SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (XIII)

- PODEMOS USAR SOLUÇÕES NUMÉRICAS NO CASO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEM SOLUÇÃO ANALÍTICA E EM SISTEMAS DE EDOS COMPLICADOS.
- POR EXEMPLO, A SOLUÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS DE EDOs PODE SER USADA NA SIMULAÇÃO DA EVOLUÇÃO DE SISTEMAS QUÍMICOS COMPLICADOS (QUE ENVOLVEM VÁRIOS PROCESSOS CINÉTICOS OCORRENDO SIMULTANEAMENTE).

MÉTODO DE EULER

- ESTE MÉTODO É BASTANTE SIMPLES. ENTRETANTO, NÃO É MUITO PRECISO. CONSIDERE A SEGUINTE EDO:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(y,t)} \qquad \boxed{y = y(t)}$$

$dy = f(y,t)\,dt$. INTEGRANDO DE $t=0$ ATÉ t':

$$\int_{y_0}^{y(t')} dy = \int_0^{t'} f(y,t)\,dt \qquad \boxed{y_0 = y(0)}$$

$$y(t') - y_0 = \int_0^{t'} f(y,t)\,dt$$

- SOLUÇÃO:

$$\boxed{y(t') = y_0 + \int_0^{t'} f(y,t)\,dt}$$

• VAMOS ASSUMIR QUE Δt TEM UM VALOR MUITO PEQUENO $\boxed{\Delta t = t' - t_i}$. ENTÃO:

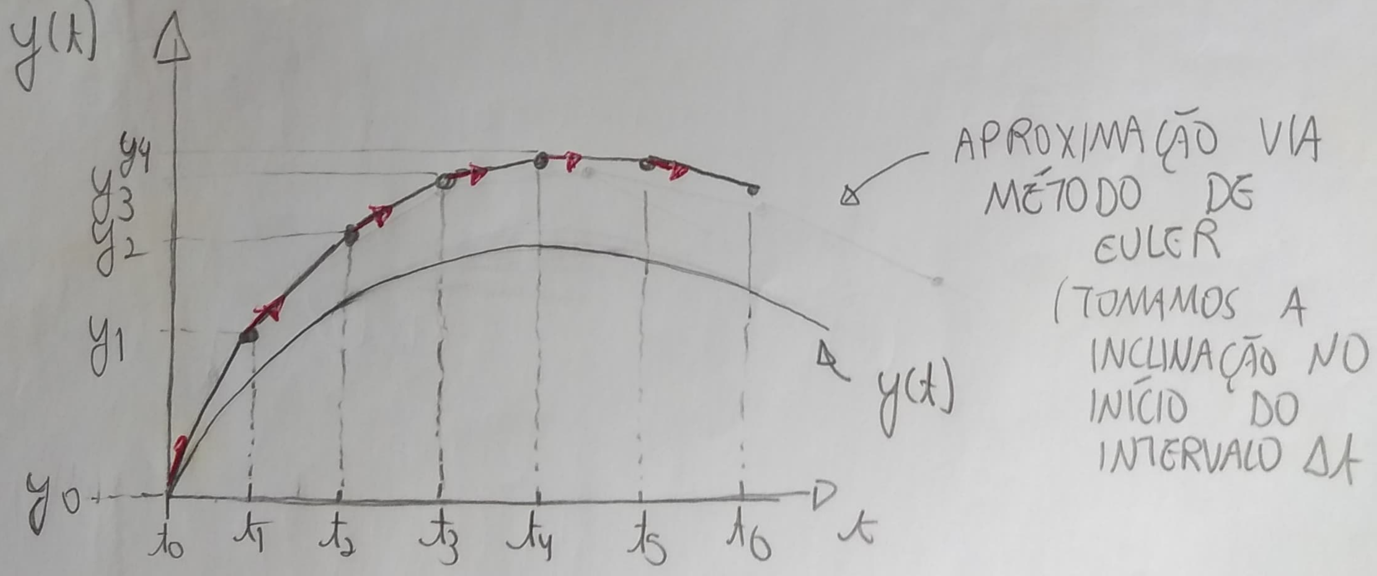
$$y(\Delta t) \approx y_0 + \int_0^{\Delta t} \underbrace{f(y_0, 0)}_{} \, dt = \boxed{y_0 + f(y_0, 0)\Delta t}$$

POIS $f(y_0, 0)$ É CONSTANTE

ESTAMOS ASSUMINDO QUE QUANDO Δt É MUITO PEQUENO O VALOR DA FUNÇÃO $f(y, t)$ PERMANECE PRATICAMENTE CONSTANTE E IGUAL AO SEU VALOR NO LIMITE INFERIOR DA INTEGRAL

• SE ESTE PROCESSO FOR REPETIDO VÁRIAS VEZES, PODEMOS ENCONTRAR UMA TABELA REPRESENTANDO A FUNÇÃO $y(t)$ QUE ESTAMOS BUSCANDO:

$$\boxed{y_{i+1} \approx y_i + f(y_i, t_i)\Delta t} \qquad (1)$$



• PARA QUE O MÉTODO DE EULER FORNEÇA VALORES MAIS PRECISOS $\Delta t \to 0$.

EX: RESOLVA A EDO:

$$\boxed{y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2} \qquad \boxed{y(0)=0}$$

ENTRE $y=0$ E $y=0{,}8$ PELO MÉTODO DE EULER COM (a) $\Delta x = 0{,}1$ E (b) $\Delta x = 0{,}01$.

(DICA: USE UMA PLANILHA)

$$\boxed{f(y,x) = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2}$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

- HÁ VARIANTES DESTE MÉTODO. VAMOS MOSTRAR O MÉTODO RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM. NESTE MÉTODO, A EQ. 1 É SUBSTITUÍDA POR:

$$\boxed{y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right)}$$

ONDE

$$F_1 = f(y_i, t_i)\,\Delta t$$

$$F_2 = f\left(y_i + \frac{1}{2}F_1, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

$$F_3 = f\left(y_i + \frac{1}{2}F_2, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

$$F_4 = f\left(y_i + F_3, t_i + \Delta t\right)\Delta t$$

- VANTAGENS: ESTE MÉTODO FORNECE GERALMENTE MENORES ERROS QUE O MÉTODO DE EULER PARA UM DADO Δt

COMPARAÇÃO: SOLUÇÃO DA EDO $y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2$, $y(0)=0$,

ENTRE $x=0$ E $x=0{,}8$.

ERRO

x	EULER ($\Delta x = 0{,}1$)	EULER ($\Delta x = 0{,}01$)	RK4 ($\Delta x = 0{,}1$)	RK4 ($\Delta x = 0{,}01$)
0,2	$4{,}7 \times 10^{-3}$	$5{,}3 \times 10^{-4}$	$9{,}5 \times 10^{-7}$	$1{,}0 \times 10^{-10}$
0,4	$1{,}6 \times 10^{-2}$	$1{,}6 \times 10^{-3}$	$2{,}6 \times 10^{-6}$	$2{,}6 \times 10^{-10}$
0,6	$2{,}4 \times 10^{-2}$	$2{,}3 \times 10^{-3}$	$4{,}2 \times 10^{-6}$	$4{,}0 \times 10^{-10}$
0,8	$2{,}6 \times 10^{-2}$	$2{,}5 \times 10^{-3}$	$4{,}7 \times 10^{-6}$	$4{,}3 \times 10^{-10}$

CONCLUSÕES:

1) O ERRO AUMENTA CONFORME NOS AFASTAMOS DO PONTO INICIAL, NO QUAL CONHECEMOS O VALOR DA FUNÇÃO $y(x)$

2) RK4 É MUITO MAIS PRECISO QUE O MÉTODO DE EULER