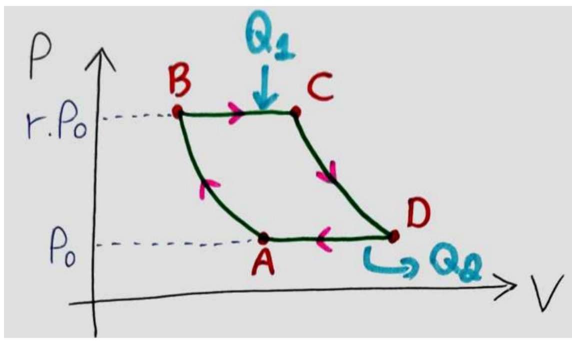
Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
7600023 - Termodinâmica e Física Estatística - 2022-2

Prof. Leonardo Paulo Maia

Prova 02 - 2022/11/22

1.



$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

É preciso determinar Q_2/Q_1 em termos de r e γ.
$B \to C$, isobárico: $Q_1 = C_P(T_C - T_B)$
$D \to A$, isobárico: $-Q_2 = C_P(T_A - T_D)$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \frac{P_D V_D - P_A V_A}{P_C V_C - P_B V_B} = \\ = 1 - \frac{P_0 V_D - P_0 V_A}{r P_0 V_C - r P_0 V_B} = 1 - \frac{1}{r}\left(\frac{V_D - V_A}{V_C - V_B}\right) \quad (1)$$

Mas

$$P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma \implies \frac{V_D}{V_C} = \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{1/\gamma} = r^{1/\gamma} \quad (2)$$

e, analogamente,

$$\frac{V_A}{V_B} = r^{1/\gamma}. \quad (3)$$

Assim,

$$\eta = 1 - \frac{1}{r}\left(\frac{V_C r^{1/\gamma} - V_B r^{1/\gamma}}{V_C - V_B}\right) \therefore \boxed{\eta = 1 - r^{(1-\gamma)/\gamma}}$$

2.

a. Seja t um arbitrário horizonte temporal de operação do motor. A resposta não pode depender de t, ele serve apenas apenas para interconverter potências/taxas e energias e viabilizar o uso das expressões usuais no estudo de máquinas térmicas. Como a potência é energia por unidade de tempo,

$$P = \frac{W}{t}, \tag{4}$$

onde W é o trabalho realizado pelo motor. Mas o motor opera como Carnot,

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \implies \frac{Q_1}{t} = \frac{Q_2}{t}\frac{T_1}{T_2}. \tag{5}$$

O balanço energético do motor é tal que

$$W = Q_1 - Q_2 \implies \frac{W}{t} = \frac{Q_1}{t} - \frac{Q_2}{t}, \tag{6}$$

enquanto a constância de T_2 exige que

$$\frac{Q_2}{t} = \sigma_B A (T_2)^4. \tag{7}$$

Assim,

$$\boxed{P = \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)\sigma_B A (T_2)^4 = (T_1 - T_2)\,\sigma_B A (T_2)^3.}$$

b.

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_B}{P}\frac{dA}{dT_2} = \frac{d}{dT_2}\left[(T_1 - T_2)^{-1}(T_2)^{-3}\right] &= \\ = (T_1 - T_2)^{-2}(T_2)^{-3} - 3(T_1 - T_2)^{-1}(T_2)^{-4} &= \\ = (T_1 - T_2)^{-2}(T_2)^{-4}\left[T_2 - 3(T_1 - T_2)\right] &= \\ = (T_1 - T_2)^{-2}(T_2)^{-4}\left[4T_2 - 3T_1\right]&. \end{aligned} \tag{8}$$

É imediato que o único ponto crítico $\boxed{T_2^* = (3/4)T_1}$ é um ponto de mínimo ($A'(T_2) < 0$ se $T_2 < T_2^*$ e $A'(T_2) > 0$ se $T_2 > T_2^*$) e a área mínima é

$$A(T_2^*) = \frac{P}{\sigma_B}\left[\left(T_1 - \frac{3}{4}T_1\right)^{-1}\left(\frac{3}{4}T_1\right)^{-3}\right] = \frac{P}{\sigma_B}\left[\left(\frac{4}{T_1}\right)\left(\frac{64}{27\,T_1^3}\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{A(T_2^*) = \left(\frac{256}{27}\right)\left(\frac{P}{\sigma_B}\right)T_1^{-4}}. \tag{9}$$

3. O trabalho é $W = Q_1 - Q_2 - Q_3$ e a eficiência,

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2 + Q_3}{Q_1}. \tag{10}$$

Mas $Q_3 = b\,Q_2$ pode ser substituído na expressão acima e também na equação que surge da desigualdade de Clausius particularizada para um ciclo reversível,

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = 0 \implies \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{bQ_2}{T_3} \implies$$
$$\implies \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1}{T_1}\left(\frac{1}{T_2} + \frac{b}{T_3}\right)^{-1}. \tag{11}$$

Assim,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2 + bQ_2}{Q_1} \therefore \boxed{\eta = 1 - \frac{1+b}{T_1}\left(\frac{1}{T_2} + \frac{b}{T_3}\right)^{-1}}. \tag{12}$$

Claramente, tanto $b \to 0$ quanto $T_3 \to T_2$ levam ao rendimento de uma máquina de Carnot operando entre duas fontes, uma quente e a outra fria,

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

4.

a. Em qualquer momento antes do equilíbrio térmico ser alcançado, o corpo inicialmente mais quente tem temperatura T_1' e o inicialmente mais frio, temperatura T_2', com $T_1 > T_1' > T_2' > T_2$. Se $đQ$ for o calor infinitesimal cedido reversivelmente do corpo 1 ao corpo 2,

$$dS = \frac{-đQ}{T_1'} + \frac{+đQ}{T_2'} = \frac{đQ}{T_1'T_2'}\left(T_1' - T_2'\right) \geq 0$$

e o fluxo de calor do corpo mais quente para o mais frio é espontâneo, de acordo com o princípio do aumento da entropia (para um sistema termicamente isolado, mesmo que composto).

b. Por conservação da energia, $0 = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = C_1(T_f - T_1) + C_2(T_F - T_2)$. Basta isolar T_f.

c.

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_f} \frac{đQ_1}{T} + \int_{T_2}^{T_f} \frac{đQ_2}{T} = \int_{T_1}^{T_f} C_1 \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^{T_f} C_2 \frac{dT}{T} =$$
$$= \boxed{C_1 \log \frac{T_f}{T_1} + C_2 \log \frac{T_f}{T_2}} = \log \frac{T_f^{C_1}}{T_1^{C_1}} + \log \frac{T_f^{C_2}}{T_2^{C_2}} = \log \left(\frac{T_f^{C_1+C_2}}{T_1^{C_1} T_2^{C_2}} \right).$$

A expressão destacada será utilizada no próximo item.

d.

$$T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} = \frac{\lambda T_1 + T_2}{\lambda + 1} = (T_2 + \lambda T_1)(1 + \lambda)^{-1} \approx$$
$$\approx (T_2 + \lambda T_1)(1 - \lambda) \approx T_2 + \lambda (T_1 - T_2)$$

Essa expressão é consistente em 1a. ordem em λ e necessária para lidar corretamente com a indeterminação na segunda parcela da expressão destacada no item anterior. Na 1a. parcela daquela expressão, aproximar T_f por T_2 (ordem zero no resultado acima para T_f) funciona bem e gera o termo $C_1 \log(T_2/T_1)$ que estará presente no resultado final, mas aproximar T_f por T_2 na segunda parcela leva a uma indeterminação (o logaritmo iria a zero, mas multiplicado por C_2 divergente a infinito).

$$\Delta S = C_1 \log \frac{T_f}{T_1} + C_2 \log \frac{T_f}{T_2} \implies$$
$$\implies \frac{\Delta S}{C_1} = \log \frac{T_2 + \lambda(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{1}{\lambda} \log \frac{T_2 + \lambda(T_1 - T_2)}{T_2} =$$
$$= \log \left[\frac{T_2}{T_1} \left(1 + \lambda \frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) \right] + \frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \lambda \frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) =$$
$$= \left\{ \log \frac{T_2}{T_1} + \log \left(1 + \lambda \frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) \right\} + \frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \lambda \frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) \approx$$
$$\approx \left\{ \log \frac{T_2}{T_1} + \lambda \frac{T_1 - T_2}{T_2} \right\} + \frac{1}{\lambda} \lambda \frac{T_1 - T_2}{T_2} \approx \log \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$
$$\therefore \boxed{\Delta S = C_1 \log \frac{T_2}{T_1} + \frac{C_1 (T_1 - T_2)}{T_2}}$$

e. $\lambda \to 0$ equivale ao corpo frio ter capacidade térmica arbitrariamente alta, $C_2 \to \infty$. Se um humano de capacidade térmica C_1 morre, sua entropia diminui (e pode ser calculada reversivelmente, com temperatura variável) pela transferência do calor $C_1(T_1 - T_2)$ ao ambiente de temperatura constante T_2, mais baixa do que T_1. Por outro lado, a entropia do ambiente aumenta (a segunda parcela é positiva), assim como a entropia do universo.