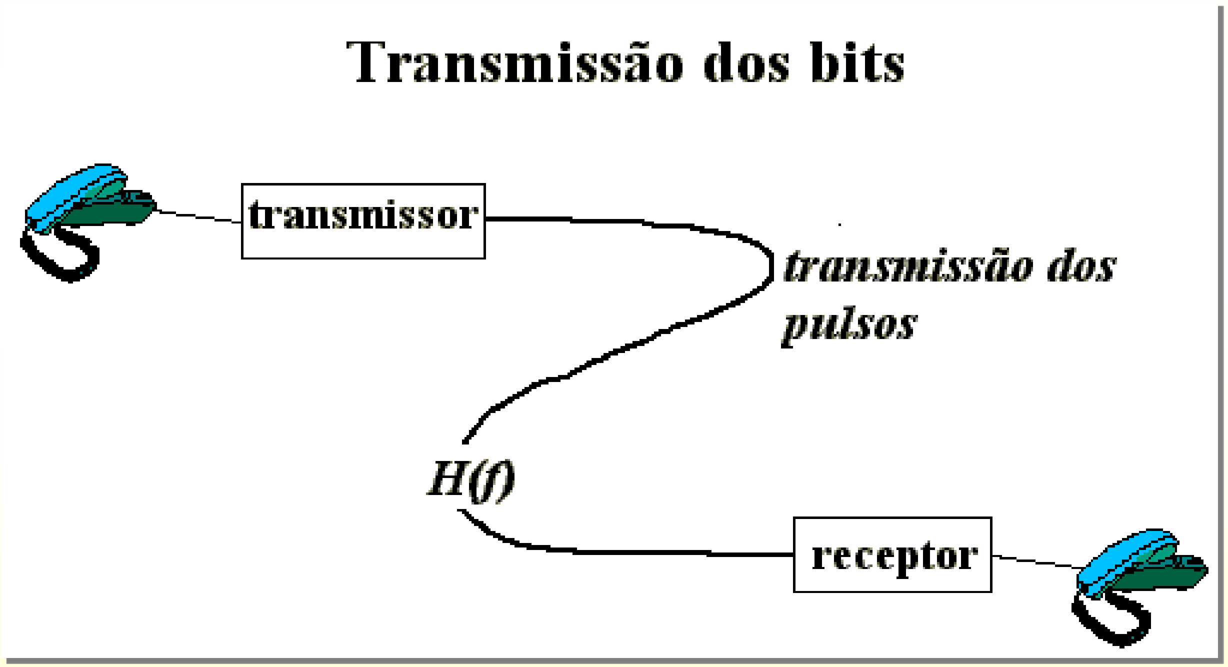
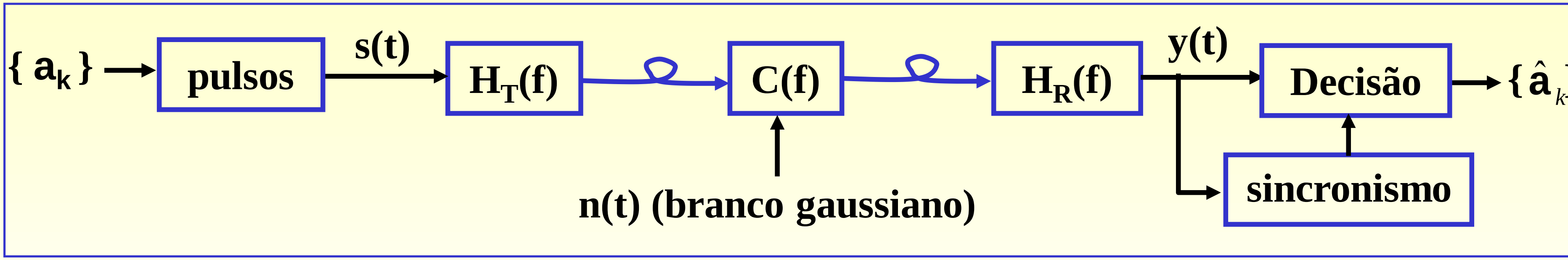
Transmissão Digital em Banda Base



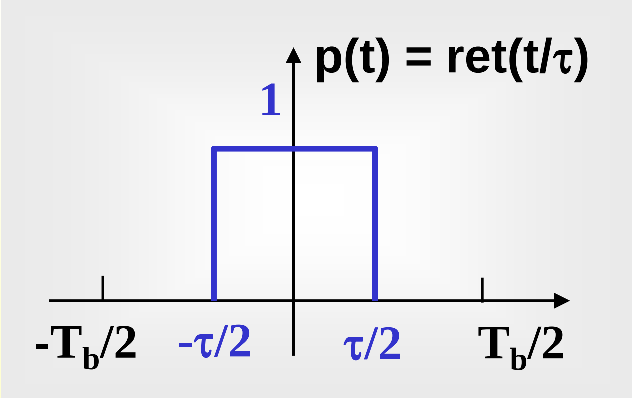
Modelo do sistema



No transmissor

- A saída do gerador de pulsos é dada por: $$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, p(t - kT_b)$$

- onde a_k é uma variável aleatória discreta: { a, -a } (polar),
- p(t) é modelado por um pulso retangular de amplitude unitária e largura τ,



- o sinal s(t) [trem de pulsos] passa pelo filtro transmissor e é enviado ao receptor através do canal [C(f)] onde é contaminado pelo ruído aditivo n(t).
- $\tau << T_b$ (pulsos estreitos).

No Receptor

- Admitindo atraso nulo, então na saída do filtro receptor tem-se:

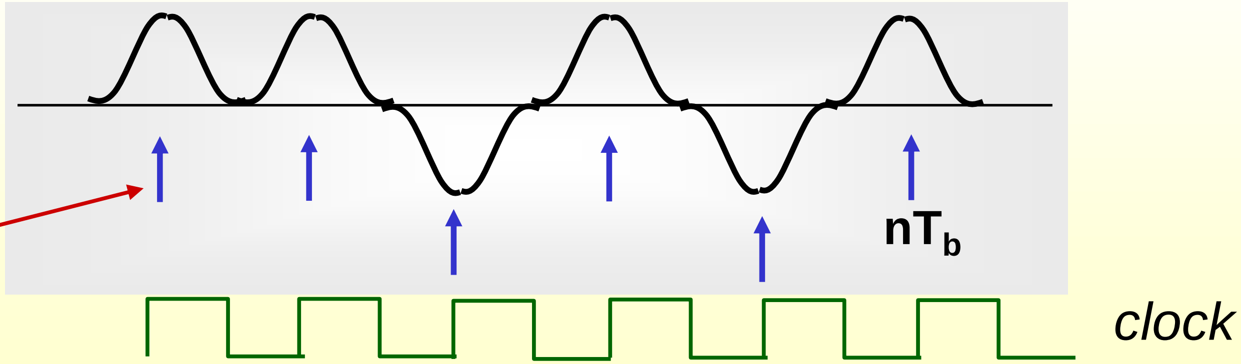
$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, p_R(t-kT_b)+n_R(t)$$

- onde: $n_R(t)$ é o ruído na saída de $H_R(f)$.
  a transformada de Fourier do pulso é dada por:

$$P_R(f)=H_T(f)C(f)H_R(f)$$ $\tau << T_b$

- O circuito de decisão decide [a cada T_b] qual símbolo a_k foi transmitido:
- O instante de decisão é determinado por um sinal de sincronismo (*clock* - relógio) obtido a partir de y(t).

Instantes de decisão



- **Nos instantes de decisão: t = T_b tem-se que:**

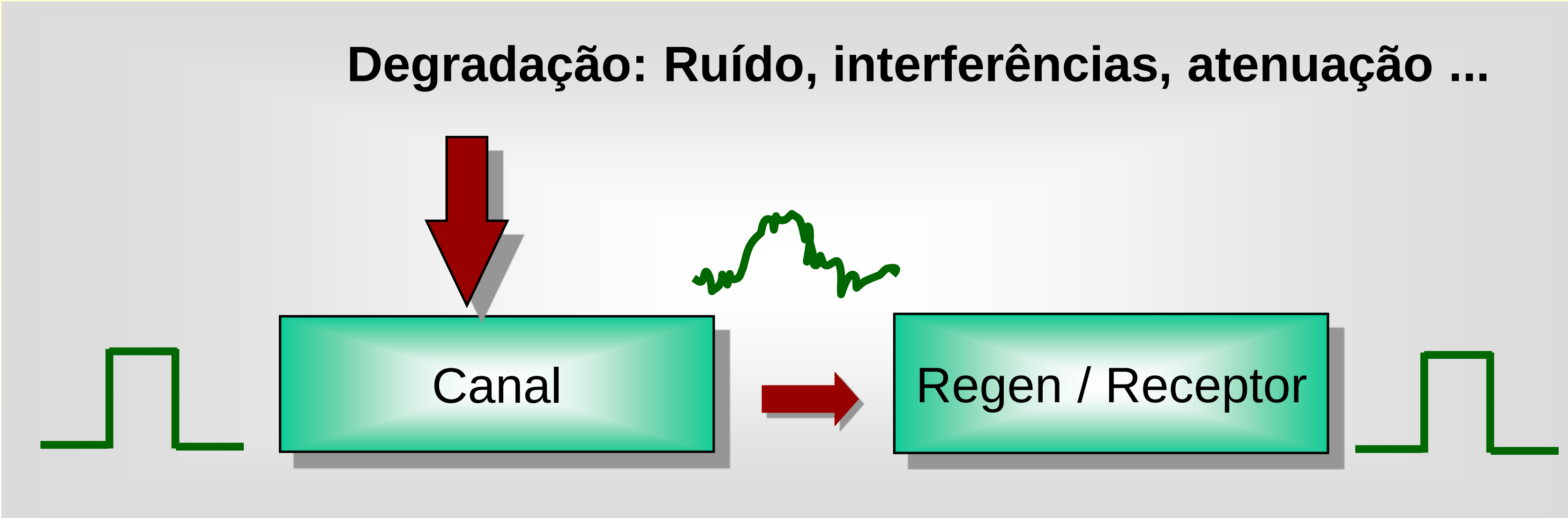
$$y(nT_b) = a_n p_R(0) + \sum_{k \neq n} a_k p_R\big((n-k)T_b\big) + n_R(nT_b)$$

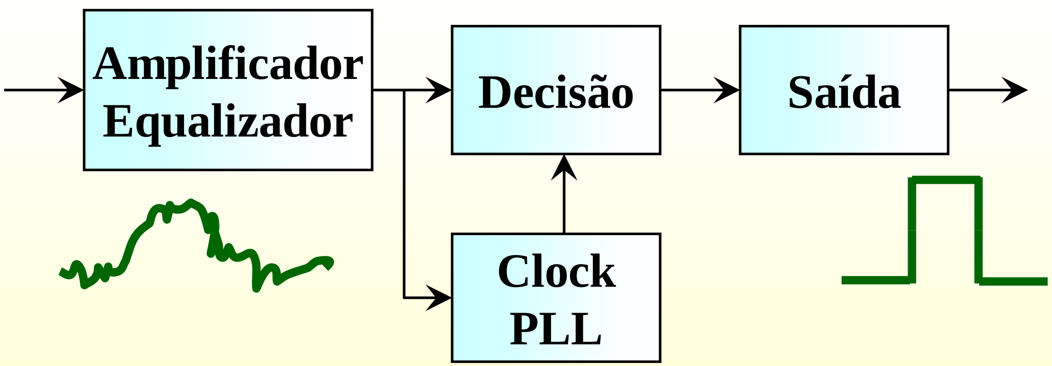
- a_n é o pulso detectado no instante t = nT_b.
- Os outro dois termos são: a interferência entre símbolos (ies) e ruído,
- Eles podem causar erros no processo de detecção.
- **Desafio de projeto:**
  - Projetar **filtros** do transm. e receptor que minimizem a ies e o ruído.
  - De modo a minimizar a probabilidade de erro de bit.

Considerações sobre o canal

- Pares de fios ou cabos, fibras ópticas, link de microondas,
  - Introdução de ruído [n(t)],
  - Distorção [C(f)],
  - Atenuação,
  - Estes problemas aumentam com a distância. (Solução: colocar regeneradores ao longo da linha)

Regeneradores ao longo da linha:





- Colocados a cada 2 km em pares metálicos.
- Controla as distorções.
- Se a decisão for correta as distorções são eliminadas.

1. Potência do sinal digital

Parâmetros importantes do sistema

- Taxa de bits (f_b ou R_b),
- Potência média transmitida,
- Formato do Pulso,
- Probabilidade de erro de bit (ber) - [10^{-4} e 10^{-6}].

A potência média de um trem de pulsos é definida como:

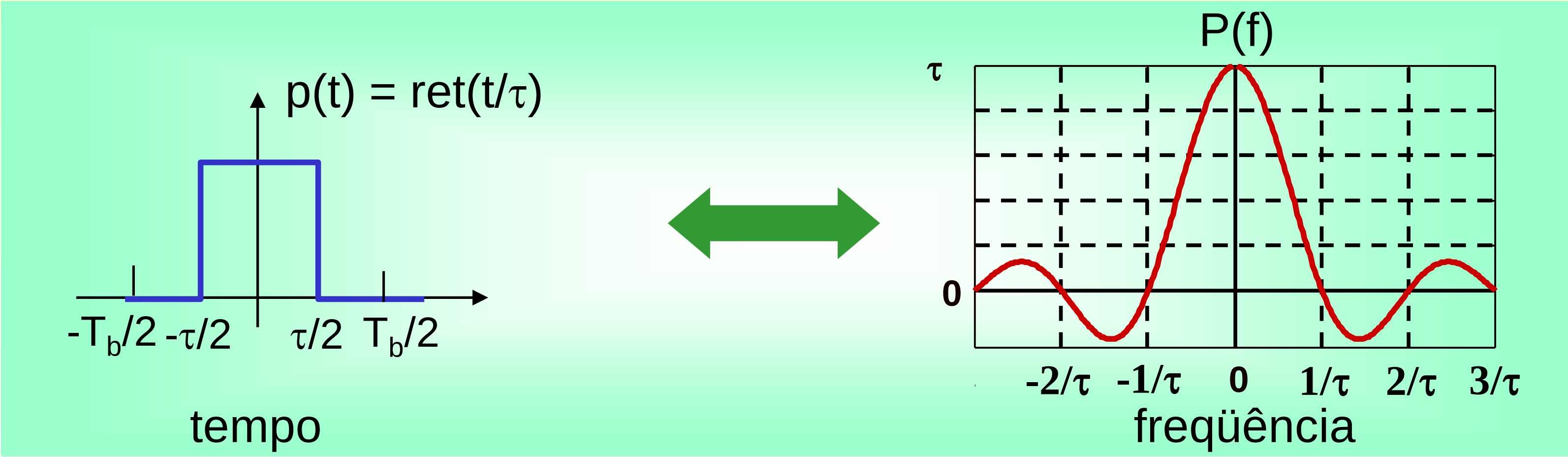
$$P_T = \left\langle \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} \left[\sum_{k=-N}^{N} a_k\, p(t-kT_b) \right]^2 dt \right\rangle$$

Admitindo símbolos equiprováveis, onde a_k = { a ou -a } então:

$$P_T = \frac{a^2}{T_b} \int_{-\infty}^{\infty} |\, P_R(f)\,|^2 \, df = \frac{a^2}{T_b} \int_{-\infty}^{\infty} p_R^2(t)^2 \, dt$$

2. Transmissão de pulsos retangulares

- $p(t) = ret(t/\tau)\ (T_b/2 < \tau < T_b)$ <==> $P(f) = \tau.sinc(f\ \tau)$



- **Problemas:**
  - A largura de faixa deve se estender até o infinito: A função de transferência do sistema deve ser plana e com fase linear.
    - Introdução de ruído (quanto maior Bw, maior o ruído).
  - O canal não tem resposta plana (pulso decai com o tempo).
  - As caudas dos pulsos interferem nos adjacentes podendo inverter a polaridade (ies) acarretando erros.
  - Dado prático: Bw. $\tau > 0.5$
  - Na prática não é necessário nem útil preservar a largura de faixa.

3. Formato do pulso

- Vamos estudar uma maneira de especificar o pulso recebido, dado que:

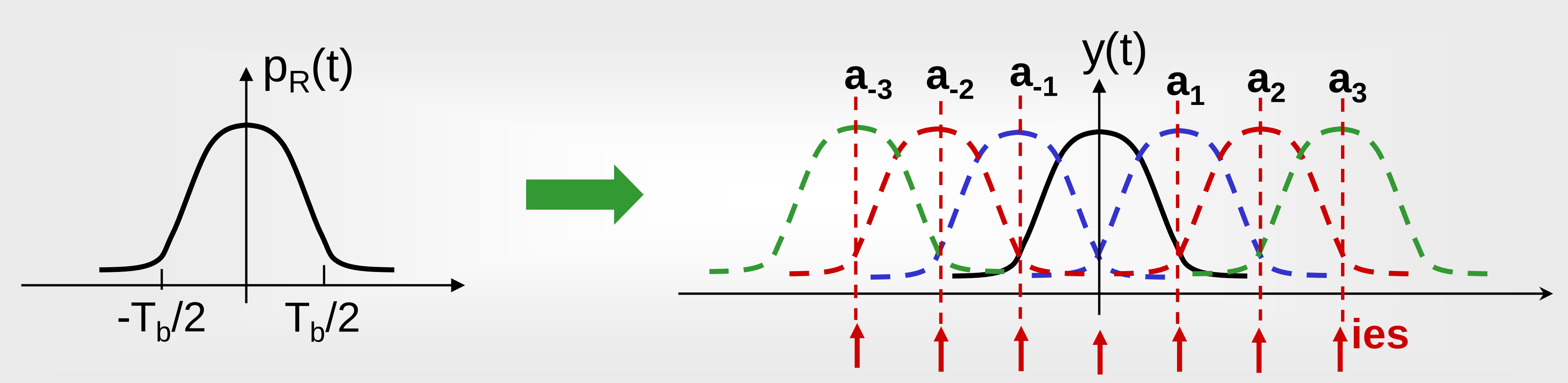
$$P_R(f) = H_T(f)C(f)H_R(f)$$

- Com as seguintes restrições:
  - O sistema deve apresentar banda limitada.
  - Interferência entre símbolos deve ser nula.

Interferência entre Símbolos

- Admitindo transmissão livre de ruído:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, p_R(t - kT_b)$$



No instante de decisão t = 0 deveria-se ter: $y(0) = a_0 p_R(o)$. Contudo tem-se:

$$y(0) = a_0 p_R(0) + a_1 p_R(-T_b) + a_2 p_R(-2T_b) + \cdots$$
$$+ a_{-1} p_R(T_b) + a_{-2} p_R(2T_b) + \cdots$$

No instante de decisão qualquer $t = nT_b$:

$$y(nT_b) = \underbrace{a_n p_R(0)}_{\text{pulso desejado}} + \underbrace{\sum_{k \neq n} a_k p_R[(n-k)T_b]}_{\text{ies}}$$

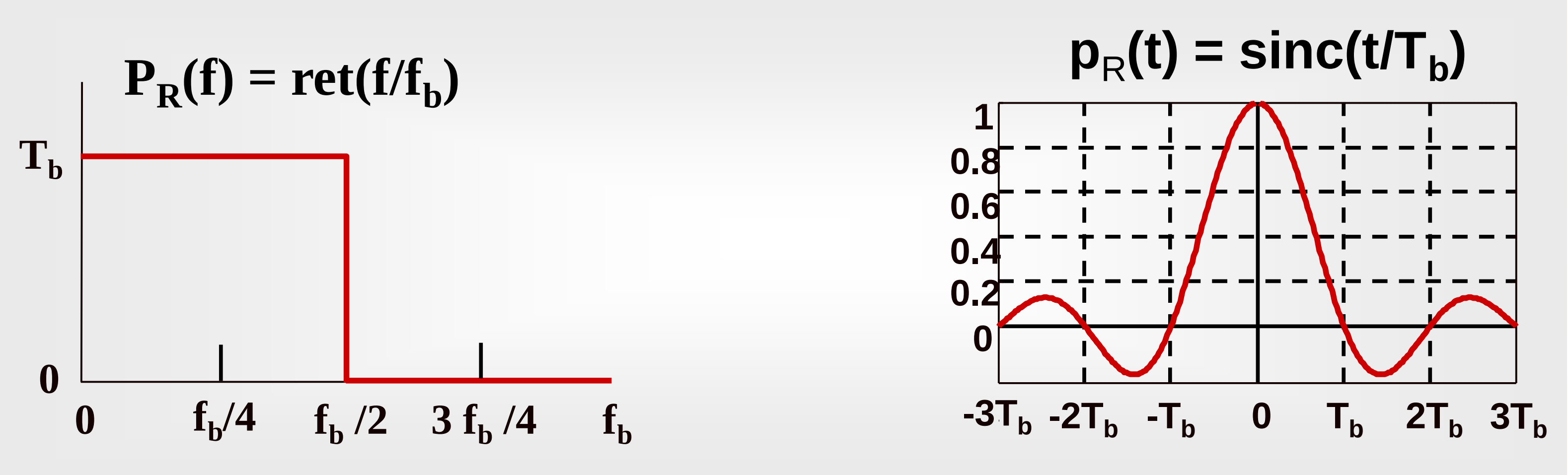
Condição para ies nula:

$$\boxed{p_R(nT_b) = \begin{cases} a, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_r(f - kf_b) = aT_b$$

critério de Nyquist para ies nula

Solução Ideal

- O segundo critério de Nyquist (para ies nula) nos mostra que:
  - Pode-se transmitir dados com taxa $R = f_b$ bps através de um sistema com $P_R(f)$ constante entre o e $f_b/2$ e zero fora deste intervalo.
  - Assim largura de faixa mínima de transmissão é $f_b/2$ Hz.
  - **Filtro ideal de Nyquist.**



  - Esta característica é irrealizável em hardware,
  - É muito difícil uma aproximação prática,
  - Muito sensível a erros de temporização,
  - Solução encontrar uma característica com transição suave

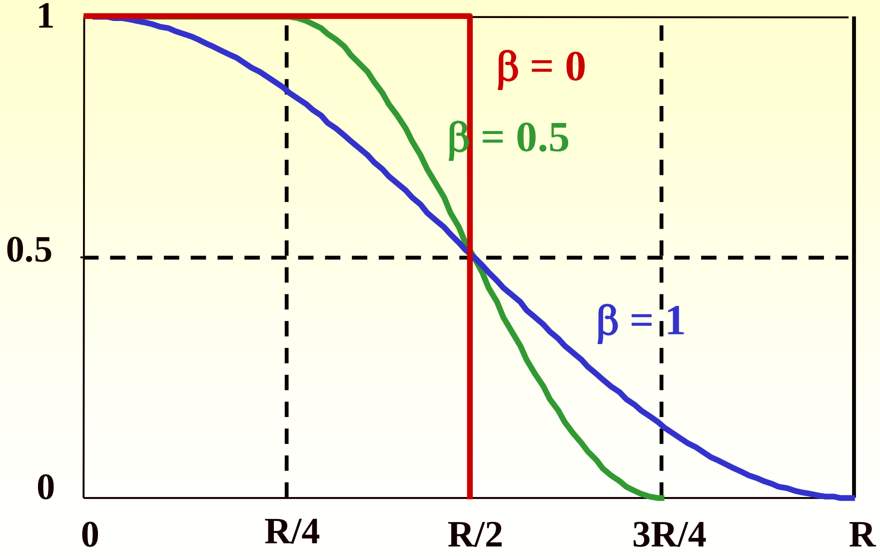
Solução Prática

- O critério de Nyquist não especifica unicamente $P_R(f)$,
  - Nos sistemas onde a largura de faixa disponível se estende até f_b é possível especificar outros formatos para o pulso,
  - O pulso **cosseno levantado**, mostrado abaixo, apresenta ies nula e largura de faixa máxima f_b, dependendo do valor do parâmetro β.
  - β é um fator de excesso de largura de faixa em relação ao filtro de Nyquist

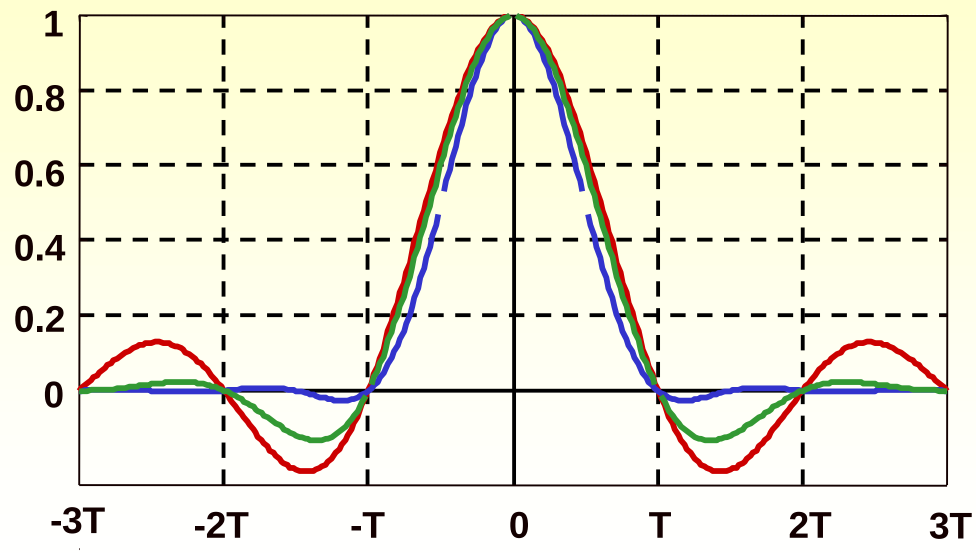
$$P_R(f) = \begin{cases} T_b, & |f| < f_b/2 - \beta \\ T_b \cos^2 \dfrac{\pi}{4\beta}\left(|f| - \dfrac{f_b}{2} + \beta\right), & |f_b/2 - \beta \le |f| \le f_b/2 + \beta \\ 0, & |f| > f_b/2 + \beta \end{cases}$$

$$p_R(t) = \frac{\cos 2\pi\beta t}{1-(4\beta t)^2} sinc(f_b t)$$

domínio da freqüência



domínio do tempo

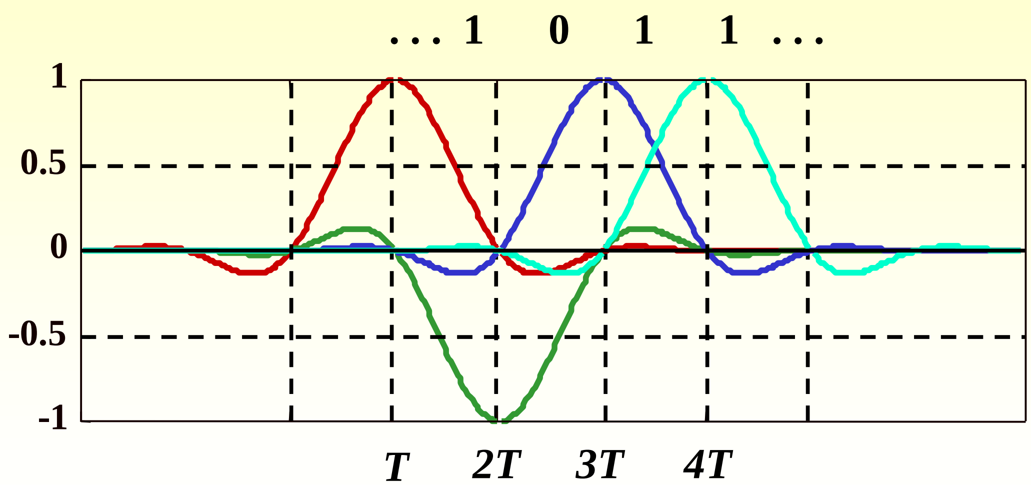


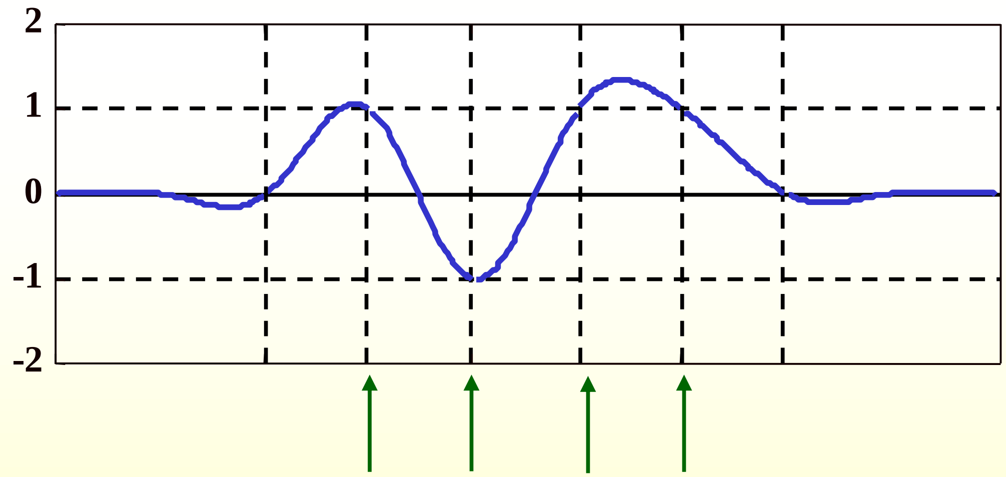
Observações

- A largura de faixa depende de β ($f_b/2$ e f_b),
- Quanto maior β, os pulsos decaem a zero mais rapidamente,
  - Facilidade de sincronização
  - Os erros de temporização são minimizados.
- β = 0 conduz ao filtro ideal de Nyquist,
- O pulso não é causal => solução prática: implementar uma versão atrasada.

Exemplo: Suponha que se está transmitindo a seguinte seqüência:

{ ... 1 0 1 1 ... }





- Nos instantes de decisão o sinal passa pelos valores de tensão+1 ou -1pois não há ies

4. Diagrama de olho

- Aplicação:
  - Análise dos efeitos de ruído, interferência entre símbolos, erros de temporização, etc. utilizando um osciloscópio.
- Modo de obtenção do diagrama de olho:
  - a base de tempo do osciloscópio é sincronizada com a taxa de bits ou de símbolos,
  - ela é limitada a um ou dois períodos,
  - o sinal digital é aplicado na entrada vertical,
  - vários pulsos são superpostos,
  - como resultado tem-se uma figura que se parece com o olho.

Exemplo:

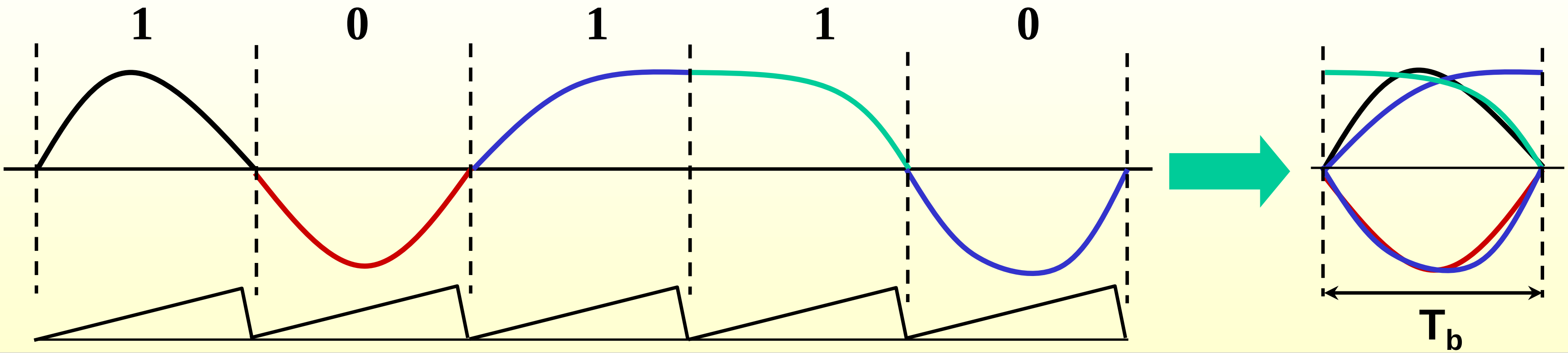
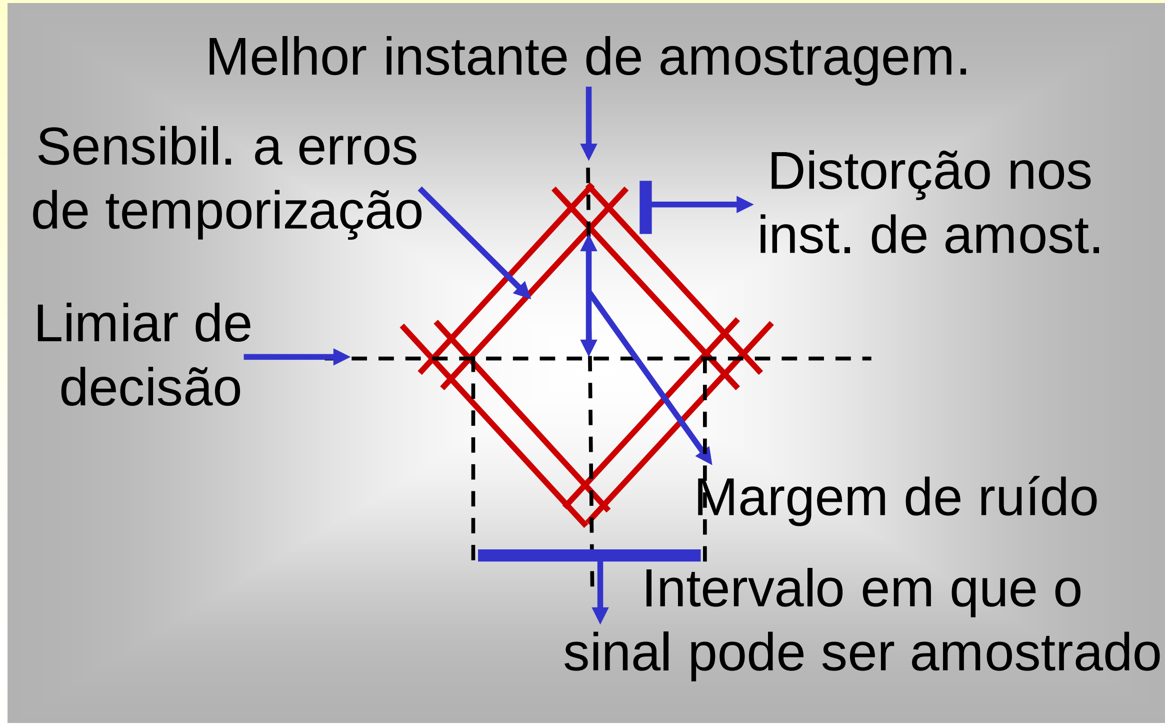
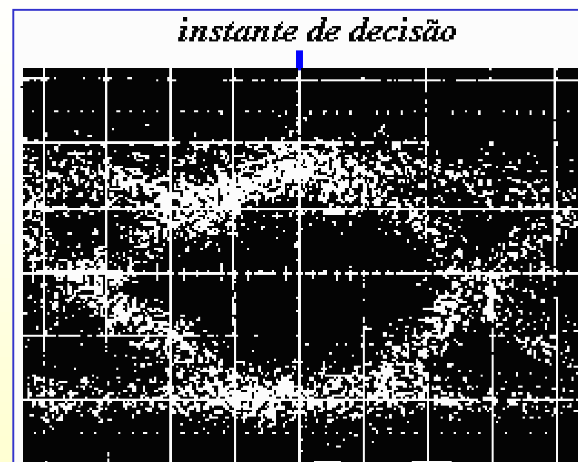


Diagrama de olho:



Algumas Informações obtidas no diagrama de olho

Diagrama de olho real



5. Probabilidade de erro

- O ruído em um sinal digital tende a degradar o sistema,
- Esta degradação se manifesta na forma de erros no processo de detecção. O sinal na entrada do filtro receptor consiste do sinal digital mais uma componente de ruído:

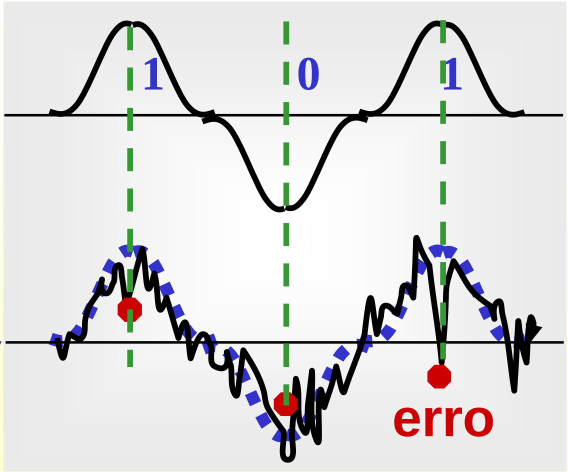
$$y(t) = s(t) + n(t)$$

- O filtro receptor, com característica passa-baixas, limita o ruído em sua saída.
- O sinal na saída do filtro é então amostrado, através de um circuito "*sample and hold*", nos picos do pulso recebido onde a SNR é máxima.
- O circuito de decisão decide que símbolo foi transmitido.

pulso polar : $\pm$ a

$y(t) = s_R(t) + n_R(t)$

limiar th = 0v



sistema com qualidade aceitável:

$10^{-4} <$ ber $< 10^{-8}$

Cálculo da probabilidade de erro

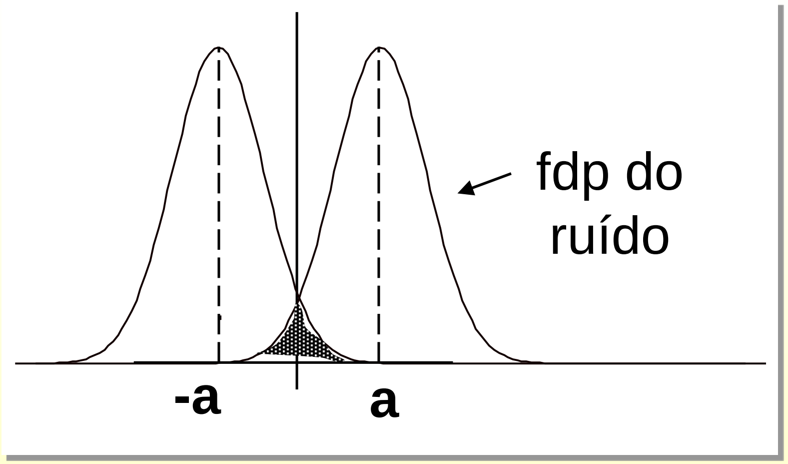
- Admitindo ruído branco gaussiano com valor médio nulo e variância $N_0/2$.
- Nos instantes de amostragem tem-se:

$$y(t_0) = a_0 + n_R(t_0) \qquad onde: a_0 = \pm a$$

- Um erro irá ocorrer se:

$$y(t_0) = a + n_R(t_0) < 0 \qquad dado\ que: a_0 = 1 \Rightarrow \boxed{P[n_R(t_0) + a < 0]}$$

$$y(t_0) = -a + n_R(t_0) > 0 \qquad dado\ que: a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{P[n_R(t_0) - a > 0]}$$



Admitindo símbolos equiprováveis:

$$Pe = \frac{1}{2} P[n_R > a] + \frac{1}{2} P[n_R < -a]$$

$$\boxed{Pe = P[n_R > a]}$$

como o ruído é branco, gaussiano com média nula e variância $N_0/2$

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left[\frac{-n^2}{2\sigma^2}\right], \qquad onde:\ \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$$

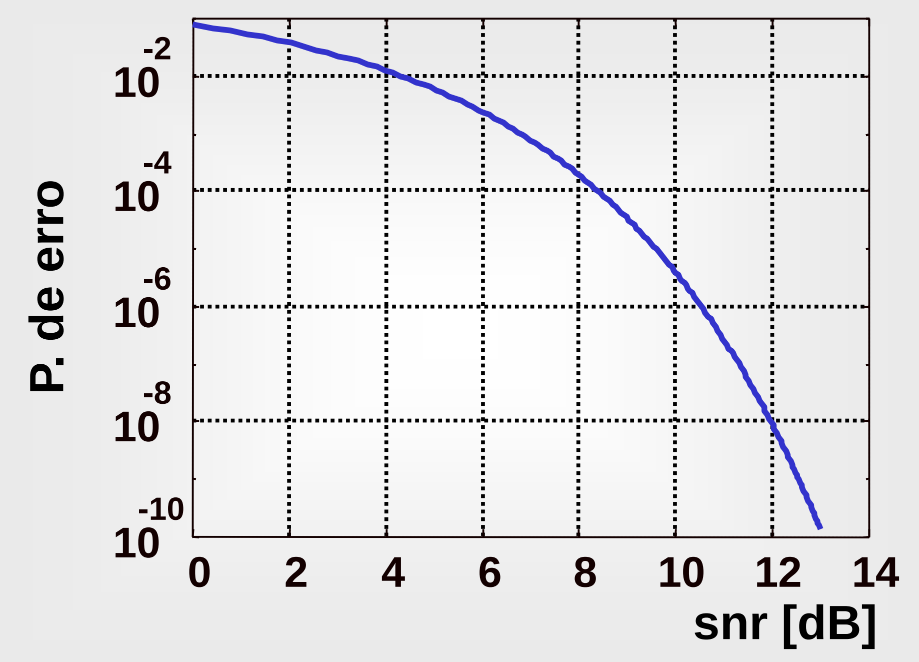
$$Pe = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{a}{\sqrt{N_0}}\right)$$

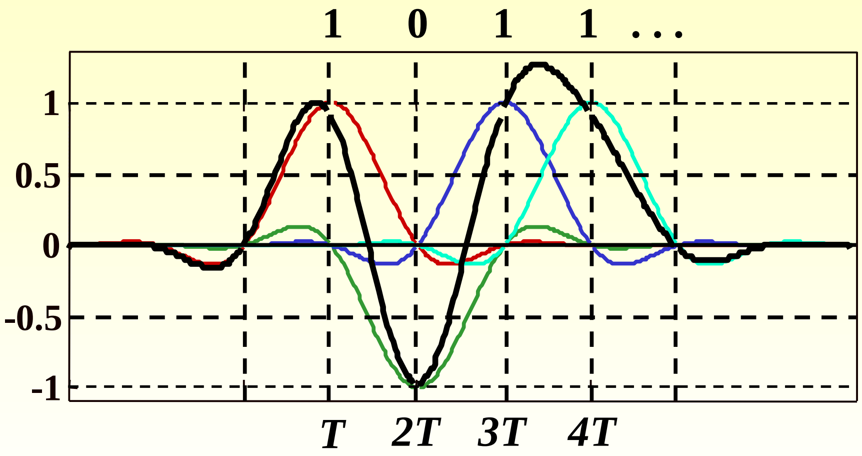
erfc: complementar da função erro

Potência do pulso com amplitude unitária e largura T_b.

$$\boxed{P_s = a^2}$$

$$Pe = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{P_s}{P_N}}\right)$$




1 0 1 1 . . .
1
0.5
0
-0.5
-1
T 2T 3T 4T