Aula 3 **Variáveis Aleatórias**

Expressa resultados de um experimento aleatório por meio de valores numéricos

Quantitativas

- Variáveis discretas
  - nº filhos
- Variáveis contínuas
  - altura
  - salário

Monitora
Bruna Mesquita – IB
brunamnakao@usp.br
(11) 96060 - 4580

Aula 3 Teórica

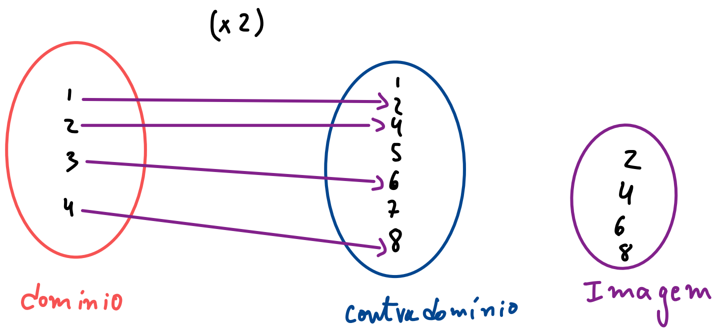
Aula 3 Teórica

Definição e termos

→ Função c/ valores numéricos q/ possui distribuição

- **Variável aleatória** P [X = x] → V. A X assumir valor
- **Distribuição de variável aleatória**
  - → Tabela com os possíveis valores da variável aleatória e suas respectivas probabilidades.

Função



Ω	P [ω]
ccc	1/8
cck	1/8
ckc	1/8
kcc	1/8
kkc	1/8
kck	1/8
ckk	1/8
kkk	1/8

x	0	1	2	3
P [X = x]	1/8	3/8	3/8	1/8

X assume o valor igual o número de “caras” que veremos em três lançamentos

z	0	1	2
P [Z = z]	1/4	2/4	1/4

Z assume o valor igual ao número de transições “cara”–“coroa” ou “coroa”–“cara” na sequência a ser obtida em três moedas;

Aula 3 Teórica

Definição e termos

Bivariada

x	0	1	2	3
P [X = x]	1/8	3/8	3/8	1/8

X assume o valor igual o número de “caras” que veremos em três lançamentos

z	0	1	2
P [Z = z]	1/4	2/4	1/4

Z assume o valor igual ao número de transições “cara”–“coroa” ou “coroa”–“cara” na sequência a ser obtida em três moedas;

Z \ X	0	1	2	3
0	1/8	0	0	1/8
1	0	2/8	2/8	0
2	0	1/8	1/8	0

z	P [Z = z]
0	2/8
1	4/8
2	2/8

distribuição marginal

x	0	1	2	3
P [X = x]	1/8	3/8	3/8	1/8

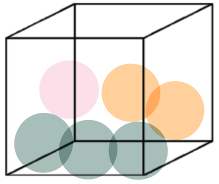
Aula 3

Exercício

Numa urna, há 6 bolas idênticas, três das quais foram marcadas pelo número 3, outras duas por 2, e uma por 1. Três bolas são selecionadas da urna, uma de cada vez em sequência, ao acaso e sem reposição. Denote por X e Y os números vistos na, respectivamente, primeira e terceira (a terceira! não a segunda) bola retirada.

Construa a distribuição bivariada do par (X, Y).

Use essa distribuição para (i) construir a distribuição da cada variável aleatória, e (ii) verificar se as variáveis são independentes.



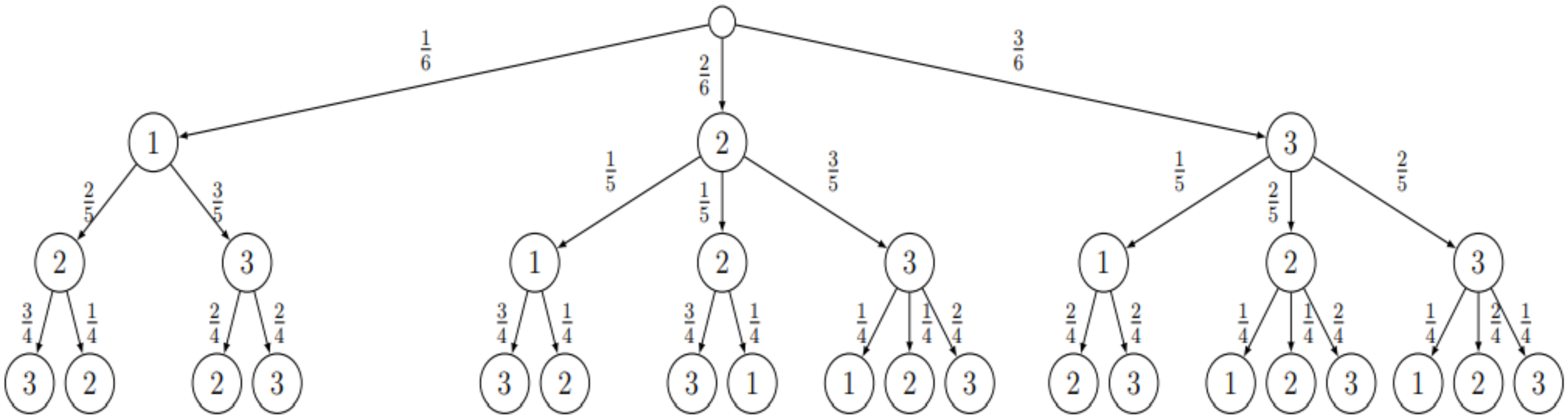
Bolas	Quant
1	1
2	2
3	3

___ ___ ___

1° 2° 3°

↳ X ↳ Y

Use essa distribuição para (i) construir a distribuição da cada variável aleatória, e (ii) verificar se as variáveis são independentes.



ω	(123)	(122)	(132)	(133)	(213)	(212)	(223)	(221)	(231)
(232)	(233)	(312)	(313)	(321)	(322)	(323)	(331)	(332)	(333)

Use essa distribuição para (i) construir a distribuição da cada variável aleatória, e (ii) verificar se as variáveis são independentes.

x	P [X = x]
1	1/6
2	2/6
3	3/6

		Y		
		1	2	3
X	1	0	8/120	12/120
	2	8/120	8/120	24/120
	3	12/120	24/120	24/120

y	1	2	3
P [Y = y]	1/6	2/6	3/6

X

ω	(123)	(122)	(132)	(133)	(213)	(212)	(223)	(221)	(231)
(232)	(233)	(312)	(313)	(321)	(322)	(323)	(331)	(332)	(333)

y

ω	(123)	(122)	(132)	(133)	(213)	(212)	(223)	(221)	(231)
(232)	(233)	(312)	(313)	(321)	(322)	(323)	(331)	(332)	(333)

(ii) verificar se as variáveis são independentes

→ Simultaneamente

$$P[A = a;\ B = b] = P[A = a]\,.\,P[B = b]$$

Para todo par de valores a, b que o par de variáveis aleatórias A, B pode assumir.

Exemplo

1º Passo: Qual a probabilidade de $x = 1$ e $y = 1$ acontecerem ao mesmo

ω	(123)	(122)	(132)	(133)	(213)	(212)	(223)	(221)	(231)
(232)	(233)	(312)	(313)	(321)	(322)	(323)	(331)	(332)	(333)

Notamos q/ é $= 0$, pois não tem como Sair 1 na 1ª retirada e na 3ª ao mesmo tempo; $P[X = 1;\ y = 1] = 0$

2º passo: São dependentes ou independentes?

↳ Compare o resultado do 1º passo com o produto da probabilidade de X e y

↳ Se for iguais → indep.

↳ Se for diferentes → depend.

Como: $P[X=1;\ y=1] = 0$

$P[X=1]\,.\,P[y=1] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Então: $P[x=1;\ y=1] \neq P[x=1]\,.\,P[y=1]$

Portanto: X e y são V.A dependentes

Nota: p/ ser dependente, basta um conjunto x y ter a relação* diferente

p/ ser Independente, TODOS os conjuntos xy dever ter a relação* igual (Respectivamente)

Relação $= P[X=x;\ y=y] = P[X=x]\,.\,P[y=y]$

Esperança (E)

$$E[X] = x_1P[x_1] + x_2P[x_2] + x_iP[x_i]$$

$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} = \frac{14}{6}$

Variância (Var)

$$\text{Var}[X] = E\,\{(X)^2\} - (E[X]^2)$$

$E_2 = E\{(X)^2\} \rightarrow \{1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{3}{6}\} = 6$

$E_1 = E[X]^2 = \left(\frac{14}{6}\right)^2$

$\text{Var} = E_2 - E_1 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$

Eu coloquei E_2 como $E\,\{(X)^2\}$ e E_1 como $(E[X]^2)$

x	P [X = x]
1	1/6
2	2/6
3	3/6

Uma empresa oferece um serviço em quatro modalidades A, B, C e D, aos preços 100, 200, 300 e 400, respectivamente. Sabe-se da experiência do passado que um freguês contrata a modalidade A com probabilidade 0,2, a modalidade B com probabilidade 0,4, a C com a probabilidade 0,3, e a D com a probabilidade 0,1.

a. Defina por X o ganho da empresa por freguês. Expresse a distribuição de X.

Mod	x	P [X = x]
A	100	0.2
B	200	0.4
C	300	0.3
D	400	0.1

b. Calcule IE[X] e Var[X]

Uma empresa oferece um serviço em quatro modalidades A, B, C e D, aos preços 100, 200, 300 e 400, respectivamente. Sabe-se da experiência do passado que um freguês contrata a modalidade A com probabilidade 0,2, a modalidade B com probabilidade 0,4, a C com a probabilidade 0,3, e a D com a probabilidade 0,1.

c. A empresa decidiu oferecer o desconto de 10% em cada um de seus serviços. Para quanto vai a esperança do ganho da empresa por freguês?

d. A empresa fez a seguinte promoção: quem contratar qualquer um de seus serviços terá o desconto de 50% na segunda vez que solicitar os serviços da empresa. A atendente da empresa notou que cada freguês que usa o serviço aproveita a promoção, e que as preferências por modalidade na 2° vez têm a mesma distribuição que na 1° vez. Qual a esperança do ganho de empresa por freguês durante esta promoção da empresa.

Obrigada!

Bruna Mesquita
brunamnakao@usp.br
(11) 96060 - 4580