SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (VIII)
DE 1ª ORDEM

- SÃO SISTEMAS QUE PODEM SER ESCRITOS COMO:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)x_1 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

- ONDE:

$x_1 = x_1(t)$ $x_2 = x_2(t)$ $\cdots$ $x_n = x_n(t)$

- CLASSIFICAÇÃO:

1. SE TODAS AS FUNÇÕES $g_i(t)$ FOREM NULAS $\Rightarrow$ SISTEMA HOMOGÊNEO
2. CASO CONTRÁRIO $\Rightarrow$ SISTEMA NÃO-HOMOGÊNEO

SISTEMAS 2X2 HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 \end{cases}$$

$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ ED CONSTANTES

PRECISAMOS ENCONTRAR DUAS FUNÇÕES: $x_1(t)$ E $x_2(t)$

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO

RESOLVA O SISTEMA

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 7y(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = x(t) & y = y(t) \\ x' = \dfrac{dx(t)}{dt} & y' = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{array}}$$

SABENDO QUE

$x(0) = 2 \quad y(0) = -1$

- VAMOS RESOLVER A SEGUNDA EQUAÇÃO PARA x:

$y' = 6x - 7y$

DERIVANDO COM RELAÇÃO A t:

$6x = y' + 7y$

$$\boxed{x = \frac{y'}{6} + \frac{7}{6}y} \ (1) \qquad \boxed{x' = \frac{y''}{6} + \frac{7}{6}y'} \ (2)$$

- ENTÃO, SUBSTITUINDO (1) E (2) NA PRIMEIRA EQUAÇÃO:

$$x' = 4x - 3y = \boxed{\frac{y''}{6} + \frac{7}{6}y' = \frac{4y'}{6} + \frac{28y}{6} - 3y}$$

- REESCREVENDO:

$$\frac{y''}{6} + \frac{3y'}{6} - \frac{10y}{6} = 0$$

$$\boxed{y'' + 3y' - 10y = 0}$$

EQ. DIFERENCIAL DE 2ª ORDEM HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES

SOLUÇÃO:

$y(t) = e^{mt}$

$m^2 e^{mt} + 3me^{mt} - 10e^{mt} = 0$

$(m^2 + 3m - 10)e^{mt} = 0$

SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL:

$$m^2 + 3m - 10 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$m = \frac{-3 \pm 7}{2} \qquad m_1 = 2 \quad m_2 = -5$$

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}}$$ SOLUÇÃO GERAL

- DERIVANDO COM RELAÇÃO A t:

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}$$

- SUBSTITUINDO y E y' NA EQ. 1 $\left(x = \frac{y'}{6} + \frac{7}{6}y\right)$:

$$x(t) = \frac{2}{6}c_1 e^{2t} - \frac{5}{6}c_2 e^{-5t} + \frac{7}{6}c_1 e^{2t} + \frac{7}{6}c_2 e^{-5t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{9}{6}c_1 e^{2t} + \frac{2}{6}c_2 e^{-5t} = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}}$$

SOLUÇÃO GERAL

- CONSIDERANDO $x(0) = 2$ E $y(0) = -1$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = -1 \\ x(0) = \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 2 \end{cases} \qquad c_1 = -1 - c_2$$

$$\frac{3}{2}(-1 - c_2) + \frac{1}{3}c_2 = 2$$

$$-\frac{3}{2} - \frac{3c_2}{2} + \frac{1}{3}c_2 = 2 \qquad -\frac{3c_2}{2} + \frac{1}{3}c_2 = 2 + \frac{3}{2}$$

$$\frac{-9c_2 + 2c_2}{6} = \frac{4+3}{2} \qquad -\frac{7c_2}{6} = \frac{7}{2} \qquad \boxed{c_2} = -\frac{42}{14} = \frac{-21}{7} = \boxed{-3}$$

$$\boxed{C_1} = -1 + 3 = \boxed{2}$$

- ASSIM:

$$\boxed{x(t)} = \frac{6}{2}e^{2t} - \frac{3}{3}e^{-5t} = \boxed{3e^{2t} - e^{-5t}}$$

$$\boxed{y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}}$$

- VERIFICANDO:

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases}$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d(3e^{2t} - e^{-5t})}{dt} = \boxed{6e^{2t} + 5e^{-5t}}$$

OK

$$4x - 3y = (12e^{2t} - 4e^{-5t}) - (6e^{2t} - 9e^{-5t}) = \boxed{6e^{2t} + 5e^{-5t}}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{d(2e^{2t} - 3e^{-5t})}{dt} = \boxed{4e^{2t} + 15e^{-5t}}$$

OK

$$6x - 7y = (18e^{2t} - 6e^{-5t}) - (14e^{2t} - 21e^{-5t}) = \boxed{4e^{2t} + 15e^{-5t}}$$