A INTEGRAL DE RIEMANN EM DUAS VARIÁVEIS

As ideias envolvidas na definição da integral de Riemann para funções de duas variáveis $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são muito semelhantes ao caso de uma única variável. Algumas dificuldades adicionais, porém, aparecem nesse caso. Uma delas é que o domínio de integração $D \subset A$ pode ser bem mais "complicado" Para contornar esse problema, definimos inicialmente a integral para os domínios mais simples possíveis; os retângulos no plano.

1. Integral em retângulos

Definição 1.1. *Um retângulo (ou intervalo bidimensional) é um subconjunto $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ que é produto cartesiano de intervalos da reta I_1 e I_2, ou seja:*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I_1,\ y \in I_2.\}$$

Diremos que o retângulo $\mathcal{R}$ é compacto se $I_1 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$ são intervalos fechados e limitados.

As definições de partição, partição marcada, somas e integral de Riemann em $\mathcal{R}$ remetem ao caso de uma variável.

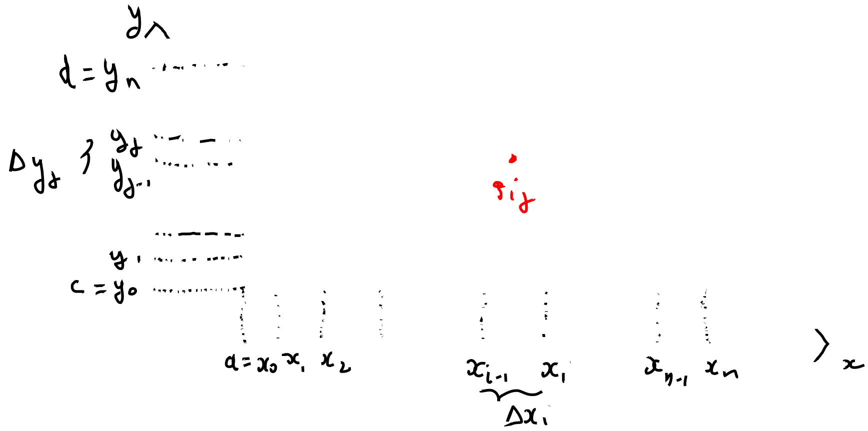
Definição 1.2. *Uma **partição** do retângulo compacto $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ é um produto cartesiano $P = P_1 \times P_2$, sendo*

$$P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \}$$
$$P_2 = \{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_m\}$$

partições de $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente.

Date: August 13, 2023.

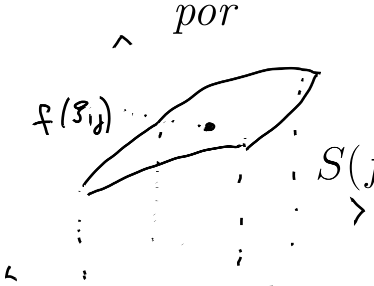
Dada uma partição P do retângulo $\mathcal{R}$, este fica dividido em subretângulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$. Usaremos as notações $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_j - y_{j-1}$ e $A(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$ (a área do ij-ésimo retângulo R_{ij}).



Definição 1.3. *A* ***norma*** *da partição P, denotada por $\|P\|$ é o máximo dos comprimentos das diagonais dos subretãngulos R_{ij}*

Definição 1.4. *Dizemos que a partição P do retângulo $\mathcal{R}$ foi marcada, se foi escolhido um ponto ξ_{ij} em cada subretângulo $\mathcal{R}_{ij}$.*

Definição 1.5. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição marcada de $\mathcal{R} \subset A$, definimos a* ***soma de Riemann*** *de f relativa a $\dot{\mathcal{P}}$ por*



$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \, \Delta y_j = \sum_{ij} f(\xi_{ij}) A(R_{ij}).$$

Podemos agora definir a integral de Riemann de f no retângulo $\mathcal{R}$.

Definição 1.6. *Dizemos que a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é* ***Riemann integrável*** *no retângulo $\mathcal{R} \subset D$ se existir o limite L das somas de Riemann de f no retângulo $\mathcal{R}$ ou, mais exatamente, se* *para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que a* ***soma de Riemann*** *de f relativa a qualquer partição marcada $\dot{\mathcal{P}}$, com $\|P\| < \delta$ satisfaz*

$$\|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L\| < \epsilon.$$

Se f é Riemann integrável no retângulo $\mathcal{R}$, o limite L acima é denominado a **integral de Riemann** de f em $\mathcal{R}$ e escrevemos

$$\int_{\mathcal{R}} f = L.$$

Outras notações, como $\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, d\,x\, d\,y$, $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, d\,x d\,y$ também são frequentemente usadas.