar a responsabilidade de produzir uma resposta própria. Tanto as que consultam sem cessar como as que unicamente copiam, estão "dando sinais" que será necessário registrar: teremos que intervir orientando-as para formas de trabalho mais autônomas.

Procurar que as crianças consultem a si mesmas antes de apelar a uma ajuda externa, que cada criança recorra, antes de mais nada, ao que sabe da numeração falada e da numeração escrita e descubra que alguns de seus conhecimentos são pertinentes para resolver o problema formulado, é talvez a melhor maneira de incentivar a autonomia.

Estimular a utilização de materiais em que apareçam números escritos em seqüência — fita métrica, almanaque, régua, etc. — torna possível que as crianças aprendam a buscar por si mesmas a informação que necessitam. Apelar a estes materiais resulta útil para todas as crianças: as que estão em condições de ordenar todos os números propostos poderão utilizá-los para verificar sua produção; as que podem fazer ordenamentos parciais descobrirão como completá-los, já que seguramente sabem que nesses materiais — "os números que estão depois são maiores"; as que ainda não utilizam critérios de comparação, descobrirão que nestes suportes os números propostos aparecem localizados em uma determinada ordem, a qual — além de permitir-lhes efetuar o ordenamento solicitado — talvez as leve a se perguntar a respeito das razões dessa ordem.

Em síntese, no transcurso desta situação, todas as crianças têm oportunidades de buscar uma resposta, todas crescem graças ao trabalho cooperativo, todas realizam uma aprendizagem.

Outros exemplos

Situações semelhantes à formulada podem ser propostas apelando a contextos diferentes: ordenar as idades dos familiares das crianças que fazem parte de um grupo, decidir a ordem em que serão atendidas na "padaria" as crianças que pegaram determinadas fichas de atendimento, estabelecer comparações entre as alturas dos membros do grupo — expressas em centímetros — depois de se terem medido... Por outro lado, todas as situações incidentais onde se estabeleça uma ordem de prioridade — por exemplo, quando se lêem notícias em que apareçam levantamentos de opinião pública sobre um problema de atualidade — podem dar lugar a discussões acerca dos critérios de comparação.

Mesmo que muitas das situações que propomos — ainda mais no princípio — reproduzam contextos cotidianos nos quais ordenar números faz sentido, esta contextualização nem sempre é imprescindível: a avidez das crianças por desvendar os mistérios que envolvem o sistema de numeração faz deste um objeto digno de ser considerado em si mesmo. Então, torna-se possível e produtivo formular algumas atividades que estejam centradas nos números como tais. É o que acontece, por exemplo, nas seguintes situações:

— Formar, com três algarismos determinados, todos os números possíveis de dois e três algarismos e ordená-los em seqüência. Se se permite que os algarismos se repitam nos números que serão formados, a atividade resulta muito mais complexa, já que neste caso será necessário formar e ordenar trinta e seis números no lugar de doze.

— Dado um número de dois algarismos (45, por exemplo), onde será preciso colocar um terceiro algarismo (4, por exemplo) para que fique formado o maior número possível? A situação se desencadeia propondo sucessivamente diferentes "terceiros algarismos", para logo discutir em que situações é preciso colocá-los à direita e em quais à esquerda, elaborar uma conclusão geral e fundamentá-la.

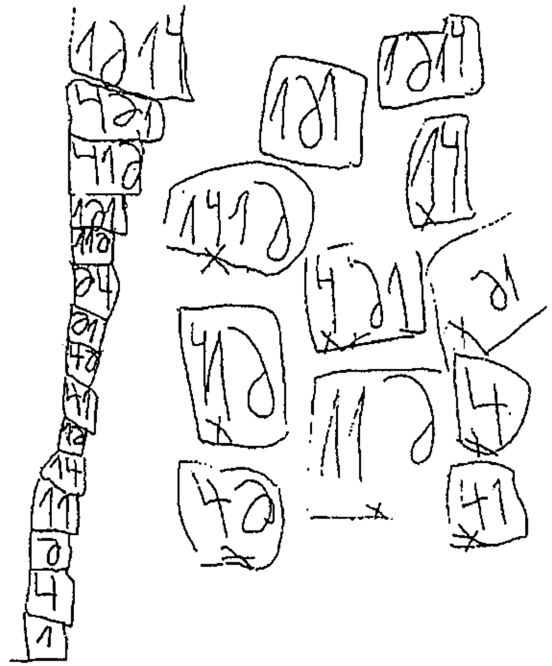
Quando a maioria das crianças coloca em jogo critérios de comparação válidos para produzir ordenações, a discussão acerca da fundamentação pode avançar um passo a mais: vale a pena perguntar-se *por que* é o primeiro quem manda, *por que* é maior o número que tem mais algarismos que outro. Muda então o eixo da discussão: já não se trata de apelar aos critérios para fundamentar o ordenamento; agora se trata de buscar a própria fundamentação dos critérios. Esta reflexão conduzirá a uma compreensão mais profunda da organização do sistema, ao promover que se estabeleça a relação entre os critérios elaborados e o valor de cada algarismo em termos de "dezes" ou "cens".

Quando se lhes pede a fundamentação dos critérios, algumas crianças se vêem obrigadas a explicitar relações que já utilizavam sem sabê-lo; outras coordenam conhecimentos que possuíam, porém ainda não tinham relacionado, e outras realizam uma descoberta que se torna possível para elas só no contexto desta discussão. Deste modo, afirmações como: "Não importa quais sejam os números; se ele tem três (algarismos) é maior porque é dos 'cens' e esses são dezes" ou "você precisa se fixar no primeiro porque assim saberá (em um número de dois algarismos) quantos 'dezes', há", são as conclusões mais comuns de histórias diferentes para diferentes crianças.

1.2. A proposta é produzir ou interpretar – a ordem é um recurso

Produzir ou interpretar escritas numéricas é sempre um desafio para quem está tentando entrar no mundo dos números. "Que número é este?" e "como será o... (cinqüenta e dois, por exemplo)?" são perguntas aparentemente muito banais que resultam, no entanto, apaixonantes para as crianças quando referem-se a números cuja escrita convencional ainda não conhecem.

Ilustração 1 — Primeira série. As crianças, agrupadas em pares, devem formular todos os números que possam, utilizando para isso a data de aniversário (dia e mês) dos membros de cada dupla. Finalmente, devem ordenar de maior a menor os números formados. Bruno e Leandro, que fazem aniversário em 11/4 e 1/6, respectivamente, o fizeram assim:



Era possível prever — exercendo uma previsão didática amplamente compartilhada, às vezes também por nós mesmos — que seria mais interessante e produtivo trabalhar com os números em um contexto do que com números totalmente desprovidos de referência a seu uso social. No entanto, conseguimos constatar que nossos alunos se entusiasmavam tanto quando lhes propúnhamos escrever os números dos tickets de atendimento da "padaria" como quando simplesmente lhes pedíamos que anotassem determinados números e que se interessavam tanto por ler os endereços de seus colegas como por interpretar números que tínhamos escrito no quadro-negro.

A simples solicitação de produzir ou interpretar um número — referente ou não a um contexto cotidiano — funciona como uma faísca a partir da qual estabelecem discussões produtivas: "esse (1092, escrito no envelope de uma carta) não pode pertencer aos cens, você não vê que os de cem têm três números e esse tem quatro?", "o quinhentos se escreve com os zeros quando é quinhentos só — objeta Diego ao ver que Malena, para anotar o preço 599, tinha colocado primeiro "500" —, porém, se você diz quinhentos e noventa e nove, os zeros ficam em baixo dos noves e não temos que escrevê-los".

Trabalhar com os números inseridos no uso que socialmente se faz deles — quer dizer, com os números representando preços, idades, datas, medidas... — é fundamental, não só porque lhes outorgamos sentido, mas também porque torna possível entender como funcionam em diferentes contextos. Trabalhar com os números fora de contexto também é significativo, porque os problemas cognitivos que se formulam são os mesmos que aparecem nas situações contextualizadas e porque a interação com os números sem qualquer relação contextual coloca em primeiro plano que se está trabalhando sobre o sistema de numeração, quer dizer, sobre um dos objetos que a escola tem a missão de ensinar e as crianças a missão de aprender.

Quais são então as situações de produção e interpretação que propomos?

Formar listas de preços ou colocá-los nos artigos ("mercadorias") correspondentes, fazer as notas fiscais, inventariar a "mercadoria" existente, fabricar fichas de atendimento, identificar o preço dos produtos que se deseja comprar, interpretar as outras quantidades que aparecem nas embalagens, consultar as ofertas... são atividades que realizam "vendedores" e "compradores" no jogo dos negócios.

Interpretar o valor das notas (xerocadas ou produzidas pelas crianças), determinar o valor de faturas dos diferentes serviços, ler a data de vencimento dessas faturas para decidir se aceitam ou não o pagamento, preencher cheques ou lê-los para saber por quanto dinheiro trocá-los... são atribuições dos "caixas" e "clientes" quando a aula se transforma em um banco.

No contexto destes projetos[12] se envolvem naturalmente atividades de produção e interpretação, realizadas às vezes por uma mesma criança e, outras, por diferentes crianças: o "caixa" do banco lerá os números das faturas, os cheques e as notas, porém também terá que anotar as quantidades que recebe ou entrega; os "vendedores" produzirão listas de preços que serão interpretadas pelos compradores...

Entretanto, inserir-se em projetos e favorecer o relacionamento de produção e interpretação não são requisitos que todas as atividades são obrigadas a cumprir. As crianças também aprendem muito a respeito da numeração escrita em situações que se formulam de maneira isolada e que estão centradas só na produção ou só na interpretação. É o que acontece — por exemplo — com atividades de interpretação como o jogo da loteria ou a análise da numeração das ruas, e com atividades de produção de como "escrever números difíceis" ou anotar números ditados pelo professor ou pelos colegas.

Os números que aparecem nas situações de produção e interpretação — propostos por nós às crianças — são números cuja escrita convencional não foi ensinada previamente. O que é que nos autoriza a cometer semelhantes ousadias? O fazemos não só porque sabemos que as crianças têm suas idéias a respeito e porque aceitamos que as respostas se afastem do correto, mas porque sabemos também que elas têm ou podem construir recursos para produzir e interpretar essas escritas e para aproximar-se progressivamente do convencional.

As crianças nos ensinaram que a relação de ordem é para elas um recurso relevante quando devem enfrentar a situação de produzir ou interpretar números que oficialmente não conhecem e quando devem argumentar a favor ou contra uma escrita numérica produzida por seus colegas ou por elas mesmas.

1 "Eu antes nunca lembrava como se escrevia o vinte, o vinte e um e os dessa família — explica Cecília a seus colegas —. Agora se tenho que escrever o vinte e cinco, procuro ali (no calendário) o dezenove, depois vem o vinte, e conto. Em seguida me dou conta. Agora já sei que os do vinte vão todos com um dois na frente."

2 Em outras oportunidades, as crianças fazem uso da série numérica sem apoiar-se em uma base material. É assim que Fabian consegue escrever convencionalmente o número quinze através do seguinte procedimento: conta pausadamente a partir do um, como se ao nomear cada número pensasse ao mesmo tempo

[12] Os chamamos assim porque, ainda que não reúnam todas as condições dos projetos, cumprem algumas que são essenciais: dão lugar a múltiplas atividades que se organizam ao redor de um eixo comum e desenvolvem-se durante um período mais ou menos prolongado (ao redor de dois ou três meses).

na notação correspondente. Algo semelhante pode acontecer em situações de interpretação: quando Ariel — encarregado de "cantar" os números no jogo da loteria (bingo) — tira o número 23, conta com os dedos para si mesmo até chegar a dizer "vinte e três". (3)

Os procedimentos empregados pelas crianças confirmam as suspeitas que tínhamos formulado ao iniciar o trabalho didático: como a relação de ordem é uma ferramenta poderosa para produzir e interpretar notações numéricas, é preciso conseguir que todas se apropriem dela. Será necessário, então, sugerir sua utilização às crianças que não a empregam por si mesmas, e estimular as crianças que utilizam esta ferramenta a compartilhar com seus colegas.

Um primeiro efeito que se produz ao intervir neste sentido é a modificação da escrita ou da interpretação originalmente realizadas. É o que acontece, por exemplo, no caso de Martina, que, ao "cantar" o número 85 na loteria, lê "oito, cinco" e consegue depois interpretá-lo como "oitenta e cinco" graças a duas intervenções da professora: em primeiro lugar, lhe mostra o número 80 sem nomeá-lo e pergunta para ela qual é; como Martina não responde, a professora começa a escrever os "nós" das dezenas (10, 20,..., 80) e solicita-lhe que interprete cada uma das escritas que vai produzindo.

Intervir desta maneira é contagioso; se o professor o faz as crianças se darão conta de que é uma boa maneira de ajudar seus colegas e a adotarão. É o que acontece, por exemplo, quando Santiago está tentando escrever o número vinte e cinco e Frederico lhe sugere "pensa no vinte; se o vinte vai com um dois e um zero e o vinte e um com um dois e um um, como fazer para escrever o vinte e cinco?"; Santiago aceita a proposta de seu colega, conta até vinte e cinco oralmente e o anota.

Portanto, o efeito mais importante que estas intervenções perseguem não é o que se faz sentir de imediato. Não se trata somente de conseguir que as crianças corrijam uma escrita ou uma interpretação particulares aproximando-se momentaneamente ao convencional; trata-se sobretudo de que montem uma estratégia, de que a relação de ordem esteja sempre disponível como um recurso a que se pode apelar para resolver problemas de produção e interpretação.

Por outro lado, longe de intervir só no momento em que produzem ou interpretam notações, a relação de ordem vai além da discussão que se estabelece com todo o grupo e se reflete nos argumentos utilizados pelas crianças.

A presença da relação de ordem nos debates pode ilustrar-se através de uma situação desenvolvida no começo da segunda série.

Ao analisar as notações produzidas pelas crianças diante de um ditado de números, a professora detecta que só um deles — o 635 — tinha dado lugar a diferentes versões e decide, portanto, submetê-las à discussão no dia seguinte. A

professora indica que encontrou quatro maneiras diferente de escrever "seiscentos e cinqüenta e três", as escreve no quadro negro — sem identificar os autores de cada versão — e pede argumentos a favor ou contra as diferentes escritas. As produções em questão são:

60053 653 610053 61053

Bárbara: A que está certa é esta (a segunda) porque quando é "cento"... não leva dois zeros.

Jonathan: Sim, é essa. Porém quando a gente diz "cento", às vezes leva zero e outras não. Não sei quando leva zero ou não, porque cento e um leva zero.

Vicky: Esta (mostrando a terceira) não pode ser, porque cem é outro número e vem muito antes que seiscentos.

Jimena: Sim, é essa (a terceira), porque primeiro está o seis e depois o cento.

Julian: Não, não é, porque se não seiscentos e um seria 61001, seiscentos e dois seria 61002... A terceira é muito maior que seiscentos e cinqüenta e três, porque tem mais números.

Brian: Esta (a terceira) é maior que esta (a quarta), porque tem um zero a mais.

Vicki (a Jimena): Para mim, é esta (653). Não importa que a gente diga seiscentos, de qualquer jeito não deve ter um cem escrito nesse número.

Brian: Os zeros estão a mais; se quiser, você pode colocá-los na frente (00653).

Jonathan: Não, porque na frente não valem nada.

Os argumentos utilizados pelas crianças para rejeitar as notações não-convencionais apelam de todas as maneiras possíveis à relação de ordem: Vicki faz alusão à ordem da série oral, Julian e Brian recorrem tanto ao critério que permite ordenar números de diferentes quantidades de algarismos como ao conhecimento de que os números situados entre cem e novecentos e noventa e nove se escrevem com três algarismos. Tais argumentos continuaram presentes nas crianças que tinham produzido escritas não-convencionais — escritas que só Jimena defende explicitamente — e chegaram a transformar-se, graças a sucessivas discussões, em objeções que elas farão a si próprias.

Os aportes de Bárbara e Jonathan fazem surgir um problema que não estava enunciado antes da discussão: pode ter zeros um número cujo nome inclui "cento" ou "centos"? "Quantos zeros?, um, dois ou nenhum? A professora toma nota deste problema e em algum momento abrirá um espaço para discuti-lo grupalmente (veja 1.3).

Além deste uso *sui generis* da relação de ordem — para produzir, interpretar e justificar notações —, as crianças a empregam também da mesma maneira que os adultos.

De fato, ainda que nem sempre tenhamos consciência disso, os usuários do sistema de numeração apelam com freqüência à ordem: qual é o preço do artigo cujo código está na lista? saiu no extrato da loteria o número de meu bilhete?, para que lado caminhar se estou indo ao três mil e quinhentos desta rua? Formular situações que requeiram localizar determinados números em uma lista seriada ou determinar se tais números estão ou não incluídos na lista torna possível que as crianças elaborem procedimentos vinculados à relação de ordem, tal como ela se apresenta em nosso sistema de numeração. Situações como estas encontram um ambiente propício no jogo dos negócios. É o que acontece quando, para averiguar os preços reais dos artigos que serão vendidos, as crianças visitam — por exemplo — uma perfumaria na qual os artigos estão identificados mediante um código: o problema para elas é localizar, na lista fornecida pela encarregada do comércio, o número do código dos produtos escolhidos, para determinar assim seu preço. Da mesma maneira, se no "negócio" se aceita o pagamento com "cartão de crédito", antes de cobrar precisa-se consultar a lista de cartões de crédito rejeitados.

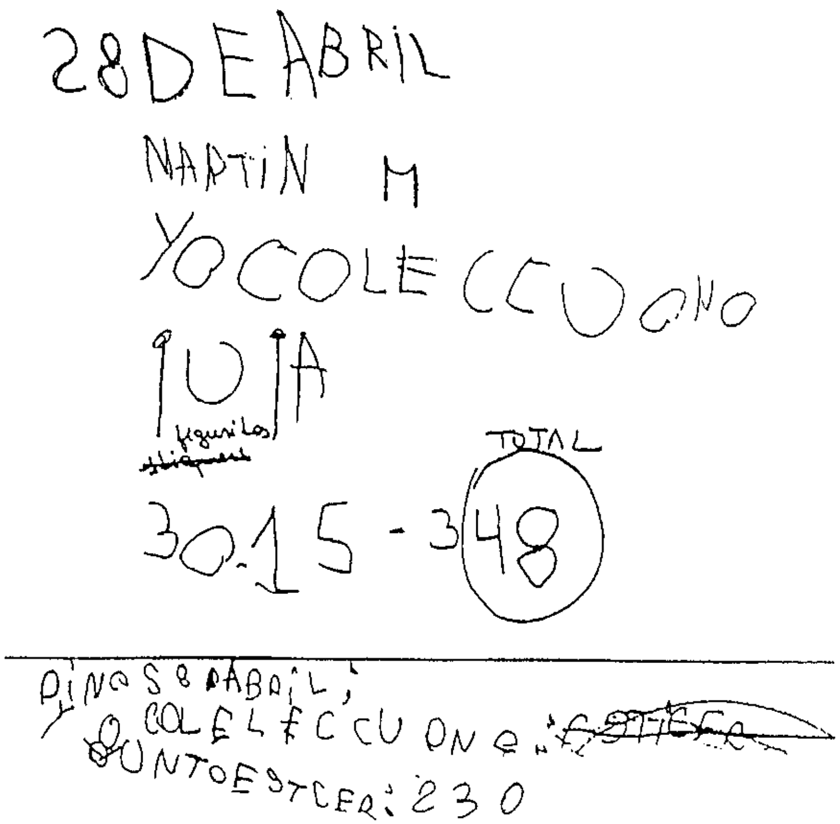
Um trabalho semelhante pode ser realizado com atividades incidentais: procurar em um quarteirão o número da casa de alguém, encontrar — levando em conta a informação providenciada pelo índice — a página onde começa a história que vamos ler.

A partir da análise aqui realizada, se torna evidente o importante papel que desempenha a seqüência oral no desenvolvimento da escrita numérica. Contar seria então uma atividade imprescindível, que teria lugar seja no contexto dos "negócios" ou do "banco" como em situações especificamente planificadas para gerá-las. É importante calcular os artigos existentes nos negócios ou as notas de cada tipo disponíveis nas diferentes "caixas", colecionar determinados objetos e contá-los periodicamente para controlar o crescimento da coleção, fazer levantamentos de opinião pública e determinar — por exemplo — a quantidade de fãs de determinados programas infantis, realizar votações para tomar certas decisões...

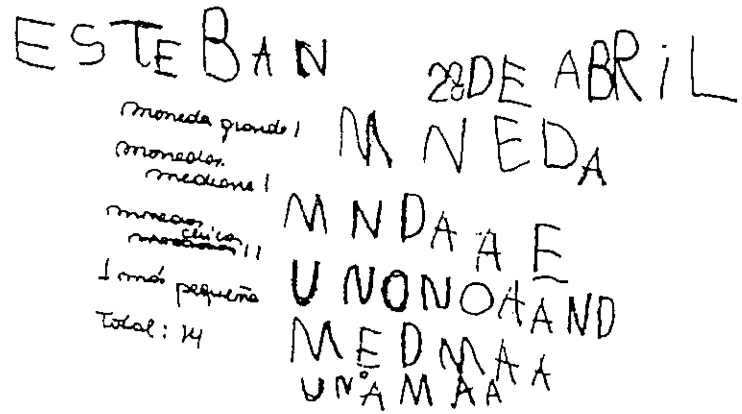
Sendo assim, a relação numeração falada/numeração escrita é um caminho que as crianças transitam em ambas as direções: não só a seqüência oral é um recurso importante na hora de compreender ou anotar as escritas numéricas, como também recorrer à seqüência escrita é um recurso para reconstruir

o nome do número. Esta é uma das razões pelas quais é fundamental propor atividades que favoreçam o estabelecimento de regularidades na numeração escrita.

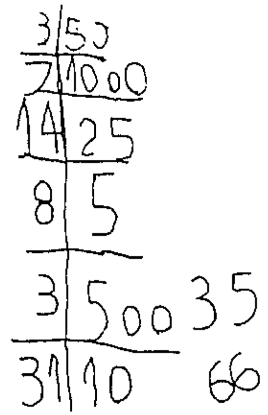
Ilustração 2 — Neste grupo de primeira série, cada criança tem sua própria coleção. Algumas colecionam chaveiros; outras, tampinhas de refrigerantes; outras, pedrinhas; outras, figurinhas... Uma vez por semana, se determina o estado das coleções: Martín faz agrupamentos com as figurinhas, anota a quantidade que há em cada um dos grupos e os soma; seu colega conta nada menos que duzentos e trinta figurinhas e anota simplesmente o resultado.



Esteban coleciona moedas. Em 28 de abril, para saber (e lembrar) quantas moedas tem, ele faz anotações agrupando-as por tamanho. A professora "traduz", por via das dúvidas. *(Ver legenda no rodapé*.)*

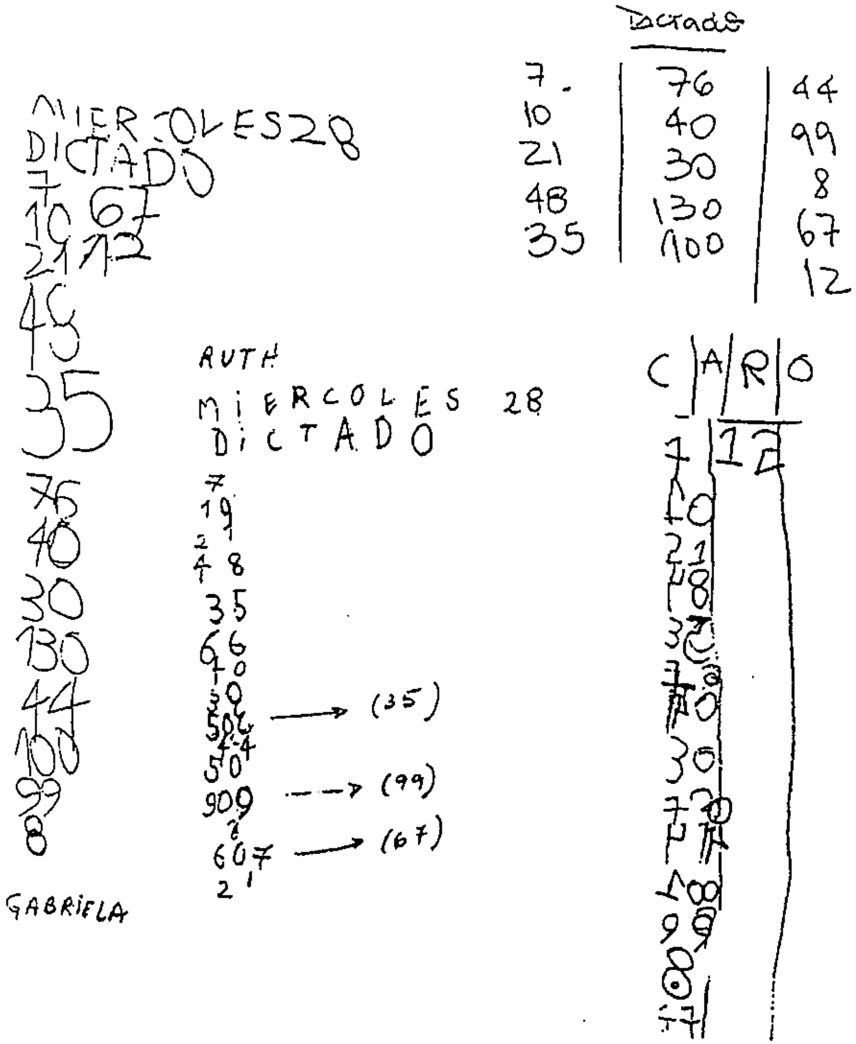


Quinze dias depois, Esteban tem muitas moedas mais e se vê obrigado a procurar uma maneira mais clara de anotar. Faz, então, uma tabela a partir da qual poderá procurar facilmente, na próxima vez, quantas moedas de cada tipo tinha na sua coleção. No dia 12/5: 3 moedas de 50 centavos, 7 moedas de 1000 Australes, 14 moedas de 25 centavos... Vai somando os dados que anotou (3 + 7 + 14 + 8 + 3) e, quando obtém este resultado (35), o anota e pede ajuda. Somar 35 + 31 é demais para ele. A professora e seus colegas contam com ele e é assim que — juntos — determinam que a coleção de Esteban tem agora 66 moedas.



* *Moeda grande - 1/moeda média - 1/moedas pequenas -11 / 1 menorzinha/Total: 14*

Ilustração 3 — Ditado de números na primeira série.



1.3. A busca de regularidades

O papel das regularidades a esta altura já pôde pode ser observado tanto nas situações de comparação como nas de produção ou interpretação. No primeiro caso, as situações apontaram precisamente à elaboração de regularidades, já que isso e não outra coisa é o critério de comparação. No segundo caso, evidenciaram-se sobretudo através dos argumentos utilizados pelas crianças para fundamentar ou rejeitar determinadas escritas numéricas.

Quais são as regularidades sobre as quais é necessário trabalhar? Tornam-se de especial importância — além dos critérios para ordenar números — "leis" como os *"dezes" precisam de dois, os "cens" de três; depois de nove vem zero e o outro número passa ao seguinte; Há dez números (de dois algarismos) que começam com um, dez que começam com dois...*

Estabelecer regularidades cumpre um duplo objetivo: torna possível formular problemas dirigidos a explicitar a organização do sistema e permite gerar avanços no uso da numeração escrita.

IDEIA CENTRAL

Formular perguntas acerca das razões que explicam as regularidades só tem sentido uma vez que as crianças já as tenham descoberto; estimular a busca de respostas só tem sentido quando as crianças estão em condições de compreender as perguntas.

O percurso didático inverte assim a ordem em que foi formulada a relação causa-efeito para aqueles que inventaram o sistema de numeração: para eles, as regularidades são conseqüência da posicionalidade, regra fundamental do sistema; para as pessoas que não precisam inventar um sistema, mas compreender este sistema que já existe, as regularidades se fazem presentes antes que as causas que as geraram.

Não é usual que as crianças se perguntem espontaneamente a respeito das causas e, inclusive, acontece às vezes que a pergunta formulada pelo professor não encontre nenhum eco. A pergunta deve ser formulada, porque se trata de conseguir que as crianças conceitualizem as regras que regem o sistema. Quando a resposta majoritária é "sei lá! Os números foram inventados assim!", será preciso saber postergar a pergunta até um momento mais propício, ainda que não muito distante; se, em troca, um grupo apreciável da aula — não necessariamente a maioria — se inquieta diante da pergunta e começa a arriscar alguma resposta, valerá a pena empreender a discussão. O momento propício para voltar a formular a pergunta e também o grau de elaboração que alcancem as respostas dependerão do conjunto de atividades que estejam sendo realizadas, e, em particular, das regularidades estabelecidas em relação às operações aritméticas (veja-se o ponto 2).

As respostas que desejamos têm aproximadamente a seguinte forma: os "cens" têm três números porque com dois se pode escrever só até nove "dezes" e o cem tem dez "dezes"; quando têm dois algarismos, os que começam com três são "trinta" e ao lado se pode colocar desde o zero até o nove, se há um a mais é outro dez, é quarenta e então já não se coloca três, é quatro...

Detectar regularidades é necessário — já o tínhamos dito — não só para avançar na compreensão do sistema; é imprescindível, também, para conseguir um uso cada vez mais adequado da notação convencional.

Se queremos conseguir — por exemplo — que as crianças adquiram ferramentas a partir das quais possam "autocriticar" as escritas baseadas na correspondência com a numeração falada, é preciso garantir a circulação de informação referente às regularidades. Desta maneira, torna-se possível que argumentos como "este (61053) não pode ser seiscentos e cinqüenta e três, porque os cens têm três números" — que a princípio são utilizados só por algumas crianças e em relação com a escrita de outras — cheguem a ser patrimônio de toda a aula e possam se aplicar também à própria escrita.

Um problema concreto, formulado em aula, nos permitiu descobrir que estabelecer regularidade é também um recurso para favorecer uma aquisição tão básica como contar. De fato, algumas crianças de primeira série, quando têm de passar à dezena seguinte interrompem a contagem ou passam diretamente a qualquer outra dezena cujo nome conhecem. Ainda que o mais comum seja que esta dificuldade se apresente quando procuram passar do vinte ("dezoito, dezenove... trinta", por exemplo), já esta denominação não evoca — à diferença do que acontece com as dos outros "nós" das dezenas — o nome do dígito a que se refere. Tal dificuldade também aparece com freqüência em intervalos posteriores da seqüência ("quarenta e oito, quarenta e nove... não sei mais" ou "trinta e oito, trinta e nove... cinqüenta").

Como intervir para que estas crianças avancem na manipulação da seqüência oral? Dar-lhes as respostas só serve para que a atividade empreendida possa continuar — quer dizer, para que siga contando o que se está contando —; sugerir às crianças que procurem um material que tenha a seqüência correspondente pode ser mais útil, porque torna possível que, ao ter que criar uma maneira de procurar, elas descubram por si mesmas a regularidade; propor uma atividade específica, como buscar nos números de um a cem quais são os seguintes dos que terminam em nove, é um bom recurso para conseguir que as crianças possam apropriar-se da regularidade e utilizá-la não só quando contam, mas também quando produzem ou interpretam.

Nesta situação fica claro que a análise de uma regularidade observável na notação numérica — além de incidir no progresso para a escrita convencional — contribui ao avanço da numeração falada.

As propostas que tendem a favorecer o estabelecimento de regularidades podem partir de um enunciado mais ou menos aberto: algo como "descubram em que se assemelham e em que não se assemelham os números que estão entre o um e o quarenta" aponta para que as crianças descubram por si mesmas a reiteração da seqüência do zero ao nove para cada dezena, e determinem qual é a mudança que se produz ao cumprir-se cada uma dessas seqüências; um enunciado mais específico, como "localizem todos os números de dois dígitos terminados em nove, notem qual é o seguinte de cada um deles e pensem em que se assemelham" pode contribuir a determinar as conclusões da atividade anterior, quando esta não conduziu a todas as regularidades esperadas ou a orientar aquelas crianças que se desconcertam diante de um enunciado aberto.

A realização de qualquer destas atividades se apóia, logicamente, na utilização de materiais como a fita métrica, o calendário ou a régua.

As regularidades estudadas não foram só as que tínhamos previsto no começo, já que as crianças — através de seus argumentos — introduziram outras que valeu a pena submeter à análise de todo o grupo. É o que aconteceu, por exemplo, quando Bárbara e Jonathan indicaram uma relação entre a denominação oral "cento" e a existência ou não de zeros nas escritas numéricas correspondentes (ver p. 127). Para generalizar a questão e procurar a resposta, se organizou uma situação ao redor do seguinte enunciado: "localizem na fita métrica os números que estão entre cem e cento e cinqüenta e prestem atenção no que acontece com os zeros nos números que se chamam "cento"... há algum que tenha zeros?, quais tem e quais não?

Uma vez estabelecidas as regularidades para este intervalo, se poderá propiciar sua generalização através da utilização de materiais que contenham números maiores. Como de costume, uma vez estabelecida uma regularidade, será possível começar a questionar o seu significado.

A questão das regularidades não termina aqui. Voltará a aparecer em nosso caminho, ao analisarmos as relações entre as operações aritméticas e o sistema de numeração.

operações

2. *Situações centradas nas operações aritméticas*

O sistema de numeração e as operações aritméticas são dois conteúdos básicos que fazem parte da escolaridade primária. Qual é a relação que podemos estabelecer entre eles?

Nosso trabalho didático anterior a esta pesquisa já nos tinha mostrado que, quando as crianças enfrentam situações-problema, geram — além de estratégias próprias para resolvê-las — procedimentos originais para encontrar os resultados das operações envolvidas, procedimentos que estão vinculados à organização do sistema de numeração decimal.

Não pretendemos abordar aqui um tema tão amplo como o das operações aritméticas; nos centraremos na análise dos procedimentos elaborados pelas crianças para alcançar resultados, já que são eles que guardam estreita relação com o problema que é o objetivo deste capítulo. No entanto, se faz necessário esclarecer que os procedimentos em questão aparecem em determinadas condições didáticas: a proposta que se tem formulado às crianças é resolver um problema e não uma conta isolada; se estimula a produção de procedimentos próprios, e não são ensinados no começo os algarismos convencionais.

Qual é a natureza da relação entre os procedimentos infantis para obter os resultados das operações e o conhecimento que as crianças vão elaborando acerca do sistema de numeração?

Trata-se de uma relação recíproca: por um lado, os procedimentos das crianças colocam em ação — além das propriedades das operações — o que elas sabem do sistema e, por outro lado, a explicitação desses procedimentos permite avançar para uma maior compreensão da organização decimal.

As regularidades que são possíveis detectar a partir do trabalho com as operações também fazem sua parte: contribuem para melhorar o uso da notação escrita, ajudam a elaborar estratégias mais econômicas, nutrem as reflexões que se fazem na aula.

2.1. Resolvendo operações e confrontando procedimentos...

Por que afirmamos que os procedimentos que as crianças utilizam estão estreitamente vinculados à organização do sistema de numeração? Talvez o melhor seja ceder-lhes a palavra:

— Diante de um problema que se resolve somando treze e vinte, Mariano (primeira série) antecipou que o resultado é trinta e três. Quando a professora lhe pede que explique como chegou a esse resultado, ele responde: "No treze há um dez e no vinte há dois dez mais, então são dez mais vinte que é trinta, e três do treze, dá trinta e três".

— Em relação a um problema em que se tinha que somar dez, treze e treze, Sebastian (primeira série) explica: "Para mim deu trinta e seis, porque somei os três dez e três e três são seis a mais".

— Assim explica Cecília (primeira série) como obteve o resultado de 19 + 28 + 31: "Eu coloco tudo separado, todos os dez (o do dezenove, os dois do vinte e os três do trinta) e depois presto atenção nos que somam dez (soma o nove de dezenove e o um de trinta e um) e depois junto o oito".

— Depois de resolver um problema somando trinta e nove e vinte e cinco, Giselle (segunda série) afirma que o fez "pensando com a cabeça" e acrescenta: "Primeiro somo de dez em dez e depois somo os demais números". Como a professora lhe pede que explique melhor o que é que somou de dez em dez, ela diz: "Tiro fora o nove do trinta e nove, então fica trinta; depois coloco os dois dez do vinte, fica cinqüenta; depois somo o nove e depois o cinco".

— Quando se pede às crianças que anotem seus procedimentos e os expliquem, se obtém produções como as seguintes:

Bolsú

76 - - 51 = 25

tenía 76 marcadores y vendí 51 y ahora cuantos tengo

Explicar como se resolbe

Fui restando de a diez 76-10=66 66-10=56 56-10=46 46-10=36 36-10=26

ahora le saco 1 a 26 y me da 25

MAXI

(Acredito que esteja a um passo de entender o algoritmo (a mais lógico))

94
-57

yo voy restando de a 10

94 - 10 = 84
84 - 10 = 74
74 - 10 = 64
64 - 10 = 54
54 - 10 = 44 y
44 - 7 = 37

y ya resto todo y termine

94
-57
37

ALE

127+251=378
127+200=327
327+10=337
337+10=347
347+10=357
357+10367
367+10=377+1=378

— Outras crianças de segunda série somam reiteradamente dez a um dos termos ao mesmo tempo que os vão subtraindo do outro, como para conseguir um máximo controle sobre cada resultado. De fato, ao somar 279 + 186 (convidados que se encontram em dois salões de uma grande festa), algumas crianças fazem assim:

200 + 100 = 300
300 + 70 + 86
300 86 330 56 360 26 386
310 76 340 46 370 16
320 66 350 36 380 6

Os autores desta estratégia explicitaram com surpreendente clareza uma conseqüência da propriedade associativa que em geral permanece implícita ao resolver operações: o que se soma a um dos membros precisa ser subtraído do outro. Esta estratégia tão reveladora de alto grau de reflexão das crianças a respeito das operações mostra ao mesmo tempo que para elas não resulta óbvio — como o é para nós — que 300 + 86 é 386.

— Apoiar-se sistematicamente nos "nós" é um recurso que utilizam algumas crianças para configurar procedimentos mais econômicos. É por esta razão que para terminar a conta do exemplo anterior, Javier soma 386 + 79 da seguinte maneira:

386 + 79
300
80 + 70 = 150

450 + 10 = 460 (Note-se a transformação de 9 + 6 em 10 + 5)
460 + 5 = 465

Da mesma maneira, para resolver 36 + 145, Sebastian escreve:
145 + 5 + 10 + 10 + 10 + 1 = 181

Ele explica: "Coloco o cinco porque com cinco já sei que chego a cento e cinqüenta". A professora lhe pergunta onde estava esse cinco e ele responde: "No trinta e seis, por isso ao final está o um; senão, só haveria somado trinta e cinco".

Todas estas crianças tiveram que resolver um problema matemático: o de elaborar por si mesmas procedimentos para encontrar o resultado de uma operação. Ao defrontar-se com este problema, elas utilizam sistematicamente a decomposição decimal dos termos. Esta decomposição adquire diferentes formas: em alguns casos, decompõem-se todos os somandos e em outros só um deles; em determinados casos, cada termo se decompõe em "nós" e em outros, os "nós" se decompõem em "dezes" ou "cens".

Quando esta questão se formula pela primeira vez na primeira série, nem todas as crianças utilizam procedimentos como os que apresentamos. A diversidade faz novamente sua aparição: algumas crianças contam com os dedos; outras, fazem tantos tracinhos quanto objetos que devem somar e então os contam de um a um, e outras encontram rapidamente o resultado. Entre estas últimas

indicação

estão as que não podem explicar como o fizeram, enquanto outras dão explicações semelhantes às de Mariano, Sebastian ou Cecília.

Propor às crianças que anotem de que maneira resolveram a operação é dar um passo importante para o progresso de todos, porque isto permite que cada uma delas tome consciência do procedimento que utilizou e porque a confrontação se vê favorecida ao abrir-se a possibilidade de comparar anotações (e já não só explicações orais).

Entre as crianças que inicialmente contam nos dedos ou com risquinhos no papel, há muitas que avançam para a decomposição decimal graças à interação com os colegas que a utilizam. Para outras, contudo, é difícil abandonar suas estratégias originais e é necessário ajudá-las de diferentes maneiras:[13] propondo a elas que recorram a materiais adequados, com o objetivo de que criem uma ponte entre seu procedimento e o das outras crianças — por exemplo, sugerindo-lhes que marquem com números os "nós" enquanto vão contando seus risquinhos (o número dez ao chegar ao décimo...) —, trabalhando com os "nós" das dezenas. As atividades relativas às regularidades vinculadas às operações (veja-se o ponto 2.2) representaram aqui também um papel importante.

Agora, que progressos na compreensão do sistema podem ser realizados uma vez que são utilizados procedimentos baseados no sistema decimal?

Quando se incita as crianças a procurar estratégias mais econômicas — e às vezes mesmo antes —, surgem outras propostas:

— Frederico, para resolver o problema no qual precisa somar trinta e nove e vinte e cinco, anota:

39 + 25

30 + 20 = 50
50 + 9 = 59
59 + 5 = 64

Então, com a intenção de esclarecer o que fez, acrescenta:

30 ← 39 → 9
20 ← 25 → 5

[13] Citamos aqui, entre muitas intervenções possíveis, somente aquelas que se relacionam com o sistema de numeração.

Quando a professora lhe pergunta pelo significado das setas, Frederico responde: "É para que entendam de onde tirei o trinta e o vinte que somei primeiro".

— Emanuel faz o cálculo da mesma maneira que Frederico e, quando a professora lhe pergunta como fez para saber quanto era trinta mais vinte, ele responde: "Olha, se três mais dois é cinco, então trinta mais vinte tem que ser cinqüenta".
— Diego (segunda série) explica como realizou a soma 473 + 218 anotando o seguinte:

473 + 218 = 691
porque 4 + 2 es 6 entonces 400 + 200 es 600
y 70 + 10 es 80 + 8 + 3 es
11, y onse + 80 es 91

É uma maneira útil até mesmo para nós, adultos, realizarmos nossas contas

— Florencia (segunda série), além de selecionar — em um enunciado que inclui dados supérfluos — só os dados pertinentes para dar resposta à pergunta, explicita o procedimento que utilizou para obter o resultado:

EN LA HELADERAS DE MI CASA TENGO:
12 NARANJAS, 8 MANZANAS, 2 LECHUGAS, 25
ZANAHORIAS, Y 20 CIRUELAS,
¿CUANTAS FRUTAS TENGO?
A LOS 12 LE SACAMOS 2. Y NOS DIO 10 A
LOS 10 LE PUSIMOS 8 Y NOS DIO 18.
Y A LOS 18 LE AGREGAMOS 2 Y NOS DIO 20.
Y NOSOTROS YA SABEMOS QUE 2+2=
4. ENTONCES 20+20=40

(Ver legenda no rodapé.)*

A tarefa na aula nos permitiu descobrir que não se passa facilmente do procedimento que consiste em somar reiteradamente dez ou cem, ao procedimento utilizado pelas últimas crianças citadas. Por quê? Seguramente porque o segundo procedimento supõe uma compreensão maior do sistema de numeração. De fato, para decompor quarenta em quatro "dezes" — quando se soma, por exemplo, trinta mais quarenta — é suficiente saber que quarenta (como significado) inclui quatro "dezes"; em troca, para afirmar "se três mais quatro é sete, *então* trinta mais quarenta é setenta", é necessária ter entendido, além disto, algo fundamental em relação aos significantes numéricos: que o *três* de trinta representa três "dezes" e o *quatro* de quarenta se refere a quatro "dezes".

Estes últimos procedimentos indicam, então, que as crianças fizeram uma generalização válida em nosso sistema de numeração.

Para analisar de perto em que consiste esta generalização, faremos uso de uma indicação feita por R. Skemp. Este autor faz notar que nosso sistema de numeração — à diferença do que acontece com outros sistemas, como o romano — utiliza uma possibilidade fundamental oferecida pelos números: se somam-se — por exemplo — dois objetos quaisquer a três objetos da mesma classe, se obtém sempre cinco objetos dessa classe, independentemente de que os objetos em questão sejam elementos isolados, conjuntos ou conjuntos de conjuntos. Assim,

* Na geladeira de minha casa tenho / 12 laranjas, 8 maçãs, 2 alfaces, 25 / cenouras e 20 ameixas. / Quantas frutas tenho? Dos 12 tiramos 2 que da 10, aos 10 somamos 8 e dá 18, / e aos 18 acrescentamos 2 e dá 20, / e nós já sabemos que 2+2 = / 4, então 20 + 20 = 40.

Adição

duas meias mais três meias são cinco meias, dois pares de meias mais três pares de meias são cinco pares de meias, duas dúzias de pares de meias mais três dúzias de pares de meias são cinco dúzias... É por isso que a organização do sistema de numeração autoriza as crianças a fazer uso da abstração 2 + 3 = 5 para deduzir que dois "dezes" mais três "dezes" são cinco "dezes", ou que dois "cens" mais três "cens" são cinco "cens". A estrutura "se... então" empregada pelas crianças sintetiza com grande precisão relações cuja explicitação com freqüência requer muitas linhas (como acontece neste artigo).

É evidente, então, que a busca de estratégias mais econômicas para resolver as operações funciona como um motor para descobrir novas relações envolvidas na notação numérica.

A confrontação de procedimentos abre as portas para que cada criança possa entender, ou ao menos começar a entender, os procedimentos que utilizam seus colegas. É o que acontece, por exemplo, na seguinte situação.

Ao resolver um problema que requer somar 50 + 70, aparecem três procedimentos diferentes, cada um dos quais é utilizado por várias crianças. A professora os anota no quadro-negro e incentiva a sua comparação. Os procedimentos são:

70 + 10 = 80	50 + 50 = 100	70 + 50 = 120
80 + 10 = 90	100 + 20 = 120	
90 + 10 = 100		
100 + 10 = 110		
110 + 10 = 120		

Muitos alunos dizem que o procedimento da direita não está explicado, que se anotou o resultado, porém não se sabe como chegou a ele. Uma das crianças que utilizou este último procedimento explica: "Eu fiz o mesmo que vocês, vocês colocaram cinco dezes, aqui (indicando os da esquerda) há um, dois, três, quatro, cinco dezes, não é? Bom, eu também somei cinco dezes (indica o cinco de 70 + 50), porém os somei diretamente, porque cinco mais sete é doze, não é?".

Ao propiciar que se estabeleçam relações entre diferentes procedimentos, torna-se possível conseguir não só uma aproximação entre eles, mas também uma maior compreensão da natureza do sistema de numeração por parte de todas as crianças — seja as que explicitam um procedimento muito econômico, como as que começam a vislumbrar a possibilidade de modificar o procedimento que utilizavam para adotar o que seus colegas propõem.

Deste modo, a experiência didática tem mostrado que a busca de procedimentos para resolver operações não é só uma aplicação do que as crianças já sabem do sistema, é também a origem de novos conhecimentos a respeito das regras que regem a numeração escrita.

Portanto, será necessário colocar em marcha todos os recursos possíveis para conseguir que as crianças que contam (ou somam) de um em um aproximem seu procedimento ao das que somam de dez em dez e que estes progridam até estratégias mais econômicas do tipo "se... então". A busca de regularidades vinculadas às operações torna possível estes progressos... e algo mais.

2.2. Refletindo acerca das operações e descobrindo "leis" do sistema de numeração

As crianças — como temos visto — inventam algarismos próprios. Ao fazê-lo, colocam em jogo tanto as propriedades das operações como conhecimentos implícitos sobre o sistema de numeração. Explicitá-los é um passo necessário para descobrir leis que regem o sistema.

Um procedimento muito popular é somar reiteradamente dez ou cem. Estudar o que acontece quando se realizam estas somas — comparando o primeiro termo com o resultado — permite estabelecer regularidades referentes ao que muda e ao que se conserva.

"Em uma loja de artigos para o lar — falamos para as crianças — aumentaram em 10 pesos todos os preços. Esta é a lista dos preços velhos; coloquemos ao lado os novos preços". Todas as crianças resolvem a situação formulada: enquanto que algumas anotam rapidamente o resultado, outras contam de um em um cada vez que somam dez. Uma vez em pequenos grupos, se confrontam, se corrigem e reproduzem a lista no quadro-negro. Chega, então, o momento de analisar como é que se transformam os números quando se lhes soma dez.

Ao comparar os preços originais (12, 43, 51, 82, 25, 36... por exemplo) com os novos preços correspondentes (22, 53, 61,...), as crianças formulam regras como as seguintes: "sempre que se acrescenta dez, fica maior"; "os números da frente mudam por um a mais na escala e os de trás continuam iguais". Ao longo do tempo e através das atividades realizadas, esta última lei se irá formulando, até adotar mais ou menos esta forma: "o número que troca pelo seguinte é o das dezenas, porque você somou dez; o outro fica igual".

Uma atividade semelhante pode ser feita fornecendo como dado os novos preços e solicitando que sejam determinados os velhos. As regularidades que neste caso se estabeleceram estarão referidas, logicamente, às transformações que se produzem quando se subtrai dez.

Contar de dez em dez — por exemplo as notas do "banco" — e anotar o que se vai contando, fazer listas de preços em números "redondos" (os "nós" das dezenas) que aumentaram ou diminuíram dez pesos, comparar as mudanças que se produzem nos números quando se soma (ou se subtrai) um e quando se soma (ou se subtrai) dez... são situações úteis para todos, e em particular para as crianças que ainda continuam contando de um em um.

Outra perspectiva possível para analisar a mesma questão é a que se adota em uma atividade como a seguinte:

"Os empregados de uma biblioteca estavam fazendo um inventário para saber quantos livros tinham. Vários deles contavam os livros existentes nas diferentes seções e iam anotando as quantidades obtidas. Algumas de suas anotações eram:

Pedro	Juan	Marta	Pablo	Rosaura
20	40	40	45	3
22	45	50	50	6
24	50	60	55	9
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
36	80	120	115	69

— Como cada um dos empregados contava?
— Como descobrir?
— Poderíamos compreender como contavam sem fazer cálculo nenhum, limitando-nos a observar os números?
— Como continuaram as anotações de cada um dos empregados?"

Esta atividade, diferentemente das anteriores, exige que as crianças se concentrem nas representações numéricas, já que é a partir delas que poderão descobrir as operações envolvidas em cada série.

Uma terceira perspectiva pode ser introduzida formulando situações como esta:

"Pablo estava lendo um artigo na página 25 do jornal. Quando chegou ao final da página, encontrou uma nota que dizia "continua na página 35". Quantas páginas teve que pular Pablo? Como você descobriu? Que outros dados poderiam se colocar no problema *sem mudar* a quantidade de páginas que Pablo teve que pular para continuar lendo o artigo?"

multiplicação

A última pergunta é o que distingue esta atividade das anteriores: agora se trata de produzir pares de números cuja diferença é dez e não mais de inferir a transformação operada entre números determinados.

Por outro lado, será interessante propor problemas que permitam analisar as transformações que se produzem nas notações numéricas ao somar ou subtrair outras quantidades "redondas". Formulemos um exemplo:

"Em uma vídeo-locadora, que acaba de abrir, há 13 fitas de filmes. A cada semana, os donos compram dez novos filmes. Quantos filmes terão ao cabo de três semanas? E a oito semanas? E a dez semanas?

Outra vídeo-locadora procedeu da mesma maneira, porém tinha originalmente 38 filmes. Quantos terá três, oito e dez semanas depois?

Em uma terceira vídeo-locadora, também compraram dez fitas por semana e ao final da quinta semana tinham 84 fitas de filmes. Quantas fitas tinham no princípio?"

Este problema procura estabelecer regularidades como "somar diretamente trinta produz o mesmo resultado que somar três vezes dez", "somar diretamente oitenta é o mesmo que somar oito vezes dez", "subtrair cinco vezes dez é o mesmo que subtrair cinqüenta de uma vez só". Ao centrar a comparação nos estados iniciais e os resultados correspondentes, será possível estabelecer regras como "quando somo trinta, tenho que acrescentar três dezenas a mais à dezena existente", "se você quer somar oitenta, o que é preciso fazer é acrescentar oito dezenas às que você já possui", "quando somamos oitenta, às vezes, o resultado tem três números e, às vezes, tem dois". Estas "leis" que as crianças formulam desembocaram no reconhecimento geral de uma regularidade que surgiu em aula através de alguns alunos, como explicação de um dos procedimentos que utilizavam para resolver operações: "se — por exemplo — um mais oito é nove, então um dez mais oito dezenas são nove dezenas, é noventa".

A reflexão sobre os aspectos multiplicativos envolvidos na notação numérica também se torna possível a partir de um jogo com dados: se estabelece que cada ponto vale dez, as crianças — organizadas em grupos — lançam o dado cada qual por sua vez e anotam a pontuação que obtiveram.

No desenvolvimento do jogo, aparecem diversos procedimentos: algumas crianças contam com os dedos até dez, enquanto indicam um ponto do dado, então indicam o segundo ponto do dado e continuam contando até vinte...; outras crianças contam de dez em dez; outras ainda dão o resultado de imediato, sem evidenciar como fizeram para encontrá-lo.

Depois de várias rodadas, a professora pergunta: "quando saem quatro pontos, o que vocês anotam?". Faz perguntas semelhantes para outros números que apareceram no jogo e logo as amplia a outras situações possíveis.

> *Professora:* Como vocês compreendem isto?
>
> *Fernanda:* Humm..., porque se coloco um 0 no 8 é 80, se acrescentar ao 9 um 0, fica 90, é tudo a mesma coisa.
>
> *Professora:* Olhem: se tiram 4, vocês se dão conta de que é 40 (escreve os números), porém, o que tem a ver o 4 com o 40?
>
> *Leo:* Aqui são quatro coisas e ali são quarenta coisas.
>
> *Professora:* Porém o 40 também tem um 4. Por que tem um 4 no 40?
>
> *Giselle:* Porque aqui (40) são 4 de dez.
>
> *Miguel:* Se contas de dez em dez, com quatro de dez já é quarenta, por isso vai o quatro (em 40).

base para o sistema decimal

As intervenções da professora procuram conseguir que as crianças reflitam a respeito da função multiplicativa do 4 na notação 40 (4 × 10) e a relacionem com a interpretação aditiva desse número (10 + 10 + 10 + 10).

É assim que se torna possível — nesta atividade e em muitas outras — utilizar a situação de somar ou subtrair reiterativamente dez como via de acesso a uma maior compreensão do valor posicional. (dezena)

Atividades semelhantes às que descrevemos podem ser propostas em relação à soma ou subtração de cem. Para este caso há duas ótimas aplicações: notas de dinheiro e a numeração das ruas.

Podem enunciar-se, por exemplo, problemas como os seguintes: "Quantos quarteirões tem-se que caminhar para ir da rua Rivadavia 700 à Rivadavia 1000?, e para ir do 1700 ao 2000?, e do 2700 ao 3000?", "Martín e Pablo moram na rua Corrientes. Martín mora na altura do 500 e caminha quatro quarteirões para ir à rua do Pablo; a que altura mora Pablo?", "Florencia e Lorena moram na rua Córdoba. Para visitar-se têm que caminhar dez quarteirões; então, a que altura da rua Córdoba fica a casa de cada uma delas? (encontrar pelo menos dez possibilidades)".

A comparação de diferentes situações levará a estabelecer regularidades também para o caso dos "cens", a confrontá-las com as já estabelecidas

calculadora

para os "dezes" e a continuar refletindo acerca da organização do sistema de numeração.

A calculadora pode contribuir para a reflexão sobre a estrutura aditiva da numeração falada e sua vinculação com as regras da numeração escrita se é utilizada, por exemplo, da seguinte maneira: a professora dita um número que as crianças marcam na calculadora e então pergunta o que têm que fazer para que apareça um zero no lugar de algum (ou alguns) dos algarismos que constituem o número.

Ao realizar esta atividade em uma segunda série, se ditou no começo o termo 9815 e se perguntou que ordem teria-se que dar para que o resultado fosse 9015. Muitas crianças subtraíram primeiro oito, a seguir oitenta e só depois oitocentos, enquanto que outras crianças fizeram diretamente a subtração correta. Quando discutiu-se a questão em grupo, todas já sabiam que era necessário subtrair 800, já que as outras soluções — subtrair 8 ou subtrair 80 — tinham sido descartadas por conduzir a um resultado diferente do procurado. Quando a professora pediu que explicasse como se tinha dado conta de que teria que subtrair oitocentos e não oito ou oitenta, Francisco respondeu: "você pode subtrair assim (9815 – 15), e isto dá nove mil e oitocentos; assim já ajuda um pouco, não? Porque então você já sabe que são oitocentos".

Então se ditou 9268 e se pediu às crianças que fizessem algo para obter como resultado 9208. Novamente, algumas crianças subtraíram primeiro seis e só depois sessenta, enquanto que outras fizeram no começo esta última subtração. Durante a discussão, todo mundo estava de acordo que tería-se que subtrair sessenta, porém justificá-lo não era tão fácil. Francisco expôs uma explicação inesperada: "junta-se o seis que há no número colocado, com o zero que tem que ter no resultado e é sessenta". Tali perguntou: "porém, como é que você sabia desde o começo que tinha que subtrair sessenta?". Apresentaram-se duas respostas: a de Patricio foi "Por que é nove mil duzentos e sessenta e oito, então tenho que subtrair sessenta, não seis"; a de Jenny foi "Tem-se que subtrair sessenta, porque quando a gente lê o número não lê nem seiscentos, nem seis, lê ses-senta".

Foi instrutivo descobrir que os argumentos das crianças estavam exclusivamente baseados na numeração falada e que nenhuma delas — nem sequer as que em outras situações formularam justificativas do tipo "se... então" — apelava ao valor posicional. Decidimos, então, formular outras situações deste tipo e comparar situações em que, para um mesmo número o zero do resultado aparecia colocado em diferentes lugares — por exemplo, determinar quais são as ordens que têm que dar à calculadora para transformar 6275 em 6075, 6205 e 6270. Aqui, as crianças começaram a tomar consciência de que determinadas situações teriam que subtrair "cens"; em outras, "dezes"; em outras, unidades. A questão esclareceu-se ainda mais quando propusemos partir de números como 4444 ou 7777 e quando comparamos muitos casos diferentes, nos quais se tratava de obter um zero colocado em um determinado lugar.

A calculadora é um instrumento valioso para a realização destas atividades, já que torna possível que cada criança detecte por si mesma quando é que está certo e quando se equivocou, autocorrija seus erros a comece a formular a necessidade de buscar uma regra que lhe permita antecipar a operação que efetivamente permite chegar ao resultado procurado.

Em síntese, refletir a respeito da vinculação entre as operações aritméticas e o sistema de numeração conduz a formular "leis" cujo conhecimento permitirá elaborar procedimentos mais econômicos. E torna possível "algo mais": indagar-se pelas razões destas regularidades, buscar respostas na organização do sistema, começar a desvendar aquilo que está mais oculto na numeração escrita.

Instantâneos do trabalho na aula

A professora da primeira série propõe uma escrita não-convencional — inspirada nas produzidas por seus alunos até pouco tempo atrás —; ao elaborar argumentos para rejeitá-las, as crianças analisam a relação numeração falada — numeração escrita (para os números compreendidos entre dez e vinte).

Em uma situação incidental, surge a necessidade de anotar o número dez e nove, Micaela vai no quadro negro e o escreve convencionalmente.

Professora: (à turma) O que vocês acham? E assim o dezenove?

Alunos: (concordam)

Professora: Umas crianças de outra escola me falaram que se poderia escrever assim: 109. O que vocês acham?

Román: Eu acho que esse número é do cem...

Juan Alberto: Não! Esse não é! Não está vendo que o dezenove é o outro? Você não se dá conta de que diz "dez e nove"?

Professora: Porém, onde está o dez aqui ? (indica o 19).

Gusty: Não está em nenhum lugar.

Vero: Sim! Está embaixo do nove.

Román: O um significa dez, o que acontece é que não podes escrever um 10 a cada número porque... Seria qualquer coisa!

Professora: E no dezessete? (O escreve no quadro negro da maneira convencional.)

Juan Alberto: O que eu digo acontece com todos os números: com o dezesseis, com o dezessete, o dezoito, o dezenove...

Diego: Quando a gente diz dezessete soa um pouco "dez e sete", porém, não se escrevem o dez e o sete.

Maria: Porém..., não dizemos dez e sete (o diz acentuando a separação), o dizemos tudo junto.

Professora: E com o quinze acontece igual que com o dezesseis, o dez e sete...

Vero: Sim, porque se a gente tirar cinco, ficam dez.

A professora enuncia um contra-exemplo; as crianças se vêem obrigadas a precisar suas afirmações.

Alguém escreve 35, todas as crianças o interpretam corretamente.

Professora: Como se dão conta que é o trinta e cinco?

Aluno: Porque começa com três.

Outra criança: Porque quando digo trinta e cinco, sei que começa com três... três... trinnn... trinta.

Outra criança: Porque dez e dez e dez são trinta, há "três" de dez.

A professora então escreve 366 no quadro negro e pergunta:

Professora: E este número qual é? Também começa com três.

Uma criança: Não, esse não é dos trinta ainda que comece com três. É da família dos cem porque tem três números, porém não sei qual é...

A professora coloca em dúvida as afirmações corretas de seus alunos, estes respondem explicitando mais claramente o que sabem acerca do sistema de numeração.

As crianças de segunda série ditam "cento e trinta e três" e dizem: "é com um um, um três e um três".

Professora: Como? Com dois três?

Aluno: Bom, é que os dois são o número três, porém têm diferente valor.

Professora: Como pode ser que o mesmo número tem o valor diferente? Como vamos entender isso?

Outra criança: Olha, os números são sempre o três, porém há diferentes três. Anota assim: três, três, três. É o trezentos e trinta e três, não? Há um três que é três, o segundo que é trinta e o outro é três de "cento".

Professora: Sempre acontece isso?

Outro aluno: Sim... Com o 555 também, o do meio é cinqüenta.

Professora: Eu não vejo nenhum cinqüenta ali.

Várias crianças: Não, porque o outro é cinco! Se não está, você coloca zero; porém se está o cinco, é cinqüenta e cinco.

Duas observações são necessárias a respeito do conjunto de atividades que estamos propondo.

Em primeiro lugar, as situações relacionadas com a ordem e as vinculadas às operações vão-se desenvolvendo de maneira simultânea, já que a decisão de colocar em primeiro plano na aula o funcionamento do sistema de numeração assim o exige. Cada categoria de situações constitui um âmbito no qual se coloca em relevo algum aspecto particular da numeração escrita. As aprendizagens, que são realizadas nos diferentes âmbitos, vão formando uma malha a partir da qual as crianças organizam e reorganizam seu conhecimento a respeito do sistema. Optar por abordar na aula o sistema de numeração, em toda sua complexidade, significa também enfrentar um alto grau de complexidade didática.

Em segundo lugar, existe um parentesco entre algumas das situações propostas e atividades muito tradicionais na escola: preencher cheques supõe escrever quantidades em números e em palavras, decompor os termos para somar ou subtrair leva a produzir escritas (como 386 = 300 + 80 + 6) que lembram os "exercícios de decomposição", ditar números se assemelha muito... ao ditado de números (!).

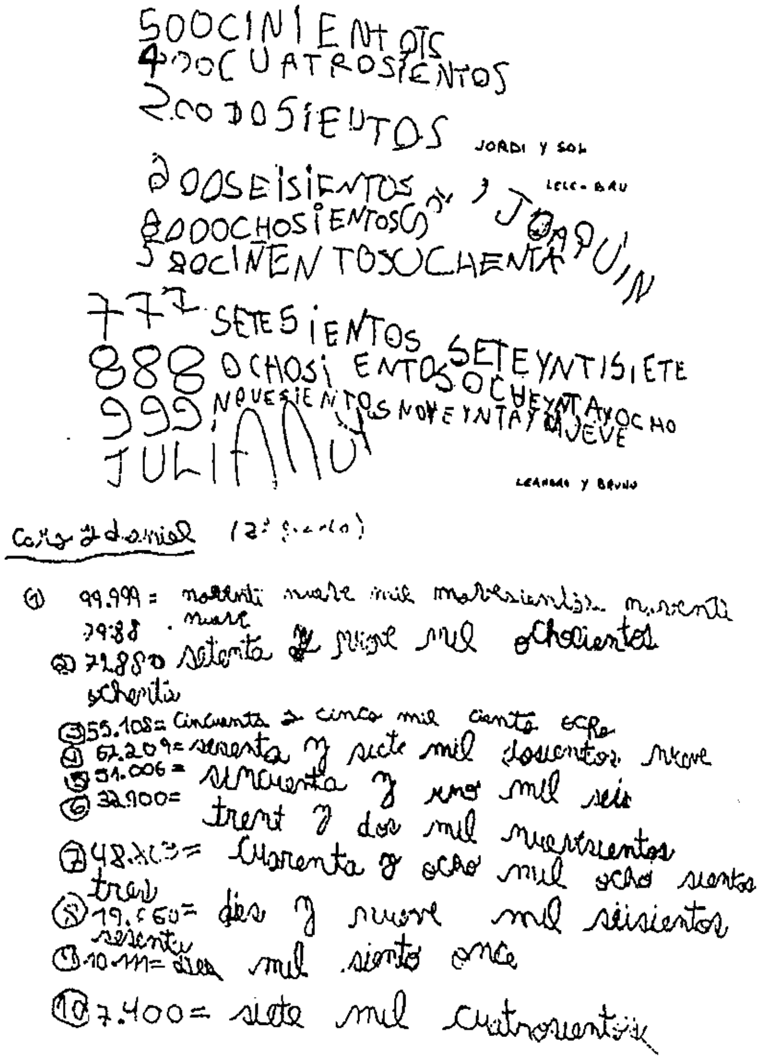
No entanto, o parentesco não é tão próximo. Quando se trata de preencher cheques, a passagem das quantidades à escrita com palavras (ou vice-versa) aparece no contexto de uma situação em que apresenta sentido: por um lado, o suporte utilizado requer efetivamente — para evitar ambigüidades — a dupla escrita do número; por outro lado, a atividade é orientada à discussão das produções ou interpretações realizadas pelas crianças. Para este último objetivo também apontamos ao ditar números: o esperado é que as produções reflitam diferentes conceitualizações e constituam — portanto — o ponto de partida para a confrontação, para o intercâmbio de informações, para a aproximação *progressiva* à escrita convencional. Finalmente, a decomposição decimal de números — longe de construir o enunciado ao redor do qual se organiza a atividade — é uma ferramenta que as crianças elaboram para resolver determinados problemas.

O que importa, então, não é que uma atividade está categorizada como "tradicional" ou "inovadora"; o que importa é que as propostas de trabalho reúnam determinadas condições: partir dos problemas formulados pelo uso da numeração escrita, contemplar diferentes procedimentos, admitir diferentes respostas, gerar alguma aprendizagem a respeito do sistema de numeração em todos os membros do grupo, favorecer o debate e a circulação de informação, garantir a interação com a numeração escrita convencional, propiciar uma crescente autonomia na busca de informação, aproximar — na medida do possível — o uso escolar ao uso social da notação numérica.

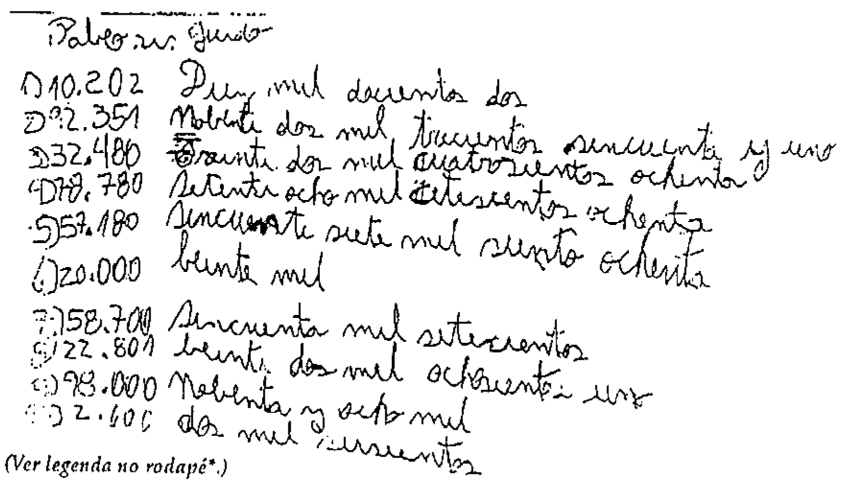
Intercâmbio de mensagens

A partir dos cheques, deriva-se outra atividade: enquanto um grupinho de crianças faz uma lista de números escritos com algarismos, outro faz sua lista escrevendo com palavras os nomes dos números. A seguir, intercambiam suas mensagens: o grupo que recebe números escritos com algarismos deve anotar o nome de cada um destes números, o grupo que recebe os nomes deve anotar com algarismos os números correspondentes.

É muito sugestiva a diferença que existe entre os números escolhidos pelas crianças de primeira série e os propostos pelas crianças de segunda série (ver adiante).



500 "quinhentos" / 400 "quatrocentos" / 200 "duzentos" Jordi e Sol / 600 "seiscentos" Lele — Bru / 800 "oitocentos" Sol / 580 "quinhentos e oitenta" Joaquim / 777 "setecentos e setenta e sete / 888 "oitocentos e oitenta e oito" / 999 "novecentos e noventa e nove" Leandro e Bruno.
Caro e Daniel (2ª série) / 1) 99.999 = "noventa e nove mil novecentos noventa nove" / 2) 79.880 = "setenta e nove mil oitocentos e oitenta" / 3) 55.108 = "cinqüenta e cinco mil cento e oito" / 4) 67.209 = "sessenta e sete mil duzentos e nove" / 5) 51.006 = "cinqüenta e um mil e seis" / 6) 32.900 = "trinta e dois mil novecentos" / 7) 48.803 = "quarenta e oito mil oitocentos e três" / 8) 19.660 = "dez e nove mil seiscentos sessenta" / 9) 10.111 = "dez mil cento e onze" / 10) 7400 = "sete mil quatrocentos"



(Ver legenda no rodapé*.)

Perguntando outra vez

"Teríamos que encontrar uma resposta", assinalamos ao começar este artigo. Agora, perto do final, se fazem presentes as novas perguntas. Nosso próprio jogo de perguntas e respostas nos incentiva a continuar indagando.

Se a diversidade é tão marcada, já não só de um grupo a outro, mas dentro de cada grupo, como estabelecer limites que tenham validade geral entre o trabalho que é realizado na primeira série e o que se leva a cabo na segunda e terceira séries? Como definir quais são os saberes que são considerados patrimônio de todas as crianças em um determinado momento? Que outras estratégias implementar para ajudar as crianças a abandonar pouco econômicos e progredir para aqueles que supõem conceitualizações mais profundas?

Sabemos que ter estabelecido regularidades no sistema de numeração é uma condição necessária para que seja significativo perguntar-se sobre as razões que fundamentam tais regularidades. Poder-se-á estabelecer uma relação como esta entre outras aquisições? Quais?

As crianças encontraram "leis" que não tínhamos previsto; haverá outras cujo descobrimento poderia contribuir ao progresso da conceitualização? Que

* Pablo. W. Gurdo / 1) 10.202 "dez mil duzentos dois" / 2) 92.351 "Noventa dois mil trezentos e cinqüenta e um" / 3) 32.480 "trinta e dois mil quatrocentos e oitenta" / 4) 78.780 "setenta e oito mil setecentos e oitenta" / 5) 57.180 "cinqüenta e sete mil cento e oitenta" / 6) 20.000 "vinte mil" / 7) 58.700 "cinqüenta mil e setecentos" / 8) 22.801 "vinte e dois mil oitocentos e um" / 9) 98.000 "noventa e oito mil" / 10) 2.600 "dois mil e seiscentos"

novos problemas é necessário incluir em nossa proposta para garantir que as crianças transitem com êxito até a compreensão do sistema de numeração?

As perguntas nos levam outra vez à sala de aula. Porque aprendemos ao compartilhar o trabalho com professores e alunos, enfrentaremos o desafio de continuar a busca. Quando encontrarmos as respostas, terá sentido empreender o próximo capítulo.

BIBLIOGRAFIA

Bednarz, N. e Janvier, B. (1982): "The understanding of numeration in primary school", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 13.1.

Bressan, A., Rivas, S. e Scheuer, N. (1991): "Los chicos y los números", *Ciencia hoy*, vol. 2.11.

Brousseau, G. (1986): "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2. (Existe uma versão datilografada traduzida para espanhol por María Emilia Quaranta.)

Brousseau, G. (1990): "?Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 8.3.

Centeno Pérez, J. (1980): *Números decimales: ?Por qué? ?Para qué?*, Editorial Síntesis, Madrid.

Collette, J. (1985): *Historia de las matemáticas*, Madrid, Siglo XXI (Edição original em francês: 1973).

Dantzig, T. (1971): *El número, lenguaje de la ciencia*, Buenos Aires, Editorial Hobbs Sudamericana (edición original de 1930).

Douady, R. (1984): "Juego de marcos y dialéctica instrumento/objeto en la enseñanza de la matemática", Universidade de Paris 7.

Guitel, G. (1975): *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion.

Hughes, M. (1987): *Los niños y los números*, Buenos Aires, Planeta (edição original em inglês, 1986).

Inhelder, B., Sinclair H. e Bovet, M. (1975): *Aprendizaje y estructuras del conocimiento*, Madrid, Ediciones Morata, (edição original em francês, 1974).

Lerner, D. (1992): *La matemática en la escuela aquí y ahora*, Buenos Aires, Aique.

Kamii, C. (1986): "El valor posicional: una explicación de su dificultad y de sus implicaciones educativas", *Journal of Research in Childhood Education*, vol. 1.2.

———. (1985): *Los niños reinventan la aritmética*, Madrid, Visor aprendizaje (edição original em inglês: 1989).

———. (1992): *Reinventando la aritmética II*, Madrid, Visor aprendizaje (edição original em inglês: 1989).

Parra, C. e Sáiz, I. (1992): *Los niños, los maestros y los números. Desarrollo Curricular. Matemática 1° y 2° grado*, Municipalidade da cidade de Buenos Aires, Secretaria de Educação e Cultura, Direção Geral de Planejamento.

Piaget, J. (1978): *La equilibración de las estructuras cognitivas: problema central del desarrollo*, Madrid, Siglo XXI (versão original em francês: 1975).

Sellares, R. e Bassedas, M. (1983): "La construccion de sistemas de numeración en la historia y en los niños", en M. Moreno y equipo del IMIPAE, *Pedagogía operatoria*, Barcelona, Laia.

Sinclair, A. e Sinclair, H. (1984): "Preschool Children's interpretation of written numbers, *Human Learning*, vol. 13.

Sinclair, A. Sinclair, H. e Siegrest, F. (1982): "Young Children's ideas about the written number system", trabalho apresentado na Conference on the acquisition of Symbolic Skills, University of Keele.

Sinclair, A. e Col. (1988): *La notation numérique chez l'enfant et la production de notations chez le jeune enfant*, Paris, P.U.F.

Skemp, R. (1985): *Psicologia del Aprendizaje de las Matemáticas*, Madrid, Ediciones Morata.