EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES: EQUAÇÕES DE 2ª ORDEM

$$\boxed{a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0}$$

COM a_2, a_1 E a_0 CONSTANTES.

- PODEMOS REESCREVER ESTA EQUAÇÃO DIVIDINDO CADA TERMO POR a_2:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a_1' \frac{dy}{dx} + a_0' y = 0}$$

$$a_1' = \frac{a_1}{a_2}$$

$$a_0' = \frac{a_0}{a_2}$$

- HÁ UMA SOLUÇÃO TRIVIAL, $y(x) = 0$. PORÉM, ESTA SOLUÇÃO NORMALMENTE NÃO NOS INTERESSA.
- OUTRA SOLUÇÃO SERIA $y(x) = e^{mx}$. ENTÃO:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(e^{mx})}{dx^2} = m\frac{d(e^{mx})}{dx} = m^2 e^{mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{mx})}{dx} = m e^{mx}$$

- ASSIM:

$$m^2 e^{mx} + a_1' m e^{mx} + a_0' \cdot e^{mx} = 0$$

$$(m^2 + a_1' m + a_0') e^{mx} = 0$$

SOLUÇÃO TRIVIAL

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{SE } e^{mx} = 0 & mx = -\infty \\ \ln(e^{mx}) = \ln 0 & \boxed{m = -\infty} \end{array}}$$

• COMO NUMA SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL $y(x) = e^{mx} \neq 0$, ENTÃO:

$$\boxed{m^2 + a_1' m + a_0' = 0}$$

• ESTA É UMA EQUAÇÃO DE 2ª ORDEM

$$\Delta = (a_1')^2 - 4 \cdot 1 \cdot a_0'$$

$$\boxed{m = \frac{-a_1' \pm \sqrt{(a_1')^2 - 4a_0'}}{2}}$$

• CASOS PARA COEFICIENTES REAIS:

① RAÍZES REAIS:

$$\boxed{m = r_1 \quad a \quad m = r_2}$$

• SOLUÇÕES $y_1(x) = e^{r_1 x}$ E $y_2(x) = e^{r_2 x}$ SÃO SOLUÇÕES PARTICULARES.

• SOLUÇÃO $\boxed{y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$ É A SOLUÇÃO GERAL. AS SOLUÇÃO $e^{r_1 x}$ E $e^{r_2 x}$ SÃO LINEARMENTE INDEPENDENTES, OU SEJA, NÃO SÃO MÚLTIPLOS UMA DA OUTRA: NÃO HÁ CONSTANTE C TAL QUE $C y_1(x) = y_2(x)$.

• COMO RESOLVEMOS UMA EQUAÇÃO DIF. DE 2ª ORDEM, O QUE É EQUIVALENTE A INTEGRAR DUAS VEZES, TEMOS DUAS CONSTANTES PARA DETERMINAR, C_1 E C_2. PARA ISTO

NECESSITAMOS INFORMAÇÕES ADICIONAIS SOBRE O PROBLEMA. NA SOLUÇÃO DE UMA EQ. DIFERENCIAL DE 2^{a} ORDEM TEMOS DUAS SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES, $y_1(x)$ E $y_2(x)$.

② RAÍZES IMAGINÁRIAS $(a_1'=0, a_0'>0)$:

$$m = \pm i r \quad \text{ONDE} \quad i = \sqrt{-1}$$

- SOLUÇÕES PARTICULARES: $y_1(x) = e^{irx}$ E $y_2(x) = e^{-irx}$
- SOLUÇÃO GERAL: $\boxed{y(x) = c_1 e^{irx} + c_2 e^{-irx}}$

MAS COMO:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$$

E

$$\boxed{e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta}$$

$$y(x) = c_1(\cos(rx) + i \operatorname{sen}(rx)) + c_2(\cos(rx) - i \operatorname{sen}(rx))$$

$$y(x) = \underbrace{(c_1 + c_2)}\cos(rx) + \underbrace{i(c_1 - c_2)}\operatorname{sen}(rx)$$

$$\boxed{y(x) = c_3 \cos(rx) + c_4 \operatorname{sen}(rx)}$$

③ RAÍZES COMPLEXAS (SE $a_1' \neq 0$ E $4a_0' > (a_1')^2$):

$m = r \pm is$

- SOLUÇÕES PARTICULARES: $y_1(x) = e^{(r+is)x}$ E $y_2(x) = e^{(r-is)x}$

- SOLUÇÃO GERAL: $\boxed{y(x) = c_1 e^{(r+is)x} + c_2 e^{(r-is)x}}$

$\boxed{y(x)} = c_1 e^{rx} e^{isx} + c_2 e^{rx} e^{-isx} = \boxed{e^{rx}(c_1 e^{isx} + c_2 e^{-isx})}$

④ RAÍZES DUPLAS ($(a_1')^2 - 4a_0' = 0$):

AMBAS AS RAÍZES SÃO REAIS E IGUAIS, $m = r$.

- SOLUÇÃO GERAL: $\boxed{y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}}$

- O MESMO PROCEDIMENTO PODE SER APLICADO PARA RESOLVER EDOs LINEARES, HOMOGÊNEAS E COM COEFICIENTES CONSTANTES DE MAIORES ORDENS.

EXERCÍCIO:

RESOLVA A EQUAÇÃO $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

VAMOS MOSTRAR COMO O CASO 4 É OBTIDO

$y(x) = e^{mx}$, POIS OS COEFICIENTES SÃO CTES.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y(x) = 0} \quad 1$$

$$m^2 e^{mx} - 2me^{mx} + e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 2m + 1)e^{mx} = 0$$

SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL $e^{mx} \neq 0$

- ENTÃO

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4.1.1 = 0$$

$$\boxed{m} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \boxed{1}$$

- SOLUÇÃO PARTICULAR: e^{x}
- PRECISAMOS DE MAIS UMA SOLUÇÃO LINEARMENTE INDEPENDENTE
- VAMOS PROPOR QUE A SOLUÇÃO GERAL SEJA:

$$\boxed{y(x) = u(x)\, e^{x}}$$

MÉTODO DA REDUÇÃO DE ORDEM

- SUBSTITUINDO ESTA PROPOSTA NA EQ. 1 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(u(x)e^x + e^x u'(x)\right) = u(x)e^x + e^x u'(x) + e^x u'(x) + e^x u''(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = u(x)e^x + e^x u'(x)$$

- ENTÃO:

$$u''(x)e^x + \cancel{2u'(x)e^x} + \cancel{u(x)e^x} - 2\left[\cancel{u'(x)e^x} + \cancel{u(x)e^x}\right] + \cancel{u(x)e^x} = 0$$

$$\boxed{u''(x)e^x = 0}$$

COMO $e^x \neq 0$ NUMA SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL

$$\boxed{u''(x) = \frac{d^2u}{dx^2} = 0}$$

- DESTA FORMA, UMA POSSIBILIDADE MAIS GERAL SERIA:

$$u(x) = C_1 x + C_2$$

- SOLUÇÃO GERAL:

$$\boxed{y(x) = C_1 x e^x + C_2 e^x}$$