Capítulo 2
Probabilidade Condicional e Independência

2.1 Eventos e suas probabilidades

A introdução de probabilidade condicional é impossível sem o conceito denominado por "evento". (A impossibilidade ocorre devido ao fato de que condicionar por acontecimento de um resultado só não leva a desenvolvimento de uma teoria rica e útil; na realidade, não leva a nada, conforme você poderá verificar após aprender o conteúdo do presente capítulo.) Consequentemente, a apresentação de tudo que está relacionado aos eventos precede no meu texto a discussão da probabilidade condicional. Eu não coloquei tal apresentação bem antes, junto com os assuntos do Capítulo 1, pois não quis sobrecarregar aquele capítulo. Mas, na realidade, poderia ter colocado, pois "eventos" e tudo que a eles está vinculado é uma linguagem que facilita comunicação e apresentação de cálculos da Teoria de Probabilidades. Enfim, esteja avisado que a motivação para a introdução do conceito "evento" é mais ampla de que simplesmente o motivo de usá-lo para fins de introdução de Probabilide Condicional.

Vamos às definições. Qualquer conjunto de resultados de um experimento aleatório se chama **evento**. Dizer **ocorrer um evento** significa ocorrer um dos resultados que o compõem. **A probabilidade de um evento** ou **a probabilidade de ocorrer um evento** é o nome a ser dado para a soma das probabilidades dos resultados que compõem o evento. Gostaria de chama a atenção do leitor que não há teorema nenhum que prove como deve ser calculado a probabilidade de evento. Tal probabilidade introduz-se por decreto que deve ser aceito pois ele "bate" com aquilo que nossa intuição responderia caso fosse perguntada "Qual é, a seu ver, a probabilidade de um evento?"

Prosseguiremos à introdução de notações a serem usadas quando falarmos de eventos. A notação será feita de acordo com as tradições da Teoria de Conjuntos (você não precisa conhecer esta teoria): *(a)* as eventos serão denotados por letras maiúsculas, e *(b)* os resultados que compõem um conjunto serão agrupados pelas chaves "$\{$" e "$\}$" e separados por "," (vírgula) (quando resultados são codificados por valores reais e, portanto, contêm a vírgula para separar parte inteira da parte decimal, serei obrigado usar ";" para separar resultados um de outro).

Você certamente deseja saber como eventos surgirão nos argumentos e exercícios do texto. É muito simples. Nós vamos introduzir eventos em nossos cálculos por duas maneiras. Uma delas é via descrição verbal. Por exemplo, "considere o evento composto de todos os números pares de lançamento de uma dado, e chame esse evento por A". O outro caminho é apresentar evento via a lista de resultados que o compõem. Por exemplo, "considere o evento $B = \{1, 2, 5\}$ do modelo probabilístico de lançamento de um dado equilibrado". Observe que para fazer manipulações com evento ou para calcular probabilidade de evento, é necessário tê-lo em forma de lista. Por isso podemos dizer que a segunda das duas maneiras é mais direta e, às vezes, mais cômoda. Às vezes, ela é a única possível; por exemplo, para $C = \{1, 5, 6\}$ seria difícil achar a descrição verbal tal objetiva e simples qual é, por exemplo, a descrição "os resultados pares menores que 5" para o evento $D = \{2, 4\}$.

A verdadeira e real vantagem proporcionada para nós pela linguagem de eventos está na possibilidade do emprego das notações para as ações "unir eventos", "intersectar eventos" e "tomar parte complementar de eventos".

▷ Existem outras manipulações com eventos, como, por exemplo, tomar diferença, ou tomar diferença simétrica, e mais, mas nós não vamos usá-las nesse livro. E vale ainda mencionar – a título de curiosidade – que qualquer manipulação pode ser apresentada como uma sequência de manipulações dos três tipos básicos: unir, intersectar, tomar parte complementar.

Para aqueles que não lembram das manipulações "unir, intersectar, tomar parte complementar", eu apresento abaixo suas definições junto com as notações padrão que serão usadas no meu texto. Na apresentação, eu vou usar Ω como a notação para o conjunto de todos os resultados possíveis do modelo probabilístico feito para aquele experimento aleatório, para o qual foram definidos eventos A e B que aparecem na apresentação.

A **União** entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, pode ser entendida como o conjunto formado pela reunião de todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos (ou seja, pertencem a apenas um deles ou a ambos); uma maneira menos informal de dizer isso é: a união de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a A **ou** a B. Note que o vocábulo **ou** não exclui a possibilidade de um dos elementos pertencer aos dois. Formalmente[1]:

$$A \cup B \,=\, \{\omega \in \Omega |\, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

A **Intersecção** entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, pode ser entendida como o conjunto formado por todos os elementos que são comuns a A e B; em outras palavras, é o conjunto que contém os elementos que pertencem a A **e** a B). Formalmente:

$$A \cap B \,=\, \{\omega \in \Omega |\, \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$$

O conjunto **complementar** de um conjunto A, denotado por A^c (ou, alternativamente, por $\bar{A}$), é o conjunto que contém os elementos de Ω que **não pertencem** a A; falando de modo mais informal ainda, é o conjunto dos elementos que estão *fora de A*. Formalmente:

$$A^c \,=\, \{\omega \in \Omega |\, \omega \notin A\}$$

▷ Não faça o seguinte erro, que é bem comum: a existência da expressão vulgar "A e B" para $A \cup B$, e o uso de "e" na fórmula para $A \cap B$ frequentemente confundem pessoas que fazem com que $A \cup B$ interpreta-se erradamente por $\{\omega \in \Omega |\, \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$.

Para poder continuar com minha exposição, preciso lhe recordar a notação $\emptyset$. Na Teoria de Conjuntos, ela denota o conjunto que não possui nenhum elemento. Ele chama-se **conjunto vazio**, e o mesmo nome deram para $\emptyset$. Honestamente falando, pode surgir uma confusão quando o conjunto vazio usa-se como evento na Teoria de Probabilidade. De fato, considere o lançamento de um dado e tente calcular

$$\mathbb{P}[\emptyset]$$

Se você for pela lógica do cálculo de $\mathbb{P}[A]$ aplicado para qualquer conjunto A não vazio, então você chegará a interpretar $\mathbb{P}[\emptyset]$ como a probabilidade de não acontecer nada. É uma interpretação muito estranha, pois ao lançar dado, algum resultado deve aparecer. A saída dessa confusão é impor, por decreto, que

$$\mathbb{P}[\emptyset] \,=\, 0 \tag{2.1}$$

Para nos, é mais vantajoso aceitar (2.1) e ficar com $\emptyset$ do que descartá-lo devido as complicações em sua interpretação. As vantagens são: *(i)* temos o "conjunto" que é o complementar de Ω (quer dizer, podemos escrever Ω^c como $\emptyset$), e *(ii)* podemos escrever

$$A \cap B = \emptyset \text{ no lugar da fala "} A \text{ e } B \text{ não têm resultados em comum"} \tag{2.2}$$

O último assunto da presente seção são as propriedades que a probabilidade apresenta quando aplicada aos resultados de manipulações com eventos. Tais propriedades estão listadas

[1]É frequente que $\{\omega \in \Omega |\, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$ escreva-se como $\{\omega \in \Omega : \, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$, isto é, frequentemente usa-se ":" usa-se no lugar de "|".

abaixo. Elas serão frequentemente usadas no decorrer do curso todo e você vai memorizando as propriedades pouco por pouco, fato que faz desnecessária a aprendizagem sólida dessas propriedades no presente momento.

$$\begin{array}{rl} (i) & I\!\!P[A^c] = 1 - I\!\!P[A] \\ (ii) & I\!\!P[A \cup B] = I\!\!P[A] + I\!\!P[B] - I\!\!P[A \cap B] \\ (iii) & \text{se } A \cap B = \emptyset \text{ então } I\!\!P[A \cup B] = I\!\!P[A] + I\!\!P[B] \\ (iv) & \text{se para algum número } n, \text{ os eventos } A_1, A_2, \ldots A_n \\ & \textbf{formam partição} \text{ de } \Omega, \text{ isto é, se eles não tem interscecção dois a dois,} \\ & \text{e se a união deles é } \Omega, \text{ então, para qualquer evento } B, \\ & I\!\!P[B] = I\!\!P[B \cap A_1] + I\!\!P[B \cap A_2] + \cdots + I\!\!P[B \cap A_n] \end{array} \tag{2.3}$$

E há mais três propriedades, que são meio que óbvias, razão pela qual não quis misturá-las com as propriedades "sérias" listas acima:

$$(v)\ I\!\!P[\Omega] = 1,\ (vi)\ I\!\!P[\emptyset] = 0,\ (vii)\ I\!\!P[A] \in [0,1] \text{ para qualquer } A \tag{2.4}$$

▷ Eis uma observação destinada para professores.

Existem problemas de Teoria de Probabilidade, no nível de pesquisa científica, nos quais a probabilidade pode ser atribuída a alguns eventos, mas não a qualquer resultado (simplesmente porque a atribuição a cada resultado exige contas muito sofisticadas). Talvez por isso, ou talvez por outra razão, aparecem em livros didáticos problemas semelhantes, quer dizer, problemas cujos enunciados são colocados de tal forma que aluno consegue atribuir probabilidade a alguns eventos, mas não a todos os resultados. Tipicamente, tais problemas solicitam calcular probabilidade de algum evento específico e todo enunciado está moldado de tal forma que a probabilidade solicitada pode ser achada via a aplicação das propriedades *(i)–(vii)* (e, às vezes, também a fórmula da probabilidade condicional que você vai conhecer na Seção 2.2). No meu texto, tais exercícios não aparecem devido seu valor didático baixo – pela minha avaliação – na perspectiva dos assuntos principais ensinados no texto.

As demonstrações matematicamente rigorosas das propriedades *(i)-(vii)* nunca serão cobradas. Nem em exercícios, nem em provas. Entretanto, vale notar que tais demonstrações são simples pois derivam-se diretamente a partir da definição de probabilidade de evento. PARA AS VERSÕES POSTERIORES: APRESENTAR PELO MENOS UMA DEMOSTRAÇÃO E MOSTRAR O USO DA DIAGRAMAS DE VENN (DE PREFERÊNCIA PARA A PROVA DE *(iv)*). PODE APROVEITAR DO TEXTO `NotacoesTeoriaDeConjuntos.pdf`.

2.2 Probabilidade condicional

I. Na Teoria de Probabilidade, o conceito de Probabilidade Condicional introduz-se por decreto, isto é, via definição. Abaixo, você vê tal definição na sua versão adaptada para o nível do presente texto. Conforme se vê, a definição faz duas coisas: *(a)* ela explica a relação do conceito "Probabilidade Condicional" com o mundo real e *(b)* fornece fórmula para o cálculo de valor de tal conceito. Entre esses dois aspectos, o primeiro, quer dizer, a explicação da relação com o mundo real, é bem claro. Já o segundo, a fórmula de cálculo de valores, parece muito estranho para a maioria de pessoas. Explicar a fórmula, ou melhor dizer, explicar a naturalidade e a objetividade da fórmula é o objetivo principal da presente seção. No caminho de explicação, aprofundaremos também nossa compreensão da relação com a realidade inserido no conceito matemático de Probabilidade Condicional.

▷ Vale avisar que o principal papel da Probabilidade Condicional no conteúdo do curso todo está no amparo da definição do conceito de independência. Na sua forma pura, a Probabilidade Condicional estará empregada somente na discussão do Teste de Independência que faremos no Capítulo ??. Entretanto, problemas envolvendo a Probabilidade Condicional aparecerão nas provas, pois o uso desse conceito permite enriquecer e diversificar as questões de provas, em particular aquelas questões que testam a compreensão do tema Construção de Modelos Probabilísticos e a habilidade de cálculo de probabilidades em tais modelos.

II. Aquilo que foi dito na parte **I** acima é só um aviso. A apresentação de fato começa agora. Ela inicia-se com a formulação da definição formal que foi mencionada no primeiro parágrafo da seção.

Definição 2 *(de probabilidade condicional).*
Seja Ω a coleção de todos os resultados de um experimento aleatório e seja $I\!P$ a correspondente probabilidade definida em tais resultados. Seja A um evento tal que $I\!P[A] \neq 0$.

A probabilidade atribuída ao resultados de Ω ao saber que no experimento aleatório aconteceu o evento A chama-se **probabilidade condicional sabendo (ou dado) que ocorreu (ou aconteceu)** A; ela denota-se por $\mathbb{P}[\cdot \,\big|\, A]$. Os valores que essa probabilidade atribui aos resultados de Ω obedecem à seguinte fórmula:

$$\mathbb{P}\big[B \,\big|\, A\big] = \frac{I\!P\,[B \cap A]}{I\!P\,[A]}, \text{ para cada evento } B \tag{2.5}$$

(Na fórmula acima, a notação $\mathbb{P}[\cdot \,\big|\, A]$ é aquela que foi introduzida 3 linhas acima, enquanto que $I\!P$ refere-se à probabilidade mencionada no início dessa definição; às vezes, ela adquire o nome "probabilidade incondicional" para reforçar o fato de que ela é diferente da probabilidade condicional. Se no lugar de B colocar o evento composto de um resultado só, então a fórmula (2.5) fornecerá a probabilidade condicional desse resultado.)

Você olha nesta definição e pensa assim:
"A definição descreveu uma situação específica, alegou que nela surge uma probabilidade e chamou esta por "probabilidade condicional blá-blá-blá blá-blá-blá". Até aí, tudo bem, pois concordo que na situação descrita há incerteza e que esta pode ser expressada via probabilidade. Concordo também que a escolha de nome para tal probabilidade é a questão de gosto, e por isto que não vejo razões para questionar o nome que a definição sugeriu. A parte da definição que me incomoda é a fórmula (2.5). Existem motivos para esta fórmula ser aceita como o calculador do valor numérico daquela probabilidade condicional?"

Seja seu pensamento este ou seja ele pouco diferente, a verdade é sempre a mesma: a compreenção imediata da fórmula (2.5) é impossível. Eu, quem fez a Teoria de Probabilidade por 30 anos, já entendi que a Definição 2 fala sobre dois experimentos aleatórios diferentes mas interligados e que a fórmula (2.5) revela o vínculo entre suas respectivas probabilidades. Naturalmente, tudo isto requer uma cuidadosa explicação caso deseja-se ensinar o fórmula e seu emprego na solução de problemas teóricos e práticos. Minha explicação está no exemplo abaixo. Ele formula seu objetivo como "mostrar que a fórmula (2.5) está alinhada com nosso intuição", mas no caminho de alcance ao objetivo, o exemplo vai falar sobre tudo detalhe que é necessário pra a plena compreenção da definição e de seu uso.

III. $\sqrt{}$ **Exemplo 20.** Esse exemplo será discutido por partes; as partes são enumerados **(a), (b),** etc.

(a) Anunciei na sala de aula que pretendo fazer o seguinte Experimento Aleatório:

Pegar um dado e pintar suas faces 1, 2 e 3 de branco, e as faces 4, 5, e 6 de preto. A pintura será feita de tal forma que os números de faces continuem visíveis e ela não afetará o dado, no sentido que o mesmo continue a ser perfeito (recordo que, segundo as nossos acordos anteriores, isso significa que a probabilidade do dado mostrar qualquer uma de suas seis faces é a mesma). O dado será lançado e será observado o número e a cor da face superior quando o dado parar.

Antes de rodar o dado, pedi a uma menina sentada na primeira filheira para sair da sala e esperar no corredor. (Ela não havia feito nada de errado; foi uma expulsão cujo valor didático logo será revelado.)

Lancei o dado. Esperei ele parar.

(b) Feito o Experimento Aleatório supradescrito, faço o seguinte. Escolho um menino entre os alunos sentados na última filheira da sala (por alguma razão da força maior, talvez, sempre há alunos ocupando a última filheira, e esses são predominantemente meninos), e peço do aluno escolhido para confirmar que ele avista que o dado parou com face branca para cima, mas que não enxerga o número escrito nessa face.

Pergunto do menino-da-última-filheira as duas seguintes perguntas:

Pergunta 1: Qual é a probabilidade do dado estar mostrando o número 1?

Pergunta 2: Qual é a probabilidade do dado estar mostrando número ímpar?

As respostas do <u>menino</u> são

$$1/3 \text{ e } 2/3 \text{ respectivamente} \tag{2.6}$$

Ao terminar esse diálogo com o menino, saio ao corredor e pergunto da menina-expulsa-da-sala as mesmas perguntas. As respostas da <u>menina</u> são

$$1/6 \text{ e } 1/2 \text{ respectivamente} \tag{2.7}$$

Para a continuação de meus argumentos, eu preciso que meu leitor concorde com as respostas feitas pelo menino e pela menina. Especificamente falando, querido leitor, eu lhe peço que você consulte sua intuição e confirme que ela produz as respostas (2.6) e (2.7) quando colocada no respectivo lugar do menino e da menina. Espero que esse processo seja fácil para você pois não encontrei nenhum aluno nas duas décadas de ensino desse curso que diria "Minha intuição sugere respostas diferentes!" Alguns pensam mais tempo, outros menos, mas – cedo ou tarde – todos concordam com (2.6) e (2.7).

A programação de minhas ações é a seguinte: eu vou deduzir uma série de relações que seguem das respostas (2.6) e (2.7). A última da série será a relação (2.5) afirmada pela Definição 2. Feito isto, vou dizer a sua intuição: "Se você concordou com (2.6) e (2.7) então você deve concordar também com (2.5), e esta sua última concordância mostra que a Definição 2 simplesmente canonisa aquilo que é intuitivo."

(c) Agora preciso lhe mostrar os ingredientes usados pelas intuições – inclusive, pela sua, – para cozinhar suas respostas (2.6) e (2.7). Sua indignação: "Já concordei com (2.6) e (2.7); o que mais querem de mim?" – está sem razão. Há ainda muitas coisas escondidas que devem ser esclarecidas. Entre essas, está o fato que a situação do menino enquadra-se nas condições da Definição 2, e está também o Princípio de Preservação de Proporções.

Em primeiro lugar, vamos construir o modelo probabilístico que corresponde à visão no Experimento Aleatório da menina-expulsa-da-sala. Ela, diferentemente do menino-da-última-filheira, só possui a informação dada na descrição do Experimento Aleatório e nada mais. Então, se fosse solicitada a construir o modelo probabilístico, ela usaria as regras de construção introduzidas no Capítulo 1. Eu conto com que meu leitor já aprendeu o conteúdo daquele capítulo e, por isso, apresento somente o resultado final da construção:

$$\begin{array}{l} \text{conjunto de todos os resultados possíveis é } \Omega = \{1b,\ 2b,\ 3b,\ 4c,\ 5c,\ 6c\} \\ \text{a probabilidade a ser denotada por } \mathbb{P} \text{ atribui o mesmo valor a cada} \\ \text{resultado de } \Omega, \text{ isto é, } \mathbb{P}[1b] = \mathbb{P}[2b] = \mathbb{P}[3b] = \mathbb{P}[4c] = \mathbb{P}[5c] = \mathbb{P}[6c] = 1/6 \end{array} \tag{2.8}$$

(Esclareço: a codificação dos resultados acima usada é óbvia: é "número-e-cor" mostrados; a atribuição de probabilidade baseou-se no princípio de simetria.)

Em segundo lugar, vamos construir o modelo probabilístico que corresponde à visão no Experimento Aleatório do menino-da-última-filheira. Para tal, vamos listar aquilo que o menino sabe. Eis a lista:

(i) o menino foi informado sobre o Experimento Aleatório que está visto pela menina;

(ii) o menino viu a cor branca na face superior do dado parado.

Faremos agora o seguinte: no Experimento Aleatório visto pela menina, vamos introduzir evento

$$A = \text{"cor branca"} \tag{2.9}$$

Com isto, o item (ii) pode ser escrito da seguinte forma:

(ii′) o menino viu que no Experimento Aleatório aconteceu o evento A.

Se a gente comparar agora o texto da Definição 2 com as visões da menina e do menino, e se o espaço de estados correspondente à visão da menina for denotado por Ω e a probabilidade for denotada por $\mathbb{P}$ (nós usamos exatamente estas notações na construção do modelo probabilístico da menina justamente para podermos ter tal correspondência com os símbolos da definição), então a probabilidade correspondente á visão do menino será aquilo que a definição chama por "probabilidade condicional sabendo que aconteceu A".

Ótimo! Então, de acordo com a Definição 2, vamos denotar a probabilidade do menino por $\mathbb{P}\big[\,\cdot\,\big|\,A\big]$. (Se você ficou confuso por causa do ponto "$\cdot$" desta notação, leia a parte final desta seção que está marcada por **IV**.) Mas atenção! Eu só adoto a notação da Definição 2 e não a fórmula (2.5) que manda como devem ser calculados os valores das probabilidade conforme concebida pelo menino. Muito pelo contrário: eu pretendo calculá-los a partir de consideração intuitivos pois meu objetivo, conforme dito acima, é comparar os resultados de pensamento intuitivo com os fornecidos pela fórmula.

Antes de partirmos para o calculo da probabilidade do menino (quer dizer, da probabilidade como está enchergada pela menino) vamos decidir por que sequer tal probabilidade deve existir. A dúvida sobre a existência é pertinente pois quando o menino está perguntado sobre o número mostrado pela face superior do dado, todo o Experimento Aleatório já tinha sido proferido. A resposta é assim: a atribuição de probabilidades é uma forma de representar incerteza. Como o menino não encherga o número do dado parado, então há incerteza, e portanto, há probabilidade.

O raciocínio do parágrafo acima acarreta diretamente a identificação do espaço de estados para o modelo probabilístico do experimento visto pelo menino, pois toda a incerteza do menino está sobre os números pintados de branco. Isto é:

$$\Omega_{novo} \;=\; \{\, 1b,\; 2b,\; 3b \,\} \text{ é o espaço de estados do menino} \tag{2.10}$$

Observe que a codificação dos resultados que compõem Ω_{novo} poderia ser simplesmente $1, 2, 3$ pois todos eles têm a cor branca. Entretanto, aqui, como em qualquer outro exemplo e exercício, é fortemente aconselhável que seja mantida a codificação adotada para o modelo probabilístico do Experimento Aleatório Puro. A justificativa disso é a futura necessidade de extender $\mathbb{P}\big[\cdot \,\big|\, A\big]$ para todo resultado do Experimento Aleatório Puro. Vale notar que "Experimento Aleatório Puro" é a minha referência ao experimento aleatório por mim proferido e sem nenhuma informação parcial sobre seu resultado; pode-se dizer que é aquele experimento aleatório que está enchergado pela menina.

Quanto à probabilidade nova, vale lembrar que nossa intuição já indicou que $\mathbb{P}[1b \,\big|\, A] = 1/3$ (recorde, isso foi anunciado em (2.6)). Pensando um pouco, percebe-se que a intuição daria $1/3$ também para a probabilidade nova de qualquer outro resultado, isto é:

$$\mathbb{P}[1b \,\big|\, A] \;=\; \mathbb{P}[2b \,\big|\, A] \;=\; \mathbb{P}[3b \,\big|\, A] \;=\; 1/3 \tag{2.11}$$

A atribuição de probabilidade apresentada em (2.11) é o resultado da aplicação do seguinte

Princípio de preservação de proporções relativas: como os resultados $1b$, $2b$, $3b$ eram equiprováveis no modelo probabilístico original (isto é, $I\!\!P[1b] = I\!\!P[2b] = I\!\!P[3b]$) e como eles compõem Ω_{novo}, então suas novas probabilidades também devem ser iguais entre si.

Notaria que em caso mais geral que o do presente exemplo, tal princípio formula-se assim: "Se $I\!\!P[a]$ é k vezes maior que $I\!\!P[b]$ e se os resultados a e b estão no evento A, então a probabilidade condicional dado que aconteceu o evento A preserva a proporção, isto é, $\mathbb{P}[a \,\big|\, A]$ será k vezes maior que $\mathbb{P}[b \,\big|\, A]$."

Não há como explicar ou justificar o Princípio de Preservação de Proporções Relativas. Ele adveio de nossa intuição e ficou canonizado na Teoria de Probabilidade. Depois desta cononização, você é obrigado a incorporar o princípio em sua intuição (caso ele não estivesse lá já). Após isto, eu posso afirmar que é a intuição quem construiu a probabilidade $\mathbb{P}[\cdot \,\big|\, A]$. Tal afirmação é imprtante para a exposição, pois seu objetivo final é mostrar que a probabilidade condicional intuitiva e a da Definição 2 coincidem.

(d) Para poder comparar $\mathbb{P}[\cdot \,\big|\, A]$ com $I\!\!P$ e mostrar a relação (2.5), eu preciso extender $\mathbb{P}[\cdot \,\big|\, A]$ de Ω_{novo} para Ω (tal necessidade surge devido ao fato que (2.5) está formulada para tido evento B em Ω). A extensão desejada realiza-se pela segunda linha da fórmula (2.12) abaixo; a fórmula simplesmente disse: "Atribua a probabilidade zero a cada ω que não está em Ω_{novo}." Já para $\omega \in \Omega_{novo}$, a fórmula escreve $\mathbb{P}[\omega \,\big|\, A]$ da maneira que reflete diretamente o Princípio de Preservação de Proporções Relativas; tal forma de escrita será importante para os argumentos futuros.

$$\mathbb{P}[\omega \,\big|\, A] = \begin{cases} \frac{1}{\text{a quantidade de resultados em } A}, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A \end{cases} \quad \text{para todo } \omega \in \Omega \tag{2.12}$$

O próximo passo de minha apresentação é a fórmula (2.13) abaixo:

$$\mathbb{P}[B \mid A] = \frac{\text{a quantidade de resultados em } B \cap A}{\text{a quantidade de resultados em } A}, \text{ para todo } B \subset \Omega \tag{2.13}$$

Observe que (2.13) segue-se diretamente de (2.12). Eis a demonstração: $\mathbb{P}[B \mid A]$ é a soma de $\mathbb{P}[\omega \mid A]$ tomada por todos ω's que compõem B. Entre estes ω's, os que estão fora de A contribuem 0, e cada um que está dentro de A contribui à soma o valor (a quantidade de resultados em $A)^{-1}$.

A relação (2.13) é a penúltima estação de nosso caminho à compreensão da Definição 2. Seu formato de apresentação foi escolhido por mim de acordo com as necessidades do argumento subsequente que você vai ver imediatamente abaixo. Esse formato pode parecer estranho para você. No entanto, você deve conceber (2.13) como a expressão daquilo que nossa intuição entende com a probabilidade condicional.

(e) Agora eu tomo a relação (2.13) e multiplico seu numerador e seu denominador por 1/6. Eis o resultado dessa ação:

$$\mathbb{P}[B \mid A] = \frac{\frac{1}{6} \times \text{a quantidade de resultados em } B \cap A}{\frac{1}{6} \times \text{a quantidade de resultados em } A}, \text{ para todo } B \subset \Omega$$

Foi uma ação que deve-lha parecer estranha e artificial. Acontece que não, pois 1/6 é a $I\!P$ probabilidade de qualquer resultado do modelo probabilístico feito para o Expreimento Aleatório Puro, e é por isto que a multiplicação faz com que o valor do numerador torna a ser $I\!P[B \cap A]$, e o valor do denominador $I\!P[A]$. Fazendo essas substituições na fórmula acima, deriva-se a seguinte relação

$$\mathbb{P}[B \mid A] = \frac{I\!P\,[B\,\cap\,A]}{I\!P\,[A]}, \text{ para todo } B \subset \Omega \tag{2.14}$$

Agora, note por favor que por um lado a relação (2.14) foi deduzida a partir de nossas construções intuitivas para a probabilidade condicional $\mathbb{P}[\cdot \mid A]$ e para a probabilidade incondicional $I\!P$. Por outro lado, a relação por nos deduzida coincide com a fórmula (2.5) que apareceu na Definição 2. Esta coincidência ampara a tese que desejava mostrar com o auxílio do presente exemplo: "A fórmula (2.5), que a Definição 2 fornece para cálculo de probabilidade condicional, bate com nossa intuição."

Fim do Exemplo 20↑

IV. Conclusão: Definição 2 canoniza nossa concepção intuitiva sobre a probabilidade que a gente atribui aos possíveis resultados de um experimento ao saber que aconteceu um evento do mesmo experimento. A definição chama tal probabilidade de "probabilidade condicional dado que aconteceu evento", sugere a notação para essa (notação sugerida é $\mathbb{P}[\cdot \mid A]$), e também fornece fórmula para cálculo de seu valor, sendo que tal fórmula está de pleno acordo com nossa intuição. Na realidade, existem diversas expressões intuitivas que podem ser usadas para calcular valores de probabilidade condicional. Entre todas elas, a Definição 2 escolheu aquela que vincula a probabilidade condicional à probabilidade incondicional. A prática mostra que tal vínculo é muito útil. Isso justifica a escolha feita pela definição.

▷ A notação "$\mathbb{P}[\cdot \mid A]$" tem "$\mathbb{P}$" no formato diferente de "$I\!P$" com o objetivo de enfatizar a diferença entre as duas probabilidades.

Se você não gostou de minha notação $\mathbb{P}[\cdot \mid A]$, mas se você concorda que há diferença entre a probabilidade condicional e a probabilidade incondicional, então pense e responde; "Qual notação você sugeriria para a probabilidade condicional que transmitiria a evidência de sua diferença em relação à probabilidade incondicional?" Acredito que o melhor candidato seria $I\!P_A$, ou, até $\mathbb{P}_A$.

Acontece que a Teoria de Probabilidade ignorou sua sugestão de notação e usou $\mathbb{P}[\cdot \mid A]$ no lugar de $I\!P_A$ ou de $\mathbb{P}_A$. Talvez tal escolha deve-se ao fato de que "$\mid$" lê-se tradicionalmente como "tal que" ou "dado que", o que é totalmente apropriado para o presente caso. A notação adotada, porém, levanta a dúvida: "Onde se coloca o argumento? Quer dizer, onde coloca-se o evento cuja probabilidade está sendo expressa?" Na notação tradicional "$I\!P$", o lugar para o argumento está ao lado de $I\!P$ e surge junto com parênteses: $I\!P[B]$. Já no caso de $\mathbb{P}[\cdot \mid A]$ os parênteses já estão presente. Por causa disto, tal lugar entre parênteses onde deve aparecer o arqumento está indicado com ponto. É assim que surgiu este ponto que causa estranheza para leitores pouco acostumados com formalismo matemático.

É importante notar que se eu optasse por usar "$I\!P$" no lugar de "$\mathbb{P}$", então a fórmula teria a seguinte cara:

$$I\!P[B \mid A] = \frac{I\!P\left[B \cap A\right]}{I\!P\left[A\right]} \tag{2.15}$$

A desvantagem dessa escrita está no que alunos esquecem que " $\mid$ A]" faz parte inseparável da notação $I\!P[\cdot \mid A]$, e, consequentemente, enxergam todas as três "$I\!P$" da fórmula como as referências a uma <u>mesma</u> probabilidade. Tal interpretação está errada e ela impede a compreensão do sentido da fórmula, e, as vezes, de toda a definição.

2.3 Independência

2.3.1 A definição de independência próxima a nossa intuição

Inicio a apresentação com definição formal:

Definição 3 *(de independência de um evento de outro. Atenção: haverá conceito equivalente fornecido pela Definição 4).*
Sejam A e B dois eventos definidos no mesmo experimento aleatório. Diz-se que **o evento B não depende do evento A** caso

$$\mathbb{P}[B \mid A] = I\!P[B] \tag{2.16}$$

quer dizer, caso probabilidade de ocorrer B for a mesma que a probabilidade condicional de ocorrer B dado que ocorreu A.

Agora, virá uma série de exemplos cujo objetivo é lhe convencer que o sentido que sua intuição atribuía ao conceito "independência" enquadra-se direitinho no formalismo da Definição 3.

Exemplo 21. Peguei dois dados equilibrados e pintei um de branco e outro de cinza. Vou lançar o branco e depois o cinza. Nesse experimento aleatório, vamos definir dois eventos: A ="o dado branco (o primeiro a ser lançado) mostrar número menor que 3" e B ="o dado cinza mostrar número par".

– O evento B depende de A? – pergunto-lhe.

– Não – responde você, – pois o primeiro dado não influencia o segundo.

– Tente expressar "não influencia" formalmente – peço-lhe.

– Para qualquer resultado mostrado no primeiro dado, as probabilidades relacionadas ao segundo dado não se alteram.

– Então, se aquilo que o primeiro dado mostrou for interpretado como informação conhecida, sua frase pode ser escrita assim: $\mathbb{P}[B \mid \text{resultado visto no primeiro dado}]$ de fato não depende do "resultado visto no primeiro dado". Essa independência de qualquer resultado mostrado no primeiro dado assegura que há um único possível valor para a probabilidade condicional[2] e esse valor é $I\!P[B]$. Então, ao colocar o evento A no lugar de "resultado visto no primeiro dado", conclui-se que

$$\mathbb{P}[B \mid A] = I\!P[B]$$

é a expressão matemática daquilo que sua intuição entende com a independência de B de A.

Exemplo 22. Na tentativa de achar um paralelo da definição formal no mundo não-matemático, eu lembrei da seguinte frase dita pela minha querida empregada doméstica:

– Independentemente se a previsão for chuva ou não, eu sempre coloco guarda-chuva no bolso.

Com isso, Santa – assim é o nome dela – expressa a identidade

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\text{está com guarda-chuva} \mid \text{está chovendo}] = \\ &6em = \mathbb{P}[\text{está com guarda-chuva} \mid \text{não está chovendo}] \end{aligned} \tag{2.17}$$

Com um pouco de trabalho, podemos concluir[3] que ambas as probabilidades condicionais são iguais à

$$I\!P[\text{está com guardachuva}]$$

[2] Acrescentar a explicação.
[3] Verificar as contas

e, portanto, a intuição da Santa está em pleno acordo com a Teoria de Probabilidade, pelo menos naquilo que se tange à independência de um evento de outro.

Exemplo 23. Eu gostaria de lhe fornecer mais exemplos de situações reais nas quais pessoas usam a palavra "independência" e lhe mostrar que em todas elas a intuição está de acordo com a fórmula (2.16) da definição formal. Entretanto, a maioria dos exemplos que encontrei na vida possui um grande defeito que me impede de criar uma limpa passagem da intuição à fórmula. Vou mostrar tal defeito no caso do guarda-chuva exibido no Exemplo 22.

Preste a atenção que Santa falou "sempre coloco o guarda-chuva no bolso". Consequentemente, se eu for interpretar a situação em termos probabilísticos, deverei atribuir a probabilidade 1 ao evento "sempre coloco o guarda-chuva no bolso", isto é, tal evento será Ω no meu modelo probabilístico. Então, se na expressão (2.17) colocarmos Ω no lugar de "sempre coloco guarda-chuva no bolso", e colocarmos A no lugar de "está chovendo", a primeira linha de (2.17) tornar-se-á no $\mathbb{P}[\Omega \mid B]$. Acontece que podemos calcular facilmente o valor numérico dessa expressão:

$$\mathbb{P}[\Omega \mid B] = \frac{I\!\!P[\Omega \cap B]}{I\!\!P[B]} = \frac{I\!\!P[B]}{I\!\!P[B]} = 1$$

Da maneira idêntica, obtém-se que (abaixo, B^c significa "o evento complementar ao B")

$$\mathbb{P}[\text{está com guardachuva} \mid \text{não está chuvendo}] = \mathbb{P}[\Omega \mid B^c] == 1$$

E, ao juntar tudo, conclui-se que a expressão de Santa é a trivial identidade "$1 = 1$".

Acontece que a maioria das expressões usadas no dia-a-dia, pessoas cometem o mesmo "desrespeito à probabilidade" que aquilo mostrado agora no caso de Santa. Eis alguns exemplos:

Um apostador num cassino: "Quando começo a jogar, aposto em números ímpares, e, na segunda rodada, independentemente do resultado da primeira, aposto na cor vermelha."

Meu pior aluno: "É uma ... de disciplina; vou reprovar independente se estudar ou não."

Minha amada filhinha: "Pai! Vou para Europa nas próximas férias independentemente de sua concordância."

Minha ex: "O divórcio vai acontecer independentemente se você desejar ou não!!!"

Um ministro de meu amado Brasil: "Política do Brasil independe da política dos Estados Unidos."

O famoso "Independência ou morte!"

Eu precisaria de muito tempo para poder descrever uma boa e não trivial situação cotidiana no qual surge o conceito intuitivo de independência da forma clara e objetiva que me permitiria mostrar sua incontestável identidade com a definição matemática dada acima na Definição 3. Então, o único exemplo cotidiano será o Exemplo 21, no qual foram usados dados justamente para facilitar o paralelo com o formalismo matemático.

2.3.2 Dois resultados auxiliares

Já tinha sido avisado que a Definição 3 possui uma expressão totalmente equivalente pelos padrões matemáticos, mas muito mais usada. É a Definição 4, a qual nos chegaremos após ter estabelecido dois teoremas. Tais teoremas são o conteúdo da presente seção. Seus enunciados você vai ver logo abaixo. Imediatamente em seguida, eu vou justificar a validade das afirmações. A justificativa amparar-se-á em nossas intuições. Se você aceitá-la, então você não precisa ler a demonstração formal que virá por último. Tanto as demonstrações quanto quaisquer partes delas não serão usadas no material subsequente, explicitamente falando, não serão usadas nem em exercícios e nem em provas.

Teorema 1 *(sobre a substituição na probabilidade condicional de evento por seu complementar).*

Se B independe de A então B^c independe de A (aqui, como em tudo, B^c denota o evento complementar de B). Formalmente isso expressa-se pela seguinte implicância

$$\mathbb{P}\big[B\,\big|\,A\big] = I\!\!P\big[B\big] \implies \mathbb{P}\big[B^c\,\big|\,A\big] = I\!\!P\big[B^c\big]$$

Teorema 2 *(sobre a troca de lugares dos eventos em probabilidade condicional).*

Se B independe de A então A independe de B. Formalmente isso expressa-se pela seguinte implicância

$$\mathbb{P}\big[B\,\big|\,A\big] = I\!\!P\big[B\big] \implies \mathbb{P}\big[A\,\big|\,B\big] = I\!\!P\big[A\big]$$

Vamos às demonstrações dos teoremas acima formulados, mas vamos usar somente nossa intuição.

A base da demonstração do Teorema 1 é o seguinte fato que nossa intuição aceita facilmente: se após o evento A não ocorreu B então ocorreu B^c. Isso implica no que

$$\mathbb{P}\big[B\,\big|\,A\big] + \mathbb{P}\big[B^c\,\big|\,A\big] = 1 \tag{2.18}$$

Usaremos essa igualdade para fechar a demonstração com o seguinte argumento. Se primeira dessas probabilidades condicionais é igual a $I\!\!P\big[B\big]$, então a outra deve ser $1 - I\!\!P\big[B\big]$. Como essa diferença é $I\!\!P\big[B^c\big]$, então a segunda probabilidade condicional só pode ser igual a $I\!\!P\big[B^c\big]$. Essa foi a justificativa intuitiva da afirmação do Teorema 1 É curioso que a demonstração formal está muito próxima ao argumento intuitivo agora apresentado.

Vamos agora à justificativa do Teorema 2. Para facilitar tanto sua compreensão quanto minha argumentação, vamos pensar em termos do Exemplo 21. Recorde: dois dados equilibrados, mas distinguíveis (primeiro é branco e o segundo é cinza) estão lançados em sequência. No exemplo, foram definidos eventos A =”o dado branco (o primeiro a ser lançado) mostrar número menor que 3” e B =”o dado cinza mostrar número par”, e foi argumentado – argumentação com a qual sua intuição concordou em plenitude – que B não depende de A. Tal independência acarreta, segundo o Teorema 2, que A independe de B. A concepção intuitiva dessa independência dificulta-se pelo simples, mas único, fato de que A ocorre antes de B. Realmente, é bizarro para nossa intuição que algo corrente esteja independente de alguma coisa que acontecerá no futuro. A saída dessa quebra-cabeça é simples: Imagine que os dados foram lançados, um atrás do outro e que estão falando sobre possibilidades mas ainda sem ver os resultados mostrados pelos dados. Desse ponto de vista, a seguinte pergunta faz sentido: “Se eu lhe revelar que o segundo dado mostrou número par, isso mudaria sua estimativa da probabilidade do primeiro dado mostrar valor menor que 3?” Sua resposta será: “Não”. Tal resposta, sendo formalizada nos termos e conceitos desse capítulo soa assim: $\mathbb{P}\big[A\,\big|\,B\big] = I\!\!P\big[A\big]$. Isso é a afirmação do teorema. Portanto, podemos dizer que a provamos por argumentos puramente intuitivos. Fazendo a justiça, temos que admitir que na prova usamos um exemplo particular, mas pensando bem, vê-se que a argumentação aplicada a esse exemplo particular serve também a qualquer caso.

Agora, vou apresentar demonstrações rigorosas. Conforme já avisado, sua leitura dessas é opcional.

Demonstração do Teorema 1. Nossa abordagem intuitiva do resultado desse teorema mostrou que a chave à demonstração é a relação (2.18). Convido você para pensar agora como essa pode ser provada. Como você só conhece a fórmula que transforma a probabilidade condicional em probabilidade incondicional e, além disso, conhece algumas regras básicas de trabalho com a probabilidade incondicional, então a sugestão natural é primeiramente aplicar aquela fórmula de transformação. Com isso, a relação (2.18) transforma-se na

$$\frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]} + \frac{\mathbb{P}[B^c \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = 1$$

Essa, por sua vez, equivale a

$$\frac{\mathbb{P}[B \cap A] + \mathbb{P}[B^c \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = 1 \tag{2.19}$$

Mas, de acordo com a propriedade *(iv)* da lista (2.3), tem-se que $\mathbb{P}[B \cap A] + \mathbb{P}[B^c \cap A] = \mathbb{P}[A]$ (a propriedade se aplica no caso, pois B e B^c formam partição de Ω). Isso garante que (2.19) está correto, e, consequentemente, (2.18) idem.

Agora vamos tomar (2.18), cuja validade acabamos de provar, e vamos substituir nela $\mathbb{P}[B \,|\, A]$ por $\mathbb{P}[B]$, o que é possível pois as duas estão iguais entre si de acordo com a suposição do teorema. Isso nos dá:

$$\frac{\mathbb{P}[B^c \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = 1 - \mathbb{P}[B]$$

Ao substituir $1 - \mathbb{P}[B]$ por $\mathbb{P}[B^c]$ fecha-se a demonstração.

Demonstração do Teorema 2. Observe que para executar a prova temos um conjunto muito restrito de ferramentas; são a fórmula definidora de probabilidade condicional e fórmulas de manipulações com probabilidades de eventos, poucas em número. Se você concebesse esse fato, você conseguiria produzir a demonstração com suas próprias forças, mesmo se você não for um matemático ou aluno treinado para fazer provas matematicamente rigorosas. Disse-lhe isso para que você sinta que o material apresentado continua, foi, é e será no nível plenamente compreensível para alunos/leitores universitários de faculdades sem viés matemático, tipo Psicologia, Veterinária, etc. Vamos às contas:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big[A \,\big|\, B\big] \\
&= \frac{\mathbb{P}\big[A \cap B\big]}{\mathbb{P}\big[B\big]} \big(\text{usamos a fórmula da probabilidade condicional}\big) \\
&= \frac{\mathbb{P}\big[A \cap B\big]}{\mathbb{P}\big[B\big]} \frac{\mathbb{P}\big[A\big]}{\mathbb{P}\big[A\big]} = \frac{\mathbb{P}\big[A \cap B\big]}{\mathbb{P}\big[A\big]} \frac{\mathbb{P}\big[B\big]}{\mathbb{P}\big[A\big]} \Big(\text{multiplicamos por } 1 = \frac{\mathbb{P}\big[A\big]}{\mathbb{P}\big[A\big]} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e remanejamos}\Big) \\
&= \frac{\mathbb{P}\big[B \,|\, A\big]}{\mathbb{P}\big[B\big]} \mathbb{P}\big[A\big] \qquad \text{usamos a fórmula da probabilidade condicional}\big) \\
&= \mathbb{P}\big[A\big] \qquad \big(\text{usamos a hipótese que } \mathbb{P}\big[B \,\big|\, A\big] = \mathbb{P}\big[B\big]\big)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Comparando o começo e o fim desse cálculo, tendo em mente a definição da independência dada anteriormente, concluímos que o evento A não depende de B. Lembrando que o pressuposto era que B não depende de A (tal fato foi usado no cálculo acima na passagem da penúltima à última linha), concluímos a demonstração do teorema.

2.3.3 A definição tradicional de independência

Começo essa seção diretamente com sua mensagem principal a qual é a definição alternativa de independência:

Definição 4 *(de independência entre dois eventos).*
Sejam A e B dois eventos definidos no mesmo experimento aleatório. Diz-se que A **e** B **são independentes** caso

$$\mathbb{P}[B \cap A] = \mathbb{P}[B] \times \mathbb{P}[A] \tag{2.21}$$

(Caso a relação (2.21) não valer, os eventos A e B chamam-se **dependentes** ou **não independentes**.

Meu objetivo corrente é mostrar que as Definições 3 e 4 são equivalentes. Especificamente falando, quero mostrar que se B independe de A no sentido da Definição 3 então os mesmos A e B são independentes no sentido da Definição 4, e também a recíproca, quer dizer, que se A e B são independentes no sentido da Definição 4 então tanto B independe de A quanto A independe de B no sentido da Definição 3.

Antes da partir para a execução da tarefa acima traçada, gostaria de chamar a atenção de leitor à seguinte discrepância entre as definições:

na Definição 4, há uma relação simétrica entre A e B (as expressões "A e B são independentes" "B e A são independentes" significam a mesma coisa);

na Definição 3, os eventos A e B estão em relação assimétrica, pois defina-se o conceito de B independer de A, o qual, a priori, pode não ter nada a ver com "A independer de B.

Em virtude da diferença acima apresentada, surge naturalmente a dúvida se a equivalência entre Definições 3 e 4 é sequer possível. A resposta é sim e ela é amparada pelo Teorema 2 que garante que B independe de A se e somente se A independe de B. Com tal garantia, podemos re-escrever a tarefa de comparação de definições da seguinte maneira:

B independe de A		
e, equivalentemente,	$\Longrightarrow$	A e B são independentes
A independe de B,		no sentido da
ambos no sentido da	$\Longleftarrow$	Definição 4
Definição 3		

A execução da tarefa supracolocada é simples. É uma linha só. Eis esta caso você deseja a equivalência com a expressão "B independe de A":

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B \,|\, A] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}[B] = \frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B \cap A]$$

e caso você preferir trabalhar com "A independe de B", a prova será assim

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \,|\, B] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}[A] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cap B]$$

A equivalência acima provada merece ser destacada em forma de teorema. Tal teorema está abaixo. Observe que sua afirmação é mais ampla de que a equivalência provada. Aquele "extra" que está no teorema será demonstrado em seguida.

Teorema 3 *(sobre diversas expressões de independência).*

Sejam A e B dois eventos definidos no mesmo espaço de probabilidade. Suponha que valem as seguintes restrições técnicas (cujo sentido será explicado na observação que fica no final da seção): $\mathbb{P}[A] \neq 0$, $\mathbb{P}[B] \neq 0$, $\mathbb{P}[A] \neq 1$, $\mathbb{P}[A] \neq 1$. Então, acontece uma das duas:
ou está valendo cada uma das seguintes 9 igualdades

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B] \tag{2.22}$$
$$\mathbb{P}[B \,|\, A] = \mathbb{P}[B] \tag{2.23}$$
$$\mathbb{P}[B^c \,|\, A] = \mathbb{P}[B^c] \tag{2.24}$$
$$\mathbb{P}[A \,|\, B^c] = \mathbb{P}[A] \tag{2.25}$$
$$\mathbb{P}[A^c \,|\, B^c] = \mathbb{P}[A^c] \tag{2.26}$$
$$\mathbb{P}[B^c \,|\, A^c] = \mathbb{P}[B^c] \tag{2.27}$$
$$\mathbb{P}[A \,|\, B] = \mathbb{P}[A] \tag{2.28}$$
$$\mathbb{P}[A^c \,|\, B] = \mathbb{P}[A^c] \tag{2.29}$$
$$\mathbb{P}[B \,|\, A^c] = \mathbb{P}[B] \tag{2.30}$$

e nesse caso A e B são independentes no sentido da Definição4, e também A independe de B assim como B independe de A no sentido da Definição 3,
ou nenhuma das igualdades (2.22)-(2.30) está valendo e, nesse caso, A e B são dependentes no sentido da Definição4, e também A depende de B assim como B depende de A no sentido da Definição 3.

Para completar a demonstração desse teorema, é precisa provar que (2.23)-(2.30) são equivalentes entre si. Tal equivalência está garantida pela aplicação dos Teoremas 1, 2. O esquema abaixo mostra a lógica e a sequencia dessa aplicação:

$\boxed{B \text{ independe de } A}$

Teorema 1 $\swarrow\nearrow$ $\qquad$ $\searrow\nwarrow$ Teorema 2

$\boxed{B^c \text{ independe de } A}$ $\qquad$ $\boxed{A \text{ independe de } B}$

Teorema 2 $\downarrow\uparrow$ $\qquad$ $\downarrow\uparrow$ Teorema 1

$\boxed{A \text{ independe de } B^c}$ $\qquad$ $\boxed{A^c \text{ independe de } B}$

Teorema 1 $\downarrow\uparrow$ $\qquad$ $\downarrow\uparrow$ Teorema 2

$\boxed{A^c \text{ independe de } B^c}$ $\qquad$ $\boxed{B \text{ independe de } A^c}$

Teorema 2 $\searrow\nwarrow$ $\qquad$ $\swarrow\nearrow$ Teorema 1

$\boxed{B^c \text{ independe de } A^c}$

Eu sinto que chegou o momento de fechar a discussão meio teórica e passar para exercícios. Com o intuito de encurtar a exposição, vamos olhar em tudo na perspectiva de relação entre professor e aluno. Professor pede, aluno faz, professor pergunta, aluno responde.

Então, caso eu (o professor, no caso) pergunte se dois eventos A e B são independentes, então o aluno pode escolher qualquer relação entre (2.22)–(2.30) e verificar sua validade para os

A e B fornecidos. Havendo a igualdade, conclui-se que A e B são independentes, caso contrário – que são dependentes.

Na direção contrária, se professor fornecer dois eventos A e B descrevendo-os como independentes, então o aluno pode usar os eventos em qualquer uma das igualdades (2.22)–(2.30).

2.4 Como abordar e solucionar problemas realcionados à probabilidade condicional e à independência

2.4.1 Problemas sem pegadinhos

Nessa seção, eu vou falar sobre a abordagem aos problemas chamados por mim de "diretos". O nome significa que problema foi corretamente formulado (com uma clara descrição do experimento aleatório subjacente), que os eventos em interesse foram descritos diretamente, e que a pergunta final está colocada claramente em forma "verifique a independência entre os eventos descritos", ou "calcule a probabilidade condicional de um dos eventos sabendo que aconteceu outro", ou "calcule a probabilidade de um evento", sendo que quando a tarefa é a terceira das mencionadas, o enunciado do problema monta-se de tal forma que o cálculo de probabilidade do evento em questão emprega probabilidade condicional, cujo valor ou é fornecido diretamente no enunciado do problema ou deve ser calculado a partir de informação do enunciado. Gostaria de notar que os problemas do terceiro tipo não são importantes para os assuntos dos capítulos seguintes do livro e é por isso que a presente seção não dá atenção a tais problemas. Naturalmente, tais problemas também não aparecem na lista de exercícios (Seção 2.6).

Exemplo 24. O exercício abaixo formulado pede calcular probabilidade condicional.

Numa urna há 100 bolas do mesmo tamanho. 60 delas são vermelhas e outras 40 são brancas. Das vermelhas, 25 têm marcadas o número I e 35 têm o número II; das bolas brancas, 10 têm marcadas o número I e 30 têm número II. Professor Vladimir retirou ao acaso uma bola da urna e a mostrou para os alunos da sala. Um aluno, que estava na última fileira da sala, de lá percebeu que a bola retirada era vermelha, mas não era possível identificar o número nela escrito. Perguntamos: colocando-se na situação desse aluno, qual é a probabilidade de que a bola retirada tenha o número I?

Vamos à solução. Na realidade, vou apresentar duas solução e é muito importante que você, meu leitor, entenda que há duas (claro que as duas levam ao mesmo resultado). No comentário que coloquei após Exemplo 26, eu vou explicar tudo que tem a ver com a existência de duas abordagens.

O caminho da primeira solução é idêntico ao caminho de pensamento do menino-da-última-filheira do Exemplo 20. Recordo que naquele exemplo, o menino-da-última-filheira foi introduzido na historinha com o intuito de mostrar o funcionamento de nossa intuição quando essa precisa solucionar problemas envolvendo probabilidade condicional. Por isso, vou chamar de **abordagem intuitiva** o raciocínio semelhante àquele que o menino-da-última-filheira fez Exemplo 20.

Acontece que os experimentos aleatórios do Exemplo 20 e do presente exemplo são idênticos no seguinte sentido: cada resultado apresenta dois atributos (aqui, são "cor" e número de bola", lá era "cor" e número da face superior no dado rodado); o evento ocorrido fixa um dos atributos (lá era "cor"=branca, aqui tem-se "cor"=vermelha), e pergunta-se a probabilidade condicional do evento caraterizado pelo valor do outro atributo (lá era "número"=ímpar, aqui, "número"=I). Isso permite aplicar diretamente o raciocínio

$$\frac{\text{número de bolas vermelhas com número I}}{\text{número de bolas vermelhas}} = \frac{25}{60} \tag{2.31}$$

Agora vamos àquilo que chamo por **abordagem canônica**. Esse é o nome para a solução que calcula o valor de probabilidade condicional usando a fórmula (2.5) da Definição 2, quer dizer, a fórmula

$$\mathbb{P}\big[B \,\big|\, A\big] = \frac{I\!P\,[B \cap A]}{I\!P\,[A]} \tag{2.32}$$

Eu vou justificar o nome "abordagem canônica" no comentário após Exemplo 26.

Olhando na fórmula a ser empregada para a solução, percebe-se imediatamente que serão necessárias as seguintes ações:

(a) Identificar o evento cuja probabilidade está em questão (B) e o sobre e o qual sabemos que aconteceu (A).

(b) Calcular as probabilidades de A e de $B \cap A$; estas ao serem inseridos na fórmula, darão o valor de $\mathbb{P}\big[B \,\big|\, A\big]$.

(c) Conforme indica a letra "$I\!P$" do lado direita da fórmula, as probabilidades de A e de $B \cap A$ devem ser calculadas na âmbito do Experimento Aleatório puro.

(d) A conclusão do item (c) indica que é preciso construir o modelo probabilístico para o Experimento Aleatório puro, e que os eventos B e A mencionados no item (a) devem ser identificados no âmbito desse modelo.

O conteúdo das ações descritas em (a)-(d) acima indicam a maior dificuldade pela qual passam os alunos que são obrigados a executar a abordagem canônica: é precisa olhar no experimento aleatório em sua forma pura, o que é ilógico já que a pergunta, cuja solução está sendo elaborada, refere-se à situação sobre a qual sabe-se que um certo evento tinha sido observado. Eu não conheço um bom argumento que possa amenizar essa dificuldade. Talvez, o único caminho é fazer bastante exercícios e se acostumar com tal discrepância.

Começamos a solução com a construção do modelo probabilístico para o situação descrita no enunciado. A situação é um típico experimento aleatório simples com dois atributos mostrados em cada resultado. Espero que o Capítulo 1 ensinou meu leitor a tratar tais experimentos. Por isso, apresento agora somente o resultado final:

$$\Omega = \{\text{vermelha-I}, \;\; \text{vermelha-II}, \;\; \text{branca-I}, \; \text{branca-II}\}$$

$$I\!P\big[\text{vermelha-I}\big] = \frac{\text{número de bolas vermelhas com I}}{\text{número total de bolas}} = \frac{25}{100} \tag{2.33}$$

e de modo semelhante, obtém-se que

$$I\!P\big[\text{vermelha-II}\big] = \frac{35}{100}, \;\; I\!P\big[\text{branca-I}\big] = \frac{10}{100}, \;\; I\!P\big[\text{branca-II}\big] = \frac{20}{100} \tag{2.34}$$

Introduzimos os seguintes dois eventos:

$$\begin{aligned} A &= \text{"bola de cor vermelha"} \\ B &= \text{"bola com número I"} \end{aligned} \tag{2.35}$$

É óbvio que a pergunta do exercício pode ser reformulada como "achar a probabilidade de B sabendo que ocorreu A". Isso e a Definição 2 garantem a aplicabilidade da fórmula (2.32). Para aplicar a fórmula, precisamos dos valores de $I\!P[A]$ e de $I\!P[B \cap A]$. O cálculo desses valores nos obriga a expressão os eventos em termos de coleções de resultados:

$$A = \{\text{vermelha-I, vermelha-II}\}, \qquad B = \{\text{vermelha-I, branca-I}\}.$$

e, portanto,

$$B \cap A \;=\; \{\text{vermelha-I}\}$$

Agora, só precisamos juntar as peças:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[B \mid A\right] &= \frac{I\!P[B \cap A]}{I\!P[A]} = \frac{I\!P[\text{vermelha-I}]}{I\!P[\text{vermelha-I}] + I\!P[\text{vermelha-II}]} \\ &= \frac{\frac{25}{100}}{\frac{25}{100} + \frac{35}{100}} = \frac{25}{60}\end{aligned}$$

Fim do Exemplo 24↑

↓ **Exemplo 25.** Aqui, vamos achar a solução para o seguinte problema:

Há três moedas, cada uma das quais dá "cara" (h) com a probabilidade $\frac{2}{3}$, e "coroa" (t) com a probabilidade $\frac{1}{3}$.

As moedas serão lançadas em sequência (assuma que as moedas têm cores diferentes para que seja claro que trata-se aqui de um experimento aleatório sequencial). Considere dois eventos:
A="obter uma "cara" (h) e uma "coroa" (t) nos dois primeiros lançamentos, em qualquer ordem",
e
B="obter duas "caras" (dois h) nos dois últimos lançamentos".

Pede-se verificar se A e B são eventos independentes.

A solução desenvolve-se por etapas cujo conteúdo e sequência são bem naturais (pelo menos para quem entendeu o conteúdo do Capítulo 1 e fez os exercícios).

Na primeira etapa, por método de diagrama de árvore, construiu-se o modelo probabilístico do experimento aleatório enunciado. Seu espaço de estados está em (2.36) abaixo. As probabilidades não serão listadas agora para economizar tempo e espaço; elas aparecerão nos cálculos (2.37)–(2.39).

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(h \to h \to h), (t \to h \to h), (h \to t \to h), (h \to h \to t),\\ &(t \to t \to h), (t \to h \to t), (h \to t \to t), (t \to t \to t)\}\end{aligned} \tag{2.36}$$

Na segunda etapa, usamos Ω para expressar os eventos em interesse como conjuntos compostos de resultados do experimento aleatório:

$$\begin{aligned}A &= \{(t \to h \to h), (h \to t \to h), (t \to h \to t), (h \to t \to t)\}\\ B &= \{(h \to h \to h), (t \to h \to h)\}\end{aligned}$$

e, em seguida, usamos tais expressões para achar a composição de $A \cap B$:

$$A \cap B = \{(t \to h \to h)\}$$

Observe que a expressão para $A \cap B$ acha-se pelo método mais direto e primitivo que existe: a comparação direta entre as composições de A e de B.

Na terceira, a última etapa, faz-se uso de uma das fórmulas fornecidas pelo Teorema 3 que servem para testar independência. Nossa escolha é aquela delas que compara $I\!P[A \cap B]$ com $I\!P[A] \times I\!P[B]$. Aliás, a expressão para $A \cap B$ tinha sido achada acima justamente para permitir o cálculo de $I\!P[A \cap B]$. Então, vamos ao cálculo de valores numéricos das probabilidades envolvidas na fórmula a ser usada:

$$I\!P[A] = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{12}{27} \tag{2.37}$$

$$I\!P[B] = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27} \tag{2.38}$$

$$I\!P[A \cap B] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27} \tag{2.39}$$

então, como

$$\mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B] = \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} \neq \frac{4}{27} = \mathbb{P}[A \cap B]$$

conclua-se que os eventos A e B são dependentes.

Fim do Exemplo 25↑

↓ **Exemplo 26.** O presente exemplo mostra um erro típico na solução de exercícios sobre Probabilidade Condicional e Independência de eventos. Vale notar que os execícios desse tema juntados no presente capítulo não são sofisticados e complexos, e que no nível destes, o erro a ser mostrado é basicamente o único erro conceitual que pode ser cometido. Vale também notar que apesar desse aviso, toda vez que ministro curso de Estatística Básica, no mínimo 10% de estudantes cometem esse erro nas provas.

O enunciado e a pergunta são os mesmos que os do Exemplo 25. O início do caminho de solução repete-se também até as fórmulas (2.37) e (2.38) nas quais calculam-se os valores numéricos das $\mathbb{P}[A]$ e $\mathbb{P}[B]$. A diferença das abordagens atual (incorreta) e a anterior (correta) está no que agora $\mathbb{P}[A \cap B]$ calcula-se da seguinte maneira (incorreta):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cap B] &= \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B] \\ &= \tfrac{12}{27} \times \tfrac{12}{27} = \tfrac{12 \times 12}{27^2} \end{aligned} \tag{2.40}$$

O erro aqui é conceitual: não se pode empregar a fórmula $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B]$ para calcular $\mathbb{P}[A \cap B]$ a partir dos valores de $\mathbb{P}[A]$ e $\mathbb{P}[B]$, pois a fórmula é válida somente quando A e B são independentes. Tal independência não foi garantida por nada até agora (na verdade, o teste dessa independência é o objetivo final do problema tratado).

Vale notar que se o cálculo da $\mathbb{P}[A \cap B]$ for feito pela abordagem incorreta, então, se continuarmos a solução do problema seguindo ao caminho traçado no Exemplo 25, então a conclusão final sempre será que A e B são independentes. Isso acontece porque na presente abordagem incorreta, o valor de $\mathbb{P}[A \cap B]$ tinha sido calculado (a força, sem justificativa) como $\mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B]$. Eis como o passo final da verificação funciona (incorretamente) e conclui que A e B são independentes:

$$\mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B] = \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} = \frac{12 \times 12}{27^2} = \mathbb{P}[A \cap B]$$

Fim do Exemplo 26↑

Comentário. Se você deseja montar um experimento aleatório referente a qual você pretende perguntar algo sobre a Probabilidade Condicional, então, tipicamente, haverão pelo menos dois atributos no enunciado do experimento. Ter dois atributos facilita-lhe a montagem de pergunta, pois você consegue perguntar sobre a probabilidade de evento envolvendo um dos atributos sabendo que aconteceu um outro evento descrito por intermédio do outro atributo. Por exemplo, nos Exemplos 20 e 24, perguntava-se a probabilidade de evento envolvendo o atributo "número" sabendo que aconteceu evento envolvendo o atributo "cor".

Minha experiência de ensino mostra que quando a quantidade de atributos é dois, então a solução pode seguir o caminho intuitivo. (Isso é válido mesmo quando a quantidade de valores para cada atributo é maior que dois. Por exemplo, podemos montar experimento aleatório de retirada de uma pessoa de uma população, sendo que cada pessoa carateriza-se por atributo idade que pode assumir valores "jovem", "meio-idade" e "idoso", e por atributo salário, que pode assumir valores "baixo","médio", "alto", "altíssimo".)

Entretanto, experimentos aleatórios podem se compor por mais que dois atributos. Por exemplo, o do Exemplo 25 tem três: a primeira, a segunda e a terceira moeda. Recordo que nesse exemplo perguntava-se sobre a independência entre eventos A e B, sendo que A era definido por primeiras duas moedas e B por duas últimas. Se você fosse calcular $\mathbb{P}[A \mid B]$, a abordagem intuitiva não funcionaria com a facilidade que você encontrou na solução dos Exemplos 20 e 24. Por outro lado, a abordagem canônica funcionou bem, conforme você viu na solução apresentada.

Minha mensagem aqui é o seguinte: a abordagem canônica funciona sempre; essa foi a razão de eu "canonizá-la". A abordagem intuitiva funciona bem em casos particulares, alguns dos quais forma mostrados acima.

2.4.2 Problemas com pegadinhas não intencionais

Para que você, meu leitor, possa entender os critérios segundo os quais eu classifico problemas por Seções 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3, eu preciso lhe contar como criam-se problemas cuja solução envolve probabilidade. Começo com o seguinte fato bem óbvio: qualquer um de tais problemas tem que conter indicação da presença de incerteza, pois é assim que transmite-se para aluno/a a mensagem de que ele/ela deve aplicar seus conhecimentos de Teoria de Probabilidade na solução do problema. Isso nos leva ao ponto principal da presente discussão: a maneira pela qual transmite-se a presença de incerteza. Acontece que existem maneiras claras e não muito claras. A maneira clara é quando o enunciado do problema fala diretamente que a incerteza virá de lançamentos de dados ou moedas ou de retiradas bolas de urna. Vamos chamar por *toy model* tudo aquilo que envolve dados, moedas, urnas e assim. Tipicamente, o significado de cada *toy model* tinha sido acordado entre professor e aluno e, consequentemente, alunos conseguem facilmente transformar um *toy model* no modelo probabilístico adequado. Acontece que professores não ficam satisfeitos com somente *toy models*, mas inventam experimentos aleatórios formulados em termos de vida real. Acontece que a vida real é muito versátil. Isso dificulta para alunos a seleção daquelas faces do experimento aleatório inventado que são importantes para a criação de seu modelo probabilístico. Em muitos casos, tal seleção é a maior dificuldade de aluno na solução de problema. É claro que quem inventou tal problema às vezes não desejava causar tais dificuldades. Quando isso é o caso, o problema criado é chamada por mim por "problema com pegadinhas não intencionais". As vezes, porém, a situação é contrária: professores embutem problemas em ambiente da vida real com a intenção de ofuscar o caminho que leva a sua solução. Assim nascem "problema com pegadinhas intencionais".

Exemplo 27. Há uma imensidade de problemas, todos equivalentes ao problema tratado no presente exemplo. Eis seu enunciado.

Na turma de 100 alunos que assistem meu curso "Estatística Básica" 60 que moram na cidade de São Paulo (a mesma cidade onde fica a universidade na qual eu trabalho) e outros 40 moram fora. De quem mora na cidade, 25 preferem que a prova de recuperação seja feita logo após o término do semestre letivo enquanto que os 35 restantes querem que tal prova seja oferecida na primeira semana do semestre seguinte. Já entre quem mora fora da cidade, a divisão é 10 e 30.

Um dia, um dos alunos veio para conversar comigo após aula com o intuito de me convencer em adiar a prova de recuperação para o semestre seguinte. Qual é a probabilidade de que o aluno more fora da cidade?

Compare o enunciado desse problema com o do problema do Exemplo 24, substituindo "mora na cidade" pela "cor vermelha", "mora no interior" pela "cor branca", "não quer adiar a prova" pelo "marcado por I", e "quer adiar a prova" pelo "marcado por II". Apos tal substituição, torna-se claro que o autor do presente problema quis que a aleatoriedade esteja introduzida no problema via "uma aluno da turma está escolhido ao acaso". Entretanto, tal frase foi disfarçado pela frase " um dos alunos veio para conversar comigo". Logo que você perceber o sentido disfarçado dessa frase, a solução de todo o problema desenrola-se da maneira semelhante àquela solução que foi mostrada no Exemplo 24.

Exemplo 28. Esse exercício baseia-se numa história que aconteceu comigo quando eu era jovem e casado; aliás, bem jovem e bem casado. Naquela época feliz, nós morávamos num subúrbio da cidade de São Paulo, no bairro chamado Granja Viana. O bairro era bem extenso e cruzava com duas rodovias que desembocavam da cidade e passavam pelo campus da Universidade onde eu trabalho. Toda essa informação é importante para entender a situação que acarretou o problema probabilístico contado abaixo.

Professor Vladimir pode voltar da USP a sua casa ou pela Rodovia Raposo Tavares ou pela Rodovia Castelo Branco, sendo que a primeira é escolhida com a probabilidade 0,7 e a segunda com a probabilidade 0,3. A Rodovia Raposo Tavares tem probabilidade 0,05 de ter trânsito parado, enquanto que na Rodovia Castelo Branco essa probabilidade é 0,2.

Certo dia Vladimir se atrasou para jantar e sua esposa resolveu ir a seu encontro, levando-lhe marmita, pois sabia que seu marido estava faminto. Ajude a esposa a decidir em qual das duas rodovias há mais chances de encontrar o professor Vladimir.

A "decodificação" do anunciado passa pelo seguinte caminho. Em primeiro lugar, entendemos que a esposa precisa decidir entre "Vladimir está na Raposo" e "Vladimir está na Castelo". Pensando um pouco, percebe-se que a esposa pode somente avaliar as probabilidades desses eventos (quer dizer, ela não pode decidir por certo). Por último, percebe-se que existe uma informação adicional: é que Vladimir está parado no trânsito numa das duas rodovias. Isso é uma forte indicação de que as probabilidades a serem calculadas e comparadas entre si, não são probabilidades incondicionais, mas condicionais, e que o evento condicionador no caso é "Vladimir está no trânsito parado".

As "revelações" apresentadas no parágrafo acima ajudam a chegar ao modelo probabilístico correto, o qual é o seguinte:

$$\Omega = \{rp,\, r\ell,\, cp,\, c\ell\} \tag{2.41}$$

sendo que a letra r significa que Vladimir escolheu Raposo, c que escolheu Castelo, p significa que encontrou trânsito parado, e ℓ que andou livremente. Quanto à probabilidade do modelo probabilístico, ela fica assim:

$$I\!\!P[rp] = 0,7 \times 0,05,\ I\!\!P[r\ell] = 0,7 \times 0,95,\ I\!\!P[cp] = 0,3 \times 0,2\ I\!\!P[c\ell] = 0,3 \times 0,8 \tag{2.42}$$

No próximo passo da solução introduzimos os eventos que estão de acordo com a "decodificação" apresentada acima, e já expressamos os eventos como subconjuntos de Ω:

$$\begin{array}{l} \mathcal{R} = \text{"Vladimir escolher a Raposo"} = \{rp,\, r\ell\} \\ \mathcal{C} = \text{"Vladimir escolher a Castelo"} = \{cp,\, c\ell\} \\ \mathcal{L} = \text{"ter trânsito livre"} = \{r\ell,\, c\ell\} \\ \mathcal{P} = \text{"ter trânsito parado"} = \{rp,\, cp\} \end{array} \tag{2.43}$$

Agora, podemos prosseguir para os cálculos:

$$\mathbb{P}\big[\mathcal{R}\,|\,\mathcal{P}\big] = \frac{I\!\!P[\mathcal{R}\cap\mathcal{P}]}{I\!\!P[\mathcal{P}]} = \frac{0,7\times 0,05}{0,7\times 0,05 + 0,3\times 0,2} = \frac{0,035}{0,035+0,06} \tag{2.44}$$

e

$$\mathbb{P}\big[\mathcal{C}\,|\,\mathcal{P}\big] = \frac{I\!\!P[\mathcal{C}\cap\mathcal{P}]}{I\!\!P[\mathcal{P}]} = \frac{0,3\times 0,2}{0,7\times 0,05 + 0,3\times 0,2} = \frac{0,06}{0,035+0,06} \tag{2.45}$$

A decisão final é que com a informação de que Vladimir está parado no trânsito, é mais provável que ele esteja na Castelo de que na Raposo.

2.4.3 Problemas com pegadinhas intencionais

A caraterística de problemas chamados "com pegadinhas intencionais" foi definida no início da Seção 2.4.2. Tais problemas não acrescentam nada ao conteúdo de meu curso e por isso não adquirem uma mínima atenção. Eu só reservei aqui um espaço para juntar tais problemas. O que vou fazer com eles no futuro – ainda não sei.

EXEMPLO (peguei da apostila didática da 8-a série de Ian): 70% de pessoas comem carne no almoço, 50% de pessoas comem carne no jantar, e é conhecido que 35% dos que comem carne no almoço também comem carne no jantar. Qual é a probabilidade que pessoa não coma carne no almoço ou no jantar?

Eis a solução apresentada pela apostila: Pergunta-se $P(A \cup J)$. Tem-se a fórmula genérica

$$P(A \cup J) = P(A) + P(J) - P(A \cap J)$$

Quanto a $P(A \cap J)$, essa está envolvida na fórmula

$$P(J \,\big|\, A) = P(A \cap J)/P(J)$$

cujas probabilidades do seu lado direito estão dadas no enunciado.

O problema com essa solução é que não está claro como e onde surge a probabilidade condicional. Ainda mais, a explicação dessa dúvida pode exigir o desenho de árvore de probabilidade, que não tem nada a ver com experimento aleatório de duas etapas.

Tudo isso deve ser refletido no texto, pois o exercício não enquadra-se facilmente no método por mim sugerido, mas se for analisado direitinho, será visto que seu enunciado é muito incompleto e que a complementação fica clara após que o aluno aprende meu método.

2.6 Exercícios

Exc. 14. Numa urna com bolas coloridas há 4 brancas e 2 pretas. Retiram-se em sequência duas bolas da urna, sem a reposição da bola escolhida na primeira retirada. Observam-se as cores das duas. Sabendo que na segunda retirada obteve-se bola branca, qual é a probabilidade de ter obtido bola branca na primeira retirada?

Exc. 15. No âmbito do Exc. 14 defina dois eventos:
$A =$"bola branca na primeira retirada",
$B =$"bola branca na segunda retirada".
Observe que Exc. 14 pediu que calcule $\mathbb{P}[A \,|\, B]$. Já no presente exercício, peço lhe calcular $\mathbb{P}[A^c \,|\, B]$, $\mathbb{P}[A \,|\, B^c]$, $\mathbb{P}[A^c \,|\, B^c]$ (aqui, A^c e B^c são as notações para, respetivamente, o evento complementar de A e o evento complementar de B). A segunda tarefa do presente exercício é verificar numericamente as duas seguintes relações genéricas:

$$\mathbb{P}[A \,|\, B] + \mathbb{P}[A^c \,|\, B] \quad = 1 \tag{2.46}$$

$$\mathbb{P}[A \,|\, B] + \mathbb{P}[A \,|\, B^c] \quad \text{não é obrigatoriamente } 1 \tag{2.47}$$

Verificar numericamente significa substituir os valores calculados nos lugares das respectivas probabilidades e verificar que no caso (2.46) os valores de fato somam-se a 1, e que no caso (2.47), não.

Exc. 16. Há três urnas marcadas por I, II e III. Na urna I há 1 bola branca e 5 vermelhas; na urna II tem 2 brancas e 4 vermelhas e na urna III há 3 brancas e 3 vermelhas. Professor lança um dado equilibrado e retira uma bola da urna I se o lançamento der $1, 2$ ou 3; retira uma bola da urna II se o lançamento der 4 ou 5 e retira uma bola da urna III se o lançamento der 6. Depois de ter feito este experimento aleatório, o professor informou a seus alunos que a bola retirada é branca. Você (que é um dos alunos do professor) agora é solicitado a calcular a probabilidade de que essa bola tenha sido retirada da urna I. (Esta tarefa pode ser formulada em outras palavras assim: sabendo que a bola retirada na segunda etapa do experimento aleatório é branca, calcule a probabilidade condicional de que foi visto 1,2 ou 3 no dado lançado na primeira etapa do experimento.)

Exc. 17. Para formular a tarefa do presente exercício, preciso lhe lembrar o enunciado do Exc. 6 da Seção 1.5. Eis este abaixo.

Um açougue será inaugurado hoje e tem 50% de probabilidade de receber carne de um frigorífico contratado para seu abastecimento. A cada dia consecutivo, a probabilidade de haver carne no açougue depende somente do fato de ter havido carne ou não no dia anterior, obedecendo a seguinte regra: 60% de chances de encontrar carne no açougue se, no dia anterior, esse produto estava disponível, e 30% se, no dia anterior, ela estava em falta. Ao tomar conhecimento sobre a inauguração do açougue, uma dona de casa resolveu ir até ele daqui dois dias (equivalentemente, no terceiro dia após a inauguração).

No Exc. 6 da Seção 1.5, a pergunta era sobre a probabilidade dessa senhora encontrar a carne no açougue no terceiro dia após sua inauguração. Agora, a pergunta é diferente; naturalmente, ela envolve a probabilidade condicional:

$$\begin{gathered}\text{Dado que a senhora não encontrou carne no açougue no terceiro dia} \\ \text{após a inaguração, ache a probabilidade de haver carne no dia anterior.}\end{gathered} \tag{2.48}$$

Para que você entenda o enredo da pergunta, imagine a seguinte situação. Você está numa casa, estilo colonial, numa boa, numa mesa atrás de janela, cambiando banhos solares com a leitura do capítulo do livro do Professor Vladimir que versa sobre a probabilidade condicional.

De repente, você avista nos paralelepípedos da rua, uma senhora cuja aparência e idade revelam sua total dedicação aos serviços de dona de casa desde o casamento precoce até o recente surgimento de netos. Ela para à frente de sua janela para descansar de um longa caminhada e interrompe sua tranquilidade estilo colonial: "Imagina, fió!" – diz ela recuperando a respiração– "Encontrei prateleiras vazias! Se viesse ontem, compraria carne". Para consolar a velinha, você diz: "Não vale lamentar tanto! Encontrar carne ontem também não é um evento certo!" E ai, você senta e calcula a probabilidade deste evento. "Tome, senhora, acalme-se!" É claro que você não esqueceu que a probabilidade que calculava era condicional, pois já sabia-se por certo que no terceiro dia a carne faltava no açougue.

Exc. 18. Recorde que no Exc. 7 da Seção 1.5, Chico, Paolo e Vladi retiravam bolas de uma urna com o intuito de sortear quem dos três buscaria cerveja. Recorde: houve uma urna com três bolas, sendo que duas eram brancas e uma preta. Os três amigos Chico, Paolo e Vladi concordaram em retirar uma bola cada um, nesta ordem, e quem estiver com a bola preta pagará a cerveja para os demais. Foi ainda concordado que, ao retirar sua bola, cada um dos três não a olha nem mostra para os demais, e somente depois que o último retirar sua bola, as cores das bolas escolhidas são reveladas.

Imagine que Chico, que é o primeiro, retirou sua bola e pôs esta imediatamente no seu bolso sem olhar, conforme o combinado. Na vez de Paolo, este retirou sua bola e passou a urna para Vladi. Enquanto Vladi seguia o combinado, Paolo espiou sua bola, viu que ela é branca, e, de felicidade, gritou: "É branca!".

Então, Vladi pôs a sua bola no bolsa, sem olhar, conforme combinado, e pensou: "Sabendo que a bola preta não está com Paolo, qual é a probabilidade dela estar com Chico?" Solucione essa dúvida do Vladi, em outras palavras, ache a probabilidade condicional de Chico ter ficado com bola preta sabendo que Paolo está com bola branca, mas sem saber nada sobre a cor da bola do Vladi.

Exc. 19. Uma fábrica tem três máquinas, A, B e C, que respondem, respectivamente, por 40%, 35% e 25% da sua produção. 2% da produção da máquina A consistem em peças defeituosas; essa proporção é de 1% para a máquina B e de 3% para a máquina C. Toma-se uma peça ao acaso da produção da fábrica, e verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina B?

Exc. 20. Verifique numericamente, no âmbito do Exercício 19, a validade da relação

$$\mathbb{P}[B \,\big|\, D] + \mathbb{P}[B^c \,\big|\, D] = 1$$

tomando o evento "peça sorteada veio da máquina B" como B e o evento "peça sorteada é defeituosa" como D. (Aqui B^c significa o complementar do evento B.) Verificar numericamente, significa calcular os valores das duas probabilidades e confirmar que sua somatória é 1.

Exc. 21. Verifique numericamente, no âmbito do Exercício 19 o fato de que

$$\mathbb{P}[B \,\big|\, D] + \mathbb{P}[B \,\big|\, D^c] \text{ não é obrigatoriamente } 1$$

tomando B e D como os do Exc. 20.

Exc. 22. Três moedas são lançadas em sequência. Considere dois eventos:
A=""cara" no primeiro lançamento e "coroa" no segundo",
B="uma "cara" e uma "coroa", em qualquer ordem, nos dois últimos lançamentos".
(a) Mostre que A e B são eventos independentes no caso de as moedas serem honestas.
(b) Mostre que A e B são eventos dependentes no caso de cada moeda tenha 2/3 de probabilidade de sair "cara"e 1/3 de se obter "coroa".

$\triangleright$ O presente comentário destina-se ao professor. Comparando os resultados obtidos para os casos (a) e (b), vemos que a independência entre eventos não é determinada exclusivamente pelas composições das mesmas, mas também por probabilidades atribuídas aos resultados. De fato, A e B são os mesmos nas situações (a) e (b), as quais diferem-se uma da outra somente do ponto de vista de atribuição de probabilidades aos seus resultados. Entretanto, A e B são independentes na situação (a), mas são dependentes na (b).

Exc. 23. Pegamos três moedas honestas e escrevemos $+1$ nas caras e -1 nas coroas. Lançamos as moedas em sequência. Considere dois eventos:
A="a primeira moeda apresentar $+1$",
B="a soma dos números apresentados nas moedas é maior que 0".
Verifique se A e B são eventos independentes ou não.

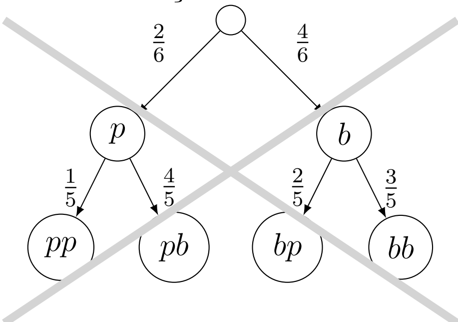
Exc. 24. Quatro moedas honestas são lançadas em sequência. Considere dois eventos:
A="ver mais "caras" que "coroas" nas três primeiras moedas",
B="ver mais "caras" que "coroas" nas três últimas moedas".
Verifique se estes eventos são independentes.

Exc. 25. Três dados equilibrados são lançados em sequência. Considere os seguintes eventos:
A= "a soma das faces do primeiro e do segundo dado é um número par",
B="a soma das faces do segundo e do terceiro dado é um número par".
Decida se A e B são eventos independentes ou não.

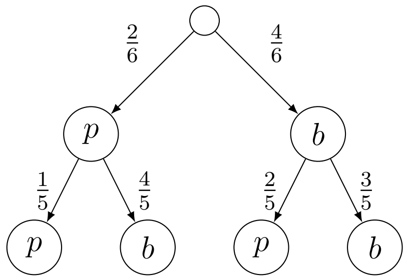
Nota. Se você seguir o padrão de solução que lhe ensinei, você precisará construir o diagrama de árvore de três etapas que possui a bifurcação por 6 ramos em cada nó da primeira e da segunda etapa. A árvore é imensa e incômoda. Nada parecido espera por você nas provas do curso.

2.7 Soluções para exercícios da Seção 2.6

Solução do Exc. 14. O certo é começar a solução com a construção do modelo probabilístico do experimento aleatório enunciado. E a construção passa pelo diagrama de árvore, já que o experimento, no caso, é sequencial. O diagrama correto está à direita no desenho abaixo. Quanto ao diagrama à esquerda, este foi construído por um de meus alunos e está apresentado aqui como um exemplo da escolha infeliz na codificação dos nós da árvore. Especificamente falando, o aluno usou, na segunda etapa da árvore, o código que carrega a informação sobre o resultado da etapa anterior. Isto é totalmente desnecessário; recorde que a regra de construção canonizada manda considerar cada bifurcação como um experimento aleatório simples, o que pressupôs que a marcação de seus resultados esteja desvinculada da marcação de outros nós da árvore. A desobediência do aluno não é um crime, mas levou-o, a partir de sua árvore confusa, para uma codificação confusa dos resultados, e, em sequência, ofuscou o caminho de solução.



~~$\Omega = \{p, b, pb, pp, bp, bb\}$~~



A partir da árvore correta (a da direita), deduz-se o espaço de estados

$$\Omega = \{(p \to p), (p \to b), (b \to p), (b \to b)\}$$

e as probabilidades:

$$I\!P[(p \to p)] = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5}, \; I\!P[(p \to b)] = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}, \; I\!P[(b \to p)] = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5}, \; I\!P[(b \to b)] = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5}.$$

O evento "retirar bola branca na segunda etapa" expressa-se por $\{(b \to b), (p \to b)\}$, chamaremos este de A; e o evento "bola branca na primeira etapa" expressa-se por $\{(b \to b), (b \to p)\}$, denotamos este por B. A expressão matemática da pergunta do exercício é "calcular $\mathbb{P}[B \mid A]$". Usando a fórmula para a probabilidade condicional e as manipulações óbvias com eventos A e B e suas probabilidades, temos:

$$\mathbb{P}[B \mid A] = \frac{I\!P[B \cap A]}{I\!P[A]} = \frac{I\!P[(b \to b)]}{I\!P[(b \to b)] + I\!P[(p \to b)]} = \frac{\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}}{\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}} = \frac{3}{5}$$

A coincidência do resultado com o valor que você vê no galho da árvore que liga b com b não é por acaso, mas a discussão dela será omitida por estar fora do escopo de fatos a perícias que meu leitor deve aprender no momento.

Solução do Exc. 17. Usando o modelo probabilístico que construímos na solução do Exc. 6 para a presença de carne no açougue nos três primeiros dias de sua existência, temos que os eventos

$$T_2 = \{(s \to s \to s), (s \to s \to n), (n \to s \to s), (n \to s \to n)\}$$
$$N_3 = \{(s \to s \to n), (s \to n \to n), (n \to s \to n), (n \to n \to n)\}$$

correspondem aquilo que chamamos por, respectivamente, "ter carne no 2-o dia" e "não ter carne no 3-o dia".

Analisando a pergunta do exercício, conclui-se que esta é sobre $\mathbb{P}[T_2 \mid N_3]$. Usando a fórmula para a probabilidade condicional e as manipulações óbvias com eventos T_2 e N_3 e suas probabilidades (a probabilidade a ser usada é exatamente aquela que construímos na solução do Exc. 6), temos a seguinte conta que nos leva à resposta:

$$\mathbb{P}[T_2 \mid N_3] = \frac{I\!P[T_2 \cap N_3]}{I\!P[N_3]} = \frac{I\!P[(s \to s \to n)] + I\!P[(n \to s \to n)]}{I\!P[(s \to s \to n)] + I\!P[(s \to n \to n)] + I\!P[(n \to s \to n)] + I\!P[(n \to n \to n)]} =$$
$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7} = \frac{36}{113}$$

Solução do Exc. 18. Nesta solução, aproveitamos do modelo probabilístico já feito para o Exercício 7. Recorde esse:

$$\begin{array}{l} \Omega = \{(1 \to 2 \to 3),\, (1 \to 3 \to 2),\, (2 \to 1 \to 3)\, (2 \to 3 \to 1),\, (3 \to 1 \to 2),\, (3 \to 2 \to 1)\} \\ \text{com } I\!P[\omega] = 1/6 \text{ para cada } \omega \in \Omega \end{array} \tag{2.49}$$

sendo que "3" é o número carregado pela bola preta.

Usando a codificação empregada na construção do modelo probabilístico, temos:

$$\begin{aligned} A &= \text{“Paolo retirar bola branca”} = \{(1 \to 2 \to 3); (2 \to 1 \to 3),\, (3 \to 2 \to 1),\, (3 \to 1 \to 2)\} \\ B &= \text{“Chico retirar bola preta”} = \{(3 \to 2 \to 1),\, (3 \to 1 \to 2)\} \end{aligned}$$

Para as contas futuras, precisamos dos valores das probabilidades de A e de $B \cap A$; ambos seguem-se diretamente da atribuição de $I\!P$ apresentada na segunda linha de (2.49):

$$I\!P[A] = \frac{4}{6}, \quad I\!P[B \cap A] = I\!P[\{(3 \to 2 \to 1),\, (3 \to 1 \to 2)\}] = \frac{2}{6}$$

Agora, vem a parte conceitual da solução: você precisa conceber que $I\!P[B \mid A]$ é a expressão formal da pergunta colocada no enunciado do exercício em forma verbal. Isto e a fórmula para a probabilidade condicional dão a resposta final:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}[B \mid A] & = \frac{I\!P[B \cap A]}{I\!P[A]} = & \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{esta é a} & \text{assim que se calcula} & \text{este é o} \\ \text{notação} & \text{seu valor} & \text{resultado} \end{array}$$

Solução do Exc. 19. Esse é um dos problemas da classe que eu chamei "com pegadinhas não intencionais" (veja Seção 2.4.2). Conforme explicado naquela seção, a dificuldade da solução é adivinhar qual é o experimento aleatório que foi escondido por trás da história contada.

É claro que cada um entende a história contada de seu jeito. Eu interpretaria da maneira como se segue. Espero que você concorde com minha interpretação.

Há um imenso lote da produção da fábrica, sendo que todas as peças do lote têm a mesma aparência. Porém, 40% das peças são carimbadas, como se tivessem uma mensagem que impressa "fui produzida pela máquina A"; da mesma forma, 35% das peças são carimbadas "fui produzida pela máquina B", e os restantes 25% são carimbadas "fui produzida pela máquina C". Ainda, 2% das peças da máquina A possuem defeito, 1% das peças da máquina B possuem defeito e 3% das peças da máquina C possuem defeito. Claro que todas as peças do lote são bem misturadas de maneira que, ao se retirar uma peça do lote, a probabilidade de qualquer uma delas ser escolhida é a mesma. Então, alguém retirou uma peça ao caso e viu que ela é defeituosa, mas este alguém não sabe interpretar os carimbos presentes nas peças e, portanto, não sabe de qual das máquinas a peça veio. Na perspectiva deste "alguém" existe a pergunta: "Qual é a probabilidade da peça ter sido produzida pela máquina B?"

A relação

$$\text{enunciado original} \Leftrightarrow \text{interpretação do parágrafo acima} \tag{2.50}$$

é a mesma que a relação entre o enunciado do Exemplo 27 com o do Exemplo 24. Portanto, se a presente derivação da relação (2.50) não ficou clara, sugiro que você volte a ler Exemplo 27.

A continuação de solução pode ser feita em duas maneiras: via abordagem intuitiva e via abordagem canônica. A duas foram explicadas no Exemplo 24. Agora, nós vamos simplesmente executar tais abordagens.

Vamos primeiramente executar a abordagem canônica. Como em cada peça retirada observa-se a origem e o fato de ser ou não defeituosa, então o espaço de estados apropriado é

$$\Omega = \{aboa, adef, bboa, bdef, cboa, cdef\} \tag{2.51}$$

Como todas as peças são idênticas, então, seguindo as proporções representadas no lote todo, tem-se que

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}[aboa] = 0,4 \times 0,98 & \mathbb{P}[bboa] = 0,35 \times 0,99 & \mathbb{P}[cboa] = 0,25 \times 0,97 \\ \mathbb{P}[adef] = 0,4 \times 0,02 & \mathbb{P}[bdef] = 0,35 \times 0,01 & \mathbb{P}[cdef] = 0,25 \times 0,03 \end{array} \tag{2.52}$$

(Nessa atribuição de probabilidades, usamos a expressão de proporção por probabilidade.)

A tabela abaixo apresenta a introdução de eventos A, B, C e D em termos verbais e suas expressões por subconjuntos de Ω:

$$\begin{array}{lcr} A = & \text{“a peça retirada foi produzida pela máquina A”} & = \{aboa, adef\} \\ B = & \text{“a peça retirada foi produzida pela máquina B”} & = \{bboa, bdef\} \\ C = & \text{“a peça retirada foi produzida pela máquina C”} & = \{cboa, cdef\} \\ D = & \text{“a peça retirada é defeituosa”} & = \{adef, bdef, cdef\} \end{array}$$

O problema do exercício tem a seguinte expressão formal: achar $\mathbb{P}[B \mid D]$. As construções e definições acima apresentadas, junto com a definição da probabilidade condicional, dão a resposta:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B \mid D] &= \frac{\mathbb{P}[B \cap D]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{\mathbb{P}[bdef]}{\mathbb{P}[adef] + \mathbb{P}[bdef] + \mathbb{P}[cdef]} \\ &= \frac{0,35 \times 0,01}{0,40 \times 0,02 + 0,35 \times 0,01 + 0,25 \times 0,03} \\ &\approx 0,1842. \end{aligned}$$

Agora, vamos executar a abordagem intuitiva. Para que essa funcione, falta-nos ter a informação sobre o número total de peças no lote. A abordagem canônica executada acima mostra que esse número realmente não afeta o resultado final. Parece-me que esse fato é bem intuitivo e que ele serve de amparo para a ideia de que esse número pode ser escolhida à vontade e de maneira cômoda. O número cômodo aqui é o número com que todas as quantidades tornam-se em números inteiros. No caso, é 2000 (ou qualquer múltiplo de 2000).

Imagina então que no lote há 2000 peças idênticas, sendo que

800 são carimbadas "produzida pela máquina A"
700 são carimbadas "produzida pela máquina B"
500 são carimbadas "produzida pela máquina C"

e que das peças produzidas pela máquina A, 16 têm carimbo "defeituosa", daquelas produzidas pela máquina B, 7 têm este carimbo, e daquelas produzidas pela máquina C, 15 têm este carimbo.

Retiramos ao acaso uma peça (a probabilidade de qualquer uma peça específica ser retirada é igual para todas e seu valor é 1/2000). Vimos que ela carrega o carimbo "defeituosa", mas não prestamos atenção ao carimbo que identifica a origem de sua produção. Perguntamos: "Qual é a probabilidade da peça ter vindo da produção da máquina B?"

Como sabemos que a peça retirada é defeituosa, nosso espaço amostral reduz-se ao universo de peças defeituosas. Ao total são $16 + 7 + 15 = 38$. A probabilidade da peça ter vindo da produção da máquina B é a proporção relativa das peças de B nesse universo. Logo, a probabilidade procurada é

$$\frac{7}{16 + 7 + 15} \approx 0,1842 \tag{2.53}$$

Solução do Exc. 20. Recorde que

$$\mathbb{P}[B \mid D] = \frac{I\!\!P[B \cap D]}{I\!\!P[D]} = \frac{I\!\!P[(bdef)]}{I\!\!P[(adef)] + I\!\!P[(bdef)] + I\!\!P[(cdef)]} \approx 0,1842. \tag{2.54}$$

Da maneira idêntica tem-se que

$$\mathbb{P}[B^c \mid D] = \frac{I\!\!P[\overline{B} \cap D]}{I\!\!P[D]} = \frac{I\!\!P[(adef)] + I\!\!P[(cdef)]}{I\!\!P[(adef)] + I\!\!P[(bdef)] + I\!\!P[(cdef)]} \approx 0,8158. \tag{2.55}$$

É óbvio que a soma dos valores numéricos das duas expressões acima dá 1. Não é difícil ver o porquê: a soma das duas razões é

$$\frac{I\!\!P[(adef)] + I\!\!P[(bdef)] + I\!\!P[(cdef)]}{I\!\!P[(adef)] + I\!\!P[(bdef)] + I\!\!P[(cdef)]} = 1$$

Solução do Exc. 21.
$\mathbb{P}[B \mid D] = 18,42\%$. Se $I\!\!P[D] = 0,019$, então $I\!\!P[D^c] = 0,981$; calculando $\mathbb{P}[B \mid D^c]$, temos $\mathbb{P}[B \mid D^c] = \frac{0,3465}{0,981} = 0,3532$ e, desta forma, 0,3532 + 0,1842 é diferente de 1.

Observação ao Exc. 21. Que $\mathbb{P}[B \mid D] + \mathbb{P}[B \mid D^c]$ não é 1 é difícil de ser explicado, sem mesmo precisar de fazer contas. O que é muito difícil explicar, sem fazer as contas, é por que $\mathbb{P}[B \mid D] + \mathbb{P}[B \mid D^c]$ não é $I\!\!P[B]$. Todas as vezes que precisei dar esta explicação era necessário lutar contra a intuição corrompida que assegura erradamente que $\mathbb{P}[B \mid D] + \mathbb{P}[B \mid D^c]$ deve ser igual a $I\!\!P[B]$. Esta intuição diz: pegaremos todas as peças defeituosas e recolheremos dentre elas somente as que foram produzidas pela máquina B. Depois pegaremos todas as peças boas e também separaremos delas as que foram produzidas por B. Juntando os dois montes das peças separadas, recuperaremos todas as peças da produção de B. Portanto, $\mathbb{P}[B \mid D] + \mathbb{P}[B \mid D^c]$ deve ser igual $I\!\!P[B]$. É claro que não! Esse raciocínio fez as contas em valores absolutos! Isso é diferente das probabilidades $\mathbb{P}[B \mid D]$, $\mathbb{P}[B \mid D^c]$ e $I\!\!P[B]$, que são valores relativos.

Uma maneira alternativa de se convencer que $\mathbb{P}[B \mid D] + \mathbb{P}[B \mid D^c]$ não pode sair $I\!\!P[B]$ é escrever as probabilidades envolvidas em forma de razões:

$$\mathbb{P}[B \mid D] = \frac{I\!\!P[B \cap D]}{I\!\!P[D]};\ \mathbb{P}[B \mid D^c] = \frac{I\!\!P[B \cap D^c]}{I\!\!P[D^c]};\ I\!\!P[B] = \frac{\text{número de pecas produzidas por B}}{\text{número total de peças produzidas}}$$

e observar que estas razões têm denominadores diferentes, o que elimina qualquer esperança de poder reverter os cálculos apresentadas acima em valores absolutas, para uma relação em termos destas probabilidades.

Solução do Exc. 22(a): $A = \{(h \to t \to h), (h \to t \to t)\}$ e $B = \{(h \to h \to t), (h \to t \to h), (t \to h \to t)(t \to t \to h)\}$ e, portanto, $A \cap B = \{(h \to t \to h)$.

Usando o fato que as moedas são honestas, calculamos que $\mathbb{P}[A] = (1/2).(1/2).(1/2) + (1/2).(1/2).(1/2) = 2/8$, $\mathbb{P}[B] = (1/2).(1/2).(1/2) + (1/2).(1/2).(1/2) + (1/2).(1/2).(1/2) + (1/2).(1/2).(1/2) = 4/8$
$\mathbb{P}[A \cap B] = (1/2).(1/2).(1/2) = 1/8$ e, dessa forma, temos que $\mathbb{P}[A \cap B] = 1/8 = (2/8).(4/8) = \mathbb{P}[A].\mathbb{P}[B]$, o que mostra que A e B são independentes.

Solução do Exc. 22(b): Diferentemente do item anterior, neste caso, obter cara ou coroa têm probabilidades distintas. Isso se reflete nas contas a seguir: $\mathbb{P}[A] = (2/3).(1/3).(2/3) + (2/3).(1/3).(1/3) = 6/27$, $\mathbb{P}[B] = (2/3).(2/3).(1/3) + (1/3).(2/3).(1/3) + (2/3).(1/3).(2/3) + (1/3).(1/3).(2/3) = 12/27$, $\mathbb{P}[A \cap B] = (2/3).(1/3).(2/3) = 4/27$ e, dessa forma, temos que $\mathbb{P}[A \cap B] = 4/27$, que é diferente de $(6/27).(12/27) = \mathbb{P}[A].\mathbb{P}[B]$, o que mostra que A e B são dependentes.