“Noções de Estatística”
disciplinas MAE0116 e MAE0110 da USP
Assuno da aula: PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA
Assunto desta série de transparências: INDEPENDÊNCIA

Ministrante Prof. Dr. Vladimir Belitsky, IME-USP

1 de abril de 2023

Independência. Definição formal.

Começo com a definição, e logo em seguida pretendo demonstrar que esta é uma formalização fiel daquilo que nossa intuição concebe como a independência.

Definição intuitiva, mas não tradicional: Sejam A e B dois eventos arbitrários definidos num mesmo experimento aleatório, também arbitrário. Então diz-se que o evento B **não depende** do evento A, caso valer a igualdade entre a probabilidade incondicional de B e a probabilidade condicional de B dada a ocorrência do evento A, isto é, caso

$$\boldsymbol{P}\big[B \,\big|\, A\big] = \boldsymbol{P}\big[B\big] \tag{1}$$

O verbo **independer** usa-se comumente como o sinônimo de "não depender". Já quando a igualdade (1) não vale, diz-se que B **depende** de A.
Quase que esqueci de avisar que A da definição precisa ter probabilidade não nula (veja a explicação na lousa).

Independência. Uso cotidiano.

Levei meu carro a oficina mecânica e falei:
"Está escapando água do sistema de refrigeração e parece também haver problema na rede elétrica. Só posso deixar carro na sua oficina por uma hora. Será que vale a pena levar o carro ao elétrico antes de pedir de você tratar a perda de água?"
O mecânico respondeu:
"A perda de água não depende dos problemas da rede elétrica".

Isso pode ser formalizado assim:

Saber onde fica o problema na rede elétrica não afeta em nada o serviço de procura e eliminação do problema de perda de água.

O que pode ser re-escrito na forma mais próxima a nossa notação científica:

A probabilidade de eliminar o problema de perda de água em uma hora é a mesma que a probabilidade de eliminar o problema de perda de água em uma hora sabendo o local do problema da rede elétrica.

Independência. Uso cotidiano.

Segundo conta minha empregada, o avô dela tomava café de manhã observando o curral. Se visse o primeiro boi virar à esquerda após sair do portão, então levava guarda-chuva pois acreditava que que tal comportamento de boi indicava a maior chance de chuva.

Na Faculdade de Geociências da USP explicaram para mim que a chuva não tem nada a ver com tal comportamento do animal. Após a discussão que esclareceu que ambos os eventos são aleatórios, a afirmação dos cientistas adquiriu a seguinte forma: *A probabilidade de chuver num dia é a mesma que a probabilidade de chuver nesse dia sabendo que em sua manhã o primeiro boi do rebanho do avô virou a esquerda ao sair de seu curral.*

Independência. Formal versus cotidiano.

Comentário: o uso cotidiano/intuitivo do conceito de independência bate SEMPRE com a definição formal. O problema é que a demostração da relação pode ser trabalhosa devido à dificuldade na revelação da presença de probabilidade em situações cotidianas.

Um apostador num cassino: “Quando começo a jogar, aposto em números ímpares, e, na segunda rodada, independentemente do resultado da primeira, aposto na cor vermelha.”

Minha emregada doméstica: “Independemente da previsão de tempo, sempre levo guardachuva”.

Meu pior aluno: “É uma ... de disciplina; vou reprovar indpendente se estudar ou não”.

Minha amada filinha: “Vou para Europa nas próximas férias independentemente de sua concordância”.

Minha (ainda) esposa: “O divórcio vai acontecer independentemente se você desejar ou não!!!”

Um ministro do meu querido Brasil: “Política do Brasil independe da política dos Estados Unidos.”

Independência. Ilustração por meio do Diagrama de Venn.

Veja o desenho na lousa.

Independência. Propriedades matemáticas.

Um pouquinho de argumentos formais que vão nos levar à definição alternativa de independência e ensinar resolver alguns exercícios (coisa útil, se for lembrar das provas que lhe esperam no futuro).

Teorema 1 *(troca por complementar do evento condicionador)*:
Se B independe de A então B independe de A^c.

Demostração intuitiva: Se "chuver" não dependia do "boi virar à esquerda", então "chuver" não pode depender do "boi virar à direita".

Teorema 2 *(troca de lugares)*:
Se B independe de A então A independe de B.

Independência. Propriedades matemáticas.

Esta transparência é para ser espreitada por um bom tempo até que seu interior concordar com o fato de que ser complicada e complexa, a demostração do Teorema 2 não tem como.

Teorema 2 *(troca de lugares)*:
Se B independe de A então A independe de B.

Tenho:

$$\boldsymbol{P}[B \mid A] = \boldsymbol{P}[B]$$

quero dedizr disto que

$$\boldsymbol{P}[A \mid B] = \boldsymbol{P}[A]$$

Independência. Propriedades matemáticas.

Tomo um B que não depende de A, faço a seguinte conta

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\left[A \,\middle|\, B\right] \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[A \cap B]}{\boldsymbol{P}[B]} \big(\text{usamos a fórmula da probabilidade condicional}\big) \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[A \cap B]}{\boldsymbol{P}[B]} \frac{\boldsymbol{P}[A]}{\boldsymbol{P}[A]} = \frac{\boldsymbol{P}[A \cap B]}{\boldsymbol{P}[A]} \frac{\boldsymbol{P}[A]}{\boldsymbol{P}[B]} \Big(\text{multiplicamos por } 1 = \frac{\boldsymbol{P}[A]}{\boldsymbol{P}[A]} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e remanejamos}\Big) \\
&= \frac{\boldsymbol{P}\left[B \,\middle|\, A\right]}{\boldsymbol{P}[B]} \boldsymbol{P}[A] \qquad \text{usamos a fórmula da probabilidade condicional}\big) \\
&= \boldsymbol{P}[A] \qquad \big(\text{usamos a hipótese que } \boldsymbol{P}\left[B \,\middle|\, A\right] = \boldsymbol{P}[B]\big)
\end{aligned}
$$

e concluo que então A não depende de B.

Independência. Propriedades matemáticas.

$\boxed{B \text{ independe de } A}$

Teorema 1$\swarrow$ $\searrow$Teorema 2

$\boxed{B \text{ independe de } A^c}$ $\boxed{A \text{ independe de } B}$

Teorema 2 $\downarrow$ $\downarrow$Teorema 1

$\boxed{A^c \text{ independe de } B}$ $\boxed{A \text{ independe de } B^c}$

Teorema 1$\downarrow$ $\downarrow$Teorema 2

$\boxed{A^c \text{ independe de } B^c}$ $\boxed{B^c \text{ independe de } A}$

Teorema 2 $\searrow$ $\swarrow$ Teorema 1

$\boxed{B^c \text{ independe de } A^c}$

Independência. Propriedades matemáticas.

O diagrama da transparência anterior mostra que a relação de independência é simétrica. A definição abaixo reflete esta simetria:

Definição de independência, tradicional mas não intuitiva: Diz-se que events A e B são independentes, caso

$$\boldsymbol{P}\left[B \cap A\right] = \boldsymbol{P}\left[B\right] \times \boldsymbol{P}\left[A\right] \tag{2}$$

As duas definições são equivalentes, fato decorrente da definição da probabilidade condicional:

$$\boldsymbol{P}[B \mid A] = \frac{\boldsymbol{P}[B \cap A]}{\boldsymbol{P}[A]}$$

Mas a segunda possui a simetria intrinsica da independência já embutida em sua formulação. É por isto, que é mais usada.

Independência. Exercícios.

Exercício. Há três moedas, cada uma das quais dá "cara" (h) com a probabilidade $\frac{2}{3}$, e "coroa" (t) com a probabilidade $\frac{1}{3}$. As moedas serão lançadas em sequencia (assuma que as moedas têm cores diferentes para que seja claro que trata-se aqui de um experimento aleatório sequencial). Considere dois eventos:
A= "obter uma "cara" (h) e uma "coroa" (t) nos dois primeiros lançamentos, em qualquer ordem",
e
B= "obter duas "caras" nos dois últimos lançamentos".

Verifique se A e B são eventos são idependentes.

Independência. Exercícios.

Por método de diagrama de árvore, tempos Ω:

$$\{(h \to h \to h), (t \to h \to h), (h \to t \to h), (h \to h \to t), (t \to t \to h), (t \to h \to t), (h \to t \to t), (t \to t \to t)\},$$

e, em termos dessa codificação, temos:

$$A = \{(t \to h \to h), (h \to t \to h), (t \to h \to t), (h \to t \to t)\}$$
$$B = \{(h \to h \to h), (t \to h \to h)\}$$

Para saber se os eventos são independentes temos que comparar

$$\boldsymbol{P}[A \cap B] \text{ com } \boldsymbol{P}[A] \times \boldsymbol{P}[B].$$

Independência. Exercícios.

Diretamente das expressões para A e B, deduzimos que

$$A \cap B = \{(t \to h \to h)\}$$

Da definição de probabilidade para eventos, temos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[A] &= 2 \times \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \tfrac{1}{3} + 2 \times \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \tfrac{2}{3} \;=\; \tfrac{12}{27} \\
\boldsymbol{P}[B] &= \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \;+\; \tfrac{1}{3} \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \;=\; \tfrac{12}{27} \\
\boldsymbol{P}[A \cap B] &= \tfrac{1}{3} \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \;=\; \tfrac{4}{27}
\end{aligned}$$

e como

$$\boldsymbol{P}[A] \times \boldsymbol{P}[B] \;=\; \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} \neq \frac{4}{27} \;=\; \boldsymbol{P}[A \cap B]$$

conclua-se que os eventos A e B são DEPENDENTES.

Independencia. Exercícios.

Eis a solução **ERRADA** deste mesmo exemplo: Começa assim como a solução certa:
Por método de diagrama de árvore, tempos Ω:

$$\{(h \to h \to h), (t \to h \to h), (h \to t \to h), (h \to h \to t), (t \to t \to h), (t \to h \to t), (h \to t \to t), (t \to t \to t)\},$$

e, em termos dessa codificação, temos:

$$A = \{(t \to h \to h), (h \to t \to h), (t \to h \to t), (h \to t \to t)\}$$
$$B = \{(h \to h \to h), (t \to h \to h)\}$$
$$A \cap B = \{(t \to h \to h)\}$$

Para saber se os eventos são independentes temos que comparar

$$\boldsymbol{P}[A \cap B] \text{ com } \boldsymbol{P}[A] \times \boldsymbol{P}[B].$$

Independência. Exercícios.

Vamos calcular as probabilidades:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{P}[A] == 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} \; = \; \frac{12}{27} \\ \boldsymbol{P}[B] = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \; + \; \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \; = \; \frac{12}{27} \\ \boldsymbol{P}[A \cap B] = \boldsymbol{P}[A] \; \times \; \boldsymbol{P}[B] \; = \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} \; = \; \frac{12 \times 12}{27^2} \end{array}$$

e como

$$\boldsymbol{P}[A] \times \boldsymbol{P}[B] \; = \; \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} \; = \; \frac{12 \times 12}{27^2} \; = \boldsymbol{P}[A \cap B]$$

conclua-se que os eventos A e B são INDEPENDENTES.

O erro está no uso <u>antecipado</u> da independência <u>não verificada</u> para o cálculo de $\boldsymbol{P}[A \cap B]$ como $\boldsymbol{P}[A] \times \boldsymbol{P}[B]$; o CORRETO é calcular $\boldsymbol{P}[A \cap B]$ diretamente a partir de sua expressão como conjunto de resultados.

Independência

Os eventos de uma coleção chamam-se **independentes** se, ao tomar qualquer dois subcoleções da coleção que não tenham eventos comuns, as intersecções das subcoleções forem independentes.

Por exemplo, se alguem lhe disse que A, B, C, D, E, F são independentes, então você tem, segundo a definição, que, por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[(A \cap C) \cap (B \cap E \cap F)] &= \boldsymbol{P}[A \cap C] \times \boldsymbol{P}[B \cap E \cap F] \\
\boldsymbol{P}[A \cap C] &= \boldsymbol{P}[A] \times \boldsymbol{P}[C] \\
\boldsymbol{P}[A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F] &= \boldsymbol{P}[A] \times \boldsymbol{P}[B] \times \\
&\quad \times \boldsymbol{P}[C] \times \boldsymbol{P}[D] \times \boldsymbol{P}[E] \times \boldsymbol{P}[F]
\end{aligned}
$$

Não haverão neste curso necessidades que exijam um aprofundamento maior no presente assunto. Tb não será cobrado em exercícios e provas.

Independência

No nosso curso, não vamos <u>VERIFICAR</u> a independencia entre eventos. Vamos aproveitar das propriedades decorrentes da independência, sendo que a presença desta será <u>GARANTIDA</u> pela estrutura dos experimentos aleatórios considerados.

É sobre isto que versa o resto da presente aula.

Estou mentindo, mas um pouco só: vamos verificar a independência, sim, mas somente nos exercícios referentes a presente tema.

Independência

EXEMPLO. Três dados equilibrados são lançados em sequencia: primeiramente, o branco, depois o cinza e por último, o preto. Definimos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{obter face par no primeiro dado}\} \\ B &= \{\text{obter no segundo dado número maior que no trceiro}\} \end{aligned}$$

Demonstre que A e B são independentes.

Antes da demonstração, vamos formular uma propriedade genérica que garante a indpendência entre A e B no exemplo acima. É a propriedade mencionada na transparência anterior. Ela será frequentemente usada para identificar independência, a qual, por sua vez, será usada em contas específicas involvendo esperanças matemáticas e variâncias.

Independência

PROPRIEDADE que garante independência: Seja um experimento aleatório composto. Sejam suas etapas proferidas de maneira independente, quer dizer, em cada etapa, profere-se o mesmo (simples) experimento aleatório, que pode depender do número da etapa, mas naõ depende dos resultados dos experimentos aleatórios proferidos em outras etapas. Suponha que hajam dois eventos, A e B. Suponha que A foi definido por resultados de algumas etapas, enquanto que B foi definido por resultados de outras etapas. Então A e B são eventos

Independência

Solução do EXEMPLO:
O diagrama de árvore nos dá que

$$\Omega = \{(1,1,1),(1,1,2),\ldots,(6,6,6)\}$$

e que a probabilidade de cada uma das $6 \times 6 \times 6 = 216$ é $\frac{1}{216}$.
Temos que

$$\begin{aligned} A = \{ \quad & (2,1,1),\ldots,(2,6,6), \\ & (4,1,1),\ldots,(4,6,6), \\ & (6,1,1),\ldots,(6,6,6)\} \end{aligned}$$

está composto de $3 \times 6 \times 6$ realizações. Logo, $\boldsymbol{P}[A] = \frac{3\times6\times6}{6\times6\times6} = \frac{1}{2}$.

Independência

Temos que

$$
\begin{aligned}
B = \{ \quad & (1,2,1),\\
& (1,3,1),(1,3,2),\\
& (1,4,1),(1,4,2),(1,4,3),\\
& (1,5,1),(1,5,2),(1,5,3)(1,5,4),\\
& (1,6,1),(1,6,2),(1,6,3),(1,6,4),(1,6,5),
\end{aligned}
$$

e mais tudo isto repetido para $2,3,4,5,6$ no lugar do primeiro 1.

São 6×15 realizações. Logo $\boldsymbol{P}[B] = \frac{6\times 15}{6\times 6\times 6}$.

Independência

A intersecção entre A e B acha-se sorteando realizações, uma por uma:

$$\begin{aligned} A \cap B = \{ \quad & (2,2,1), \\ & (2,3,1),(2,3,2), \\ & (2,4,1),(2,4,2),(2,4,3), \\ & (2,5,1),(2,5,2),(2,5,3)(2,5,4), \\ & (2,6,1),(2,6,2),(2,6,3),(2,6,4),(2,6,5), \end{aligned}$$

e mais tudo isto repetido para 4 e 6 no lugar do primeiro 2.

São, então 3×15 realizações que compõem $A \cap B$, portanto $\boldsymbol{P}[B] = \frac{3 \times 15}{6 \times 6 \times 6}$.

Independência

Vamos à verificação da independência. Precisamos comparar

$$\boldsymbol{P}\left[A \cap B\right] \text{ com } \boldsymbol{P}\left[A\right] \times \boldsymbol{P}\left[B\right]$$

Do lado esquerdo, temos $\frac{3\times 15}{6\times 6\times 6}$, e do lado direito, temos

$$\frac{3 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6} \times \frac{6 \times 15}{6 \times 6 \times 6} = \frac{3 \times 15}{6 \times 6 \times 6}$$

São valores iguais, e, portanto, podemos alegar que A e B são eventos independentes.