Capítulo 4
Algumas distribuições discretas

4.1 Variável Aleatória de Bernoulli

4.1.1 Definição

▷ Qual é a quantidade mínima de valores que uma variável aleatória pode assumir? Consultando a definição, vê-se que a resposta é: "Um". Entretanto, acontece, segundo a mesma definição, que se uma variável aleatória pode assumir um valor só, então a probabilidade de assumi-lo é 1. Esse caso chama-se **degenerado** na Teoria de Probabilidades. E a variável aleatória que assume um valor só chama-se **variável aleatória degenerada**. O tom pejorativo deste termo indica que não há nada interessante em estudo de variáveis aleatórias degeneradas. E isto é, de fato, um fato.

À luz da discussão acima, podemos dizer que as variáveis aleatórias mais simples entre as que merecem nossa atenção são aquelas cujos valores possíveis são dois em número. Entre tais variáveis aleatórias, aquelas cujo par de valores é 0 e 1, receberam o nome do matemático Jacob Bernoulli. A definição apropriada destas "privilegiadas" será dada logo abaixo. Entretanto, o Exc. 51 nos mostrará que elas conseguem gerar – via uma simples transformação – qualquer outra variável aleatória que assume dois valores só. Portanto, podemos dizer que todas as variáveis aleatórias que assumem dois valores só são "parentes" da de Bernoulli. Agrada-nos saber, então, que no mundo de tais variáveis aleatórias reina amizade e compreensão parentesca.

A simplicidade da estrutura das variáveis de Bernoulli e de suas parentes permitiu-me a usá-las para criar uma série de exercícios que são, por um lado, não muito trabalhosos, mas por outro lado, eficientes no seu aspecto didático para o ensino aos iniciantes dos conceitos do tipo esperança, variância, soma de variáveis aleatórias e muito mais. Os exercícios estão na Seção 4.3.1.

Uma razão adicional para ter dado atenção especial às variáveis de Bernoulli é que as mesmas servem de tijolinhos básicos dos quais são construídas as variáveis aleatórias Binomiais, as quais desempenham o papel central em nossos futuros estudos dos temas Estimação de Proporção e Testes de Hipóteses para Proporção.

Definição 13 *(da distribuição de Bernoulli e da variável aleatória de Bernoulli).*

Para qualquer valor de p no intervalo $[0, 1]$, a distribuição

valor	0	1
probabilidade	$1 - p$	p

chama-se **distribuição de Bernoulli de parâmetro** p.

A variável aleatória que tem essa distribuição, chama se **variável aleatória de Bernoulli de parâmetro** p.

No que segue-se, usaremos frequentemente a escrita

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

que abrevia com uso de símbolos matemáticos a frase "a variável aleatória X é de Bernoulli de parâmetro p" ou "a variável aleatória X tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p".

Nos argumentos a seguir e em alguns exercícios precisaremos das fórmulas para a esperança matemática e para a variância da distribuição de Bernoulli. Estas estão fornecidas pela proposição abaixo. Sua demonstração é simples e direta.

Proposição 13. Se $X \sim$ Bernoulli(p) então

$$\mathbb{E}[X] = p \text{ e } \mathrm{Var}[X] = p(1-p) \tag{4.1}$$

Demostração da Proposição 13.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 0\cdot(1-p)\,+\,1\cdot p = p;\\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = \big(0^2\cdot(1-p)\,+\,1^2\cdot p\big) - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2\\
&= p - p^2 = p(1-p)
\end{aligned}$$

Demonstramos a Proposição 13.

Antes de prosseguir aos exercícios sobre a variável e a distribuição de Bernoulli, preciso ensiná-lhe a construção do **gráfico da função de probabilidade**. Tal gráfico é muito útil para a visualização de distribuições de variáveis aleatórias e nós vamos usá-lo no texto todo.

valor	0	1
probabilidade	0.2	0.8

Figura 4.1: A distribuição de probabilidade usada para apresentar a construção do gráfico da função de probabilidade.

Para o título dum exemplo ilustrativo, tomo a distribuição de probabilidade da Figura 4.1. Observe que está pode ser vista como a definição de uma função, se os números da sua linha superior forem interpretados como o domínio da função e os números de sua linha inferior como os valores da função. (Inverter a interpretação das linhas não é possível, pois na linha de probabilidades podem aparecer valores iguais.) A função definida deste modo chama-se **função de probabilidade**; nossa notação para essa será $\mathcal{P}$. Seu **gráfico** é um caso particular do gráfico de qualquer função; no caso ele é o conjunto de pontos no plano Euclidiano, sendo que cada ponto corresponde a uma coluna da tabela que definiu a função. No caso da tabela da Figura 4.1, o correspondente gráfico está à esquerda na Figura 4.2.

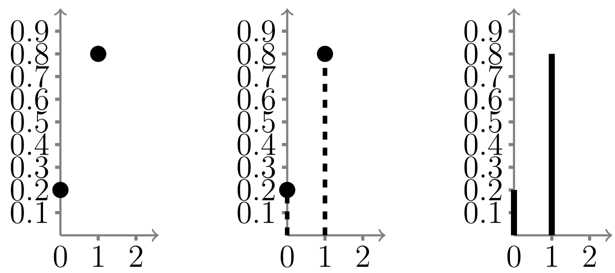
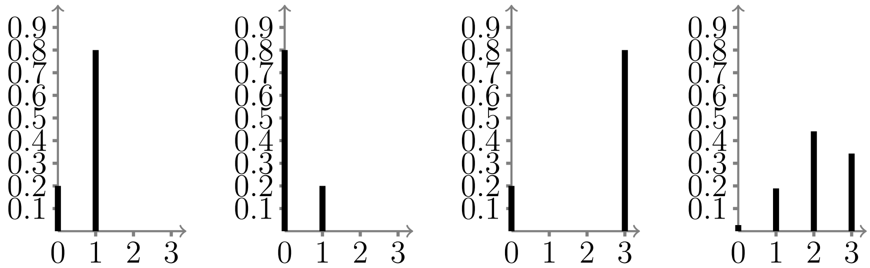


Figura 4.2: As maneiras de apresentar graficamente a função de probabilidades. A da direita será predominantemente usada no texto.

Agora olhe no gráfico que está no meio da Figura 4.2. Suas linhas tracejadas ajudam a identificar os valores das abcissas dos pontos do gráfico que está à esquerda na figura. Por isso, é frequente que você encontre na literatura aquele desenho mais frequentemente que esse. Ainda mais, os troncos tracejados são indispensáveis quando se faz o gráfico funções de distribuição bivariada (coisa que não pretendemos fazer, pelo menos no momento). Já que os troncos são tal bem vindos, eu decidi representá-los por linhas cheias. Isso por sua vez, sugere dispensar o desenho da bolinha no topo de tronco, pois o próprio topo é no caso, o valor que a função representada assume para a abcissa na qual o tronco apoia-se. Assim, minha apresentação gráfica de funções de probabilidade terá o padrão que você vê à direita na Figura 4.2. O padrão adotado oferece diversas vantagens, mas falar sobre essas agora não traz benefícios à exposição.

Espero que a explicação acima e mais quatro exemplos dados na Figura 4.3 sejam suficientes para você entender a construção do gráfico de função de probabilidade. Você vais ser solicitado a construir tais gráficos já nos exercícios da Seção 4.3.1, e os gráficos serão usados em todo a texto a seguir.



São os gráficos das funções de probabilidade correspondentes às seguintes distribuições:

valor	0	1
prob.	0,2	0,8

valor	0	1
prob.	0,8	0,2

valor	0	3
prob.	0,2	0,8

valor	0	1	2	3
prob.	0,027	0,189	0,441	0,343

Figura 4.3: Quatro exemplos de gráfico de função de probabilidade.

Exemplo 42. Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 variáveis aleatórias independentes, e suponha que cada uma tem a distribuição de Bernoulli com parâmetro $0,7$. O objetivo do exemplo é apresentar para leitor a construção das variáveis aleatórias $(X_1 + X_2)$, $(X_1 + X_2 + X_3)$ e $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$. O conhecimento de tal construção será útil quando formos falar sobre variáveis aleatórias binomiais.

Antes de começar, eu preciso lhe explicar o sentido do conceito de independência de quatro variáveis aleatórias, pois até o momento você viu o conceito de independência somente para duas variáveis aleatórias. A explicação mais simples, mas plenamente suficiente para nossas necessidades é assim: imagine que foram lançadas quatro moedas, uma após outra (para evitar dúvidas, imagine que as moedas são distinguíveis: a primeira é de 5 centavos, a segunda de 10, a terceira de 25 e a quarta de 50), e que em cada moeda pode dar “cara”com probabilidade $0,7$ e “coroa”com a probabilidade $0,3$. Imagine que a i-ésima variável aleatória está associada à i-ésima moeda: a variável assume valor 1 se a moeda mostrar “cara” e assume 0 se mostrar “coroa”. Isto dará as X_1, X_2, X_3, X_4 sobre as quais estamos falando no presente exemplo.

(a) Neste item, vamos construir a distribuição de $X_1 + X_2$. A construção empregará o fato que X_1 e X_2 são independentes entre si, o que se segue diretamente da construção das variáveis com auxílio de moedas. Tais moedas, ou melhor dizer, o experimento aleatório de lançamentos de moedas, pode ser usado para construir a distribuição conjunta de X_1 e X_2, da qual necessitamos para construir a soma das duas. Entretanto, a construção da distribuição conjunta segue-se mais facilmente pelo caminho que emprega a independência entre X_1 e X_2. Este caminho está executado na tabela abaixo.

X_2 \ X_1	0	1
0	$(0,3)^2$	$0,7 \cdot 0,3$
1	$0,3 \cdot 0,7$	$(0,7)^2$

y	$I\!\!P[X_2 = y]$
0	0,3
1	0,7

x	0	1
$I\!\!P[X_1 = x]$	0,3	0,7

Este desenho ilustra a construção da tabela de distribuição conjunta de X_1 eX_2 a partir das distribuições individuais de cada uma delas e com a uso do fato que elas são variáveis aleatórias independentes. A distribuição conjunta construída está na tabela no meio. Nas suas margens estão as tabelas de distribuições individuais de X_1 e X_2.

A partir da distribuição conjunta calcula-se a distribuição da variável aleatória $Y = X_1+X_2$:

y	0	1	2
$I\!\!P[Y = y]$	$(0,3)^2$	$2(0,7 \cdot 0,3)$	$(0,7)^2$

(b) Neste item, vamos achar a distribuição de $X_1+X_2+X_3$. Faremos isto pelo seguinte caminho: primeiramente acharemos a distribuição de X_1+X_2 e depois faremos a soma dela com X_3. Esta ordem pode ser indicada com auxílio de parênteses: $(X_1 + X_2) + X_3$. Se você me perguntar por que tal agrupamento é permitido, a resposta será simples: "Porque variáveis aleatórias são funções (recorde a definição delas[1]), e com as funções tal agrupamento não lhe causa nenhuma estranheza; por exemplo, você não se estranharia se eu calculasse $\sin(x) + \cos(x) + \cos(2x)$ fazendo primeiramente $\sin(x) + \cos(x)$ e acrescentando depois $\cos(2x)$."

Agora, observo que a distribuição da soma X_1+X_2 já foi achada no item anterior. Portanto, para fechar a conta, é precisa construir a distribuição conjunta de $X_1 + X_2$ com X_3. Tal distribuição está apresentada na tabela abaixo. Observe que ela emprega o fato que $X_1 + X_2$ e X_3 são independentes. Esta independência requereria uma demonstração, mas eu decidi que ela é desnecessária para o nível do presente texto; vou contar com que sua intuição a aceite sem demonstração rigorosa. O argumento intuitivo, que pode substituir a demonstração, é assim: já que cada uma das X_1 e X_2 está independente de X_3, então não há razões para que $X_1 + X_2$ sejam dependentes de X_3.

X_3 \ Y	0	1	2
0	$(0,3)^3$	$2 \cdot 0,7(0,3)^2$	$(0,7)^2 \cdot 0,3$
1	$(0,3)^2 \cdot 0,7$	$2(0,7)^2 \cdot 0,3$	$(0,7)^3$

x	$I\!\!P[X_3 = x]$
0	0,3
1	0,7

y	0	1	2
$I\!\!P[Y = y]$	$(0,3)^2$	$2(0,7 \cdot 0,3)$	$(0,7)^2$

Este desenho ilustra a construção da tabela de distribuição conjunta de $X_1 + X_2$ (denotada por Y) e X_3 a partir das distribuições individuais de cada uma delas e com a uso do fato que Y e X_3 são variáveis aleatórias independentes. A distribuição conjunta construída está na tabela no meio. Nas suas margens estão as tabelas de distribuições individuais de Y e X_3.

A partir da distribuição conjunta calcula-se a distribuição de $V = X_1 + X_2 + X_3$:

v	0	1	2	3
$I\!\!P[V = v]$	$(0,3)^3$	$3 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^2$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot 0,3$	$(0,7)^3$

[1]Para a validade de tudo sobre o que estou falando agora, é preciso acrescentar que nossas variáveis aleatórias são funções com valores em $\mathbb{R}$, mas você, meu leitor, não precisa se profundar nestes detalhes.

(c) Agora vamos construir a distribuição de $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. As ideias da construção são as mesmas que já foram expostas e justificadas no item (b) acima. O cerne de tudo é a distribuição conjunta de $(X_1 + X_2 + X_3)$ e de X_4. Esta está no desenho abaixo.

V / X_4	0	1	2	3
0	$(0,3)^4$	$3 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^3$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2$	$(0,7)^3 \cdot 0,3$
1	$(0,3)^3 \cdot 0,7$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2$	$3 \cdot (0,7)^3 \cdot 0,3$	$(0,7)^4$

x	$I\!\!P[X_4 = x]$
0	0,3
1	0,7

v	0	1	2	3
$I\!\!P[V = v]$	$(0,3)^3$	$3 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^2$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot 0,3$	$(0,7)^3$

Este desenho ilustra a construção da tabela de distribuição conjunta de $X_1 + X_2 + X_3$ (denotada por V) e X_4 a partir das distribuições individuais de cada uma delas e com a uso do fato que V e X_4 são variáveis aleatórias independentes. A distribuição conjunta construída está na tabela no meio. Nas suas margens estão as tabelas de distribuições individuais de V e X_4.

E por fim, temos abaixo a tabela da distribuição de $W = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$:

w	0	1	2	3	4
$I\!\!P[W = w]$	$(0,3)^4$	$4 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^3$	$6 \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2$	$4 \cdot (0,7)^3 \cdot 0,3$	$(0,7)^4$

4.2 Varável aleatória binomial

Um aviso sobre (a confusão com) a nomenclatura: Logo abaixo, definirei o conceito "variável aleatória binomial com parâmetros n e p". A distribuição de tal variável (recordo que "a distribuição"para nós é uma tabela com todos os valores que variável aleatória pode assumir e com as suas respectivas probabilidades) chama-se "distribuição binomial com parâmetros n e p". Este conceito dá sentido à expressão "a variável aleatória X tem distribuição binomial com parâmetros n e p". Logo surge a questão: Qual é a diferença desta em relação à expressão original, que era "X é variável aleatória binomial com parâmetros n e p"? A resposta é: Diferença nenhuma ou, em outras palavras, as duas têm o sentido idêntico. Essa é o primeiro dos avisos que gostaria de dá-lhe.

O segundo aviso é que as palavras "com parâmetros n e p" serão frequentemente omitidos no texto e nas falas. A omissão faz sentido porque tal referência genérica à existência dos parâmetros n e p na distribuição binomial não traz nenhuma informação na maioria dos casos. O que é informativo é a expressão do tipo "distribuição binomial com valor 3 para o parâmetro n, e valor $0,6$ para o parâmetro p". Tais expressões serão frequentemente usadas no que se segue, e vale ainda avisar que elas podem ser encurtadas para aparecer assim: "distribuição binomial com $n = 3$ e $p = 0,6$".

Uma orientação para a leitura: Os valores numéricos de distribuição binomial estão fornecidos pela Propriedade 15. Já a Propriedade 14 permite identificar as situações nas quais surge a distribuição binomial. Essas duas propriedades dão a informação da qual você necessita em 99% dos casos que surgem na sua vida (inclusive, nos exercícios do presente livro) e que envolvem a distribuição binomial diretamente ou indiretamente. Entretanto, minha exposição não começa com nenhuma das duas, mas sim com uma terceira propriedade da distribuição binomial, que foi elevada por mim ao nível de definição (é a Definição 14 que você vê logo abaixo). Tal forma de minha apresentação tem motivos didáticos, mas os mesmos não serão discutidos no meu texto.

▷ Os mesmos motivos didáticos ditaram minha escolha do elenco de assuntos no âmbito da apresentação de variáveis de Bernoulli, e também exigiram que tal apresentação precede a apresentação de variáveis binomiais.

Definição 14 *(da variável aleatória binomial).*
Fixe arbitrariamente um número inteiro maior que 0 e denote ele por n. Fixe arbitrariamente um número real entre 0 e 1 e denote esse por p. Denote por $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias de Bernoulli, n em número, que sejam independentes em conjunto e tais que o parâmetro de cada variável seja p.

Define a variável aleatória B da seguinte maneira:

$$B = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{4.2}$$

Então B chama-se **variável aleatória binomial com parâmetros** n **e** p.

Em toda a literatura científica, em no presente texto em particular, a notação

$$B \sim \mathrm{Bin}(n; p), \tag{4.3}$$

leia-se "a variável aleatória B é binomial com parâmetros n e p".

Pediria ainda de meu leitor, que observe a regra semântica da notação ora introduzida: entre seus dois parâmetros, aquele, que corresponde ao número da variáveis aleatórias Bernoulli somadas, está citado em primeiro lugar, enquanto que aquele, que corresponde ao parâmetro de cada variável aleatória Bernoulli, está citado em segundo lugar. Concordar sobre esta ordem evita desentendimentos. Mas, a verdade é que os dois parâmetros nunca podem ser confundidos: o primeiro é sempre inteiro e maior que 1, pois, como ver-se-á, o caso $n = 1$ é trivial, desinteressante e nunca aparecerá no texto, enquanto que o segundo está sempre no intervalo $[0; 1]$. Aliás, os casos nos quais p é 0 ou 1 também são desinteressantes, e também nunca aparecerão no texto.

A Definição 14 insinua que você vai precisar somar variáveis de Bernoulli toda vez que deseja achar a distribuição de variável binomial. Isto não é verdade, pois tal distribuição está apresentada diretamente pela Propriedade 15. Entretanto, é útil que você, meu leitor, saiba como se somam variáveis de Bernoulli. Na aprendizagem disso vão lhe ajudar o Exemplo 42 e Exercício 48.

Propriedade 14 *(que permite identificar o surgimento da variável aleatória Binomial em experimentos aleatórios).*
Considere qualquer experimento aleatório, e suponha que seu espaço de estados foi separado em dois eventos disjuntos a serem chamados por "sucesso"e "fracasso"; denote por p a probabilidade do evento "sucesso". Suponha que este experimento aleatório está repetido n vezes. No experimento aleatório destas repetições, define a variável aleatória B da seguinte maneira: o valor de B é igual ao número de "sucessos"observados nestas n repetições. Então, B tem a distribuição Binomial com parâmetros n e p.

Exemplo 43. Os experimentos aleatórios apresentados abaixo ilustram o conteúdo e a aplicação da Propriedade 14.
(a) Se um dado equilibrado for lançado 3 vezes, então, de acordo com Propriedade 14, o número de vezes que veremos 5 tem distribuição binomial de parâmetros 3 e 1/6.
(b) Se uma moeda honesta for lançada 10 vezes, então, de acordo com Propriedade 14, o número de "caras"a serem vistas tem distribuição binomial de parâmetros 10 e 1/2.
(c) (*A leitura desse exemplo pode ser omitida pois ele é longo demais; o valor didático do exemplo está no que ele indica a ponte que liga a distribuição binomial com a questão estatística da estimação de proporção.*) Imagine uma cidade com população muito grande, e suponha que esta está prestes a escolher seu prefeito entre dois candidatos; chamaremos estes simbolicamente por I e II. Como é de costume os candidatos encomendam o que se chama "pesquisa eleitoral" com o objetivo de estimar a proporção da população que votará no candidato I (se desejar a estimativa para o II, esta será 1 menos a proporção do eleitorado do I). Para simplificar, imagine que cada cidadão já formou a opinião em qual dos dois ele votará. Chamaremos por p a proporção da população que prefere o candidato I. Note que p é desconhecido, e que saber seu valor exato só é possível se todos os cidadãos forem entrevistados. Já que isto é muito custoso, a pesquisa eleitoral faz o seguinte: escolha ao acaso algumas pessoas, entrevistá-as, e estima p por

$$\frac{\text{número de intervistados que indicam a preferência pelo candidado I}}{\text{número total de intervistados}} \tag{4.4}$$

Observe agora que o resultado da intervista de qualquer um dos escolhidos pode ser visto como um experimento aleatório com dois resultados: "sucesso", caso este indicar sua preferência pelo candidato I, e "fracasso" se for por II. Observe também, que se a população é grande e se a quantidade de entrevistados é pequena em relação à população, então o "sucesso" em cada experimento aleatório ocorre com a mesma probabilidade que é p. Então, aplicando a Propriedade 14, conciliamos que o numerador na fórmula da estimativa de p é a variável aleatória binomial de parâmetros n e p.

Diferentemente do que acontece nos exemplos dos itens (a) e (b), agora o valor de p é desconhecido. Isto acarreta a pergunta natural: "A 'descoberta' acerca da distribuição do numerador da fração (4.4) vale para alguma coisa?" A resposta é "Sim, e muito!" A saber, ela vale para poder estimar o verdadeiro valor de p com base no resultado da pesquisa eleitoral. A técnica da estimação será construída no Capítulo 8. Os resultados da aplicação desta é o que você ouve frequentemente no rádio e televisão antes de qualquer eleição: "As estimativas do eleitorado são 49% para I e 51% para II com a precisão de 1% para cima ou para baixo". Ressalto: tais estimativas seriam impossíveis (ou muito imprecisas), se além do desconhecimento do valor de p, desconhecêssemos também o tipo da distribuição que surge na amostragem.

Fim do Exemplo 43↑

Propriedade 15. *(A fórmula genérica para a distribuição binomial.)*
Se $B \sim \text{Bin}(n; p)$, então o conjunto dos valores que B pode assumir é

$$0, 1, \ldots, n, \tag{4.5}$$

e as probabilidades de assumir estes valores têm as seguintes expressões:

$$I\!\!P\,[B = k] = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}, \text{ para todo } k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Na fórmula (4.6) acima, C_n^k denota o que chama-se por **número de combinações de** n **por** k, ou, alternativamente, por **número de combinações de n termos, k a k**. Existe ainda o terceiro nome que é **coeficiente binomial**; esse surge devido a aparência de C_n^k como o coeficiente junto a $x^k y^{n-k}$ na expressão de $(x + y)^n$. Como se três nomes diferentes para a mesma não fosse confuso o bastante, existe ainda o símbolo alternativo a C_n^k; este é $\binom{n}{k}$. Seja qual for o nome ou o símbolo, o importante é a expressão numérica; eis esta:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \text{ para todo } n \text{ natural, e todo } k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Vale ainda lembrar que $m!$ significa $m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$, para todo m natural maior que 0, e que $0! = 1$ por decreto.

Hoje em dia, os valores numéricos para C_n^k calculam-se facilmente com uso de computador. Mas se você precisar calcular à mão, observe que $(n-k)!$ no denominador da fórmula (4.7) cancela os membros de $(n-k)$ a 1 do produto $n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, e isso faz com que

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.8}$$

fórmula que pode ser calculada à mão para n não muito grande.

O caminho alternativo para o cálculo do valor de C_n^k, quando n não é exageradamente grande, é fornecido pelo Triângulo de Pascal. Esse está desenhado na Figura 4.4, e o texto da figura explica como essa deva ser usada para calcular valores numéricos de C_n^k.

Propriedade 16. *(As expressões genéricas para a esperança e para a variância da distribuição binomial.)*
Se B é uma variável aleatória binomial com parâmetros n e p, então

$$I\!\!E\,[\,B\,] = np, \qquad \text{Var}\,[\,B\,] = np(1-p). \tag{4.9}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Figura 4.4: Aqui estão as primeiras 7 linhas do Triângulo de Pascal. Na n-ésima linha, na sua posição k, contando de esquerda à direita, encontra-se o valor numérico para C_n^k. Para construir a próxima linha, acrescente 1's à esquerda e à direita, e, em qualquer outro lugar da linha, coloque a soma dos valores que encontram-se na linha superior e ficam imediatamente à esquerda e à direita desse lugar.

A demonstração da Propriedade 16. Recorde que se X é a variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p, então $\mathbb{E}[X] = p$ e $\operatorname{Var}[X] = p(1-p)$. Essas expressões, a definição de B como soma de variáveis aleatórias independentes Bernoulli dão o resultado final via as contas apresentadas abaixo.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[B] &= \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] && \text{(pois } B = X_1 + \ldots + X_n, \text{ e devido} \\
& && \text{ao fato que a esperança de soma} \\
& && \text{é igual a soma das esperanças)} \\
&= np && \text{(pois a esperança de cada } X_i \text{ é } p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}[B] &= \operatorname{Var}[X_1] + \cdots + \operatorname{Var}[X_n] && \text{(pois } B = X_1 + \ldots + X_n, \text{ onde } X_1, \ldots, X_n \\
& && \text{são variáveis aleatórias independentes, pois} \\
& && \text{a variância de soma de variáveis aleatórias} \\
& && \text{independentes é igual a soma de suas variâncias)} \\
&= np(1-p) && \text{(pois a variância de cada } X_i \text{ é } p(1-p))
\end{aligned}
$$

Demonstramos Propriedade 16.

A Definição 14 e as Proposições 14, 15 e 16, são o conjunto de propriedades das variáveis aleatórias Binomiais que devem fincar na cabeça de leitor para que esse acompanhe as exposições do livro onde tais variáveis serão usadas, ora como ingrediente principal, ora como auxiliar. Há também um conjunto de propriedades secundárias, o conhecimento sobre as quais facilitaria a aprendizagem. Elas falam da forma da distribuição binomial e serão reveladas por exemplos tratados nos exercícios da Seção 4.3.2. Para a comodidade do leitor, algumas delas estão listadas abaixo.

(a) Quando n cresce, a quantidade de valores da distribuição $Bin(n,p)$ aumenta, "crescendo" à direita (isso é meio que óbvio, pois os valores são $0, 1, 2, \ldots, n$).

(b) Se p manter-se fixo e n crescer, então para cada k fixo, a probabilidade $\mathbb{P}[X = k]$ diminui ao zero (formalmente falando, tem-se que $\mathbb{P}[X_{n,p} = k] \to 0$ para cada k e p fixo, conforme n cresce, onde $X_{n,p} \sim Bin(n;p)$, e onde o índice "$n;p$" foi acrescido à notação da variável para ressaltar que a expressão "$\mathbb{P}[X_{n,p} = k]$" depende de n).

(c) Se traçarmos uma curva a qual passe por pontos da função de probabilidade de $Bin(n,p)$, esta terá o formato de sino.

(d) A abcissa do topo do sino indicado no (c) acima, está no valor $\mathbb{E}[X]$. Entre as probabilidades da distribuição $Bin(n; p)$, as maiores são aquelas que ficam mais próximas ao $\mathbb{E}[X]$.

Podemos dizer que se p for fixo e n crescer, então a distribuição $Bin(n, p)$ espalha-se à direita, esparramando-se e arrastando-se, mas mantendo a forma de sino (cujo topo também viaja à direita).

4.3 Exercícios

4.3.1 Exercícios sobre variável aleatória de Bernoulli

Exc. 47. *Esse exercício o convida a voltar à definição da variável aleatória de Bernoulli e recordar um par de fatos relacionados: que variável aleatória de Bernoulli assume valores* 0 *e* 1*, e não* <u>*qualquer*</u> *par de valores, e, também, que o parâmetro p na escrita "Bernoulli(p)" corresponde à probabilidade de assumir valor* 1*. Um outro fato, que será recordado por você ao fazer o exercício, é a relação de distribuição bivariada com as distribuições univariadas representadas por suas marginais. Essa relação será essencialmente usada na solução do Exc. 48 a seguir.*

Em cada um dos casos (a), (b), (c) e (d), identifique se X é variável aleatória de Bernoulli, e se for sim, ache o valor de seu parâmetro p, identifique também se Y é variável aleatória de Bernoulli, e se for sim, ache o valor de seu parâmetro p, e, por fim, identifique se X e Y são independentes.

(a)

Y \ X	0	1
1	0,1	0,2
2	0,2	0,5

(b)

Y \ X	0	2
0	0,1	0,2
1	0,2	0,5

(c)

Y \ X	0	1
0	0	0,3
1	0,2	0,5

(d)

Y \ X	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

Exc. 48. *É obrigatório fazer esse exercício pois ele o faz a acompanhar o processo de adição de variáveis aleatórias de Bernoulli, o que é o processo de surgimento de variável aleatória binomial e cuja importância para nós advém do papel fundamental dessa variável em testes estatísticos a vir.*

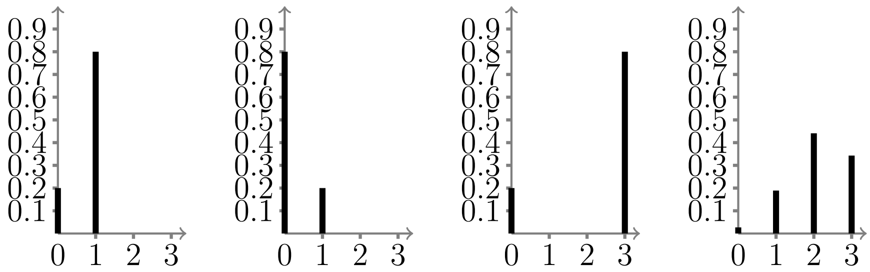
Sejam X_1, X_2, X_3 três variáveis aleatórias independentes em conjunto, e seja cada uma de Bernoulli$(0,8)$. Ache as distribuições das variáveis aleatórias X_1+X_2 e $X_1+X_2+X_3$. Apresente as funções de probabilidade das distribuições achadas, calcule suas esperanças e variâncias.

Exc. 49. *Esse exercício serve de lembrete de que a soma de duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas não é a mesma coisa que a soma de qualquer uma delas com si própria.*

Seja $X_1 \sim$ Bernoulli$(0,2)$. Ache as distribuições de $2X_1$ e de $3X_1$. Apresente as funções de probabilidade das distribuições achadas, calcule suas esperanças e variâncias. Compare os resultados desse exercício com os do Exc. 48 e observe − através dessas comparações e com auxílio da identidade $2X_1 = X_1 + X_1$ − que $(X_1 + X_1)$ é diferente de $(X_1 + X_2)$ quando X_2 tem a mesma distribuição que X_1, mas é independente de X_1.

Aviso sobre Exc. 50 e 51. *Os Exercícios 50 e 51 o convidam a confirmar o fato mencionado no início da Seção 4.1 que alega que a distribuição de qualquer variável aleatória, que assume dois valores, pode ser replicada por uma variável aleatória de Bernoulli após que essa passa por transformação linear apropriada. Ao resolver os Exercícios 50 e 51, você aprende como achar tais transformações lineares.*

Observe o seguinte fato curioso exemplificado pelo Exc. 50: há duas variáveis aleatórias de Bernoulli que conseguem replicar uma dada distribuição concentrada em dois valores



São os gráficos das funções de probabilidade correspondentes às seguintes distribuições:

valor	0	1
prob.	0,2	0,8

valor	0	1
prob.	0,8	0,2

valor	0	3
prob.	0,2	0,8

valor	0	1	2	3
prob.	0,027	0,189	0,441	0,343

Figura 4.5: Os gráfico de função de probabilidade para as variáveis aleatórias que aparecem na tarefa do Exc. 50.

só. Esse fato, porém, não será usado em nenhum momento adiante, e, portanto, não será cobrado em exercícios e provas.

Fazer os Exercícios 50 e 51 ajuda a conceber a modificação da distribuição de uma variável aleatória em reação à transformação linear da mesma. A noção sobre isso será útil na hora de tratar variáveis aleatórias normais. Especificamente, essa noção permitirá a meu leitor imaginar o funcionamento da transformação linear quando aplicada às variáveis aleatórias normais. Tal imaginação substituirá a explicação rigorosa para aqueles leitores de meu texto que não tem conhecimentos suficientes para acompanhar matematicamente a modificação de distribuições contínuas, um caso das quais é a distribuição de variáveis aleatórias normais.

Exc. 50. *As distribuições de X, de Z e de Y do exercício estão apresentadas no primeiro, segundo e terceiro desenho, respectivamente, da Figura 4.5. Talvez, os desenhos possam te ajudar a achar a solução da tarefa do exercício.*

(a) Suponha que Y assume valor 0 com a probabilidade 0,2 e valor 3 com a probabilidade $0,8$. Seja $X \sim \text{Bernoulli}(0,8)$. Ache o valor da constante a para que a distribuição de aX seja igual a de Y.

(b) Seja Y como definida no item (a), e seja $Z \sim \text{Bernoulli}(0,2)$. Ache os valores de c e d que fazem com que $cZ + d$ tenha a mesma distribuição que a de Y.

Exc. 51(a). Seja Y a variável aleatória que assume valores 0 e 8 com as respectivas probabilidades $1 - p$ e p, para algum p entre 0 e 1. Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Ache o valor da constante a tal que aX tenha a mesma distribuição que a de Y. Use o valor achado para a e as propriedades $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}[aX] = a^2\text{Var}[X]$ para calcular $\mathbb{E}[Y]$ e $\text{Var}[Y]$.

(b) Seja Y a variável aleatória que assume valores 3 e 8 com as respectivas probabilidades p e $1 - p$, para algum p entre 0 e 1. Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Ache os valores dos constantes a e b tais que $aX + b$ tenha a mesma distribuição que a de Y. Use o resultado para calcular $\mathbb{E}[Y]$ e $\text{Var}[Y]$. Desenhe os gráficos das funções de probabilidade de Y e de X.

(c) Seja Y a variável aleatória que assume valores (-3) e 8 com as respectivas probabilidades p e $1 - p$, para algum p entre 0 e 1. Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Ache os valores dos constantes a e b tais que $aX + b$ tenha a mesma distribuição que a de Y. Use o resultado para calcular $\mathbb{E}[Y]$ e $\text{Var}[Y]$. Desenhe os gráficos das funções de probabilidade de Y e de X.

Aviso. *Os exercícios do resto da presente seção são adequados para os alunos que usarão métodos matemáticos como uma das principais ferramentos de seu trabalho. Acho que os alunos da Física, Economia, Ciências Atuariais e afim poderão fazê-los sem sofrimento. As ideias que levam às soluções destes exercícios não são mais complicados que as dos exercícios acima; o problema está na expressão das ideias em termos matemáticos, e isto é fácil para os alunos que desenvolveram certa intimidade com a linguagem matemática.*

Exc. 52. Sejam $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ e $Y \sim \text{Bernoulli}(p)$. Suponha que X e Y são independentes e faça a tabela da distribuição conjunta (bivariada). Ao analisar a tabela, responda: "Qual deve ser o valor do parâmetro p para que $X + Y$ assuma valor 2 com a probabilidade $0,04$, e valor 0 com a probabilidade $0,64$?"

Exc. 53(a). Sejam $X \sim \text{Bernoulli}(p_1)$ e $Y \sim \text{Bernoulli}(p_2)$. Supnha que X e Y são independentes e faça a tabela da distribuição conjunta (bi-variada). Ao analisar a tabela, responda: "Qual devem ser os valores dos parâmetros p_1 e p_2 para que $X + Y$ assuma valor 2 com a probabilidade $0,36$, e valor 0 com a probabilidade $0,06$?"
(b) Mostre que não existe solução do item (a) na qual $p_1 = p_2$. Em outras palavras, é preciso mostrar que não existe valor de p tal que se X fosse $\text{Bernoulli}(p)$, Y fosse Bernoulli (p), e X e Y fossem independentes, então $X + Y$ assumiria o valor 2 com a probabilidade $0,36$, e o valor 0 com a probabilidade $0,06$?
(c) O item (b) nos motiva a pensar se esteja possível relaxar alguns exigência para ainda conseguir que a soma de duas variáveis aleatórias Bernoulli com o mesmo parâmetro assuma o valor 2 com a probabilidade $0,36$, e o valor 0 com a probabilidade $0,06$. É imediato, entretanto, que a única exigência da qual podemos largar a mão é que X e Y sejam independentes. Portanto, o enunciado soa agora assim: Construa uma distribuição bivariada de X e Y da sorte tal que a distribuição marginal de X seja $\text{Bernoulli}(p)$, a distribuição marginal de Y também seja $\text{Bernoulli}(p)$, e que $X + Y$ assumiria valor 2 com a probabilidade $0,36$, e valor 0 com a probabilidade $0,06$.
(d) Se você construiu a distribuição bivariada que satisfaz às exigências do item (c), então você definitivamente deparou com a dúvida se distribuição construída pode ser realizada num experimento aleatório. É exatamente esta pergunta que quero lhe fazer no presente item. Mas para desvincular a pergunta do seu sucesso na solução do item anterior, formularei-la de maneira independente: Considere a seguinte tabela da distribuição bivariada de par de variáveis aleatórias X e Y:

Y \ X	0	1
0	0,1	0,2
1	0,2	0,5

Construa um experimento aleatório e define, no conjunto de seus resultados, duas funções X e Y da maneira tal que a distribuição conjunta delas, oriunda da sua definição, seja idêntica à tabela acima.

Exc. 54. Para as variáveis aleatórias da tabela do item (d), Exc. 53, calcule $\mathbb{E}[X + Y]$ e $\text{Var}[X + Y]$ e compare os valores calculados com, respectivamente, $\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ e $\text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$. Comente sobre os resultados da comparação.

Exc. 55. *Nos exercícios anteriores, os valores de X e Y foram amarrados da sorte tal que a variável aleatória $X + Y$ assumia três valores. No presente exercício, quebramos a amarração e analisamos a distribuição de $X + Y$ por seus quatro valores. Aliás, observe que este "quatro"é o máximo, isto é, $X + Y$ não pode assumir mais que 4 valores, caso tanto X quanto Y assume dois valores só.*

Tome X que assume valores 0 e 1 com as respectivas probabilidades $1 - p_1$, e p_1, e tome Y que assume valores 5 e 7 com as respectivas probabilidades $1 - p_2$ e p_2. Observe, para a melhor compreensão das perguntas a seguir que $X + Y$ assumem os valores 5, 6, 7, 8.
(a) Ache a distribuição de $X + Y$, caso X e Y sejam independentes.
(b) Determine os valores de p_1 e p_2, e a distribuição conjunta de X e Y da sorte tal que $\mathbb{P}[X + Y = 5] < \mathbb{P}[X + Y = 6] < \mathbb{P}[X + Y = 7] < \mathbb{P}[X + Y = 8]$. (Observe que não exijo que X e Y sejam independentes.)
(c) Determine os valores de p_1 e p_2, e a distribuição conjunta de X e Y da sorte tal que os valores de $\mathbb{P}[X + Y = 6]$ e de $\mathbb{P}[X + Y = 7]$ sejam iguais entre si, e que ambos sejam maiores que $\mathbb{P}[X + Y = 5]$ e que $\mathbb{P}[X + Y = 8]$. (Observe que não exijo que X e Y sejam independentes.)

4.3.2 Exercícios sobre variáveis aleatórias binomiais

O papel didático principal dos Exercícios 56–65 é treiná-lo para que você consiga identificar as caraterísticas de experimento aleatório que façam com que a variável aleatória em interesse que surge no experimento aleatório tenha distribuição binomial. Tais caraterísticas foram destacadas na Propriedade 14. Recorde que essa é uma das três definições, equivalente entre si, para a variável aleatória binomial. Recorde também que entre elas, há a que fornece fórmulas para as probabilidades de distribuição binomial. É a Propriedade 15. Acerca dessa, observo que ela será usada nas soluções dos Exercícios 56–65 quando for precisa chegar as respostas numéricas. É óbvio que você terá que aprender a usar as fórmulas dessa definição. Entretanto, o enfoque principal não são as fórmulas, porém – conforme acima dito – a natureza da aleatoriedade que "produz" variável aleatória binomial.

Exc. 56. No jogo de tabuleiro chamado "War", cada jogador, na sua vez, lança em sequencia três dados equilibrados. Qual é a probabilidade que na vez de um dos jogadores, dois dados mostrem 6, enquanto que um mostre qualquer valor diferente de 6?

Identifique no experimento aleatório a variável aleatória binomial relacionada com a pergunta, construa sua distribuição, e responda à pergunta usando essa distribuição.

Realço: trata-se de experimento aleatório sequencial; se você deseja eliminar qualquer dúvida acerca disso, pinte os dados em amarelo, magenta e roxo, e lance-os nessa sequência. Ainda com o intuito de deixar claro que no experimento aleatório agora descrito não há aleatoriedade nem na escolha de jogador, nem na escolha da sua vez, sugiro que você assuma que trata-se da primeira vez do primeiro jogador entre os amigos que sentaram para jogar "War".

Exc. 57. A situação aqui é a mesma que foi descrita no Exc. 56, mas a pergunta agora é achar a probabilidade que nenhum dos três dados mostre 6. Qual é a resposta à qual chega-se com o auxílio da variável aleatória binomial apropriada para o caso? Você poderia resolver a pergunta do exercício sem o uso de variável aleatória binomial (quer dizer, se você não soubesse nada sobre variáveis aleatórias binomiais, qual seria o caminho de solução e qual seria a resposta)?

É bom você dar a atenção adequada à ultima pergunta desse exercício. Isso vai lhe auxiliar na resposta do item (b) do Exc. 58.

Exc. 58(a). Se lançarmos uma moeda honesta 10 vezes, com qual probabilidade veremos 8 caras e 2 coroas? Identifique nesta pergunta a variável aleatória binomial, os valores de seus parâmetros e use a fórmula para as probabilidades da distribuição binomial para dar a resposta.
(b) Nos 10 lançamentos consecutivos de uma moeda honesta, qual é a probabilidade de observarmos "cara" em todos os primeiros 8 lançamentos, e "coroa" em todos os 2 últimos?

É extremamente importante que você entenda a diferença entre as perguntas (a) e (b) do presente exercício. É essencial que entenda também que variável aleatória binomial não é apropriada para responder na pergunta (b). Reforço isso explicando lhe que variável aleatória binomial conta o número de sucessos numa série de ensaios sem se preocupar com o posicionamento dos mesmos na série. É exatamente por isso que tal variável não responde à pergunta (b) pois essa indaga sobre 8 "caras" nos oito primeiros lançamento e 2 "coroas" nos dois últimos.

Exc. 59. *A importância do Exc. 58 destacada no comentário após sua formulação fez me criar o presente exercício; seu papel então é fortalecer sua habilidade na distinção dos casos tratáveis por variáveis aleatórias binomiais dos casos onde essas são totalmente inúteis.*
Uma moeda que, ao ser laçada, apresenta "cara" com a probabilidade 2/3 (e, portanto, apresenta "coroa"com a probabilidade 1/3) será lançada 5 vezes. Responda nas perguntas (a), (b) e (c) abaixo destacando em suas respostas a aplicabilidade da variável aleatória binomial na obtenção de respostas.
(a) Qual é a probabilidade de observar 3 "caras" e 2 "coroas"?
(b) Qual é a probabilidade de todos os primeiros 3 lançamentos mostrar "caras" e dos dois últimas lançamentos mostrar "coroas"?
(c) Qual é a probabilidade de vermos exatamente a seguinte sequência: "cara" – "coroa" – "cara" – "coroa" – "cara"?

Exc. 60. Meu filho Ian ganhou sua mesada: R$6,00. Mas ele precisa de no mínimo R$7,00 para poder levar sua namorada ao cinema. Ele resolve tentar a sorte em um cassino (pegou emprestado o jatinho do pai e foi a Mônaco). No cassino, onde ele foi, há duas mesas de jogo.

Numa das mesas a regra do jogo é a seguinte: uma moeda, que tem probabilidade $0,6$ de dar "cara" será lançada 10 vezes, e será pago ao participante o valor igual ao número de "caras" obtidas nesses 10 lançamentos. Para participar desse jogo é preciso pagar o ingresso no valor de R$6,00 (tudo que Ian possui).

Na outra mesa a regra do jogo é diferente: uma moeda, que tem probabilidade $0,5$ de dar "cara" será lançada 12 vezes e será pago ao participante o valor igual ao número de "caras" obtidas nesses 12 lançamentos. Para participar desse jogo também é preciso pagar o ingresso no valor de R$6,00.

Em qual das duas mesas Ian tem mais chances de conseguir no mínimo R$7,00?

Exc. 61. Ian ganhou mesada do seu pai: R$6,00. Mas ele precisa de no mínimo R$7,00 para poder levar sua namorada ao cinema. Ele resolve tentar a sorte num cassino. No cassino, aonde ele foi, há duas salas.

Para entrar na primeira sala, é preciso pagar R$3. Se Ian entrar nesta sala, será lançada 5 vezes uma moeda honesta e Ian receberá a quantidade de reais igual ao número de vezes que a "cara" for obtida nesta série de lançamentos.

Na outra sala, a regra de pagamento é a mesma e a moeda lançada é honesta também, só que há duas diferenças: para entrar na segunda sala, é precisa pagar R$2, e na segunda sala, a série é de 4 lançamentos.

Ian pode jogar uma vez só e só numa das salas a ser escolhida a seu gosto. Em qual das duas salas Ian tem mais chances de conseguir no mínimo R$7,00? (Na elaboração de sua solução, não esqueça levar em conta que para entrar na primeira sala, Ian desembolsa R$3 de R$6 que possui, enquanto que para entrar na segunda sala, ele desembolsa R$2 de R$6.)

Exc. 62. *Esse exercício não é obrigatório. Seu valor didático é que ele apresenta a visão pela lente da Teoria de Probabilidade no Problema Estatístico de Estimação da Proporção Populacional. Essa visão será cuidadosamente discutida quando falarmos sobre a Estimação. Você será preparado melhor para tal discussão, se fizer agora o presente exercício.*

Imagine que você mora numa cidade pequena com cerca de 2000 habitantes. Imagine que você conheça todos e, que você sabe, para cada um deles, a sua preferência entre dois candidatos para a próxima eleição de prefeito. A partir desse conhecimento, você sabe por certo que o candidato I tem 70% de apoio (e o outro, o II, tem, portanto, 30%).

Imagine que veio uma equipe de estatísticos à sua cidade. Os estatísticos não possuem o conhecimento da partição 70%–30%, e pretendem fazer a pesquisa eleitoral. Para tal, a equipe pretende escolher ao acaso 12 pessoas da cidade, entrevistá-las acerca da sua intenção de voto, e calcular a proporção dos entrevistados que disser apoiar o candidato I. Esta proporção será a estimativa que a equipe dará à proporção da população que apoia esse candidato.

Calcule a probabilidade da estimativa dar 45% ou menos.

> *Observe que você consegue abordar este problema pois você sabe o valor real da proporção da população que apoia o candidato I. Com esse conhecimento à mão, você consegue identifique nesta pergunta a variável aleatória binomial, os valores de seus parâmetros e use a fórmula para as probabilidades da distribuição binomial para dar a resposta. Você vai precisar assumir o seguinte artifício: a retirada da população da cidade de até 12 pessoas não muda significativamente a partição 70%–30%, da sorte tal que é permissível assumir que a probabilidade de qualquer um dos entrevistados ser eleitor do candidato I é 70% independentemente das posições dos demais entrevistados.*

Aviso. *Esteja avisado que seu professor estava entediado com elaboração de exercícios cujas soluções são diretas, e é por isso que procurou por algo mais interessante e diversificado no sentido de combinação da distribuição binomial com mais algo. O máximo que o professor conseguiu achar é <u>um</u> formato emgraçado de "enrolar"' pergunta; nesse formato, o professor colocou os próximas três exercícios.*

Exc. 63. Papai Noel pôs no saco três bonecas e três carrinhos, subiu na rena e voou para visitar a família de Zé Mané, que tem quatro crianças. No meio do caminho se tocou que tinha esquecido de perguntar o sexo das crianças de Zé. Ajude ao Papai Noel calcular a probabilidade de poder satisfazer todas as crianças, assumindo que
(1) meninas gostam de bonecas e meninos gostam de carrinhos;
(2) cada uma das quatro crianças de Zé é ou filho ou filha com as probabilidades 1/2 e 1/2, e que o sexo de qualquer uma das crianças não depende do sexo das demais.

Exc. 64. Combinamos com o dono da lanchonete do nosso instituto que os 12 participantes de um encontro científico que acontecerá amanhã irão almoçar na sua lanchonete. No estoque da lanchonete, tem carne suficiente para 12 pratos, mas a quantidade de frango dá só para 5 pratos. O dono sabe, a partir da experiência do passado, que cada freguês escolhe carne ou frango com as respectivas probabilidades 60% e 40%. Pede-se calcular a probabilidade de todos os 12 pedidos sejam satisfeitos.

> *Você pode pensar assim: Todas as pessoas são bolas numa imensa urna, e 60% das bolas preferem carne, por isso são pintadas de branco, enquanto que 40% preferem frango e foram pintadas de preto. Dessa urna, a "sorte", ou a Natureza, escolhe ao acaso e em sequência 12 bolas, que representam os participantes do encontro científico mencionado no enunciado. Assume-se também, que a urna é tal grande que a extração de 12 bolas – qualquer que sejam suas cores – não afeta a partição por 60%–40% das cores na urna. Esse pressuposto assegura que a cor de qualquer bola retirada da urna será branca com a probabilidade 60% e será preta com a probabilidade 40%, e que isso independe das cores de outras bolas retiradas da urna. Essas "bolas" – de acordo com a ordem de retirada – irão à lanchonete na hora do almoço, e as brancas pedirão carne, enquanto que as pretas*

pedirão frango. Então, a aleatoriedade da quantidade de pedidos de carne e de frango está na escolha de bolas da urna. Essa visão permite-lhe enxergar direitinho o experimento aleatório que está por trás da situação descrita no enunciado do exercício.

Você pode pensar de uma outra maneira, que é assim. Cada um dos 10 participantes tem uma moeda que mostra "quero frango" com probabilidade 0,4 e "quero carne" com 0,6. A moeda está no estômago ou no bolso – não importa onde exatamente –. Ao chegar ao balcão da lanchonete, a pessoa lança sua moeda (ou a sorte lança a moeda no estômago), e dependendo do resultado do lançamento, a pessoa pede frango ou carne.

Se você entendeu as dicas dadas nos dois parágrafos acima, então você deduz facilmente que a quantidade de pedidos de franco terá a distribuição Binomial$(12; 0,6)$ *enquanto que a quantidade de pedidos de carne terá a distribuição Binomial*$(12; 0,4)$. *Entretanto, se você continuar a solução tomando em conta as duas variáveis aleatórias (isto é,* X *e* Y *distribuídas, respectivamente, segundo Bin*$(12; 0,6)$ *e Bin*$(12; 0,4)$*), é de esperar por dificuldades pois as variáveis são dependentes (de fato, se* X *assume, digamos, 3, então* Y *é obrigado assumir 9, já que a soma dos pedidos é sempre 12). A "arte" que permite resolver o problema é focar em somente o número de pedidos de frango. O enunciado indica esse caminho ao dizer que "o estoque de carne é suficiente para todos os 12 pedidos".*

Exc. 65(a). Na fila numa farmácia há 10 pessoas. Todos precisam de remédia contra gripe. Ao ser atendido no balcão, cada pessoa recebe a informação do farmacêutico que para curar a gripe, a farmácia oferece Tylenol e Magnopyrol. Assuma que cada pessoa escolha Tylenol com a probabilidade 0,3, e Magnopyrol com a probabilidade 0,7, e assume também que as escolhas são independentemente de pessoa para os demais. No momento, a farmácia tem no seu estoque 12 frascos de Magnopyrol e 5 embalagens de Tylenol. Calcule a probabilidade de que todas as escolhas sejam atendidas.
(b) A situação e a pergunta aqui são as mesmas que as do item (a), só que agora a farmácia tem no estoque 8 frascos de Magnopyrol e 5 embalagens de Tylenol.

Você pode pensar assim: Todas as pessoas são bolas numa imensa urna, e 30% das bolas preferem Tylenol, e por isso são pintadas de branco, enquanto que 70% preferem Magnopyrol, e foram pintadas de preto. Dessa urna, a "sorte", ou a Natureza, escolha ao acaso e em sequência 10 bolas, as coloca na fila da farmácia. Assuma-se também, que a urna é tal grande que a extração de 10 bolas – qualquer que sejam suas cores – não afeta a partição por 30%–70% das cores na urna. Esse pressuposto assegura que a cor de qualquer bola retirada da urna será branca com a probabilidade $0,3$ *e será preta com a probabilidade* $0,7$, *e que isso independe das cores de outras bolas retiradas da urna.*

Você pode pensar de uma outra maneira, que é assim. Cada uma das 10 pessoas na fila tem uma moeda que mostra "prefiro Tylenol"com probabilidade 0,3 e "prefiro Magnopyrol"com 0,7. A moeda está na garganta inflamada pela gripe, ou no bolso – não importa onde exatamente. Ao chegar ao balcão, a pessoa lança sua moeda (ou a sorte, ou a Natureza, lança a moeda pela pessoa), e dependendo do resultado do lançamento, a pessoa pede Tylenol ou Magnopyrol.

Aviso. *Os Exercícios 66–71 estão aqui para que você possa conhecer o formato da distribuição binomial, como, por exemplo, a posição dos valores que correspondem à maior probabilidade, ou o decaimento das probabilidades nas caudas da distribuição. O conhecimento não será pleno, mas será útil para sua capacidade de entender as ideias por trás dos métodos estatísticos que tratam amostras de distribuição binomial. Em particular, o efeito de tamanho de amostra a ser visto em estimação e em teste de hipóteses relacionados à proporção populacional tem vinculo direto com os efeitos ilustrados nos Exercicios 66–71.*

Exc. 66. Desenhe as funções de probabilidade das seguintes variáveis aleatórias: Bin(3; 0,1), Bin(3; 0,3), Bin(3; 0,5), Bin(3; 0,6), Bin(3; 0,8). Quais são as esperanças destas variáveis aleatórias? Quais são suas variâncias?

Exc. 67. Desenhe as funções de probabilidade das seguintes variáveis aleatórias: Bin(16; 0,05), Bin(8; 0,1), Bin(4; 0,2), Bin(2; 0,4). Quais são as esperanças destas variáveis aleatórias? Quais são suas variâncias?

Exc. 68. *Um dos objetivos de presente exercício é chamar a atenção do leitor à seguinte particularidade das distribuições binomiais cuja esperança é um valor inteiro: o valor da esperança é o valor que a variável aleatória binomial assume com a maior probabilidade.*

Desenhe as funções de probabilidade das seguintes variáveis aleatórias: Bin(10; 0,6), Bin(12; 0,5), Bin(15; 0,4). Quais são as esperanças destas variáveis aleatórias? Quais são suas variâncias?

Exc. 69. Peço que você me apresente todas as variáveis aleatórias binomiais que têm, esperança 2 e variância 1? Quantas são?

Exc. 70. (Especial para Veterinária.) **(a)** Uma galinha botou 6 ovos. Qual é a probabilidade de nascerem 2 machos? **(b)** Outra galinha botou 12 ovos. Qual é a probabilidade de nascerem 4 machos? **(c)** Uma terceira botou 18 ovos. Qual é a probabilidade de nascerem 6 machos? (Assuma 1/2 e 1/2 para os dois sexos e assuma a independência entre os ovos.)

Exc. 71. (Especial para Veterinária.) **(a)** Uma galinha botou 6 ovos. Qual é a probabilidade de nascerem no máximo 2 machos? **(b)** Outra galinha botou 12 ovos. Qual é a probabilidade de nascerem no máximo 4 machos? **(c)** Uma terceira botou 18 ovos. Qual é a probabilidade de nascerem no máximo 6 machos? (Assuma 1/2 e 1/2 para os dois sexos e assuma a independência entre os ovos.)

Exc. 72. *Recorde que eram três as filhas do Rei Lear. Em nosso caso, a variável binomial também tem três definições. Mas diferentemente daquilo que aconteceu com o Rei Lear, nossa variável está bem amparada por cada uma das suas três definições. No presente momento, gostaria de falar daquela delas que diz que variável binomial surge como soma de variáveis aleatórias de Bernoulli. Recorde que entre as três definições, essa é a que exige o menor esforço para derivar os valores da esperança e da variância da variável aleatória binomial. Além dessa utilidade, a terceira definição serve para derivar facilmente a seguinte propriedade de variáveis aleatórias binomiais:*

$$\begin{aligned}&\textit{se } X \sim Bin(n,p), Y \sim Bin(m,p) \textit{ e se } X \textit{ e } Y \textit{ são independentes,}\\ &\textit{então } (X+Y) \sim Bin(n+m,p)\end{aligned}$$

(observe que para a validade dessa propriedade é obrigatório que p tenha o mesmo valor tanto na distribuição de X quanto na de Y; já os valores de n e m são arbitrários e, em particular, podem não ser iguais entre si). Essa propriedade não terá nenhum uso no que se segue. Naturalmente, não será cobrada em provas. A despeito disso, eu quis apresentá-lo a meu leitor, e é com esse intuito que foi feito o presente exercício.

Thiago, um aluno do Professor Vladimir, recebeu do professor a seguinte oferta: A nota da primeira prova dele será dada por uma variável aleatória binomial com os parâmetros $n = 5$ e $p = 1/2$. A nota da segunda prova dele será dada por outra variável aleatória , que é independente da primeira, e também é binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 1/2$. A nota final será a soma destas duas. Ajude Thiago! Calcule a probabilidade da nota final dele ser maior ou igual a 5.

4.4 Soluções

4.4.1 Soluções dos exercícios sobre variáveis aleatórias de Bernoulli

Solução do Exc. 48 é idêntica aos argumentos do Exemplo 42. A única diferença é que o exemplo trata variáveis de Bernoulli cujo parâmetro $p = 0,7$, enquanto que no presente exercício $p = 0,8$.

Solução do Exc. 49. O fenómeno ao qual o presente exercício tenta atrair sua atenção é que $X_1 + X_1$ é diferente de $X_1 + X_2$ onde X_2 tem a mesma distribuição que X_1 mas é independente de X_1. Abaixo, vou apresentar tudo em detalhes.

Seja então X_1 uma variável aleatória Bernoulli$(0,2)$. Vamos introduzir variável aleatória Y como $2X_1$. Você definitivamente não encontra nenhuma dificuldade no cálculo da distribuição de Y, pois tal cálculo foi lhe explicado e justificado no Capítulo 3, naquela sua parte onde falava-se sobre transformações de variáveis aleatórias. No caso de Y, a transformação é "multimplicação por 2", e de acordo com o ensinado, a distribuição de Y obtem-se por multiplicação por 2 dos valores de X_1, sendo que as probabilidades ficam intactas. O resultado está abaixo:

y	0	2
$\mathbb{P}[Y = y]$	$0,8$	$0,2$

Até o momento, tudo está certo. O probelma aparece se a gente escrever Y da seguinte maneira que é totalmente equivalente à escrita $2X_1$, eis esta: $Y = X_1 + X_1$. O problema supracitado aparece no processo de cálculo da distribuição de Y seguindo a regra do cálculo da distribuição de soma. Vou primeiramente mostrar a abordagem correta e depois a equivocada, que é aquela que leva ao problema. Na minha exposição, o primeiro passo é a construção da tabela de distribuição conjunta das variáveis cuja soma dá Y. Eis esta:

X_1 \ X_1	0	1
0	$0,8$	0
1	0	$0,2$

No segundo passo, se faz as somas de todos os pares de valores:

y	$\mathbf{0}+0$	$\mathbf{0}+1$	$\mathbf{1}+0$	$\mathbf{1}+1$
$\mathbb{P}[Y = y]$	$0,8$	0	0	$0,2$

No terceiro passo, que é o passo final, eliminam-se as colunas cujas probabilidades são nulas. O resultado final é a tabela que foi derivada no parágrafo acima pela aplicação do raciocínio que enxergava Y como $2X_1$.

Então, mostrei para você que o cálculo da distribuição de Y leva ao mesmo resultado queira você enxergar Y como $2X_1$, ou queira você enxergar ela como $X_1 + X_1$. A coincidência mostrada é importante para você ganhar a confiança de que os métodos até o momento ensinados funcionam sem falhas (pois na ausência dessa coincidência, você suspeitaria ou nas falhas de ensino ou nas falhas de sua aprendizagem). O que talvez ficou ainda estranho para você é a construção da tabela de distribuição conjunta que foi usada para o cálculo de $X_1 + X_1$. Vou fazer comentários apropriados abaixo.

Muitos mistérios ao redor da tabela serão naturalmente explicadas se nós esclarecermos para nós mesmo quem são o "par" de variáveis envolvidas na tablea. A resposta é direta: É X_1 e X_1, quer dizer, X_1 e ela mesma. Isto significa que se X_1 assumiu valor 0 (ou 1), então "ela mesma" é obrigada assumir 0 (respectivamente, 1). Isso explica a razão pela qual as celulas da tabela carregam probabilidades não nulas somente para os pares de valores $(0,0)$ e $(1,1)$. Ainda mais, já que X_1 é Bernoulli$(0,2)$ então $0,2$ deve ser a probabilidade dela, junto com a cópia dela, assumir o par $(1,1)$, e pelo mesma razaõ, $0,8$ deve ser a probabilidade da tabela na celula correspondente ao par $(0,0)$. Isso tudo justificou a construção da tabela como foi feita acima. Só talvez vale notar que os argumentos agora usados sugerem que seja inadequado o uso de negrito na marcação de valores de uma de X_1. A razão é que na situação aqui considerada, não há "outra" X_1 e, portanto, não há outro valor, seja esse 0 ou seja 1, que é diferente do valor da "primeira" X_1. Apesar disso, eu prefiro deixar a marcação em negrito, pois ela indica a regra pela qual a tabela bi-variada gera a tabela feita no segundo passo.

A situação muda-se drasticamente quando eu desejar achar Z que eu defino como $X_1 + X_2$ sendo que sobre X_2 eu declaro que ela tem a <u>mesma</u> distribuição que X_1 mas é <u>independente</u> de X_1. Nesse caso, a tabela da distribuição conjunto de X_1 e X_2 faz-se seguindo a regra ilustrada no Exemplo 42 (que usa essencialmente a independência entre X_1 e X_2). Eis a tabela:

X_1 / X_2	0	1
0	$(0,8)^2$	$0,8 \cdot 0,2$
1	$0,2 \cdot 0,8$	$(0,2)^2$

y	$\mathbb{P}[X_2 = y]$
0	0,8
1	0,2

x	0	1
$\mathbb{P}[X_1 = x]$	0,8	0,2

Observe que a tabela agora construída difere-se completamente da tabela da distribuição "conjunta" de X_1 com ela mesma. A peartir da útlima tabela, é facil obter a distribuição de Z (recorde, Z foi definida como $X_1 + X_2$). Quanto à comparação entre as esperanças e entre as variâncias de Y e de Z, as contas são obrigadas a dar $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z]$. A razão dessa igualdade adveio dos seguintes cálculos (que empregam as propriedades genéricas da esperança): $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[2X_1] = 2\mathbb{E}[X_1]$ e $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 2\mathbb{E}[X_1]$ (na última passagem usa-se que $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2]$ o que se justifica pelo fato de X_1 e X_2 terem a mesma distribuição). Entretanto, $\mathrm{Var}[Y]$ e $\mathrm{Var}[Z]$ terão valores diferentes. Embora a diferença pode ser provada em forma genérica, é suficiente que você verifica-la fazendo as contas numéricas. É claro que nas suas contas você precisa partir das tabelas de distribuição de Y e de Z.

Solução do Exc. 50(b). Observe que Z assume 0 com a probabilidade 0,8 e 1 com a probabilidade 0,2. Já Y assume 0 com a probabilidade 0,2 e 3 com a probabilidade 0,8. Isto faz com que você não possa escrever $Y = 3Z$, pois embora a variável aleatória $3Z$ assuma os mesmos valores que Y, mas as probabilidades são diferentes: $3Z$ assume 0 com a probabilidade 0,8 (pois Z assumia 0 com a probabilidade 0,8) e assume 3 com a probabilidade 0,2. Observe que as probabilidades para 0 e 3 da variável aleatória Y são trocadas: são 0,8 e 0,2 respectivamente. Então, é muito importante acoplar os valores de acordo com a igualdade de suas probabilidades. Isto é, a transformação de Z deve ser tal que quando Z assume 0, então Y deve assumir 3 e quando Z assume 1 então Y tem que assumir 0. Portanto, se a transformação de Z for $cZ + d$, quer dizer, se a gente deseja que $cZ + d$ seja igual a Y, então tudo que eu lhe disse acima torna-se nas seguintes equações: $c \cdot 0 + d = 3$ e $c \cdot 1 + d = 0$. A solução deste sistema é a solução do exercício.

Solução do Exc. 51 (a). Nossa intuição nos sugere que o valor 8 para a da questão pode resolvê-la. Que esta sugestão funciona verifica-se via a regra de multiplicação de variável aleatória por constante. A aplicação dessa nos dá que – de fato– $8X$ assume valores 0 e 8 com as probabilidades $(1-p)$ e p. Então a resposta na primeira pergunta do exercício é: $a = 8$. Agora, ao aplicar no caso as propriedades genéricas de esperança e de variância (especificamente, as propriedades que $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[aX] = a^2\mathrm{Var}[X]$), obtemos as seguintes relações: $\mathbb{E}[Y] = 8\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}[Y] = 8^2\text{Var}[X]$. Estas são respostas na segunda pergunta. Por fim, juntando as relações obtidas com (4.1), deduzimos as respostas na última pergunta do exercício: $\mathbb{E}[Y] = 8p$ e $\text{Var}[Y] = 64p(1-p)$.

Solução do Exc. 51 (b). Diferentemente do que houve no item (a) do mesmo exercício, agora é difícil adivinhar os valores de a e b que fazem com que $aX + b$ seja igual à Y. Felizmente, existe uma abordagem formal que permite achar estes valores. No primeiro passo da abordagem, faz-se um sistema de equações lineares, o qual no presente caso, adquire a seguinte forma:

$$\begin{cases} 8 = a \times 0 + b \\ 3 = a \times 1 + b \end{cases} \tag{4.10}$$

No segundo passo da abordagem, acha-se a solução do sistema (4.10). A primeira de suas equações nos dá que $b = 8$, e ao substituir b por 8 na segunda equação, concluímos que $a = 3 - 8 = -5$. Então, $Y = -5X + 8$, e desta relação segue – via o argumento apresentado na solução do item (a) – que $\mathbb{E}[Y] = -5\mathbb{E}[X]+8 = -5p+8$ e $\text{Var}[Y] = (-5)^2\text{Var}[X] = 25p(1-p)$.

Para entender as regras que regem a construção do sistema (4.10) em caso geral, observe, por favor, as seguintes particularidades da solução apresentada no presente caso específico. A primeira das equações (4.10) veio da associação entre o valor 8 de Y e o valor 0 de X. A razão da associação é que $\mathbb{P}[Y = 8] = \mathbb{P}[X = 0]$ (pois ambas são $1-p$, de acordo com o enunciado). Em outras palavras, seria errado associar 3 de Y com 0 de X, e errado, consequentemente, derivar e empregar na solução a equação $3 = a \times 0 + b$. A mesma razão, quer dizer, o fato de $\mathbb{P}[Y = 3] = \mathbb{P}[X = 1]$, fez nós associar 3 e ao 1, e, de acordo com isso, forneceu a equação $3 = a \times 1 + b$ que completou o sistema. Tudo isto, em termos práticos, pode ser formulado como o seguinte aviso: "o valor de Y deve ser casado com aquele valor de X que ocorre com a mesma probabilidade".

Um simples análise da regras da construção do sistema de equações e de sua sua solução mostra que qualquer que sejam os valores de variável aleatória Y – desde que sejam dois –, e suas probabilidades, sempre podemos achar uma apropriada variável aleatória *Bernoulli* X e um par de valores a e b tais que $Y = aX + b$. Este foi um comentário só; não se pede que você derive e aprenda sua demonstração.

Solução do Exc 53 (a). A tabela da distribuição conjunta (a distribuição bivariada) de X e Y obtém-se por multiplicação de suas distribuição individuais, conforme explicado no Capítulo 3. Eis o resultado deste procedimento:

X / Y	0	1
0	$(1-p_1)(1-p_2)$	$p_1(1-p_2)$
1	$(1-p_1)p_2$	p_1p_2

A partir desta tabela, conclui-se que o enunciado exige que os valores de p_1 e p_2 satisfaçam as seguintes equações:

$$(1-p_1)(1-p_2) = 0,06 \text{ e } p_1p_2 = 0,36$$

São duas equações não lineares com, então, dois incógnitos p_1 e p_2. Se fossem lineares, poderíamos usar a Álgebra Linear para concluir, antes de partir para a solução do sistema, se este possui um, nenhum ou infinitude de soluções. Com equações não lineares, tal análise prévia do comportamento das soluções é mais complicada e não pretendemos fazê-la agora. Portanto, vamos simplesmente partir para sua solução. Da segunda equação, temos que $p_1 = 0,36/p_2$. Colocando isto na primeira equação, temos que

$$(1-p_2)\left(1 - \frac{0,36}{p_2}\right) = 0,06$$

Após transformações triviais, chega-se à equação $p_2^2 - 1,3p_2 - 0,36 = 0$ que é equivalente à equação acima. (Na verdade, no caminho de dedução da segunda equação a partir da primeira, é preciso confirmar que $p_2 = 0$ não é a solução que atende à tarefa do exercício; confirmação trivial, mas necessária uma vez que p_2 está no denominador da equação original.) As raízes da última equação são $0,4$ e $0,9$. Os correspondentes valores do parâmetro p_1 são $0,9$ e $0,4$. Então, formalmente falando, temos duas soluções para o problema: $(p_1; p_2) = (0,4; 0,9)$ e $(p_1, p_2) = (0,9; 0,4)$.

Solução do Exc 53 (b).

Solução do Exc 53 (c). Se tanto X quanto Y assume valores 0 e 1, sua distribuição conjunta tem a forma apresentada à esquerda na figura abaixo. Debaixo da figura, há condições impostas em seus parâmetros. Acontece, entretanto, que o enunciado pede que X e Y sejam Bernoulli, e ainda que seja com o mesmo valor de parâmetro p. Isto obriga tanto $a + b$ quanto $a + d$ igualar-se a $(1 - p)$, e obriga tanto $b + c$ quanto $d + c$ igualar-se a p. As duas obrigações serão satisfeitas se e somente se $b = d$. Com isto, deduzimos que a distribuição conjunta de X e Y, submetida à condição que ambas sejam Bernoulli(p), tem, como sua forma genérica, a tabela à direita da figura abaixo. Os parâmetros da tabela não são totalmente livres; as condições às quais eles devem obedecer, estão na lista abaixo da tabela.

X Y	0	1
0	a	d
1	b	c

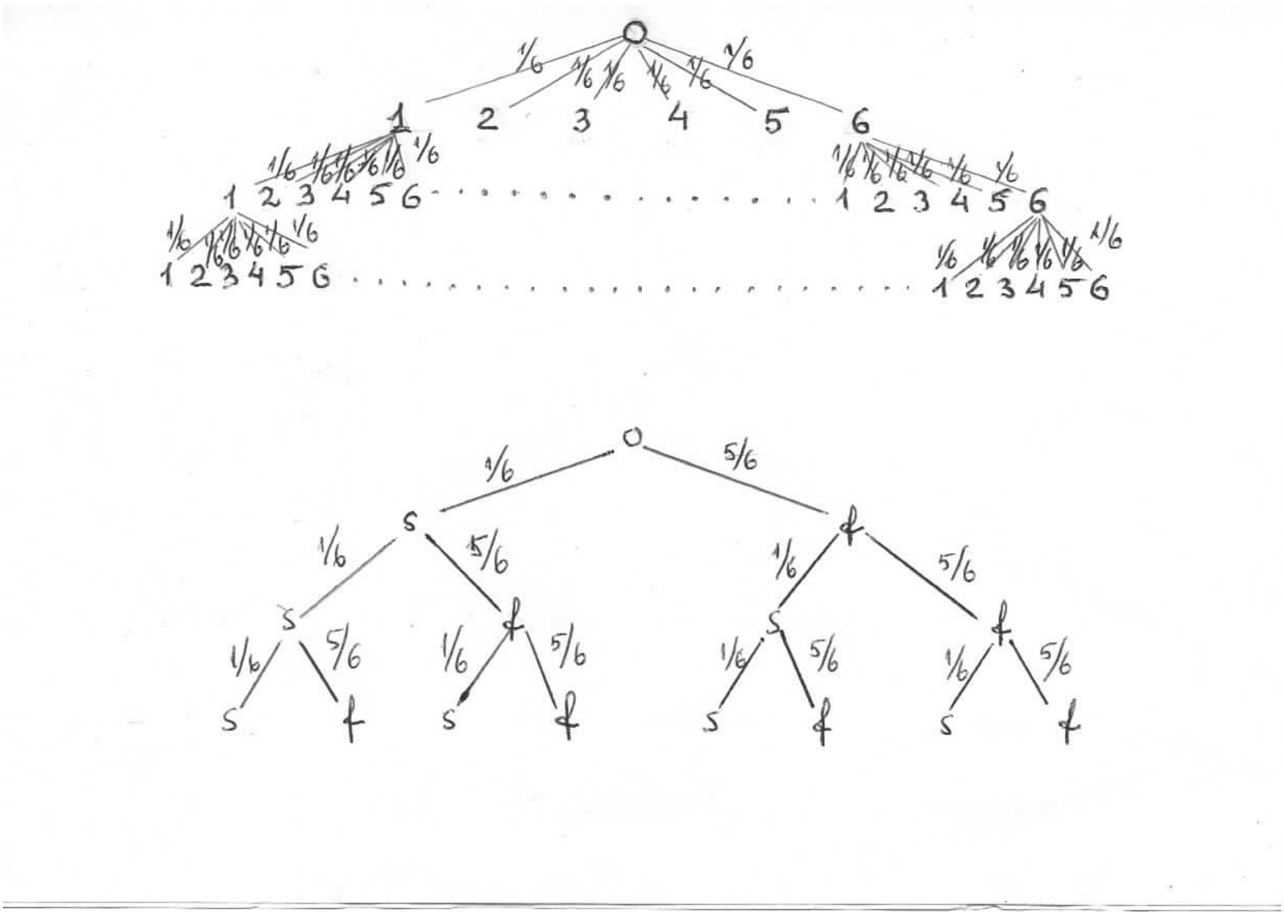
Das condições impostas nos parâmetros, deduz-se a seguinte relação:

$$1 - 2p = a - d \tag{4.11}$$

Nossa tarefa exige que $a = 0,06$ e $c = 0,36$. Isto implica, via (4.11) que $p = 0,35$, o que por sua vez, dá que $b =?$

4.4.2 Soluções dos exercícios sobre variáveis aleatórias binomiais

Solução do Exc. 56.



Se fizermos o diagrama de árvore que reflete literalmente os detalhes do experimento aleatório enunciado, esse será como o primeiro desenho na Figura acima. Se usarmos tal diagrama para fazer o modelo probabilístico, esse será assim:

$$\Omega = \{(1,1,1), \ldots, (6,6,6)\} \text{ e } I\!P[\omega] = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \text{ para cada } \omega \in \Omega$$

Nem o diagrama, nem o modelo probabilístico revelam facilmente que aquilo que o exercício pede é um resultado particular de uma distribuição binomial. Isso só será visto se fizermos outro modelo; que está descrito abaixo.

No nosso outro modelo, estaremos interessados somente pelo resultado 6 em cada dado. De acordo com essa intenção, vamos codificar cada resultado de cada dado da seguinte maneira:

s para o resultado 6, f para qualquer outro resultado mostrado pelo dado

Usando tal codificação, o diagrama de árvore adquire a forma mostrada no segundo desenho da Figura acima (as probabilidades $1/6$ e $5/6$ foram colocadas de acordo com a informação de que os dados lançados são equilibrados, fato que garante que cada face ocorre com a probabilidade $1/6$). Sabemos que o diagrama de árvore do tipo visto no segundo desenho indica o surgimento de variável aleatória binomial. Especificamente falando, sabemos que se construirmos o correspondente modelo probabilístico, e se introduzirmos nele a variável aleatória X via a regra "o valor que X assume em qualquer resultado é igual ao número de s (de sucessos, quer dizer) do resultado", então tal X terá a distribuição binomial com $n = 3$ (pois o experimento aleatório todo está composto por três etapas) e com $p = 1/6$ (pois a probabilidade de ter s em cada etapa é $1/6$). Vamos então, de fato introduzir X como "o número de s no resultado". Então, tem-se que $X \sim Bin(3; 1/6)$, e isso nos permite expressar as probabilidades de todos os valores que X pode assumir:

$$I\!P\left[X = k\right] = C_3^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k} \left(\frac{1}{6}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Agora vamos à pergunta **(a)** do exercício. É óbvio que a probabilidade perguntada é igual à probabilidade de X acima definida assumir valor 2. Essa probabilidade é:

$$C_3^2\left(\frac{5}{6}\right)^{3-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 3\times\frac{5}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{72}$$

Na pergunta **(b)**, pede-se a probabilidade de X assumir qualquer valor menos 3. É óbvio que essa é $1 - I\!\!P[X = 3]$. Eias a conta que acha o valor dessa expressão:

$$1 - C_3^3\left(\frac{5}{6}\right)^{3-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 1 - 1\times 1\times\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216}$$

Solução do Exc. 57. Usando a variável aleatória X construída na solução de Exc. 56, a questão do presente exercício expressase por "achar $I\!\!P[X = 0]$". Como $X \sim Bin(3,\, 1/6)$, então a probabilidade em questão é igual a $C_3^0(1/6)^0(1-1/6)^{3-0} = (1-1/6)^3 = \frac{125}{216}$.

A pergunta do exercício é muito especial e ela pode ser resolvida pela abordagem que contorna o uso da distribuição binomial. A abordagem é assim: A probabilidade que em qualquer laçamento não apareça 6 é $(1 - 1/6)$. Como faz-se três lançamentos independentes, então a probabilidade de não haver 6 nesta série é $(1-1/6)^3 = \frac{125}{216}$.

Dica para o Exc. 58. No item (a) a ordem de "sucessos" (caras, quer dizer) não importa, o importante é que estejam 8 em número vistos em 10 lançamentos. Por isto a distribuição binomial é apropriada para ser usada para obter resposta e a resposta é $I\!\!P[X = 8]$ onde $X\ Bin(10; 0,5)$. Já no item (b) a ordem é importante, conforme o próprio enunciado afirma, e é por isto que a distribuição binomial não é aplicável. Entretanto, no item (b) um pensamento direto resolve a questão:é a probabilidade, de observar cara no 1-o lançamento vezes a probabilidade de observar cara no segundo e assim por diante até o 8-o lançamento, e tudo isto deve ser multiplicado pela probabilidade de ter coroa no 9-o lançamento vezes a probabilidade de ter coroa no 10-o. Cada uma das probabilidade do produto é 1/2, pois a moeda é honesta. Isto dá a resposta $(0,5)^{10}$.

Respostas para Exc. 59. **(a)** $C_5^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$ o que é a $I\!\!P[X = 3]$ quando $X \sim Bin(5; 2/3)$. **(b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Observe que a distribuição binomial não é apropriada para solucionar a pergunta do item (b) pois o evento de interesse imponha o que deve ocorrer em cada lançamento. A abordagem apropriada é via o modelo probabilístico da situação considerada, mas como o modelo é simples, eu então apresentei somente o resultado final. **(c)** $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$. O comentário pertinente é o mesmo que o feito justo à resposta ao item (b).

Solução do Exc. 60. No primeiro caso, como $X \sim Bin(10;\, 0,6)$ é a distribuição do número de "caras"em 10 lançamentos de moeda que mostra "cara" com a probabilidade $0,6$. Então a probabilidade que Ian saia da primeira mesa com R$7,00 ou mais é

$$\begin{aligned}&I\!\!P[X = 7] + I\!\!P[X = 8] + I\!\!P[X = 9] + I\!\!P[X = 10] = \\ &= C_{10}^7(0,6)^7(1-0,6)^3 + C_{10}^8(0,6)^8(1-0,6)^2 + C_{10}^9(0,6)^9(1-0,6)^1 + C_{10}^{10}(0,6)^{10}(1-0,6)^0 = \\ &\text{(com arredondamento até a terceira casa)} = 0{,}215 + 0{,}121 + 0{,}040 + 0{,}006 = 0{,}382.\end{aligned}$$

onde os valores numéricos foram obtidos pelo **R** com R commander seguindo à sequencia de comandos *Distribuições* $\rightarrow$ *Distribuições Discretas* $\rightarrow$ *Distribuição Binomial* $\rightarrow$ *Probabilidades de Binomial* e com a digitação 10 e $0,6$ nos respectivos campos *Experimentos de Binomial* e *Probabilidade de sucesso* da janela que o programa abre após receber a sequencia de comandos indicada. Eis a resposta que **R** dá:

	Probability
0	0.0001048576
1	0.0015728640
2	0.0106168320
3	0.0424673280
4	0.1114767360
5	0.2006581248
6	0.2508226560
7	0.2149908480
8	0.1209323520
9	0.0403107840
10	0.0060466176

Por outro lado, como $Y \sim Bin(12; 0,5)$ é a distribuição do número de "caras" em 12 lançamento de moeda que mostra "cara" com a probabilidade $0,5$. Então a probabilidade que Ian saia da segunda mesa com R\$7,00 ou mais é

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y = 7] + \mathbb{P}[Y = 8] + \mathbb{P}[Y = 9] + \mathbb{P}[Y = 10] + \mathbb{P}[Y = 11] + \mathbb{P}[Y = 12] = \\
&= C_{12}^{7}(0,5)^7(1-0,5)^5 + C_{12}^{8}(0,5)^8(1-0,5)^4 + C_{12}^{9}(0,5)^9(1-0,5)^3 + \\
&\qquad + C_{12}^{10}(0,5)^{10}(1-0,5)^2 + C_{12}^{11}(0,5)^{11}(1-0,5)^1 + C_{12}^{12}(0,5)^{12}(1-0,5)^0 = \\
&\text{(com arredondamento até a quarta casa)} \\
&= 0{,}1934 + 0{,}1208 + 0{,}0537 + 0{,}0161 + 0{,}0029 + 0{,}0002 = 0{,}3872.
\end{aligned}$$

onde os valores numéricos foram obtidos pelo **R** com R commander seguindo à sequencia de comandos *Distribuições* → *Distribuições Discretas* → *Distribuição Binomial* → *Probabilidades de Binomial* e com a digitação 12 e $0,5$ nos respectivos campos *Experimentos de Binomial* e *Probabilidade de sucesso* da janela que o programa abre após receber a sequencia de comandos indicada. Eis a resposta que **R** dá:

	Probability
0	0.0002441406
1	0.0029296875
2	0.0161132813
3	0.0537109375
4	0.1208496094
5	0.1933593750
6	0.2255859375
7	0.1933593750
8	0.1208496094
9	0.0537109375
10	0.0161132813
11	0.0029296875
12	0.0002441406

A resposta final é, então, que Ian tem mais chances na mesa 2. (Observo que para o cálculo da probabilidade na mesa 2, usei o arredondamento até a 4-a casa com o intuito de controlar o erro de arredondamento e garantir assim que o resultado final da mesa 2 é, de fato, maior que o da mesa 1. Meus alunos não precisam entender esse detalhe; também, não parecido será cobrado nas provas.)

Solução do Exc. 61 é parecida com a do Exc. 60 e por isso, não será apresentada.

Exc. 62 não terá gabarito de sua solução.

Solução do Exc. 63. Creio que o enunciado lhe obrigou a parar e pensar acerca de como iniciar a solução. A primeira dificuldade que surge está no fato de você não enxergar a fonte de aleatoriedade. De fato, como os filhos do Zé já nasceram, seus sexos então estão definidos, e então não há nada indefinido no enunciado... Na realidade, a aleatoriedade existe, e no caso, ela é a incerteza que passa pela cabeça do Papai Noel acerca da composição dos sexos das crianças na casa do Zé. É que o enunciado não deixa isso totalmente claro. O enunciado indica isso indiretamente quando sugere que é preciso pensar que cada criança pode ser ou menina ou menino com probabilidades iguais e independentemente dos sexos das demais crianças.

Então, você começa a pensar sobre a distribuição dos sexos e descobre que a raiz da dificuldade pela qual passa está na necessidade de pensar no número de meninas e no de meninos ao mesmo tempo. Como você não tem muita experiência nas análises simultâneas de duas variáveis, seu subconsciente trava conscientemente seu consciente. Acerca disto, devo lhe revelar que a mesma dificuldade sugeria para qualquer um, não necessariamente só para os inciantes na aprendizagem da Teoria de Probabilidades.

A ideia que permite livrar-se do empecilho retratado acima é pensar na distribuição do número de filhas só. E quanto ao número de filhos? Pois bem, este sai unicamente do número de filhas, já que em soma, os dois deve dar 4.

Vamos, então, à solução que baseia-se na ideia suprassugerida. Para facilitar a exposição, colocamos os casos possíveis a acontecer numa tabela; veja esta abaixo. Cada caso é uma de suas linhas. Sua primeira coluna apresenta o número de filhas, e a segunda – o de filhos. Na terceira coluna da mesma tabela, colocamos o resultado da entrega dos brinquedos, tomando em conta que o Papai Noel trouxe só 3 bonecas e só 3 carrinhos. Já a resposta na pergunta do exercício sai da última coluna; as probabilidades nela colocadas são as da distribuição binomial com os parâmetros $n = 4$ (pois são 4 crianças ao total na família do Zé Mané) e $p = 1/2$ (pois a probabilidade de cada uma das 4 crianças ser menina é 1/2, conforme assumido no enunciado).

Número de de filhas (k).	Número de filhos $(4-k)$.	Todas as crianças recebem o brin quedo ao gosto?	A probabilidade de ter k filhas entre 4 crianças.
0	4	não	$C_4^0(1/2)^0(1-1/2)^4 = 0.0625$
1	3	sim	$C_4^1(1/2)^1(1-1/2)^3 = 0.2500$
2	2	sim	$C_4^2(1/2)^2(1-1/2)^2 = 0.3750$
3	1	sim	$C_4^3(1/2)^3(1-1/2)^1 = 0.2500$
4	0	não	$C_4^4(1/2)^4(1-1/2)^0 = 0.0625$

A probabilidade de satisfazer o gosto de todas as crinaças é: $0.250 + 0.375 + 0.250 = 0.875$.

Exc. 64 não terá gabarito de sua solução.

A solução do Exc. 65(a) é muito parecida com a do Exc. 63, e como essa foi apresentada em todos os detalhes, então aquela será omitida.

Solução do Exc. 65(b). As combinações dos pedidos que podem ser atendidos pela farmácia que possui no seu estoque 8 embalagens de magnopyrol e 5 embalagens de Tylenos são assim:

A quantidade de pessoas que pedem Magnopyrol	5	6	7	8
A quantidade de pessoas que pedem Tylenol	5	4	3	2

Com a probabilidade de qualquer uma das 10 pessoas pedir Magnopyrol é 0,7 (e é o restante 0,3 para pedir Tylenol) então em 10 pessoas na fila, a quantidade daquelas que pedirão magnopyrol segue a distribuição $\text{Bin}(10; 0,7)$. Logo, a resposta é

$$\mathbb{P}[X = 5] + \mathbb{P}[X = 6] + \mathbb{P}[X = 7] + \mathbb{P}[X = 8], \text{ onde } X \sim Bin(10; 0,7)$$

Solução do Exc. 66. A tabela abaixo lhe recorda a forma da distribuição binomial com $n = 3$:

valor	0	1	2	3
probabilidade	$C_3^0\, p^0(1-p)^3$	$C_3^1\, p^1(1-p)^2$	$C_3^2\, p^0(1-p)^1$	$C_3^3\, p^3(1-p)^0$

Então, para que acharmos os valores das probabilidades desta distribuição correspondente aos casos $p = 0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.8$, é precisa só substituir p pelo seu valor numérico e fazer a conta. Caso você decidiu fazer a conta à mão, lhe recordo a expressão para "3 escolhe k" (note que há os quem usa o nome "combinações de 3, k a k" em vez do "3 escolhe k"; os dois são legítimos e aceitáveis no meu curso):

$$C_3^k = \frac{3!}{k!(3-k)!},\ k = 0, 1, 2, 3 \text{ (lembrando que } 0! = 1 \text{ por decreto)}$$

Eu fiz as contas com uso do pacote computacional "R"; executei cinco vezes o comando "`dbinom(0:3, size=3, prob=p)`", uma vez para cada valor de p, e recebi as respostas, as quais apresento na seguinte tabela:

valor	0	1	2	3
probabilidade para $p = 0.1$	0.729	0.243	0.027	0.001
probabilidade para $p = 0.3$	0.343	0.441	0.189	0.027
probabilidade para $p = 0.5$	0.125	0.375	0.375	0.125
probabilidade para $p = 0.6$	0.064	0.288	0.432	0.216
probabilidade para $p = 0.8$	0.008	0.096	0.384	0.512

As correspondentes funções de probabilidade estão na Figura 7 abaixo:

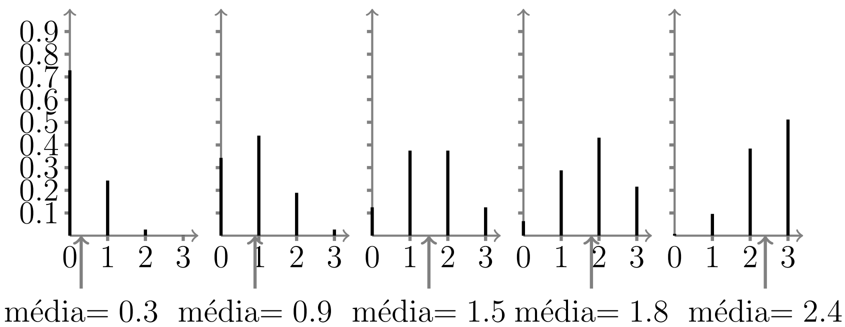


Figura 7

Os gráficos respondem à primeira tarefa do exercício. Espero que ao executar a tarefa você vislumbrou a modificação que acontece com a distribuição da variável aleatória binomial quando você fixa n e varia p. A Figura 7 apresenta a informação um pouco além da tarefa original: marquei nos gráficos da figura o valor da esperança de cada distribuição. Fiz isto para ilustrar o fato já mencionado na exposição acima: os maiores valores da distribuição de variável aleatória binomial são os que ficam ao lado de sua esperança.

Quanto à tarefa do exercício que solicita os valores das esperanças e das variâncias, as respostas seguem diretamente das fórmulas np e $np(1-p)$ (que expressam, respectivamente a esperança e a variância para a variável aleatória binomial com parâmetros n e p). Seus valores numéricos são, em ordem do enunciado, assim: 0,3 e 0,27; 0,9 e 0,63; 1,5 e 0,75; 1,8 e 0,72; 2,4 e 0,48. Observe que, conforme p cresce, as esperanças crescem, mas as variâncias crescem e depois decrescem. As fórmulas para esperança e variância explicam o porque.

Solução do Exc. 67. As funções de probabilidade estão na Figura 4.6.

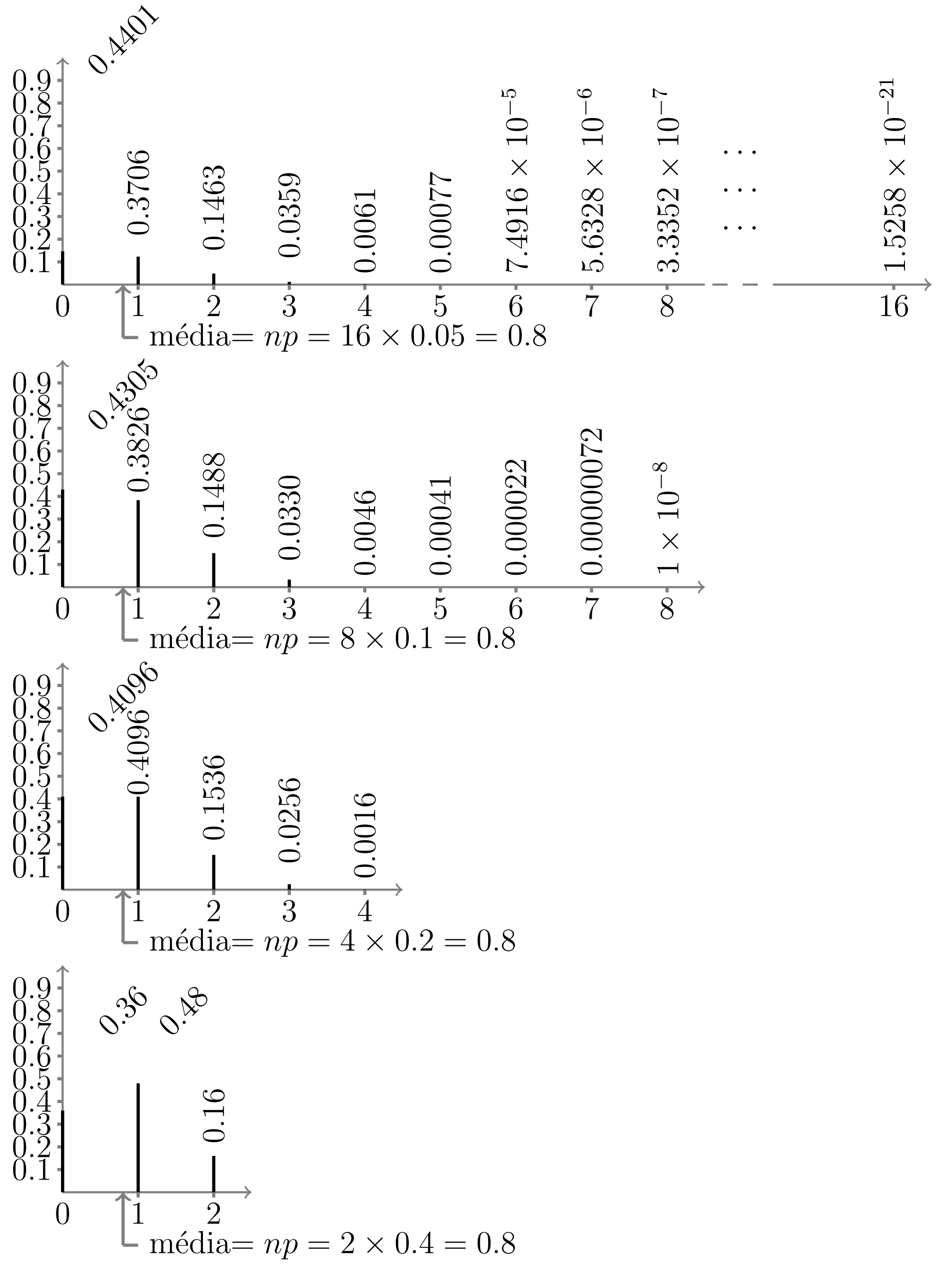


Figura 4.6: Os gráficos da solução do Exc. 67.

Usando as fórmulas para esperança e variâncias (as que eu lhe lembrei no Exercício 66), temos os seguintes valores destas para as variáveis aleatórias do presente exercício: 0,8 e 0,76; 0,8 e 0,72; 0,8 e 0,64; 0,8 e 0,48. Estes valores esclarecem um dos objetivos do presente exercício: é para observar as diferenças e similaridades entre as distribuições binomiais com o mesmo valor da esperança. Na realidade, não há muitas regras genéricas sobre isto. A mais importante delas (e a única que você precisa decorar) diz que as maiores probabilidades são as dos valores que ficam ao lado do valor da esperança. No presente caso, esse valor é 0.8, que não é um número inteiro, e portanto os valores que ocorrem com as maiores probabilidades são os vizinhos inteiros mais próximo a 0.8. Vale observar que sem fazer as contas, não há como prever qual dos dois vizinhos adquire a maior probabilidade. Por exemplo, no caso de $\mathrm{Bin}(2, 0.4)$, a maior probabilidade recai no valor 1, enquanto que nos casos $\mathrm{Bin}(8, 0.1)$ e $\mathrm{Bin}(16, 0.05)$, no valor 0.

Solução do Exc. 68 ficou por conta de alunos.

Solução do Exc. 69. Designamos por n e p os parâmetros de variáveis aleatórias binomiais. A condição na esperança nos dá: $np = 2$; a condição na variância nos dá: $np(1-p) = 1$. Substituindo np por 2 na última equação (o que é possível graças a primeira equação), conclui-se que $1 - p = 1/2$. Portanto, $p = 1/2$. Já que np deve dar 2, então n só pode ser 4. Daí a resposta: há uma e única variável aleatória binomial cuja esperança é 2 a variância é 1; os parâmetros dessa são: $n = 4$ e $p = 1/2$.

A resolução deste exercício nos leva à conclusão de uma vez que fixados os valores de esperança e de variância, só pode existir uma variável aleatória binomial com tais valores. Entretanto, vale notar que se existir, então existe uma, mas que pode acontecer que tal variável sequer não exista; por exemplo, se escolhermos 1 para a esperança e 2 para a variância, então o argumento acima sendo aplicado a estes valore, daria $p = 2$, o que é impossível, quer dizer, não existe variável aleatória binomial com esperança 1 e variância 2.

Por favor, não generalize a conclusão acima. Existem famílias de distribuições, nas quais os valores de esperança e de variância não determinam unicamente a distribuição.

Solução do Exc. 70 Todas as respostas estão dadas pela expressão

$$C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Caso	Valor de n.	Valor de k.	Resposta (valor da expressão $C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$)
(a)	6	2	0.234
(b)	12	4	0.121
(c)	18	6	0.071

Observe que em todos os casos, $k = n/3$, mas isto <u>não</u> implica na igualdade das respectivas probabilidades. Ainda mais: é visível que as probabilidades decrescem com o crescimento do valor de n. Tal decrescimento é um fenômeno genérico e pode ser provado analiticamente, mas não será pois não é o foco de nossa exposição.

Solução do Exc. 71 Todas as respostas estão dadas pela expressão

$$C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-0} + C_n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots, + C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \tag{4.12}$$

onde k é o número máximo de machos em questão. A tabela abaixo sumarisa as respostas. Na tabela 0^+ significa qualquer valor que não seja 0 mas que aparece como 0 devido ao arredondamento escolhido na apresentação. Por exemplo, $C_{12}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{12} = 0.0002441406$, valor que, com o arredondamento até três casas após a vírgula, apareceria como $0,000$. Para que a aparência não engane o leitor, o referido valor está marcado por 0^+ na linha (b) da tabela.

Caso	Valor de n.	Valor de k.	Resposta (valor da expressão (4.12))
(a)	6	2	$0,016 + 0,094 + 0,234 = 0,344$
(b)	12	4	$0^+ + 0,003 + 0,016 + 0,054 + 0,121 = 0,194$
(c)	18	6	$0^+ + 0^+ + 0,001 + 0,003 + 0,012 + 0,033 + 0,071 = 012$

Observe que os resultados indicam que a probabilidade de número de machos ser de no máximo 1/3 do número total de ovos decresce conforme o numero de ovos n cresce. A razão para isso é que conforme n cresce, a distribuição $\text{Bin}(n; 0,5)$ concentra valores da sua distribuição em torno da sua esperança. O valor da esperança dela é $n/2$. Portanto $n/3$ se encontra na cauda, que recebe cada vez menos probabilidade.

Solução do Exc. 72. A solução direta é assim. Tomam-se duas variáveis aleatórias $P_1 \sim$Bin$(5; 0,5)$ e $P_2 \sim$Bin$(5; 0,5)$, independentes entre si. Depois, constrói-se a tabela da distribuição conjunta de P_1 e P_2 (a condição de independência permite construir a tabela). Na etapa seguinte, a partir dessa tabela, faz-se a distribuição da variável aleatória S definida como $P_1 + P_2$. Tal S representa a distribuição da nota final segundo ao acordo entre o professor e seu aluno. Usando os valores da distribuição de S, calcula-se a resposta final:

$$\mathbb{P}[S \geq 5] = \mathbb{P}[S = 5] + \mathbb{P}[S = 6] + \cdots + \mathbb{P}[S = 10]$$

(a soma acaba no 10 porque a construção de S revela que o conjunto de valores que S pode assumir é $\{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$).

A solução traçada acima não será exibida em detalhes, porque há uma solução alternativa que é muito elegante. A ideia é não apressar-se indo diretamente para a distribuição da primeira nota (que no presente caminho de solução será denotada por P_1 assim como na solução acima traçada), mas, em vez disso, expressar a nota como a soma de 5 variáveis aleatórias X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, as quais refletem os resultados de 5 lançamentos: 1 para "cara" e 0 para "coroa". Isso quer dizer, que

$$P_1 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

A nota da segunda prova (a ser denotada por P_2) é soma de outras 5 variáveis aleatórias Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, as quais refletem os resultados de outros 5 lançamentos: 1 para "cara" e 0 para "coroa". Portanto,

$$P_1 + P_2 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$$

Já que todas as moedas são independentes, todas as variáveis envolvidas na soma são independentes entre si, e, portanto, a soma tem distribuição Bin$(10; 0,5)$. Usando a tabela apropriada, temos que a resposta é:

$$0,246 + 0,205 + 0,117 + 0,044 + 0,010 + 0,001 = 0,623$$