A INTEGRAL DE RIEMANN EM UMA VARIÁVEL (REVISÃO)

1. Introdução

A ideia de integração, como inversa do processo de derivação, aparece nos trabalhos revolucionários de Isaac Newton e Gotfried Leibniz no final do século XVII, embora muito das ideias centrais já apareçam nos trabalhos de Demócrito e Eudoxo, com o método de exaustão para o cálculo de áreas.

É apenas em meados do século XIX, que a integração é vista como um processo independente, como limites de certas somas interpretadas como aproximação de áreas sob o gráfico de funções, conhecidas desde então como **Somas de Riemann**. As ideias de Riemann deram origem a outras teorias de integração, notadamente a de **Henry Lebesgue**, já no início do século XX.

A integral de Riemann (e suas generalizações) permanecem, porém, como um dos assuntos mais importantes da Análise Matemática pela sua aplicabilidade, natureza intuitiva e importência histórica.

Para definir a integral de Riemann, precisamos de alguns conceitos preliminares.

Definição 1.1. *Uma **partição** do intervalo fechado $I = [a, b]$ é um conjunto finito e ordenado $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n\}$ de pontos de I tais que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

O intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_{k-1}]$ de comprimento $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ será denominado o k-ésimo subintervalo *da partição $\mathcal{P}$.*

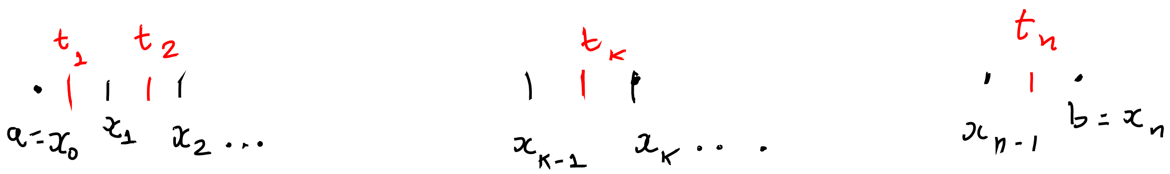
Date: August 7, 2023.

Definição 1.2. *O comprimento máximo dos subintervalos da partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ é a **norma da partição** e será denotada por $\|\mathcal{P}\|$.*

Ou seja, se $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$:

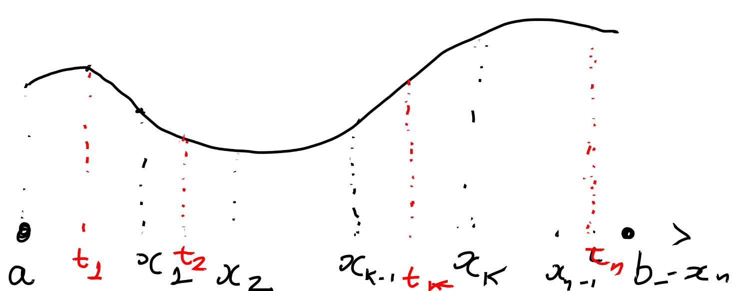
$$\|\mathcal{P}\| := \max\{\Delta x_k,\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Definição 1.3. *Dizemos que a partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n\}$ foi **marcada** se escolhemos um ponto (ou **marca**) t_k em cada subintervalo $I_k = [x_{k-1}, x_{k-1}]$. Denotaremos por $\dot{\mathcal{P}}$ esta partição marcada, e usaremos a mesma notação $\|\dot{\mathcal{P}}\|$ para a norma desta partição.*



Definição 1.4. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição marcada de $[a, b]$, definimos a **soma de Riemann** de f relativa a $\dot{\mathcal{P}}$ por*

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$



Podemos agora definir a integral de Riemann.

Definição 1.5. *Dizemos que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **Riemann integrável** no intervalo $[a,b]$ $\dot{\mathcal{P}}$ se existir um nḿero real L tal que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que a **soma de Riemann** de f relativa a qualquer partição marcada $\dot{\mathcal{P}}$, com $\|P\| < \delta$ satisfaz*

$$\|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\| < \epsilon.$$

Usaremos a notação $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nesse caso.

Se $f \in f \in \mathcal{R}[a,b]$ usamos as notações:

$$\int_a^b f, \int_a^b f(x)\,d\,x, \int_a^b f(t)\,d\,t,$$

para o valor do limite L na definição acima.

(A variável usada na integração é, obviamente, irrelevante).

Exemplos 1.6. *1) Se $f(x) = k$ em $[a,b]$, então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,d\,x = k(b-a)$.*

2) Se $f(x) = \begin{cases} 2, & se\ x \in [0,1] \\ 3, & se\ x \in]1,3] \end{cases}$ então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,d\,x = 8$.

3) Se $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ então $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

1) Se $f(x) = x^2$ em $[0,1]$, então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,d\,x = 1/3$.

Nesse caso, é dificil mostrar que $f \in \mathcal{R}[a,b]$, diretamente da definição. Admitindo este fato, podemos calcular a integral, usando uma sequência especial de particões marcadas $\dot{\mathcal{P}}$ definida por $x_i = i/n$ e marcas $t_i = x_i$. Para isto vamos usar a fórmula da soma dos n primeiros quadrados: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n^3/3 + n^2/3 + n/6$.

2. Propriedades da Integral de Riemann

Dadas as dificuldades para o cálculo da integral pela definição é importante obter propriedades que ajudem nesta tarefa. Começamos com as ‘propriedades algébricas´.

Proposição 2.1. *Suponhamos que $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Então temos:*
a) Se $k \in \mathbb{R}$, então $kf \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

b) $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

c) Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$ então

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Dem. Vamos demonstrar b), os outros itens são semelhantes e ficam a cargo do leitor.

Seja $L_1 = \int_a^b f$ e $L_2 = \int_a^b g$. Dado $\epsilon > 0$, sejam δ_1 e δ_2 tais que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_1 \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L_1| < \epsilon/2$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_2 \Rightarrow |S(g, \dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2$.

Se $\delta - \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, teremos então $|S(f+g, \dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| \leq |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L_1| + |S(g, \dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. □

O resultado seguinte destaca uma classe de funções que **não** pertencem a $\mathcal{R}[a,b]$.

Proposição 2.2. *Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, então f é limitada. (Ou seja se f não é limitada em $[a,b]$, então f não é integrável neste intervalo).*

Dem. Suponhamos que f é não limitada e integrável em $[a, b]$. Dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}} - \int_a^b f| < 1 \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}| < 1 + |\int_a^b f| \tag{1}$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição qualquer com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$.

Então existe um subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição $\mathcal{P}$ no qual f não Ílimitada.

Vamos marcar a partição $\mathcal{P}$ em dois passos da seguinte forma. Primeiro escoolhemos um ponto qualquer t_j no subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$, para todo $j \neq 1$.

Temos então, para qualquer escolha do ponto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = f(t_i)\Delta x_i + \sum_{j \neq i}^{n} f(t_j)\Delta x_j \Rightarrow$$

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}})| \geq |f(t_i)||\Delta x_i| - |\sum_{j \neq i}^{n} f(t_j)\Delta x_j|.$$

Escolhendo agora t_i de tal forma que
$|f(t_i)||\Delta x_i| > 1 + |\int_a^b f| + |\sum_{j \neq i}^{n} f(t_j)\Delta x_j|$, segue que

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}})| > 1 + |\int_a^b f| \tag{2}$$

em contradição com (1). $\square$

Exemplo 2.3. *A função* $f(x) := \begin{cases} f(x) = 1/x \ \textit{se} \ x \neq 0 \\ 0 \ \textit{se} \ x = 0 \end{cases}$, *não é integrável em nenhum intervalo contendo a origem.*

3. Funções integráveis

Vejamos alguns resultados que permitem decidir sobre a integrabilidade de classes amplas de funções, como funções "em escada", continuas etc.).

Proposição 3.1. *(Critério de Cauchy) Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer partições marcadas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$ temos*

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| < \epsilon.$$

Esboço da demonstração.

$(\implies)$

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$ Então $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \epsilon/2$ e $|S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - \int_a^b f| < \epsilon/2 \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| < \epsilon$, pela desigualdade triangular.

$(\impliedby)$

Se f satisfaz o critério, escolhemos uma sequência δ_n decrescente de números positivos tais que, se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_n$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta_n$ então $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f\dot{\mathcal{Q}})| < 1/n$.

Escolhendo agora particões marcadas $\dot{\mathcal{P}}_n$, com $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < \delta_n$, segue que $S(f, \dot{\mathcal{P}}_n)$ śequência de Cauchy. Se $L = \lim_{n\to\infty} S(f, \dot{\mathcal{P}}_n)$, obtemos então, para qualquer partição marcada $\dot{\mathcal{P}}$ com norma menor do que δ_n que

$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L| < |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{P}}_m)| + |S(f, \dot{\mathcal{P}}_m) - L|$. Fazendo $m \to \infty$, obtemos $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L| < 1/n$. □

Teorema 3.2. *Toda função contínua em $[a,b]$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$.*

Dem. Sendo f contínua em $[a,b]$, ela é uniformemente contínua, ou seja: dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ de tal forma que $x, y \in [a,b]$ e $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$.

Vamos usar o critério de Cauchy acima. Sejam $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$, partições marcadas. Suponhamos inicialmente, que $\mathcal{Q}$ é um **refinamento** de $\mathcal{P}$, ou seja, $P \subset Q$.

Dado um subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição $\mathcal{P}$, existe então $k = k(i)$, $m = m(i)$ tais que os pontos $y_{k-1}, y_k, \cdots y_{k+m}$ da partição $\mathcal{Q}$, satisfazem : $x_{i-1} = y_{k-1}$, $x_i = y_{k+m}$, ou seja:

$[x_{i-1}, x_i] = \cup_{j=k}^{k+m} [y_{j-1}, y_j]$.

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta > 0$ de tal forma que $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Temos então, se $\|\mathcal{P}\| < \delta$, escolhendo marcas $t_1, t_2, \cdots, t_m$ em $\mathcal{P}$ e $s_1, s_2, \cdots, s_{k(n)+n}$ em $\mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned} S(f, \dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} f(t_i)(y_j - y_{j-1}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f, \dot{\mathcal{Q}}) &= \sum_{i=1}^{k(n)+m(n)} f(s_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} f(s_j)(y_j - y_{j-1}) \right) \end{aligned}$$

Nas somatórias acima, como t_i e s_j estão no mesmo intervalo $[x_{i-1}.x_i[$, para $k(i) \leq j \leq k(i) + m(i)$. obtemos $|t_i - s_j| < \delta$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - S(f,\dot{\mathcal{Q}})| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} |f(s_j) - f(t_i)|(y_j - y_{j-1})\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\eta \sum_{j=k(i)}^{k(i)+m(i)} (y_j - y_{j-1})\right) \\
&\leq \eta \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \eta(b-a) < \epsilon/2
\end{aligned}
$$

Dadas, agora partições marcadas arbitrárias com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$ seja $\mathcal{R} = \mathcal{P} U \mathcal{Q}$ e $\dot{\mathcal{R}}$ uma marcação qualquer em $\mathcal{R}$.

Como R é refinamento de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, segue do que foi demonstrado acima que

$$
\begin{aligned}
|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - S(f,\dot{\mathcal{Q}})| &\leq |S(f,\dot{\mathcal{P}}) - S(f,\dot{\mathcal{R}})| + |S(f,\dot{\mathcal{Q}}) - S(f,\dot{\mathcal{R}})| \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

$\square$

Observação 3.3. *Com uma pequena modificação dos argumentos acima, podemos mostrar que toda função f limitada e contínua, exceto em um número finito de pontos do intervalo $[a,b]$, pertence a $\mathcal{R}[a,b]$. Mais geralmente, $f \in \mathcal{R}[a,b]$, se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é 'suficientemente pequeno' (tem medida nula). Isto vale, em particular, se ele é enumerável. Segue daí que toda função monótona em $[a,b]$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$.*

4. O teorema fundamental do cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo, em suas diversas formas permite conectar a integração e derivação de funções. Ele mostra, a grosso modo, que esses procedimentos são inversos um do outro, dentro de condiçõe apropriadas.

Precisamos antes de alguns resultados preliminares, que também são importantes por si.

Proposição 4.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c \in [a,b]$. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ se e somente se $f \in \mathcal{R}[a,c]$ e $f \in \mathcal{R}[c,b]$. Nesse caso, $\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x$.*

Definição 4.2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dizemos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma **antiderivada** ou **primitiva** de f em $[a,b]$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.*

Teorema 4.3. *(Teorema Fundamental do Cálculo (1^a forma). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$F(x) := \int_a^x f(x)\,d\,x \quad \forall x \in [a,b]$$

é uma primitiva de f em $]a,b[$, contínua em $[a,b]$.

Teorema 4.4. *(Teorema Fundamental do Cálculo . Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função em $\mathcal{R}[a,b]$ e F uma primitiva de f em $]a,b[$, contínua em $[a,b]$.*

Então

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = F(b) - F(a).$$

(Observe que, nessa segunda forma, não é necessário supor que f seja contínua).

Exemplo 4.5. *A função* $f(x) := \begin{cases} f(x) = 1 \ se \ -1 \le x \le 0 \\ 0 \ se \ 0 < x \le 1 \end{cases}$ *, é integrável em $[-1,1]$ pois só possui um ponto de descontinuidade. A função $F(x) = |x|$ é uma primitiva de f nos intervalos $]-1,0[$ e $]0,1[$ e é contínua no intervalo $[-1,1]$. Portanto, do Teorema Fundamental (2^a forma) e da Proposição 4.1, obtemos*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)\,d\,x &= \int_{-1}^0 f(x)\,d\,x + \int_0^1 f(x)\,d\,x \\ &= (F(1) - F(0)) + (F(0 - F(-1)) = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

(Observe, porém que $\int_{-1}^1 f(x)\,d\,x \neq F(1) - F(0 = 0$, pois F não é primitiva de f em $]-1,1[$).