AULA
“Variáveis Aleatórias Normais Gerais”
Ministrante Prof. Dr. Vladimir Belitsky,
IME-USP

10 de maio de 2017

Variáveis aleatórias normais gerais

Escolho um valor real μ.
Escolho um valor real positivo σ.
Uso esses para construir a função que denoto por f_{μ,σ^2} (o índice foi colocado para marcar os valores escolhidos) e cuja forma é assim:

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Há duas propriedades da função construida:
1. A não negatividade: $f_{\mu,\sigma^2}(x) \geq 0$ para cada x
   (na verdade, ocorre a estrita positividade, isto é, $f_{\mu,\sigma^2}(x) > 0$).
2. Igualdade a 1 da área total abaixo de seu grafo, o que em termos matemáticos adquira a seguinte expressão (que não será usada no curso)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x)dx = 1$$

Variáveis aleatórias normais gerais

As propriedades supracitadas garantem que f_{μ,σ^2} é uma função de densidade. Portanto, ela pode ser usada para construir variável aleatória continua.

A variável aleatória construida pela função-mãe f_{μ,σ^2} será denotada por Z_{μ,σ^2}

Não repetirei toda a construção. Se recordei seu cerne:

$$\boldsymbol{P}\left[Z_{\mu,\sigma^2} \in D\right] = \int_D f_{\mu,\sigma^2}(x)dx, \text{ para qq } D \subset \mathbb{R},$$

o que interpreta-se assim: a probabilidade da variável aleatória Z_{μ,σ^2} assumir valor dentro de um conjunto D é a área da figura "apoiada" em D cujo "teto" é o grafo da função-mãe.

Variáveis aleatórias normais gerais

Definição. A *esperança matemática* da variável aleatória Z_{μ,σ^2} é o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\mu,\sigma^2}(x) dx;$$

a notação é $\boldsymbol{E}[Z_{\mu,\sigma^2}]$. *Média* é um sinônimo para a esperança matemática.

A *variância* da Z_{μ,σ^2} é o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \boldsymbol{E}[Z_{\mu,\sigma^2}]\right)^2\, f_{\mu,\sigma^2}(x) dx;$$

a notação é $\mathrm{Var}[Z_{\mu,\sigma^2}]$.

O *desvio padrão* da variável aleatória Z_{μ,σ^2} é o valor de

$$\sqrt{\mathrm{Var}[Z_{\mu,\sigma^2}]}$$

(explicitamente falando: o valor positivo da raíz da variância).

Variáveis aleatórias normais gerais

Teorema.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \mu, \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\ f_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \sigma^2$$

quer dizer,

$$\boldsymbol{E}[Z_{\mu,\sigma^2}] = \mu,\ \mathrm{Var}[Z_{\mu,\sigma^2}] = \sigma^2,\ \sqrt{\mathrm{Var}[Z_{\mu,\sigma^2}]} = \sigma,$$

ou, em palavras: a esperança (chamada média) de Z_{μ,σ^2} é μ, sua variância é σ^2, e seu desvio padrão é σ.

Nomenclatura: A variável aleatória Z_{μ,σ^2} chama-se *variável aleatória normal de média* μ *e variância* σ^2, ou, alternativamente, *variável aleatória normal de média* μ *e desvio padrão* σ.

Variável aleatória Normal Padrão como um caso particular

Observe que como

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

então

$$f_{\mathbf{0},\mathbf{1}^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \mathbf{1}} e^{-\frac{(x-\mathbf{0})^2}{2 \times \mathbf{1}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

o que significa que a variável aleatória Normal Padrão introduzida na aula anterior é um caso particular das variáveis aleatórias normais gerais; especificamente, é a variável aleatória normal com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1^2$.

Por isto que a variável aleatória Normal padrão será denotada, a aprtir de agora, por $Z_{0,1^2}$. Ainda, ganhamos, de graça, o seguinte conhecimento:

> a média (esperança matemática, em outras palavras) da variávela aleatória Normal Padrão é 0, sua variância é 1^2, e seu desvio padrão é 1.

Variáveis aleatórias normais gerais

Notação Tradicional Em toda a literatura científica, a escrita

$$Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

leia-se assim:

> *a variável aleatória Z é normal de média μ e de variância σ^2.*

Dependendo dos recursos do editor de texto empregado, a letra $\mathcal{N}$ as vezes, é substituida por N ou por N.

Agora você entende por que usei o símbolo $\mathcal{N}(0, 1^2)$ para denominar a variável aleatória Normal Padrão que introduzi na aula passada.

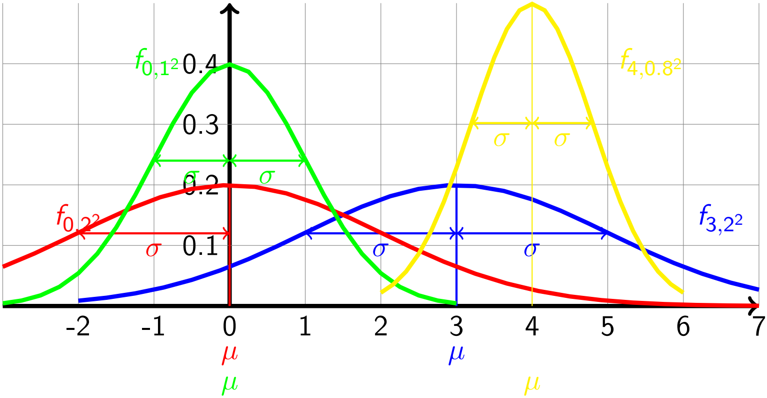
Variáveis aleatórias normais gerais

Na transparência a seguir vou explicar como os valores de μ e de σ^2 aparecem no gráfico de f_{μ,σ^2}.

Isto significa que para Z_{μ,σ^2} qualquer os valores de sua média e de seu desvio padrão podem ser "lidas" no gráfo de sua função-mãe. Vale também a recíproca: ao receber valores numéricos de μ e σ^2, você deve saber esboçar o gráfo da função-mãe da variável aleatória Z_{μ,σ^2}.

Agora só gostaria de avisar que esta propriedade não é genérica, no sequinte sentido: se escolhermos as função-mãe de forma diferente então nada garante que as médias e os desvios padrão das variáveis aleatórias por elas definidas estejam no seus gráfos.

Variáveis aleatórias normais gerais



O valor de μ é a abcissa do ponto mais alto da função, ou, a posição do eixo de simetria, e σ é a distânica do (qualquer um dos) ponto de inflexão até o eixo da simetria. A altura do cino é $1/\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma\right)$.

Cálculo de probabilidades para variáveis normais diferentes da normal padrão

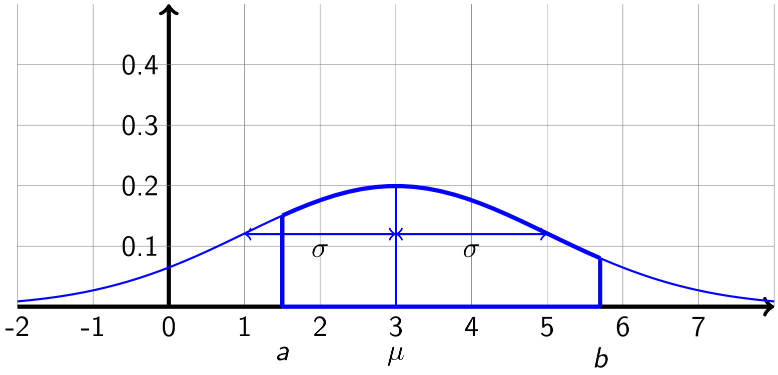
Escolho $\mu \neq 0$.
Escolho $\sigma \neq 1$ (obedecendo a condição $\sigma > 0$).
Considero Z_{μ,σ^2}, variável aleatória normal de média μ e variância σ^2 (equivalentemente, de desvio padrão σ). Recordo, f_{μ,σ^2} é a notação para a função-mãe desta variável aleatória .

Tomo dois números reais: a e b (para a conveniência de exposição, seja $a < b$).
PERGUNTO: Calcular o valor da $\boldsymbol{P}\left[a \leq Z_{\mu,\sigma^2} \leq b\right]$.

Recorde a notação alternativa mas equivalente a de cima:
$\boldsymbol{P}\left[Z_{\mu,\sigma^2} \in [a,b]\right]$.

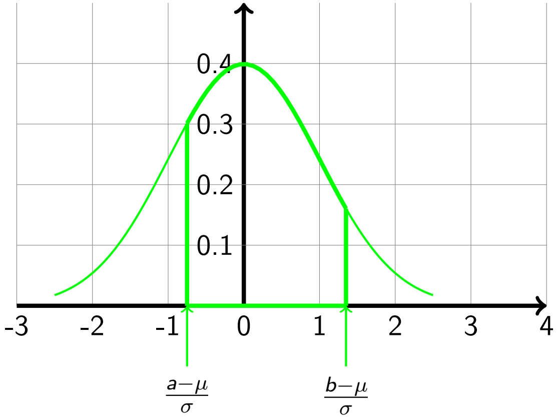
Cálculo de probabilidades para variáveis normais diferentes da normal padrão

Segundo nossa definição, o valor da $\boldsymbol{P}\left[Z_{\mu,\sigma^2} \in [a,b]\right]$ é a área da figura plana delimitada pelo grafo de f_{μ,σ^2} por cima, pelo eixo de abcissas por baixo, pela reta vertical $x = a$ à esquerda, e pela reta vertical $x = b$ à direita. No desenho abaixo, o contorno desta figura foi marcada pela linha azul grossa.



Cálculo de probabilidades para variáveis normais diferentes da normal padrão

Existe um argumento (simples, mas que não será apresentado) que mostra que a área que nos interessa é igual à área desenhada na figura abaixo. Nessa, na cor verde, é o grafo da função $f_{0,1^2}$.



Cálculo de probabilidades para variáveis normais diferentes da normal padrão

A igualdade entre as áreas significa que problemas sobre as probabilidades envolvendo Z_{μ,σ^2} com quaisquer μ e σ^2 podem ser resolvidos com auxílio da Tabela da Distribuição Normal Padrão. A "normalização" de problema dá-se pelas seguintes fórmulas (a primeira delas foi ilustrada acima, as outras duas seguem-se da maneira semelhante)

$$\boldsymbol{P}\left[a \leq Z_{\mu,\sigma^2} \leq b\right] = \boldsymbol{P}\left[\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z_{0,1^2} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

$$\boldsymbol{P}\left[Z_{\mu,\sigma^2} \leq b\right] = \boldsymbol{P}\left[Z_{0,1^2} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

$$\boldsymbol{P}\left[Z_{\mu,\sigma^2} \geq a\right] = \boldsymbol{P}\left[Z_{0,1^2} \geq \frac{a-\mu}{\sigma}\right]$$

Cálculo de probabilidades para variáveis normais diferentes da normal padrão

Observe e não erre: os a e b transformam-se em

$$\frac{a-\mu}{\sigma} \text{ e } \frac{b-\mu}{\sigma}$$

com <u>o desvio padrão</u> no denominador; o erro comum (e basicamente, o único que alunos cometem) é usar a variância em vez do desvio padrão nessa transformação.